MATH

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

SECHSTER BAND:

GEODÄSIE, GEOPHYSIK UND ASTRONOMIE

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

DES SECHSTEN BANDES ZWEITER TEIL

ASTRONOMIE

REDIGIERT VON

K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916)
UND
S. OPPENHEIM IN WIEN

ERSTE HÄLFTE

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1905—1923

MATH-STAT.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

QA37
E6
v.6:2:1
MATH.-
STAT.
LIBRARY

Vorrede zum sechsten Bande, 2. Teil, 1. Hälfte.

Hiermit erscheint die erste Hälfte des der Astronomie gewidmeten Bandes der Encyklopädie. Sie enthält die ganze sphärische Astronomie und einen großen Teil der Mechanik des Himmels. — Fast 18 Jahre, von 1905—1923, hat die Vollendung des Werkes in Anspruch genommen. Zuerst hat Professor *Lehmann-Filhés* das mühsame Geschäft übernommen, die ganze Disposition zu entwerfen und die Kräfte für die Abfassung der einzelnen Artikel zu gewinnen. Aber kaum war ihm diese Aufgabe geglückt, so verlor er Lust und Liebe an ihrer weiteren Durchführung, und es übernahm Professor *Karl Schwarzschild* die Redaktion. Er änderte an dem ihm von *Lehmann-Filhés* übergebenen Arbeitsplan und der Besetzung der einzelnen Artikel nur wenig. Leider starb *Karl Schwarzschild* im Jahre 1916 an einer Krankheit, die er sich im Kriege zugezogen hatte. Dieser Unglücksfall sowie der Krieg selbst hemmten die Fortsetzung sehr. Nicht nur weil die Artikel spärlicher einliefen, sondern weil auch inzwischen manche Mitarbeiter abfielen und neue gesucht werden mußten.

Wenn trotzdem nunmehr die erste Hälfte des Bandes vollendet vorliegt und begründete Hoffnung vorhanden ist, daß die zweite Hälfte, die die weiteren Gebiete der Mechanik des Himmels sowie die Stellarastronomie und Astrophysik enthalten soll, in nicht gar zu langer Zeit nachfolgen dürfte, so gebührt der größte Dank hierfür vor allem allen älteren und den neu gewonnenen Mitarbeitern. Ist doch dieser Dank in Verbindung mit der Förderung der Wissenschaft, die in dem Erscheinen des Werkes liegt, fast der einzige Lohn, den sie für ihre schwierige Mühewaltung erhalten. Doch auch des Verlages B. G. Teubner sei an dieser Stelle für sein stets bereitwilliges Entgegenkommen mit warmem Danke gedacht.

Wien, Oktober 1923. **S. Oppenheim.**

M794659

Inhaltsverzeichnis zu Band VI, 2. Teil, 1. Hälfte.

A. Sphärische Astronomie.

1. Über Koordinaten und Zeit. Von E. Anding in Gotha.

Seite

1. Prinzip einer mechanischen Bestimmung des Bezugsystems 3
2. Rein empirische Systeme 5
3. Rein mechanische Systeme, Konstruktion derselben 8
4. Das gemischte System der Planetenastronomie 9
5. Ergänzung der dritten Komponente. Mechanische Bestimmung der Präzessionskonstante 12

(Abgeschlossen im Mai 1905.)

2. Reduktion der astronomischen Beobachtungen. (Sphärische Astronomie im engeren Sinne.) Von Fritz Cohn †.

1. Aufgabe der sphärischen Astronomie 17
2. Definition der üblichen Koordinatensysteme und der Zeit; erste Formulierung 18
3. Prinzip der Messung der äquatorealen Koordinaten und der Zeit. Prinzip der Meridianbeobachtungen 21
4. Die gegenwärtige Praxis der Meridianbeobachtungen 25
5. Kritische Untersuchungen der Voraussetzungen 30
5a. Änderungen der Visierrichtung. (Parallaxe, Refraktion und Aberration.) 31
5b. Änderung des Koordinatensystems. Präzession, Nutation, Bewegung des Erdpols 32
5c. Rotationsgeschwindigkeit, Konstanz des Zeitmaßes 42
6. Scharfe Definition der Koordinaten und der Zeit 44
7. Reduktion der scheinbaren Sternörter in mittlere 47
7a. Parallaxe und Aberration 48
7b. Präzession und Nutation 59
7c. Zusammenfassung der verschiedenen Reduktionen der Beobachtungsgrößen auf ein mittleres Äquinoktium 64
8. Die weitere Verarbeitung der Meridianbeobachtungen; Sternkataloge und Jahrbücher 66
9. Die Bestimmung der Entfernungen der Gestirne 70
9a. Der Mond 71
9b. Die Sonne 73
9c. Die Fixsterne 78

(Abgeschlossen im Juni 1905.)

3. Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie. Von C. W. Wirtz in Kiel.

1. Einleitung. Begrenzung des Themas 83
2. Definition von Polhöhe, Zeit und Länge 83
3. Einfluß der Erdfigur bei Ortsbestimmungen 85

I. Zeitbestimmung.

A. Durch Höhen.

Seite

4. Eine einzelne Höhe 85
5. Die Methode der korrespondierenden Höhen 87
6. Gleiche Höhen verschiedener Gestirne 89
7. Eine Höhendifferenz 90

B. Zeitbestimmung durch Azimute.

8. Im Meridian 90
9. Im Vertikal des Polarsternes 92
10. In beliebigem Azimut; Olberssches Verfahren 93
11. Mehrere Azimute 94
12. Näherungsmethoden 94
13. Azimut, Höhen und Zeitdifferenz 95

II. Polhöhenbestimmung.

14. Meridianhöhe 96
15. Zirkummeridianhöhe 98
16. Polarishöhe 99
17. Zweihöhenproblem, Spezialfälle und verwandte Aufgaben 100
18. Gaußsche Methode 103
19. Drei Höhen 104
20. Horrebow-Talcottsche Methode 105
21. Durchgänge durch den Ersten Vertikal 107
22. Digressionen 110
23. Absolute Methoden 110
24. Instrumente zur Beobachtung gleicher Höhen 112
25. Photographische Methoden 113

III. Längenbestimmung.

A. Durch gleichzeitige Signale.

26. Mondfinsternisse, Verfinsterungen der Jupitersatelliten 114
27. Sternschnuppen 115
28. Künstliche Signale 117

B. Durch Zeitübertragungen.

29. Chronometerreisen 118
30. Telegraph 119

C. Auf den Mondort gegründete Methoden.

31. Mondkulminationen 121
32. Mondhöhen 123
33. Monddistanzen 124
34. Sternbedeckungen und Sonnenfinsternisse 132
35. Verwandte Okkultationsphänomene 136

IV. Azimutbestimmungen.

36. Allgemeiner Weg 137
37. Spezielle Methoden 138

V. Nautische Astronomie.

38. Die Kimm und ihr Verhalten 139
39. Instrumente zur Bestimmung und Elimination der Kimmtiefe 142
40. Begriff der Standlinie und ihre Festlegung 144

Seite
41. Zweihöhenproblem nach der Standlinienmethode 146
42. Drei oder mehr Standlinien, Dreihöhenproblem 147
43. Standlinie für eine Höhendifferenz 148
44. Berechnung der Höhe, Höhentafeln 148
45. Gebrauch der Merkatorfunktion 150
46. Azimuttafeln 151
47. Ortsbestimmung mit Hilfe der erdmagnetischen Elemente 153
48. Aëronautische Astronomie 153

VI. Anhang.

49. Die sphärischen Grundformeln der geographischen Ortsbestimmung . . 154
50. Weitere Literatur 159

(Abgeschlossen im Oktober 1904.)

4. Theorie der Uhren. Von C. Ed. Caspari in Paris.

1. Allgemeines 164
2. Das freie Pendel 166
3. Kompensationspendel 169
4. Isochronismus der Chronometerspiralen 171
5. Kompensationsunruhen 174
6. Die Hemmung 176
7. Störungen des Pendels 177
8. Störungen der Chronometer 179
9. Räderwerk und Triebwerk 183
10. Zeitübertragung 185
11. Gangformeln 187
12. Regulatoren für gleichförmige Drehung 188

(Abgeschlossen im April 1905.)

5. Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler. Von Fritz Cohn †.

1. Idee eines Universalinstruments zur astronomischen Ortsbestimmung . 196
2. Die Durchführung der Idee in der Praxis; Beschreibung des Beobachtungsvorganges 197
3. Die Hilfsinstrumente, ihre Einrichtung und die Auswertung ihrer Skalen 201
   a) Die Mikrometerschraube und das Ablesemikroskop 201
   b) Die Teilungen von Maßstäben (Skalen) und Kreisen 205
   c) Die Uhr und der Chronograph 208
   d) Die meteorologischen Instrumente 209
4. Die eigentlichen Instrumente der exakten astronomischen Ortsbestimmung: A. Der Meridiankreis 210
   Die Bestimmung der Rektaszension 211
   Die Bestimmung der Deklination 215
   B. Der Refraktor 222
   Beobachtungen bei ruhendem Fernrohr 223
   Beobachtungen bei bewegtem Fernrohr 224
   Beobachtungen mit Hilfe der Photographie 225
   Das Heliometer 230
5. Die Fehler der Instrumente und ihre Bestimmung:
   Geometrische Fehlerquellen 233
   A. Instrumentalfehler des Meridiankreises 234
   B. Instrumentalfehler des Refraktors 243
   Physikalische Fehlerquellen 245
6. Die persönlichen Fehler bei astronomischen Beobachtungen 249
   a) Fehler in der Auffassung des Zeitmoments einer Erscheinung . . 251
   b) Fehler beim Pointieren eines Objekts mit einem Faden . . . 262

Seite
7 Die Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen 265
a) Meridianbeobachtungen 269
b) Visuelle Refraktorbeobachtungen 273
c) Die Leistungsfähigkeit des Heliometers 275
d) Photographische Beobachtungen 276
e) Die Talcott-Horrebow-Methode 278
8 Die Abgrenzung des Arbeitsfeldes und das Ineinandergreifen der verschiedenen Instrumente und Beobachtungsmethoden 279
a) Die Kooperation zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen kleiner Planeten 281
b) Die Bestimmung der Fixsternparallaxen 283

(Abgeschlossen im Sommer 1907.)

6. Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre. (Refraktion und Extinktion.) Von A. Bemporad in Catania.

1. Allgemeines über die Wirkungen der atmosphärischen Luft auf die Lichtstrahlen und ihre mathematische Darstellung 292

I. Physikalische Erfahrungstatsachen.

2. Abhängigkeit des Brechungsindex bzw. der Absorptionskonstante von der Luftfeuchtigkeit 294
3. Beziehungen zwischen Dichtigkeit, Temperatur, Luftdruck und Höhe über dem Meeresniveau 297
4. Temperaturänderung mit der Höhe. Beobachtungsresultate 299

II. Physikalische Hypothesen.

5. Kritische Besprechung der Hypothesen über die Konstitution der Atmosphäre 301
6. Schlußbetrachtung über die Leistungen der bis jetzt aufgestellten Hypothesen. Brunssches Verfahren 313

III. Theorie der Refraktion.

7. Aufstellung des Refraktionsintegrals 314
8. Refraktionsformeln nach den Hypothesen von Cassini und von Mayer. Bradleysche und Simpsonsche Formel 317
9. Orianis (Laplaces) Satz 319
10. Entwicklung des Refraktionsintegrals bei der Besselschen Theorie . . 320
11. Entwicklung des Refraktionsintegrals für die Schmidtsche Theorie . . 323
12. Vergleichstabelle der nach den wichtigsten Theorien berechneten Werte der Refraktion 325

IV. Theorie der Extinktion.

13. Aufstellung des Extinktionsintegrals 326
14. Entwicklung des Extinktionsintegrals unter Annahme konstanter Dichtigkeit oder konstanter Temperatur. Lambert- und Bouguersche Formel 327
15. Laplacesche Extinktionsformel 328
16. Strengere Behandlung der Extinktionstheorie bei der Annahme einer gleichförmigen Temperaturabnahme mit der Höhe von Bemporad . . . 329
17. Vergleichende Übersicht der verschiedenen Extinktionstheorien 330
18. Die terrestrische Extinktion 330
19. Die selektive Absorption 331

(Abgeschlossen im Dezember 1907.)

Seite

7. **Theorie der Finsternisse.** Von F. K. Ginzel in Berlin und A. Wilkens in Breslau.

1. Einteilung der Finsternisse 338

A. Sonnenfinsternisse.

2. Kriterium für das Zustandekommen einer Sonnenfinsternis überhaupt . 339
3. Die Grundgleichung der Finsternisse 340
4. Die Grenzkurven der Sichtbarkeit 346
   a) Die Punkte des Beginns und Endes der Finsternis überhaupt . . 346
   b) Die östliche und westliche Grenzkurve 349
   c) Die nördliche und südliche Grenzkurve 352
   d) Kurven sonstiger spezieller Phasen 354
5. Der lokale Verlauf der Finsternis 355
6. Anwendung der Sonnenfinsternisse. Tafeln 357
7. Die Perioden der Sonnenfinsternisse 359

B. Mondfinsternisse.

8. Kriterum für das Stattfinden einer Mondfinsternis überhaupt 360
9. Verlauf einer Mondfinsternis 361
10. Tafeln zur Berechnung von Mondfinsternissen 361

C. Andere Finsternisse und Bedeckungen.

11. Sternbedeckung durch den Mond 362
12. Planetenvorübergänge 363
13. Finsterniserscheinungen in anderen Trabantensystemen 363

(Abgeschlossen im Dezember 1907.)

8. **Chronologie.** Von F. K. Ginzel in Berlin.

1. Einleitung 368
2. Tagesbeginn und Tageseinteilung 369
3. Wochen 369
4. Jahreszeiten 370
5. Jahr, Urform desselben 371
6. Mond und Sonnenjahr. Einschaltung, Ausgleichung 371
7. Besondere Jahrformen und Zyklen 374
8. Epochen (Aeren) 376

(Abgeschlossen im Juli 1910.)

B. Mechanik des Himmels.

9. **Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.** Von G. Herglotz in Leipzig.

I. Keplersche Bewegung.

1. Keplersche Gesetze 381
2. Elemente der Bahn 381
3. Koordinaten eines Ortes 382
4. Bestimmung der wahren Anomalie 384
5. Das Lambertsche Theorem 387
6. Das Verhalten der Koordinaten im komplexen Gebiete 389

Seite

II. Vorläufige Bahnbestimmung.

a) Planetenbahnen.

7. Formulierung der Aufgabe 390
8. Grundgleichungen 391
9. Herstellung der Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse. Erforderliche Genauigkeit 392
10. Näherungsausdrücke der Dreiecksverhältnisse 394
11. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen 396
12. Methode von Laplace. Satz von Lambert 400
13. Bestimmung der Elemente aus zwei vollständigen heliozentrischen Orten 403
14. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen 407
15. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen 409
16. Bestimmung einer Kreisbahn 411

b) Kometenbahnen.

17. Formulierung der Aufgabe 412
18. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen nach der Methode von W. Olbers 414
19. Bestimmung der Elemente aus den Distanzen 415
20. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen 416
21. Ausnahmefälle. Methode von Gauß 418
22. Korrektionen wegen Parallaxe und Aberration 419

III. Definitive Bahnbestimmung.

23. Allgemeine Formulierung der Aufgabe 420
24. Methoden mit gleichmäßiger Berücksichtigung aller Orte 421
25. Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen 422
26. Methoden mit Bevorzugung zweier Orte 425

(Abgeschlossen im Dezember 1906.)

10. Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem. Von P. von Niessl †.

Allgemeines 429

I. Ermittlung der Radianten und der geozentrischen Geschwindigkeit.

1. Mehrfache Beobachtungen aus verschiedenen Erdorten 430
a) Bestimmung der geographischen Koordinaten und der Höhe des Endpunktes 431
b) Bestimmung des scheinbaren Radiationspunktes 436
c) Lage der Bahn gegen die Erde. Bahnlänge. Höhe des Aufleuchtens 440
d) Geozentrische oder relative Geschwindigkeit 440
2. Beobachtungen verschiedener Körper desselben Stromes aus *einem* Erdorte 442

II. Ableitung der Bahn im Sonnensystem 444

III. Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse aus Meteorbeobachtungen.

1. Mittlere Genauigkeit der Beobachtungen und Rechnungsergebnisse . . 450
2. Ergebnisse für die Höhe des Aufleuchtens und der Hemmung und ihre Beziehung zu anderen Faktoren 452
3. Masse der Sternschnuppen 459
4. Durchschnittliche und außergewöhnliche Bahnlängen 460

(Abgeschlossen im November 1907.)

11. Bahnbestimmung der Doppelsterne und Satelliten. Von J. v. HEPPERGER in Wien.

Seite

1. Beobachtung von Doppelsternen 465
2. Einleitung zur Bahnbestimmung 470
3. Bahnbestimmung visueller Doppelsterne 474
   a) Benutzung einzelner Örter 474
   b) Benutzung der vollständigen scheinbaren Ellipse 478
   c) Bahnverbesserung 483
   d) Bemerkungen über die bekannten Doppelsternbahnen 483
4. Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne 486
5. Einige Ergebnisse der Beobachtung und der Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne (von H. Ludendorff in Potsdam) 493
6. Bestimmung der Bahn, Figur und Dichte veränderlicher Sterne . . . 498
7. Bahnbestimmung der Satelliten 508

(Abgeschlossen im Dezember 1910.)

12. Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen. Von E. T. WHITTAKER in Dublin (übersetzt von A. HAAR in Zürich).

Vorbemerkung 513
1. Reduktion der Differentialgleichungen des allgemeinen Dreikörperproblems 514
2. Die Differentialgleichungen in Spezialfällen des Dreikörperproblems . . 519
3. Die Differentialgleichungen des n-Körperproblems 521
4. Die Nichtexistenz bestimmter Klassen von Integralen 521
5. Periodische Lösungen; die allgemeine Theorie 526
6. Spezielle periodische Lösungen 529
7. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der benachbarten Lösungen 532
8. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der Bewegung für große Werte der Zeit 538
9. Die Lösung des Dreikörperproblems durch unendliche Reihen. Die älteren Untersuchungen 540
10. Die Lösung des Problems mit Hilfe der Berührungstransformationen . 541
11. Die Lösung des Problems durch sukzessive Bildung der Glieder wachsender Ordnung der Reihe 546
12. Die Konvergenz der Reihen für Himmelsmechanik 549
13. Eigenschaften der Koeffizienten besonderer Glieder in den Reihen der Himmelsmechanik 553

(Abgeschlossen im März 1912.)

13. Entwicklung der Störungsfunktion. Von H. v. ZEIPEL in Upsala.

1. Allgemeines über die Störungsfunktion und ihre Ableitungen . . . 560

I. Kreisbahnen in einer Ebene.

2. Koeffizienten $b_n^{(i)}$ von Laplace 561
3. Reihenentwicklungen der $b_n^{(i)}$ 562
4. Integralausdrücke der $b_n^{(i)}$ 564
5. Ältere Berechnungsmethoden 568
6. Methode von Newcomb 570
7. Koeffizienten von Cauchy 572
8. Koeffizienten von Gyldén 574
9. Koeffizienten von Radau 576
10. Tafeln 576

II. Kreisbahnen in geneigten Ebenen.

Seite

11. Koeffizienten $b^{i,j}$ von Jacobi 577
12. Integralausdrücke derselben 577
13. Rekursionsformeln von Jacobi 578
14. Entwicklungen bei kleiner Neigung 578
15. Entwicklungen von Tisserand 579
16. Entwicklungen von Hansen 581
17. Andere Entwicklungen von Hansen 582
18. Appells hypergeometrische Entwicklungen 583
19. Fortsetzung 583
20. Berechnungsmethode von Sundmann 584

III. Entwicklung nach Potenzen von e und e'.

21. Methode von Leverrier 586
22. Methode von Newcomb 589
23. Entwicklungen von Cauchy 594
24. Entwicklung von Gyldén 595
25. Entwicklung von Hill 595
26. Gruppenentwicklung von Bohlin 596
27. Zweiter Teil der Störungsfunktion 597
28. Kanonische Elemente 598

IV. Entwicklung nach Potenzen des Verhältnisses der großen Achsen.

29. Koeffizienten $X_i^{n,s}$ von Hansen 599
30. Störungsfunktion der Mondtheorie 601

V. Konvergenz der Entwicklungen.

31. Formulierung der ersten Aufgabe 602
32. Integralausdrücke der Koeffizienten 602
33. Allgemeines über die Singularitäten bestimmter Integrale 604
34. Fortsetzung 605
35. Konvergenz der Entwicklungen für $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ 606
36. Konvergenz der Entwicklungen für $A^{s,s'}_{m,m'}$ und $B^{s,s'}_{m,m'}$ 607
37. Formulierung der zweiten Aufgabe 607
38. Konvergenz der Entwicklung von Δ^{-1} 609

VI. Allgemeine Theorie der Rekursionsformeln und Differentialgleichungen.

39. Formulierung der Aufgabe 610
40. Reduktion einiger Doppelintegrale 611
41. Reduktionsformeln und Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten 614
42. Fundamentalperioden. Rekursionsformeln und Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten 616

VII. Numerische Entwicklungsmethoden.

43. Unzulänglichkeit der analytischen Entwicklungen 618
44. Übergang von exzentrischen Anomalien zu mittleren 619
45. Zweiter Teil der Störungsfunktion 621
46. Entwicklungsmethode von Jacobi 622
47. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen durch mechanische Quadratur 622
48. Methode von Liouville 625
49. Trigonometrische Interpolationsmethode von Leverrier 626
50. Cauchys gemischte Methode 627

Seite
51. Entwicklung von Hansen 629
52. Elimination von E'. 629
53. Anwendung der elliptischen Funktionen 630
54. Gauß' Theorie der säkularen Störungen. 632

VIII. Asymptotische Ausdrücke für Funktionen großer Zahlen.

55. Formulierung der Aufgabe 636
56. Asymptotische Ausdrücke entfernter Koeffizienten 636
57. Asymptotische Ausdrücke einiger bestimmter Integrale. 642
58. Asymptotische Ausdrücke allgemeinerer bestimmter Integrale. 645

IX. Asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten der Entwicklungen der Störungsfunktion.

59. Entfernte Glieder in der Entwicklung nach den Vielfachen der mittleren Anomalie des einen Planeten. 649
60. Entfernte Glieder in der Entwicklung nach den Vielfachen der beiden mittleren Anomalien 651
a) Methoden von Cauchy und Hamy. 651
b) Methode von Poincaré 657
c) Methode von Féraud. 661

(Abgeschlossen im Mai 1912.)

14. **Theorie des Erdmondes.** Von Ernest W. Brown in New Haven. Übersetzt und mit einigen Zusätzen versehen von A. v. Brunn in Danzig.

1. Kurzer historischer Überblick 669
2. Verhältnis der Mondtheorie zum n-Körperproblem und zur Planetentheorie 672

I. Das Hauptproblem.

3. Die Kräftefunktion 673
4. Die Bewegungsgleichungen 675
5. Spezielle Differentialgleichungen 677
6. Die Formen der Ausdrücke für die Koordinaten. 681
7. Konvergenz und Divergenz 684
8. Intermediäre Bahnen 685
9. Die Entwicklung der Störungsfunktion 687
10. Die Variation der Konstanten 688
11. Verschiedene Eigenschaften der Lösung 689

II. Die Lösungsmethoden.

12. Die geometrischen Methoden 692
13. Die wahre Länge als unabhängige Veränderliche 692
14 Polarkoordinaten mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher. . . . 694
15. Die Variation der willkürlichen Konstanten (Delaunays Theorie) . . . 695
16. Rechtwinklige Koordinaten mit beweglichen Achsen 698
17. Mittlere Anomalie und Verhältnis der Entfernung zu einem elliptischen Radiusvektor als abhängige Variable 703
18. Die wahre Anomalie als unabhängige Veränderliche 709

III. Planetarische und andere störende Einflüsse.

19. Behandlungsmethoden. 713
20. Der Einfluß der nichtsphärischen Figur der Erde und des Mondes . . 714
21. Die direkten Planetenstörungen 715
22. Die indirekten Planetenstörungen 718

Seite
23. Die säkularen Beschleunigungen 720
24. Störungen zweiter Ordnung 723
25. Andere mögliche störende Ursachen 724
26. Der gegenwärtige Stand der Mondtheorie 726
27. Tafeln der Mondbewegung 727
(Abgeschlossen im Juli 1914.)

15. Theorie der Planeten. Von Karl F. Sundmann in Helsingfors.

1. Numerische Verhältnisse 731
2. Die Differentialgleichungen der Bewegung 733
3. Die erste Annäherung. Das Zweikörperproblem 736
4. Die Störungen 738

I. Die Methode der Variation der Konstanten.

5. Anwendungsweise der Methode der Störungstheorie 738
6. Die Methode der Variation der elliptischen Elemente. Differentialgleichungen 739
7. Fortsetzung 742
8. Integration 743
9. Verschiedene Arten von Gliedern und deren Klassifikation 745
10. Säkulare Störungen 747
11. Angenäherte Berechnung der säkularen Werte der Elemente 748
12. Fortsetzung 751
13. Die säkularen Störungen der kleinen Planeten 753
14. Säkulare Glieder höheren Grades 754
15. Berücksichtigung der säkularen und langperiodischen Störungen in den periodischen Gliedern 754
16. Langperiodische Glieder 756
17. Die Lücken in den mittleren Bewegungen der kleinen Planeten. Libration 757
18. Die Methode von Poincaré 759

II. Die Hansensche Methode.

19. Vorbemerkung 760
20. Die Hansenschen beweglichen Koordinaten. Ideale Koordinaten . . . 761
21. Die Differentialgleichungen der Bewegung in der instantanen Bahnebene 763
22. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der Bahnebene und die Lage der X-Achse 764
23. Die Differentialgleichungen zur Bestimmung des Radiusvektors und der mittleren Anomalie 766
24. Bestimmung der Funktion $\overline{W}$ 768
25. Bestimmung der Breite 769
26. Weitere Ausführung der Methode 770
27. Integration mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher 771
28. Die exzentrische Anomalie als unabhängige Veränderliche 772

III. Koordinatenstörungen.

29. Störungen der rechtwinkligen Koordinaten 775
30. Störungen der polaren Koordinaten 778

IV. Theorie von Gyldén.

31. Vorbemerkung 782
32. Differentialgleichungen der Gyldénschen Koordinaten 783
33. Zerlegung der Variablen 786
34. Entwicklung der Größen P, Q und R. Fundamentale Entwicklung . . 789
35. Diastematische Entwicklung 791

Seite
36. Einteilung der Glieder 795
37. Integration 796
38. Integration der elementaren und charakteristischen Glieder 797
39. Spezielle Ausarbeitungen und Anwendungen der Gyldénschen Methode. Methode von Brendel 801

V. Verschiedene Methoden.

40. Methode von Backlund 803
41. Die Jupitergruppe 804
42. Angenäherte Störungen 804

(Abgeschlossen im Februar 1915.)

16. Die Satelliten. Von Kurt Laves in Chikago (Ill.).

Einleitung 812

A. Die empirische Methode (1610—1760).

1. Das Jupitersystem 812
2. Das Saturnsystem 814

B. Die analytische Methode. 1760 bis zur Gegenwart.

3. Einführung in die Lagrange-Laplacesche Theorie der Galileischen Satelliten und Neuentdeckungen 815
4. Bessels Untersuchungen über das Saturnsystem 819
5. Die Auffindung der Satelliten von Uranus, Neptun und Mars 821
6. Die Störungen in einem Satellitensystem; Bezeichnungsweise 821
7. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse der Hauptplaneten 822
8. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse der Ringe 823
9. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten 824
10. Die Störungsfunktion R 824
11. Die säkularen Ungleichheiten der Knoten und Neigungen 825
12. Die Integrale der Gleichungen für die Spezialsysteme 827
    α) Das Jupitersystem 827
    β) Das Saturnsystem 828
    γ) Die Satelliten des Mars, Uranus und Neptun 832
13. Die säkularen und langperiodischen Ungleichheiten der Exzentrizitäten, der Längen, der Perizentren und der mittleren Längen 834
    α) Das Jupitersystem 834
    β) Das Saturnsystem 838
    γ) Die übrigen Satellitensysteme 841
14. Die kurzperiodischen und die von der Sonne herrührenden Störungen . 842
15. Die Bestimmung der Konstanten der Satellitensysteme 842

(Abgeschlossen im Sommer 1916.)

17. Bestimmung und Zusammenhang der astronomischen Konstanten. Von J. Bauschinger in Leipzig.

Einleitung.

1. Die astronomischen Konstanten 845
2. Geodätische Konstanten 846
3. Physikalische Konstanten 847
4. Astronomische und physikalische Einheiten 848

Die Konstanten der Erde und der Erdbewegungen.

5. Die Sonnenparallaxe, trigonometrische Bestimmung 851
6. Die Aberrationskonstante 852

Seite
7. Die Lichtgleichung 855
8. Die Mondgleichung in der Erdbewegung. Beziehung zwischen Mondmasse und Sonnenparallaxe 856
9. Die Präzessions- und Nutationskonstante 857
10. Die Trägheitsmomente und die Abplattung der Erde 861
11. Die Schiefe der Ekliptik und der Frühlingspunkt 863
12. Tropisches und siderisches Jahr 864
13. Sternzeit und mittlere Zeit 865
14. Verwendung der Schweremessungen 867
15. Die Erdmasse und ihre Beziehung zur Sonnenparallaxe 868

Der Mond.

16. Die Mondparallaxe 869
17. Die parallaktische Ungleichheit in der Mondbewegung 874
18. Die Elemente der Mondbahn 877
19. Die Störungsglieder der Mondbewegung 880
20. Die Mondmasse 881

Die Planeten.

21. Die Theorien der Sonne und der großen Planeten 882
22. Die Massen der Planeten 882
23. Ableitung der Massen von Merkur, Venus und Erde aus den Säkularstörungen 886
24. Die Massen der Planeten Merkur, Venus und Erde 890
25. Die Sonnenparallaxe aus den Gravitationsmethoden 893
26. Die Masse der Planeten Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun . . 894

(Abgeschlossen im Sommer 1919.)

18. Kometen. Von S. Oppenheim in Wien.

1. Historische Übersicht 899
2. Störungen der Kometen 901
3. Anomalien in den Bewegungen der Kometen 910
4. Masse der Kometen 914
5. Helligkeit der Kometen 917
6. Die kosmogonische Stellung der Kometen 920
   a) Die scheinbare Verteilung der Bahnelemente der Kometen . . . 921
   b) Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den Ursprung der Kometen 926
   c) Die Problemstellung E. Strömgrens 929
7. Die kurzperiodischen Kometen. Das Tisserandsche Kriterium 932
8. Teilungen von Kometen, Kometensysteme und Familien 936

(Abgeschlossen im Oktober 1922.)

18a. Beziehungen zwischen Kometen und Sternschnuppen. Von Cuno Hoffmeister in Sonneberg (Thüringen).

1. Geschichtliche Einleitung 940
2. Die Arbeiten von Schiaparelli, Weiß und Nachfolgern 941
3. Nähere Untersuchungen über die Art des Zusammenhanges 945
4. Kritik der Lehre vom allgemeinen kometarischen Ursprung der Sternschnuppen 950
5. Regeln für die Untersuchung des Zusammenhanges von Kometen und Sternschnuppen 952

(Abgeschlossen im Oktober 1922.)

19. Spezielle Störungen der Planeten und Kometen, numerische Behandlung besonderer Fälle des Dreikörperproblems. Mehrfache Fixsternsysteme. Von H. Samter in Berlin.

Seite

1. Die speziellen Störungen. Geschichtliches 959
2. Allgemeines über die Methode 960
3. Die einzelnen Rechnungsarten 962
4. Die numerische Behandlung des Dreikörperproblems. Geschichtliches . 966
5. Die systematische Behandlung des restringierten Problems 968
6. Die genauer untersuchten Bahnklassen des restringierten Problems . . 974
7. Fälle des nicht restringierten Dreikörperproblems 988
8. Das Vier- und das Vielkörperproblem 992

(Abgeschlossen im Dezember 1922.)

20. Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation der starren Erde. Von J. Bauschinger in Leipzig.

1. Einleitung, Geschichte 996
2. Allgemeine Theorie der Drehung 996
3. Anwendung der Drehungstheorie auf die Erde 999
4. Drehungstheorie der Erde. Zahlenwerte 1008
5. Übergang zur astronomischen Praxis 1011
6. Bestimmung der Präzessionskonstanten 1014
7. Theoretische Behandlungen 1017
8. Polhöhenschwankungen 1018

(Abgeschlossen im Mai 1923.)

20a. Die Libration des Mondes. Von F. Hayn in Leipzig.

1. Einleitung, die Cassinischen Gesetze 1021
2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen 1023
3. Entwicklung der Variablen als Funktionen der Zeit 1025
4. Die Integration der Bewegungsgleichungen 1029
5. Der Einfluß der Sonnenanziehung 1036
6. Die Ermittlung der Konstanten aus den Beobachtungen 1038
7. Die Unmöglichkeit der Cassinischen Gesetze bei gewissen Formen des Trägheitsellipsoids 1042

(Abgeschlossen im Februar 1923.)

Übersicht
über die im vorliegenden Bande VI, 2. Teil, 1. Hälfte zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

A. Sphärische Astronomie.

Heft 1. 28. XII. 1905.

1. Anding: Über Koordinaten und Zeit.
2. Cohn: Reduktion der astronomischen Beobachtungen (sphärische Astronomie im engeren Sinne).
3. Wirtz: Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie.
4. Caspari: Theorie der Uhren.

Heft 2. 28. III. 1908.

5. Cohn: Theorie der astronomischen Winkelmeßinstrumente, der Beobachtungsmethoden und ihrer Fehler.
6. Bemporad: Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion).

Heft 3. 1. IX. 1910.

7. Ginzel u. Wilkens: Theorie der Finsternisse.
8. Ginzel: Chronologie.

B. Mechanik des Himmels.

9. Herglotz: Bahnbestimmung der Planeten und Kometen
10. v. Niessl: Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem.

Heft 4. 31. V. 1912.

11. Hepperger: Bahnbestimmung der Doppelsterne und Satelliten.
12. Whittaker: Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen.

Heft 5. 14. XII. 1912.

13. Zeipel: Entwicklung der Störungsfunktionen.

Heft 6. 16. VI. 1915.

14. Brown: Theorie des Erdmondes.
15. Sundmann: Theorie der Planeten.

Heft 7. 22. VII. 1920.

16. Laves: Die Satelliten.
17. Bauschinger: Bestimmung und Zusammenhang der astronomischen Konstanten.

Heft 8. Oktober 1923.

18. Oppenheim: Kometen.
18a. Hoffmeister: Beziehungen zwischen Kometen und Sternschnuppen.
19. Samter: Spezielle Störungen der Planeten und Kometen, numerische Behandlung besonderer Fälle des Dreikörperproblems. Mehrfache Fixsternsysteme.
20. Bauschinger: Rotation der Himmelskörper, Präzession und Nutation der starren Erde.
20a. Hayn: Die Libration des Mondes.
Vorrede zum sechsten Bande, 2 Teil, 1. Hälfte.
Register zu Band VI, 2. Teil, 1. Hälfte.
Inhaltsverzeichnis zu Band VI, 2. Teil, 1. Hälfte.

A. SPHÄRISCHE ASTRONOMIE.

VI 2, 1. ÜBER KOORDINATEN UND ZEIT.

Von

E. ANDING

in München.

Inhaltsübersicht.

1. Prinzip einer mechanischen Bestimmung des Bezugssystems.
2. Rein empirische Systeme.
3. Rein mechanische Systeme. Konstruktion derselben.
4. Das gemischte System der Planeten-Astronomie.
5. Ergänzung der dritten Komponente. Mechanische Bestimmung der Präzessionskonstante.

Literatur vgl. Encyklopädie IV 1, *Voss*: „Die Prinzipien der rationellen Mechanik", Nr. **13—17**.

1. Prinzip einer mechanischen Bestimmung des Bezugssystems. Die neuere Physik hat die Frage nach dem Bezugssystem des Trägheitsgesetzes aufgeworfen. Nach der historischen Seite hin ist dieses Thema bereits in dem Artikel von *A. Voss*, Encyklopädie IV 1, eingehend behandelt worden. Dagegen ist hier der Ort, den astronomischen Standpunkt aufzusuchen, von welchem sich die Frage formell zur Entscheidung bringen läßt.

Formuliert man den Inhalt der Himmelsmechanik so, daß sie *die Bewegungen der Himmelskörper durch das Newton'sche Gesetz darstellen soll*, so fehlt hier eine Angabe über das Koordinatensystem und die Zeitskala. Man schloß sich eben stillschweigend an diejenigen Systeme an, welche sich empirisch darboten: den Fixsternkomplex und die Drehung der Erde.

Es liegt jedoch keine Notwendigkeit vor, innerhalb der Empirie in einem bestimmten Sinn eine bevorzugende Wahl zu treffen. Viel-

mehr ist es konsequent, wenn man die Definition mit den Worten fortsetzt: *indem man neben den Konstanten der Darstellung gleichzeitig eben dasjenige Koordinatensystem und diejenige Zeitskala aus den Beobachtungen mitbestimmt, für welche diese Darstellung möglich ist.*

Dies ist der Gedanke, welcher im nachstehenden ausgeführt werden soll.

Vorausgesetzt sei der Begriff der Gleichzeitigkeit, nicht auch der Begriff der Zeit. Gegeben ist dann eine Reihe ω von Konfigurationen von je n Punkten. Gefordert wird, diese Konfigurationen mittels des *Newton*'schen Gesetzes durch ω Werte eines Parameters t darzustellen. Dabei ist das Koordinatensystem, für welches das *Newton*'sche Gesetz gelten soll, nirgends vorgezeichnet.

Nehmen wir an, die $3n\omega$ Koordinatenwerte der ω Konfigurationen seien in Bezug auf ein System gegeben, welches wir als das *empirische* bezeichnen wollen, so ist diese Bezugnahme statthaft, wenn wir uns bewußt bleiben, daß umgekehrt dieses System durch eben jene Koordinaten gegen die Konfigurationen festgelegt ist, da wir vorerst außer den Konfigurationen ein anderes geometrisches Gebilde nicht kennen.

Es soll dann für jede Konfiguration ein neues Koordinatensystem gegen das empirische festgelegt und ebenso für jede Konfiguration dem Parameter t ein solcher Zahlwert beigelegt werden, daß die Koordinaten, relativ zu diesem System, mittels des Parameters t durch das *Newton*'sche Gesetz dargestellt sind. Ist diese Darstellung vollzogen, so bezeichnen wir dieses Koordinatensystem als das *Inertialsystem*, die Ortsveränderung relativ zu ihm als *Bewegung κατ' ἐξοχήν* und den Parameter t als *Zeit*.

Durch Mannigfaltigkeitsbetrachtungen läßt sich zeigen, daß sich

$$3n\omega \text{ Daten} \quad \text{und} \quad 6n + 7\omega - 10 \text{ Unbekannte}$$

gegenüberstehen. Sind also die Konfigurationen willkürlich gewählt, so kann man die Bewegung von drei Punkten bis zu vier Zeitpunkten immer durch das *Newton*'sche Gesetz beschreiben. Ist diese Darstellung auch für mehr als vier, und zwar für beliebig viele Zeitpunkte möglich, so sagen wir: die Punkte sind dem *Newton*'schen Gesetz unterworfen. Bei $n > 3$ besteht jene Willkür nur bis zu $\omega = 2$. Im Fall $n = 2$, welcher in der obigen Gegenüberstellung nicht enthalten ist, kann man jede beliebige Anzahl von Konfigurationen als eine *Kepler*'sche Bewegung auffassen, und zwar auf ∞^2 Arten.

Analoge Folgerungen kann man ziehen:

a) wenn man speziell einen der bewegten Punkte selbst zum Anfang der Koordinaten macht;

b) wenn man in diesem Fall berücksichtigt, daß in der Astronomie nur Winkel beobachtet werden;

c) wenn man in diesem Fall auch die Massen unter die Unbekannten aufnimmt.

Man kann dann z. B. zeigen, daß jede Bewegung von drei Punkten als eine *Newton*'sche aufgefaßt werden kann, und zwar auf ∞^9 Arten. Bei mehr als drei Punkten ist in dieser Möglichkeit eine objektive Gesetzmäßigkeit ausgesprochen. Bei drei Beobachtungen (= Konfigurationen) ist diese Darstellung für beliebig viele Körper immer möglich, und zwar auf ∞^{6+n} Arten.

2. Rein empirische Systeme. In der astronomischen Praxis hat sich ein ganz bestimmtes Verfahren herausgebildet. Als Grundebene hat man den *Äquator vom Anfang des Jahres 1850* gewählt und als Anfangsrichtung in dieser Ebene den Schnitt mit der *Ekliptik vom Anfang 1850*. Da die astronomischen Beobachtungen unmittelbar nur Richtungen liefern, so kommt eine Festlegung des Koordinatenanfangspunktes nicht in Betracht.

Nun dreht sich der Äquator jährlich etwa um 50″ um den Pol der Ekliptik, und gleichzeitig dreht sich die Ekliptik infolge der säkularen Störungen um eine Achse, die ihrer eigenen Ebene angehört. Da sich die Beobachtungen wegen unseres Standpunktes auf der Erde an den jeweiligen Äquator anschließen müssen, so werden die Beobachtungen verschiedener Zeitpunkte erst dann vergleichbar, wenn sie auf ein gemeinsames System transformiert sind, etwa das vom Anfang 1850.

Es ist die gebräuchliche Auffassung, das Fortschreiten des Äquators auf der festen Ekliptik zu messen — nicht auf der momentanen[1]). Den dort seit Anfang 1850 zurückgelegten Weg bezeichnet man als Lunisolarpräzession ψ. Nennt man ω den Winkel zwischen der Ekliptik von 1850 und dem Äquator von $1850 + t$, ε den Winkel zwischen der Ekliptik von $1850 + t$ und dem Äquator von $1850 + t$, und $a(t) =$ Präzession durch die Planeten den Bogen auf dem Äquator von $1850 + t$ zwischen den zwei Ekliptiken von 1850 und $1850 + t$, so ist streng

α) $\frac{d\varepsilon}{dt}$ die Drehungskomponente der Ekliptik um eine Achse nach dem jeweiligen Äquinox, und sehr nahe, aber nicht streng:

1) Vgl. den Artikel VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 5 b) und Nr. 7 b). In der dortigen Bezeichnung (p. 36—38) ist: $\varepsilon = \vartheta_t = \vartheta$, $\omega = \vartheta'_{0,t} = \vartheta'$, $a(t) = a$.

β) $\sin\omega \frac{da(t)}{dt}$ die Drehungskomponente der Ekliptik um eine in ihr liegende Achse, welche 90^0 vom Äquinox absteht.

Jedenfalls hat die Präzession im Verein mit dieser Bewegung der Ekliptik in den Rektaszensionen α und den Deklinationen δ der Sterne Veränderungen zur Folge, welche praktisch genau genug ausgedrückt sind durch[1]):

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \left(\cos\omega \frac{d\psi}{dt} - \frac{da(t)}{dt}\right) + \sin\omega \frac{d\psi}{dt} \cdot \sin\alpha \operatorname{tg}\delta = m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta, \\ \frac{d\delta}{dt} = \qquad\qquad \sin\omega \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos\alpha \quad = \quad n\cos\alpha, \end{cases}$$

wo m und n zeitlich schwach veränderlich sind.

Dies sind die Gleichungen, durch deren Integration, die sich praktisch sehr einfach gestaltet, die Positionen auf einen beliebigen Zeitpunkt reduziert werden, z. B. auf 1850.

Der Ausdruck für $da(t)/dt$ ergibt sich aus der Theorie der säkularen Störungen. Er enthält die Massenwerte der Planeten, welche anderweitig, aber wieder aus den Wirkungen der Störungen, berechnet sind. Mithin ist der Wert $da(t)/dt$ eine mechanisch gewonnene Größe. — Anders verhält es sich mit $d\psi/dt$. Der Ausdruck folgt aus der Theorie der Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt, und sein konstantes Hauptglied ist von den Trägheitsmomenten des Erdkörpers abhängig. Da diese jedoch unbekannt sind, so hat man stets, den umgekehrten Weg gehend, die Konstante von $d\psi/dt$ aus den Koordinatenveränderungen der Sterne berechnet. Wir wollen dies als die *stellarstatistische Bestimmung der Präzessionskonstante* bezeichnen. Die Anzahl der verwendeten Sterne muß *sehr groß* sein, und überhaupt wird die Rechnung mit dem Ziel angelegt, daß sich die Eigenbewegungen im Durchschnitt eliminieren. Aber es ist, wie schon hier betont werden möge, eine unbewiesene Voraussetzung, daß die gemeinsame Konstante aller Eigenbewegungen um eine Achse senkrecht zur Ekliptik gerade gleich Null sei oder daß der Komplex der Fixsterne gegen das Inertialsystem in Ruhe sei.

Ist die Konstante der Präzession gefunden, so liefert der Ausdruck für $d\psi/dt$ für jeden Zeitpunkt $1850 + t$ die numerischen Werte m, n.

Es wurde gesagt, daß sich die Beobachtungen an das jeweilige äquatoreale Koordinatensystem anschließen. Diese Bezugnahme vollzieht sich in der Praxis auf *indirekte* Art.

Man stellt mit besonderer Sorgfalt die Koordinaten einer *kleinen* Anzahl gut verteilter Sterne fest, nämlich gegen den jeweiligen

Aquator und sein Äquinox, *indem man das letztere aufsucht* (vgl. über absolute Beobachtungen Artikel VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 4). Dies geschieht möglichst oft. Sei es jedoch nur in zwei weit getrennten Zeitpunkten $1850 + t_1$ und $1850 + t_2$ geschehen, so reduziert man nach (1) diese α, δ auf 1850. Aus den Differenzen der entstehenden Werte ergeben sich die Eigenbewegungen während der Zeit $t_2 - t_1$ und, indem man sie anbringt, die Positionen von 1850.

Den Inbegriff 1) aller α, δ *dieser* Sterne für 1850 oder einen beliebigen anderen Anfangspunkt, 2) die gewählte Präzessionskonstante oder eine aus ihr berechnete Tafel der m, n für $1850 + t_i$, 3) die jährlichen Eigenbewegungen dieser Sterne, bezeichnet man als ein *System von Fundamentalsternen* oder auch als *ein System* schlechthin.

Jede Beobachtung irgend eines anderen Sternes, dies eben ist der ökonomische Wert des „Systemes", besteht dann in der Herstellung der Koordinatendifferenzen gegen die Fundamentalsterne; der Stern ist dann sofort auf den jeweiligen Äquator und sein Äquinox bezogen, ohne daß man diese Stücke jedesmal zu bestimmen hätte.

Die Anwendbarkeit des Systems hört nicht auf, wenn das Äquinox von $1850 + t$ oder von 1850 falsch bestimmt war; auch nicht, wenn die Konstante von $d\psi/dt$ oder von $da(t)/dt$ unrichtig war und mithin die m, n falsch berechnet sind; sie besteht auch dann noch fort, wenn die Gleichungen (1) unrichtig gebaut wären, sofern statt des Äquators eine dagegen geneigte Grundebene gewählt worden wäre. (Im letzteren Fall würde man die Koordinatendifferenzen systematisch unrichtig anbringen, aber diese Fehler werden um so kleiner, je enger das Netz der Fundamentalsterne ist). Alle diese Mängel werfen sich auf die Eigenbewegungen. Ja, stellarastronomisch gesprochen, wohnt der Präzession nur die Bedeutung inne, daß sie von den Eigenbewegungen einen Teil von gemeinsamer Beschaffenheit abtrennt; denn man bestimmt die Präzessionskonstante geradezu mit dem Grundsatz, *daß die übrigbleibenden Eigenbewegungen möglichst klein sein sollen*, eine Auffassung, die mit der mechanischen Bedeutung dieser Größe nichts zu tun hat.

Unzertrennlich aber ist mit dem Wesen des Fundamentalsystemes die Forderung verbunden, daß durch die Gesamtheit seiner Angaben, nämlich

α, δ für $1850 + t =$ α, δ für $1850 +$ Präzession $+$ Eigenbewegung

die Konfiguration jederzeit *ohne inneren Widerspruch*, wenn auch mit falscher Orientierung, dargestellt wird. Die Beobachtung der Fixsterne

gibt kein Mittel an die Hand, diese dreifach mögliche Abweichung vom ursprünglich angestrebten Koordinatensystem richtig zu stellen.

3. Rein mechanische Systeme. Konstruktion derselben. Dürften wir von den Störungen absehen, so wäre uns durch den Sonnenmittelpunkt in Verbindung mit der Bahnlage irgend eines Planeten, u. a. der Erde selbst, und der Richtung nach dem Perihel, ein vollständiges Koordinatensystem gegeben, und zwar sofort dasjenige, für welches die *Kepler*'schen Gesetze gelten; in jedem anderen System hätten die Planeten z. B. aufgehört, Ellipsen um die Sonne zu beschreiben. Unter dieser Voraussetzung wäre der Komplex der Planetenbahnen fest gegen das Inertialsystem, oder, was dasselbe besagt, mit ihm identisch, und die von den Radienvektoren überstrichenen Flächen wären die Maßzahlen der Zeit.

In Wirklichkeit sind die Bahnen zwar nicht fest, aber ihre Veränderungen erfolgen gesetzmäßig und sind durch eine kleine Anzahl von Massen bedingt. Denkt man sich nämlich die Bewegungsgleichungen mit Rücksicht auf alle anziehenden Massen integriert, so beziehen sich die erhaltenen Ausdrücke für die Bewegung der Bahnelemente gerade auf das Inertialsystem als dasjenige Koordinatensystem, für welches eben das *Newton*'sche Gesetz in Anspruch genommen wird laut Definition. Die Massen kommen dann auch in irgend welchen angularen Relativkoordinaten der Planeten zur Geltung, und umgekehrt: aus der Beobachtung der letzteren kann man die Massen bestimmen. Substituiert man dann die Massenwerte in jene Ausdrücke für die Bewegung der Bahnelemente, so nehmen dieselben für jeden Parameter t bestimmte Zahlwerte an, immer bezogen auf das Inertialsystem. Oder umgekehrt, da vielmehr die Bahnen das Beobachtete sind und die Lage des Inertialsystems gesucht ist: Das Inertialsystem ist gegen die Bahnen festgelegt oder dasselbe ist rekonstruiert worden. Die Zeit ergibt sich, wenn man irgend eine Gleichung, in welche beobachtete Werte eingesetzt sind, nach dem Parameter auflöst.

Dabei würde man ein empirisches Koordinatensystem bequem als Zwischenglied verwenden; man würde die Positionen der Sonne usw., die sich auf das System der Fundamentalsterne beziehen, wegen Präzession entsprechend (1) etwa auf 1850 reduzieren, dann aber diejenigen weiteren Koordinatenänderungen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ addieren, welche dadurch entstehen, daß die Transformationselemente, die in (1) eingehen, im Sinne des *Newton*'schen Gesetzes nicht streng richtig sind. Da vielmehr das Inertialsystem seit 1850 gegen das „empirische System" oder auch gegen das empirisch rekonstruierte Koordinatensystem von 1850 die drei Drehungen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ausgeführt hat, so wird man zu

den Positionen im Koordinatensystem von 1850 die Ausdrücke[2]) addieren müssen, wenn sie auf das Inertialsystem bezogen sein sollen:

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\delta\Delta\alpha = & \mathfrak{X}\sin\delta\cos\alpha + \mathfrak{Y}\sin\delta\sin\alpha - \mathfrak{Z}\cos\delta \\ \Delta\delta = -\mathfrak{X}\sin\alpha & + \mathfrak{Y}\cos\alpha. \end{cases}$$

Diese Positionen wird man den Gleichungen der *Newton*'schen Bewegung unterwerfen und aus ihnen nicht nur die Anfangselemente und die Massen, sondern auch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche man für längere Intervalle konstant halten könnte, sowie für jedes Intervall eine Korrektion der Zeit, als Unbekannte mitbestimmen.

Für's erste könnte man auch den Ansatz machen: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1 t, \ldots$ $t = T + fT^2$. Dies alles läßt sich weiter ausführen, indem man die Ausdrücke für die Koordinatenveränderungen, welche durch die Verbesserung der Elemente, der Massen und durch diese Zusätze hervorgebracht werden, so gestaltet und ihnen die Beobachtungen in solchen Gruppierungen zuweist, daß die Unbekannten möglichst scharf bestimmt werden. Dann zeigt sich übrigens, daß die Anfangswerte $\mathfrak{X}_0, \ldots$ sich mit den Werten der Bahnelemente von 1850 verbinden, wie vorauszusehen war.

Dies wäre der theoretische Weg. Wir kehren nunmehr zur tatsächlichen Behandlung zurück.

4. Das gemischte System der Planeten-Astronomie. Es liegen drei große Durcharbeitungen des Sonnensystems vor, nämlich explizite Entwicklungen für die Örter der Sonne und der Planeten, welche mit den Beobachtungen verglichen werden, um die Konstanten zu berechnen und um Tafeln zur Vorausberechnung der Örter darauf zu gründen. Nach je einem halben Jahrhundert folgten sich *P. S. Laplace*, *U.-J. Leverrier* und *S. Newcomb*[3]).

Als Grundebene hat man in der Astronomie der Planeten von jeher die Ekliptik gewählt, auf welche man die Elemente der anderen Planeten zu beziehen pflegt, nämlich die Knotenlänge Ω, die Neigung i und die Perihellänge ϖ oder den gebrochenen Zug von der Anfangsrichtung bis zum Knoten in der Ekliptik und von hier bis zum Perihel in der Bahn. Die Theorie gibt die Ausdrücke für die Veränderungen der Lagenelemente gegen das Inertialsystem, und zwar als

---

2) Vgl. *E. Anding*: Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum, München (1901), p. 62.

3) *Laplace*, Traité de mécanique céleste, 5 Bde., Paris 1799—1825 (auch: Oeuvres t. 1—5); *Leverrier*, Recherches astronomiques, Obs. de Paris ann. 1—6 und 10—14 (1855—77); *Newcomb*, Wash. Astron. Papers 6 und 7 (1898).

Funktionen der Massen. Genau das Gleiche gilt auch für die Veränderungen der Erdbahn selbst. Aus beiden resultieren mithin die Veränderungen der Planetenbahn gegen die jeweilige Ekliptik und zwar als bekannte Funktionen der Massen. Demnach sind auch die Längen λ und die Breiten β eines Planeten in Bezug auf die jeweilige Ekliptik dargestellt als bekannte Funktionen der Zeit und der Massen.

Wären andererseits auch die beobachteten Koordinaten auf die jeweilige Ekliptik bezogen, so könnte man Theorie und Beobachtung sofort vergleichen, ohne daß, wie S. 9, eine Korrektur nötig wäre. Denn unserer Koordinatenebene kommt dann eine mechanische Bedeutung zu, und ihre ursprüngliche Lage oder das Inertialsystem läßt sich jederzeit durch Rechnung wiederherstellen.

Die Beobachtungen beziehen sich nun aber auf den Äquator, wie er durch das System der Fundamentalsterne definiert ist, und müssen zunächst in Längen und Breiten verwandelt werden. Dabei muß man voraussetzen, daß a) der wahre Winkel ε zwischen der jeweiligen Ekliptik und dem Äquator der Fundamentalsterne, die sog. *Schiefe* der Ekliptik, genau bekannt sei, und b) daß der Einschneidepunkt der Ekliptik in den Äquator genau mit dem Nullpunkt der Fundamentalsterne zusammenfalle. Trifft dies zu, so ist aus den Beobachtungen der empirische Äquator eliminiert.

Diese Bedingungen hat man verschieden behandelt. *Leverrier* geht von der Grundgleichung aus, durch welche die säkulare Änderung der *Schiefe* als Funktion der störenden Massen ausgedrückt ist; indem er diejenige Säkularänderung einsetzt, welche sich aus den Beobachtungen der Solstitien ergeben hatte, entsteht eine Bedingungsgleichung für die Massen, und indem er eine Reihe anderer Bedingungsgleichungen zuzieht, die aus anderen Störungen gewonnen sind, bestimmt er das Massensystem, welches ihm am plausibelsten erscheint und welches, in die Grundgleichung eingesetzt, den rechnerischen Ausdruck für die jeweilige Schiefe ergibt. Aber diese Grundgleichung beruht darauf, daß der Äquator einem mechanischen System angehöre. Demnach ist stillschweigend angenommen, daß der Äquator der Fundamentalsterne jederzeit in Übereinstimmung mit dem mechanischen Äquator des Erdkörpers bestimmt sei. — Was den *Nullpunkt* der Zählung im Äquator der Fundamentalsterne betrifft, so nimmt *Leverrier* ebenfalls an, daß durch die zahlreichen, eigens zu diesem Zweck angestellten absoluten Beobachtungen das Ziel erreicht worden sei, diesen Punkt in den Einschneidepunkt der Ekliptik zu verlegen.

Newcomb betrachtet die Gleichungen der Koordinatentransformation nicht als streng erfüllt. Da man sie dennoch verwendet, die ekliptikalen Positionen der Planeten aus den äquatorealen zu berechnen (prinzipiell gesprochen, denn praktisch geht er den entgegengesetzten Weg), so müssen zu diesen Zahlen korrigierende Ausdrücke hinzutreten, welche abhängig sind a) von einer Verbesserung der Schiefe der Ekliptik gegen den Äquator der Fundamentalsterne, b) von einer kleinen Knotenrektaszension, um welche sich der Einschneidepunkt der Ekliptik in den Äquator vom Nullpunkt der Fundamentalsterne unterscheidet. Bei der Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie erscheinen dann als mitzubestimmende Unbekannte neben den Bahnelementen und Massen auch diese zwei Bestimmungsstücke der Ekliptik gegen das System der Fundamentalsterne, sowie ihre säkularen Veränderungen.

Somit ist die Ebene der Ekliptik mechanisch festgelegt. Was jetzt die Anfangsrichtung in der Ekliptik selbst anbelangt, die dritte Komponente, so ist zwar die ursprüngliche Anfangsrichtung im Inertialsystem später nicht mehr in der jeweiligen Ekliptik enthalten; man kann aber in der jeweiligen Ekliptik stets eine Nullrichtung definieren, welche durch mechanische Ausdrücke gegen das Inertialsystem festgelegt wird, indem man beispielsweise die Nullrichtung bei den Drehungen α), β) (S. 5) nur senkrecht zur Erdbahn fortschreiten läßt. Man darf daher annehmen, die Längen der Planeten seien gegen eine solche Richtung, die wir mit O bezeichnen wollen, als Funktionen der Zeit dargestellt.

Da sich andererseits die Längen, welche aus den Beobachtungen folgen, auf den Einschnitt P des Äquators der Fundamentalsterne in die Ekliptik beziehen, so muß man die Differenz OP anbringen. Doch berechnet man sie nicht aus einer mechanischen Bedingung, sondern aus der Präzessionskonstante, welche stellarstatistisch bestimmt ist, nämlich unter der Annahme, daß die gemeinsame Längenzunahme aller Fixsterne lediglich durch die entgegengesetzte und genau gleiche Bewegung der Nullrichtung, nämlich gegen das Inertialsystem, erzeugt sei. Man bezeichnet diese Größe, welche in der Hauptsache gleich $\psi - a(t) \cos \omega$ ist, als allgemeine Präzession ψ_1, vgl. Artikel VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 5b).

Demnach ist das Koordinatensystem der Planeten-Astronomie in *zweifacher* Beziehung *mechanisch* und in der *dritten* Komponente *empirisch* begründet. Es wäre konsequent gewesen, für die Anfangsrichtung in der Ekliptik mechanisch eine Korrektion c) zu bestimmen, welche zu a) und b) (S. 10) den dritten *Euler*'schen Winkel bildet.

Aber es lag eine solche direkte Veranlassung nicht vor, wie sie dort durch die Koordinatentransformation geboten war. Indessen wollen wir hier überlegen, wie sich eine solche Bestimmung gestaltet.

5. Ergänzung der dritten Komponente. Mechanische Bestimmung der Präzessionskonstante. Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Bewegung der Sonne. Wir übergehen die Wirkung der Aberration, Nutation, periodischen Störungen und Mondstörungen, und betrachten auch von der Mittelpunktsgleichung nur das Hauptglied, indem wir alle diese Ergänzungen in eine Korrektion S zusammenfassen.

Die Länge des Perigäums, bezogen auf die Richtung O, hat die Form $\varpi' = \varpi_0 + \varpi_1' t$, wo ϖ_1' als eine bekannte Funktion der Massen gegeben ist. Demnach besteht die Länge der Sonne, bezogen auf den Punkt O, aus einem linearen Glied nt, aus der Mittelpunktsgleichung $2e \sin(nt - \varpi_0 - \varpi_1' \cdot t)$ und aus S. Will man die Länge gegen die Richtung P ausdrücken, so muß der Bogen OP hinzukommen; er besteht aus der allgemeinen Präzession, die wir $d\psi_1/dt \cdot t$ schreiben dürfen, und der Korrektion $-\mathfrak{Z}' = -\mathfrak{Z}_1' \cdot t$, welche wir suchen. Demnach ist die Länge der Sonne gegen P:

$$\lambda = nt + \frac{d\psi_1}{dt} t - \mathfrak{Z}_1' \cdot t + 2e \sin(nt - \varpi_0 - \varpi_1' \cdot t) + S.$$

Es ist unwesentlich, daß man die mittleren Längen und auch die Länge des Perigäums vom Punkte P aus zu zählen pflegt. Die Mittelpunktsgleichung hat dann die Form

$$2e \sin\left[\left(n + \frac{d\psi_1}{dt}\right) t - \varpi_0 - \varpi_1 t\right],$$

wo

$$\varpi_1 = \varpi_1' + \frac{d\psi_1}{dt}.$$

Die Gleichung

$$(3) \quad \lambda = \left(n + \frac{d\psi_1}{dt} - \mathfrak{Z}_1'\right) t + 2e \sin\left(nt + \frac{d\psi_1}{dt} t - \varpi_0 - \varpi_1 t\right) + S$$

gestattet ihrem Bau nach, die zwei Zahlenwerte aus den Beobachtungen zu berechnen:

$$N = n + \frac{d\psi_1}{dt} - \mathfrak{Z}_1',$$

$$N' = n + \frac{d\psi_1}{dt} - \varpi_1.$$

Da ϖ_1 und $d\psi_1/dt$ gegeben sind, so lassen sich n und $\mathfrak{Z}_1'$ bestimmen.

Schreibt man die Gleichung (3) in der Form

$$\lambda = Nt + 2e \sin(Nt - \varpi_0 - (\varpi_1 - \mathfrak{Z}_1')t) + S,$$

so besagt sie, daß wegen der empirischen Bedeutung der Anfangsrichtung ein Widerspruch $\mathfrak{Z}_1'$ zwischen der beobachteten und der berechneten Perihelbewegung entstehen muß.

Die Sonnenbahn ist wegen der kleinen Exzentrizität für diese Bestimmung von $\mathfrak{Z}_1'$ weniger geeignet. Doch kann man die Betrachtung bei den Planeten durchführen und die zweckmäßigste Bestimmung aufsuchen.

An dieser Stelle soll jedoch ein summarisches Verfahren angewendet werden.

Newcomb[4]) hat die säkularen Variationen der Elemente der Planetenbahnen aus den Beobachtungen abgeleitet, aber die Massen anderweitig bestimmt, nämlich z. B. aus den periodischen Störungen. Indem er aus diesen Massen andererseits die säkularen Störungen berechnete, zeigten sich in den Exzentrizitäten keine unstatthaften Abweichungen. Aber die Richtungselemente (Bezeichnung S. 9) ergeben die nachstehenden Änderungen für 100 Jahre, wobei das Merkurperihel außer Betracht bleiben muß (vgl. den Artikel VI 2, 23, *Oppenheim*, Kritik des Gravitationsgesetzes):

	Beob.	Rechn.	Diff.	M. F.	Neue Diff.	Ohne Merkur
Merkur:						
Δi	+ 7″.14	+ 6″.76	+ 0″.38	± 0″.80	+ 0″.36	(+ 0″.35)
$\sin i \cdot \Delta\Omega$	— 91.89	— 92.50	+ 0.61	± 0.52	— 0.31	(— 0.40)
Venus:						
$e \cdot \Delta\varpi$	+ 0.29	+ 0.34	— 0.05	± 0.25	— 0.10	— 0.11
Δi	+ 3.87	+ 3.49	+ 0.38	± 0.33	+ 0.34	+ 0.35
$\sin i \cdot \Delta\Omega$	— 105.40	— 106.00	+ 0.60	± 0.17	+ 0.15	+ 0.12
Erde:						
$e \cdot \Delta\varpi$	+ 19.48	+ 19.38	+ 0.10	± 0.13	— 0.02	— 0.04
Mars:						
$e \cdot \Delta\varpi$	+ 149.55	+ 148.80	+ 0.75	± 0.35	+ 0.07	— 0.01
Δi	— 2.26	— 2.25	— 0.01	± 0.20	— 0.03	— 0.04
$\sin i \cdot \Delta\Omega$	— 72.60	— 72.63	+ 0.03	± 0.22	— 0.24	— 0.25

Auffällig ist hier „die Bewegung des Venusknotens, wo der Widerspruch fünfmal so groß ist als der wahrscheinliche Fehler“ (die obigen Fehler sind mittlere), und „das Perihel des Mars, wo der Widerspruch dreimal so groß ist, als der wahrscheinliche Fehler“.

Wir versuchen, diese Abweichungen zu erklären, indem wir annehmen, das Inertialsystem habe in 100 Jahren um das Äquinox eine

4) *S. Newcomb*, Fund. Const., s. Fußn. 13 auf p. 25 dieses Bandes.

Drehung $\mathfrak{X}'$, um die Richtung von der Länge 90° eine Drehung $\mathfrak{Y}'$ und um den Pol der Ekliptik eine Drehung $\mathfrak{Z}'$ gegen das Bezugssystem ausgeführt. Demnach sind die Differenzen aufzufassen als

$$(4)\quad \begin{cases} e\Delta\varpi = +\mathfrak{X}'\cdot e\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i\sin\Omega - \mathfrak{Y}'\cdot e\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i\cos\Omega + \mathfrak{Z}'\cdot e \\ \Delta i = +\mathfrak{X}'\cdot\cos\Omega \quad + \mathfrak{Y}'\cdot\sin\Omega \\ \sin i\Delta\Omega = -\mathfrak{X}'\cdot\cos i\sin\Omega \quad + \mathfrak{Y}'\cdot\cos i\cos\Omega \quad + \mathfrak{Z}'\cdot\sin i. \end{cases}$$

Bildet man alle diese Gleichungen und bringt sie auf gleiches Gewicht, so ergibt die Methode d. kl. Quadr.:

$$\mathfrak{X}' = 0''.0, \quad \mathfrak{Y}' = 0''.0, \quad \mathfrak{Z}' = +7''.3 \pm 2''.3.$$

Diese Werte $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ bestätigen, was wir schon wissen: daß das System in zweifacher Weise mechanisch orientiert war. Aber hinsichtlich der empirischen dritten Komponente hat sich ergeben, daß die stellarstatistisch bestimmte Präzessionskonstante auf das Jahrhundert um mehr als 7″ zu *vergrößern* wäre, wenn die beobachteten Ungleichheiten verschwinden sollen.

Daß dies eingetreten ist, zeigen die nunmehr berechneten „neuen Differenzen“: die Abweichungen im Venusknoten und im Marsperihel sind nicht mehr zu erkennen, und überhaupt liegen sechs Abweichungen unterhalb, drei oberhalb des wahrscheinlichen Fehlers.

Wollte man den Merkur nach Analogie seines Perihels überhaupt ausschließen, so käme

$$\mathfrak{X}' = 0''.0, \quad \mathfrak{Y}' = 0''.0, \quad \mathfrak{Z}' = +8''.2,$$

aber die Zahlen der letzten Kolumne zeigen kaum noch eine Verbesserung.

Vom rein mechanischen Standpunkt einer Astronomie der Planeten wäre die Sache mit diesem Resultat abgemacht. Wie soll man es aber erklären, daß die Gesamtheit der Fixsterne, aus welchen die Präzessionskonstante berechnet ist, in einer *rückläufigen* Bewegung gegen das Inertialsystem begriffen wäre? Die verschiedenen stellarstatistischen Bestimmungen der Präzessionskonstante divergieren auf das Jahrhundert um 1″, höchstens 2″. Wollten wir aber den Fixsternen eine negative „Eigenpräzession“, wie man es nennen könnte, im Betrag von 7″ beilegen, so müßten doch wohl die Werte der Präzessionskonstante, wenn aus hellen und wenn aus schwachen Sternen bestimmt, stärker differieren, als man es gefunden hat. Die Sache bedarf stellarstatistisch einer weiteren Untersuchung. Bis dahin wird man die Ursachen der Anomalien im Planetensystem selbst suchen müssen.

Im weiteren Verlauf der Encyklopädie wird daher in der allgemein üblichen Weise stillschweigend angenommen werden, die stellarstatistisch bestimmte Präzessionskonstante dürfe mechanisch aufgefaßt werden oder ihre Anwendung reduziere alle Beobachtungen auf ein Inertialsystem.

Was schließlich die *Festlegung der Zeitskala* betrifft, so geschieht dieselbe auf mechanischer Grundlage durch die Erdrotation mit einer allen bisherigen Ansprüchen genügenden Sicherheit, vgl. den Artikel VI 2, 2 (*F. Cohn*), Nr. 5b).

(Abgeschlossen im Mai 1905.)

VI 2, 2. REDUKTION DER ASTRONOMISCHEN BEOBACHTUNGEN.

(SPHÄRISCHE ASTRONOMIE IM ENGEREN SINNE.)

VON

FRITZ COHN

IN KÖNIGSBERG.

Inhaltsübersicht.

1. Aufgabe der sphärischen Astronomie.
2. Definition der üblichen Koordinatensysteme und der Zeit; erste Formulierung.
3. Prinzip der Messung der äquatorealen Koordinaten und der Zeit; Prinzip der Meridianbeobachtungen.
4. Die gegenwärtige Praxis der Meridianbeobachtungen.
5. Kritische Untersuchung der Voraussetzungen.
   a) Änderungen der Visierrichtung (Parallaxe, Refraktion, Aberration).
   b) Änderungen des Koordinatensystems (Präzession, Nutation, Bewegung des Erdpols).
   c) Rotationsgeschwindigkeit. Konstanz des Zeitmaßes.
6. Scharfe Definition der Koordinaten und der Zeit.
7. Reduktion der scheinbaren Örter in mittlere.
   a) Parallaxe und Aberration.
   b) Präzession und Nutation.
   c) Zusammenfassung sämtlicher Reduktionen.
8. Die weitere Verarbeitung der Meridianbeobachtungen, Sternkataloge, Jahrbücher.
9. Die Bestimmung der Entfernungen der Gestirne
   a) Des Mondes.
   b) Der Sonne und der Planeten.
   c) Der Fixsterne.

Literatur.

Lehrbücher.

F. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, 4. Aufl. Berlin 1881 (*Brünnow*).

W. Chauvenet, A manual of spherical and practical astronomy, Philadelphia 1863, 2 Vol., 5. Aufl. 1885 (*Chauvenet*).

Elementare Darstellungen z. B. in

A. Sawitsch, Abriß der Praktischen Astronomie, russisch: Petersburg 1845, 2. Aufl.

1868—71; deutsch: 1. Aufl. von *W. C. Götze*, Hamburg 1850—51, 2. Aufl. von *C. F. W. Peters*, Leipzig 1879 (letztere: *Sawitsch*).
J. Ph. Herr-W. Tinter, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Wien 1887.
Th. Epstein, Geonomie, Wien 1888.
Ferner vgl. man die betreffenden Abschnitte aus:
F. W. Bessel, Fundamenta astronomiae pro anno MDCCLV deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley in specula astronomica Grenovicensi per annos 1750—62 institutis, Regiomonti 1818 (*Bessel, Fund.*).
— Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae. Regiomonti Prussorum 1830, p I—XXIII (*Bessel, Tab. Reg.*).
— Abhandlungen, hrsg. von *R. Engelmann*, 3 Bde., Leipzig 1875—76 (*Bessel, Abhdl.*).
Th. von Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Band I, 2. Aufl., Leipzig 1882 (2. Aufl.: *Oppolzer, Bahnb. 1*).
W. Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie, 4 Bde., Breslau 1897—1902.
In historischer Beziehung vgl.
R. Wolf, Handbuch der Astronomie, 2 Bde., Zürich 1890—92 (*Wolf, Handb.*).
Für die mechanisch-physikalischen Grundlagen kommen namentlich in Betracht:
F. Tisserand, Traité de Mécanique céleste, 4 Bde., Paris 1889—1896 (*Tisserand*).
F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie, 2 Bde., Leipzig 1880—84 (*Helmert*).

---

1. Aufgabe der sphärischen Astronomie. Die *theoretische Astronomie*, welche die Bewegungen der Himmelskörper auf ihre gegenseitige Anziehung nach dem *Newton*'schen Gravitationsgesetz zurückzuführen bestrebt ist, bedarf, um die Werte der in den mathematischen Ausdrücken des allgemeinen Bewegungsproblems auftretenden Parameter (Massen usw.) und Integrationskonstanten (Bahnelemente usw.) den besonderen Verhältnissen des Planetensystems entsprechend bestimmen zu können, gewisser Beobachtungsdaten, welche ihr die *praktische Astronomie* liefern muß. Diese Daten werden in der Angabe einer Reihe von Örtern der betrachteten Himmelskörper, bezogen auf ein als fest angenommenes Koordinatensystem, und der Angabe des Zeitmoments bestehen, für welchen diese Örter gelten. Die *praktische Astronomie* hat also die zur Fixierung der Zeit und der Örter der Gestirne dienenden Mittel anzugeben. Sie zerfällt naturgemäß in zwei Teile: die *beobachtende Astronomie* liefert das Rohmaterial, welches indessen infolge der mechanisch-physikalischen Bedingungen der Beobachtungen auf der Erde einer vorbereitenden Verarbeitung bedarf, um der theoretischen Verwertung zugänglich zu werden. (Elimination der „Refraktion", „Aberration", „Präzession" usw.) *Diese vorbereitende Verarbeitung leistet die sphärische Astronomie.* Da die Beobachtungen nur einer beschränkten Genauigkeit fähig sind, so hat die sphä-

rische Astronomie die kritische Untersuchung jener Bedingungen nur bis zu einer zweckentsprechenden Grenze zu treiben und von Zeit zu Zeit, sobald die Beobachtungen leistungsfähiger geworden sind, durch eine Revision der Grundlagen diese Grenze weiter hinauszuschieben. Eine Epoche wird in dieser Hinsicht zu Anfang des 19. Jahrhunderts durch *F. W. Bessel*'s „Fundamenta astronomiae" markiert. Heutzutage macht sich das Bedürfnis nach einer noch weitergehenden Kritik geltend, entsprechend einer extremen Beobachtungsgenauigkeit von $0''.01$ in der Winkel-, von $0^s.001$ in der Zeitmessung.

Die einzelne Beobachtung kann niemals den Ort eines Gestirns im Raume geben, sondern nur die *Richtung*, in der es sich befindet. Die Bestimmung der *Entfernung* eines Objekts läßt sich nur durch Verknüpfung mehrerer Beobachtungen erreichen und die diesbezüglichen Methoden bilden unter dem Namen der „Parallaxenbestimmung" ein gesondertes Kapitel der sphärischen Astronomie, die es im übrigen nur mit der *Fixierung der Richtung* zu tun hat.

Eine solche geschieht durch Angabe der sphärischen Koordinaten des Punktes der unendlich fernen Himmelskugel, auf den sich vom Beobachter als dem Mittelpunkt dieser Kugel aus gesehen das Objekt projiziert, bezogen auf ein durch einen größten Kugelkreis und einen Anfangspunkt der Zählung in ihm (resp. Pol und ersten Meridian)[1]) definiertes Koordinatensystem.

Die Wahl dieser Grundelemente des Koordinatensystems wird von zwei Gesichtspunkten aus erfolgen müssen; einmal müssen sie der Beobachtung entweder direkt zugänglich sein oder wenigstens in einfacher Weise aus ihr abgeleitet werden können und zweitens der theoretischen Verwendung halber im Raume entweder fest sein oder in ihrer Bewegung rechnerisch verfolgt werden können.

2. Definition der üblichen Koordinatensysteme und der Zeit; erste Formulierung. Die einfachsten Beobachtungsbedingungen bietet das auf dem *Horizont*, resp. *Zenit* beruhende System. Denn die einzige, an jedem Punkte der Erdoberfläche unmittelbar gegebene Richtung ist die der Schwerkraft, wie sie durch ein Lot, oder die zu ihr senkrechte Horizontale, wie sie durch eine Wasserwage angezeigt wird. Die eine Koordinate, die *Höhe* oder die *Zenitdistanz*, wird als Richtungswinkel gegen den Horizont oder die Vertikale von 0^0 bis 90^0 gezählt. Ein Nullpunkt für die Zählung der zweiten Koordinate, des *Azimuts*, existiert nicht ebenso unmittelbar und kann, wenn er

1) Über die der Messung sphärischer Koordinaten dienenden Instrumente vgl. den Artikel VI 2, 5 (*Ristenpart*).

an allen Erdorten und zu jeder Zeit gleich leicht beobachtbar sein soll, nur durch Erscheinungen außerhalb der Erde definiert werden, wie sie die scheinbare tägliche Umdrehung des Himmelsgewölbes darbietet. Man wählt dazu nämlich den *Meridian* des Erdortes, den größten Kreis durch Himmelspol und Zenit, und zählt das astronomische Azimut von Süd über West, Nord, Ost herum von 0^0 bis 360^0.

Höhe und Azimut sind diejenigen Koordinaten, welche die Beobachtung am unmittelbarsten geben kann. Ihre schnelle Veränderlichkeit, die auf ihrer festen Beziehung zum rotierenden Erdkörper beruht, läßt sie als ungeeignet zur theoretischen Verwendung erscheinen. Den Anforderungen der Theorie kann nur eine Grundebene genügen, welche die für die Orientierung des Instruments unumgängliche Eigenschaft des Horizonts, dem Erdkörper fest anzuhaften, mit einer von der Erdrotation unabhängigen festen Lage im Raume vereinigt. Diese Möglichkeit bietet der Erd- und Himmels-Äquator, da er sich nur in sich selbst dreht[2]).

Der Äquatorabstand oder die *Deklination*, gezählt von 0^0 bis $\pm 90^0$, genügt allen Anforderungen der beobachtenden und der rechnenden Astronomie. Bei der zweiten äquatorealen Koordinate muß man zu einer doppelten Zählung greifen; der *Stundenwinkel* eines Gestirns wird analog dem Azimut vom Meridian aus von 0^0 bis 360^0 gezählt, er läßt sich an einem fest aufgestellten Äquatoreal direkt ablesen, ist aber von Zeit und Lage des Erdortes abhängig. Die *Rektaszension* (Ascensio recta, abgekürzt AR.) zählt man von einem am Himmel festen Punkte (in umgekehrtem Sinne wie den Stundenwinkel), sie ist sonach für alle festen Gestirne fest, aber nicht unmittelbar beobachtbar. Als Anfangspunkt der Zählung der Rektaszension ist man übereingekommen, den *Frühlingspunkt* zu wählen, in welchem der Sonnenmittelpunkt zur Zeit des Frühlings-Äquinoktiums den Äquator schneidet, weil die Ebene der Sonnen- oder Erdbahn für die Theorie des Planetensystems besondere Vorteile bietet. Dieses System der Rektaszensionen und Deklinationen, der Stunden- und Parallelkreise, ist das in der heutigen Astronomie zur Festlegung der Örter der Gestirne durchweg benutzte. Daneben verdient noch das auf der Ekliptik und dem Frühlingspunkte beruhende System der *Längen* und *Breiten* seiner Verwendung in der älteren Zeit und seines theoretischen Interesses halber Erwähnung. Die ekliptikalen Koordinaten können indessen mit einiger

2) In mathematischer Strenge betrachtet ist freilich der Äquator ebensogut im Raume veränderlich wie der Horizont; nur der langsame Verlauf seiner Bewegung ist es, der ihn für die Praxis zur Grundebene des Koordinatensystems geeignet macht.

Schärfe nur durch Rechnung, nicht durch direkte Beobachtung gefunden werden.

Die Formeln zu dem häufig erforderlichen Übergang von dem einen Koordinatensystem zu einem andern vermittelt das sphärische Dreieck zwischen den Polen beider Systeme und dem Gestirn[3]). Erforderlich ist dazu die Kenntnis des Bogens zwischen beiden Polen, also in dem einen Falle des Komplements der geographischen Breite des Erdortes, in dem andern der Schiefe der Ekliptik. Endlich setzt der Übergang vom Stundenwinkel zur Rektaszension die Kenntnis der Zeit voraus.

Definition der Zeit. Man definiert als Zeiteinheit die Zeit einer Umdrehung der Erde um ihre Achse, den *Sterntag*, und mißt sie als die Zeit zwischen zwei Kulminationen eines beliebigen festen Punktes der Himmelskugel. Als solchen wählt man wieder den Frühlingspunkt und nennt *Sternzeit* die seit seiner Kulmination verstrichene Zeit. Infolge der vorausgesetzten Gleichförmigkeit der Erdrotation ist die Sternzeit gleich dem Stundenwinkel des Frühlingspunktes, wenn man ihn statt als Winkel von 0^0 bis 360^0 in Zeit von 0^h bis 24^h ausdrückt. Aus dieser Definition folgt geometrisch die gesuchte Beziehung zwischen Stundenwinkel und Rektaszension:

$$\text{Sternzeit} = \text{Rektaszension} + \text{Stundenwinkel}.$$

In wieweit die so definierte Sternzeit ein gleichförmiges Maß der Zeit ist, wird später (s. Nr. 6) näher untersucht. Neben der Sternzeitrechnung, die für die wissenschaftliche Astronomie unentbehrlich ist, bedarf das bürgerliche Leben einer andern Zeitmessung, die an die Sonne anknüpft. Man definiert den Stundenwinkel der Sonne als *wahre Sonnenzeit*, die Zeit zwischen zwei Kulminationen der Sonne als *wahren Sonnentag*. Da die Sonne unter den Sternen bewegt ist, ist dieser Sonnentag vom Sterntag verschieden. Da ferner ihre Rektaszensionsbewegung keine gleichförmige ist — die Bahn der Sonne ist gegen den Äquator geneigt und nicht ihre Winkel-, sondern ihre Flächengeschwindigkeit konstant —, so ist die wahre Sonnenzeit kein gleichförmiges Zeitmaß. Man kommt den Bedürfnissen des praktischen Lebens durch die Einführung einer fingierten *mittleren Sonne* entgegen, die sich bei gleichförmiger Rektaszensionsbewegung nie weit von der wahren Sonne entfernt; der Unterschied beider Rektaszensionen im Sinne „Mittlere Zeit — Wahre Zeit“ heißt die *Zeitgleichung*[4]).

---

3) Näheres in den Lehrbüchern; z. B. *Brünnow*, p. 79 ff.

4) Die Einführung der Rechnung nach mittlerer Zeit ist ein Beispiel aus dem bürgerlichen Leben, wie die gesteigerte Messungsgenauigkeit eine strengere

Ihre extremen Werte betragen $+ 14^m25^s$ am 12. Febr., $- 3^m49^s$ am 14. Mai, $+ 6^m18^s$ am 26. Juli, $- 16^m21^s$ am 3. Nov.

Beide Zeiten, Sternzeit und mittlere Zeit, sind *Ortszeiten*, der Unterschied der Ortszeiten zweier Erdorte ist gleich ihrer geographischen Längendifferenz, deren Kenntnis demnach zur einheitlichen Fixierung des Zeitmoments speziell bei Beobachtungen der Wandelsterne erforderlich ist.

Zur Messung größerer Zeiträume benutzt man die Dauer der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne, das Jahr, und zwar entweder (für die theoretischen Entwicklungen) das sehr angenäherte *julianische Jahr* von $365^1/_4$ mittleren Sonnentagen oder (für die praktischen Zwecke) das *tropische Jahr*, die Zeit zwischen zwei Frühlingsäquinoktien; als seinen Anfang definiert man nach *Bessel*[5]) den nahezu auf den 1. Januar fallenden Moment, in welchem die mittlere Länge der Sonne gleich 280^0 ist. Das so definierte Jahr (*annus fictus*) ist nicht ganz konstant, sondern infolge der Ungleichförmigkeit der Präzession etwas veränderlich[6]).

3. Prinzip der Messung der äquatorealen Koordinaten und der Zeit. Prinzip der Meridianbeobachtungen. Der unabhängigen Bestimmung der äquatorealen Koordinaten dient heutzutage der Meridiankreis, mit dem die Meridiandurchgänge der Gestirne (nach Höhe und Zeit) beobachtet werden[7]).

Die Beziehung $90^0 + \delta$, resp. $270^0 - \delta = \varphi + h$ für obere, resp. untere Kulminationshöhen (h gerechnet von 0^0 bis 180^0 vom Südpunkt des Horizonts) gibt aus jeder beobachteten Meridianhöhe h bei bekannter Polhöhe φ die Deklination δ des Gestirns, sonst Deklinationsdifferenzen.

Die Messung der Rektaszensionen erfolgt aus den Meridiandurchgangszeiten in einer gewissen Verknüpfung mit der Bestimmung der Zeit überhaupt durch Vermittlung der Uhr[8]).

Fassung der Definitionen erforderlich macht. Nach *Wolf*, Handb. 1, § 193 wurde sie zuerst in Genf, etwa von 1780 an, dann in England, 1810 in Preußen, 1816 in Frankreich eingeführt.

5) *F. W. Bessel*, Monatl. Corr. 28 (1813), p. 481 = Abhdl. 1, Nr. 36, p. 261.

6) Näheres über Berechnung des annus fictus und des dies reductus siehe *Bessel*, Fund.; *Bessel*, Tab. Reg.

7) Im Prinzip geschieht diese Messung freilich und geschah in älterer Zeit tatsächlich an parallaktisch aufgestellten Äquatorealen, welche direkt Stundenwinkel (und somit Rektaszensionsdifferenzen) und Deklinationen ablesen lassen; heutzutage beschränkt sich ihre Anwendung auf die Messung kleiner Koordinatendifferenzen (z. B. bei dem Anschluß von Kometen an Vergleichsterne).

8) Ehe die schon früher zur Zeitmessung benutzten Uhren durch die Ein-

Die Uhr hat zunächst die Aufgabe, Zeitmomente zu fixieren und dadurch Zeitintervalle zu messen. Die stets erforderliche Kontrolle der Uhr führt man in geeigneten Intervallen durch *Zeitbestimmungen* aus. Jede Bestimmung des Stundenwinkels t des Frühlingspunktes oder eines andern Sterns bekannter Rektaszension α fixiert (wegen $\alpha + t = \theta$) die Sternzeit θ und gibt demnach eine Zeitbestimmung. Am einfachsten beobachtet man im Meridian. Denn es ist dann $t = 0$, $\alpha = \theta$, d. h. die Sternzeit im Moment der Kulmination eines Gestirns ist gleich seiner Rektaszension. Man bestimmt also den Fehler der Uhr oder die *Uhrkorrektion* (den Betrag, den man zur Angabe der Uhr hinzufügen muß, um Sternzeit zu erhalten) durch Beobachtung der Durchgangszeit eines Sterns bekannter Rektaszension durch den Meridian. Als solche „Zeitsterne" wählt man äquatornahe Sterne, die ihrer schnellen täglichen Bewegung halber eine möglichst scharfe Festlegung der Durchgangszeit gestatten. Die aus aufeinanderfolgenden Zeitbestimmungen erhaltenen Uhrkorrektionen liefern den „Uhrgang". Unabhängig von der Kenntnis einer AR. läßt sich derselbe als täglicher Uhrgang durch die Beobachtung zweier aufeinanderfolgender Kulminationen desselben Sterns bestimmen; doch zieht man in der heutigen Praxis verschiedene Sterne, deren AR. hinreichend genau bekannt ist, zu seiner Ableitung heran, um so mehr, wenn man sich auf die Gleichförmigkeit des Uhrgangs während eines Tages nicht sicher verlassen kann[9]).

Hieran schließt sich aber unmittelbar eine fundamentale Erweiterung der Anwendung der Uhr. Man bestimmt die zunächst als Winkel definierte Rektaszension eines Gestirns durch den Zeitmoment seiner Kulmination, AR.-Differenzen nicht mehr als Winkel, sondern durch die Zeit, welche die Erde zur Drehung um diesen Winkel braucht. Die Uhr dient also direkt zur Bestimmung der AR., wenn

---

führung des Pendels die zur AR.-Messung erforderliche Genauigkeit erlangten, mußte man, wie es noch *Tycho Brahe* tat, neben den Deklinationen die Distanz zweier Objekte im Bogen größten Kreises messen, um daraus die AR.-Differenz zu berechnen. Näheres über die historische Entwicklung vgl. bei *Wolf*, Handb. 2, § 373 ff.

9) Ursachen einer täglich-periodischen Schwankung im berechneten Uhrgange sind einmal Schwankungen im wirklichen Gange der Uhr, herrührend von nicht völliger Temperaturkompensation bei einer Aufstellung in einem Raum nicht konstanter Temperatur, dann in der Aufstellung des Instruments, sofern sie nicht durch häufige Fehlerbestimmung unter Kontrolle gehalten wird, und endlich in der Auffassung der Durchgänge seitens des Beobachters (siehe den Artikel VI 2, 5 (*Ristenpart*), sowie z. B. *Fr. Küstner*, Bonn Sternw. Veröff. Nr. 4, Bonn 1900, p. 31).

sie richtige Sternzeit anzeigt; andernfalls muß ihr Fehler bekannt sein, der im allgemeinen eine Funktion der Zeit sein wird. Ihre Anwendbarkeit bei Präzisionsbeobachtungen beschränkt sich daher im allgemeinen auf Zeitintervalle, innerhalb deren man ihren Gang als gleichförmig ansehen kann, um ohne Kontrolle auskommen zu können. Für fundamentale AR.-Bestimmungen muß dieses Intervall mindestens einen Tag betragen, da eben unabhängige Uhrgänge nur als tägliche erhalten werden können.

Zusammenfassend erhellt, wie die Beobachtung am Meridiankreise, der heutzutage in Verbindung mit einer Uhr das fundamentale Instrument der praktischen Astronomie bildet, von den Instrumentalfehlern befreit, Meridianzenitdistanzen und Durchgangszeiten und damit Deklinations- und (bei Kenntnis des Uhrganges) Rektaszensionsdifferenzen liefert. Die Kenntnis der Polhöhe und der absoluten Uhrkorrektion führt zu absoluten Deklinationen und Rektaszensionen.

Es sind hier also noch die Prinzipien zu erörtern, auf denen die praktische Bestimmung des Meridians selbst, sowie der Nullpunkte beider Zählungen, des Frühlingspunktes und des Äquators, mithin der Polhöhe, beruhen.

Die Festlegung des Meridians und der Polhöhe beruht auf dem Vorgang der Erdrotation.

Die Bestimmung des *Meridians* erfolgt durch die Beobachtung der Durchgangszeiten eines Zirkumpolarsterns in aufeinanderfolgender oberer und unterer Kulmination, indem die Zwischenzeit genau 12^h Sternzeit beträgt, wenn die Fernrohrebene mit dem Meridian zusammenfällt. Bei bekannter Rektaszension des Sterns genügt eine einzelne Kulmination[10]). Um nicht unausgesetzt auf die Bestimmung des Meridians angewiesen zu sein, bringt man auf festen Sternwarten Meridianzeichen (Miren) an, die zugleich die Schwankungen des Instruments in kürzeren Intervallen zu überwachen gestatten. Auch ihre Lage zum Meridian muß freilich unausgesetzt unter Kontrolle gehalten werden, einmal weil ihre Verbindung mit dem Erdkörper nicht als eine unveränderliche gelten kann und dann, weil der Meridian selbst gegen den Erdkörper nicht absolut fest ist (s. Nr. 5).

Um von den im Meridian beobachteten Zenitdistanzen zu Deklinationen übergehen zu können, muß die Lage des Äquators zum Zenit, d. h. die *Polhöhe*, bekannt sein; man erhält sie als Mittel der

---

10) Im ersteren Falle muß der Uhrgang in der Zwischenzeit, im letzteren die Uhrkorrektion bekannt sein; es müssen also noch Zeitsterne mit beobachtet werden; vgl. auch den Artikel VI 2, 3 (*Wirtz*), Nr. 8.

in oberer und unterer Kulmination bestimmten Höhe eines Zirkumpolarsterns. Wie der Meridian kann also auch die Polhöhe nur durch Kombination zweier nicht gleichzeitiger Beobachtungen erhalten werden; es wird dabei die Unveränderlichkeit der Rotationsachse im Erdkörper während der Zwischenzeit vorausgesetzt[11]).

Um von den beobachteten Rektaszensionsdifferenzen zu Rektaszensionen selbst überzugehen, bedarf man der Kenntnis der Lage des *Frühlingspunktes.* Derselbe ist als Schnittpunkt des Äquators und der Ekliptik definiert, beruht mithin neben der Rotationsbewegung der Erde auch auf ihrer Translationsbewegung, die der Beobachtung am einfachsten durch ihr direktes Abbild, die Sonnenbewegung, zugänglich wird; er kann demnach nur durch Sonnenbeobachtungen erhalten werden.

Zwischen der Rektaszension A und der Deklination D der Sonne besteht[12]) die einfache Beziehung

$$\sin A \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} D,$$

die es gestattet, bei bekannter Schiefe der Ekliptik ε aus der einen Größe die andere zu berechnen und somit nicht nur den Moment $D = 0$, sondern jeden Meridiandurchgang der Sonne, bei dem D gemessen ist, zur Fixierung der Lage des Frühlingspunktes zu verwerten. Um ε *und* A zu erhalten, genügen sonach in der Theorie zwei beliebige Sonnenbeobachtungen. Die Praxis schlägt den Weg ein, daß sie zur Zeit der Solstitien ε bestimmt, weil dann eine mäßige Genauigkeit in der Kenntnis von A genügt ($\sin A$ nahezu $= \pm 1$), und zur Zeit der Äquinoktien A, weil sich dann $\sin A$ am schnellsten ändert; beide Male kann man auch Beobachtungen, die mehrere Wochen entfernt liegen, benutzen. Der Vorgang ist dann der folgende: Jede Meridianbeobachtung der Sonne in beiden Koordinaten zur Zeit der Äquinoktien gibt ihre Rektaszension A, damit den Fehler der Uhr und so die Rektaszension jedes in nahezu gleicher Zeit mitbeobachteten Fixsterns, sobald man den Uhrgang durch Beobachtung

---

11) Zwar könnte man den Meridian als die Ebene definieren, in der alle festen Gestirne ihre größte resp. geringste Höhe erreichen, indessen würde diese Definition trotz ihres Vorteils einer unmittelbaren Bestimmung keine scharfe Festlegung gestatten. — Über andere Methoden der Polhöhenbestimmung spezielleren Charakters, Durchgangsbeobachtungen im *Ersten Vertikal* (d. i. der Kreis durch Zenit und Ost- und Westpunkt des Horizonts), *Talcott-Horrebow*-Methode usw. vgl. die Lehrbücher, sowie den Artikel VI 2, 3 (*Wirtz*). Die erstere wird auch zur Bestimmung von Deklinationsdifferenzen mit Erfolg angewandt.

12) Unter Vernachlässigung der geringfügigen, von den Planetenstörungen herrührenden Sonnenbreiten, die man für sich berücksichtigt.

von Zeitsternen unter Kontrolle hält. Um den Einfluß des Uhrganges möglichst zu beseitigen, schließt man eine Reihe der hellsten Sterne, die man auch am Tage in nächster Nähe der Sonne bald vor, bald nach ihr beobachten kann, an die Sonne an und erhält so ein unabhängiges System fundamentaler Rektaszensionen. Dieses Fundamentalsystem, dessen weitere Verbesserung namentlich hinsichtlich der Eigenbewegungen (s. p. 62, 69) eine ständige Aufgabe des Meridiankreises bleibt, legt man den weiteren Beobachtungen zu Grunde. Man ist dann behufs Ableitung der Uhrkorrektion und damit der Rektaszensionen nicht mehr auf die Zeit der Äquinoktien und auf Sonnenbeobachtungen angewiesen, sondern erhält aus jeder Durchgangsbeobachtung eines Fundamentalsterns die Sternzeit, damit den Fehler der Uhr und dadurch die Rektaszension jedes andern Gestirns, dessen Meridiandurchgang nach der Uhr beobachtet ist.

4. Die gegenwärtige Praxis der Meridianbeobachtungen. Die in Nr. 3 entwickelte Grundidee der Bestimmung der äquatorealen Koordinaten am Meridiankreise wird in der heutigen Praxis gewissermaßen stufenweise verwirklicht, indem man relative oder Anschlußbeobachtungen von fundamentalen Beobachtungen sondert.

Letztere haben selbständig ein Verzeichnis der sphärischen Koordinaten für eine größere Reihe über den ganzen Himmel verteilter Sterne zu liefern. Ein solches Verzeichnis heißt dann „Fundamentalsystem". Erstere haben die Aufgabe, mehr differentiell oder interpolatorisch den Ort eines beliebigen Sterns unter Zuhilfenahme der durch das Fundamentalsystem gelieferten Positionen benachbarter Sterne abzuleiten.

Die fundamentale Bestimmung der Deklinationen. Die Begründung eines fehlerfreien Fundamentalsystems in Deklination bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, es kommt hier nur an auf eine Kritik der Instrumentalfehler, wie Biegung, Teilungsfehler, und auf scharfe Bestimmung der Refraktion. Hierüber, wie über die systematischen Unterschiede der verschiedenen Deklinationssysteme vgl. Artikel VI 2, 5 (*Ristenpart*). Eine letzte Kontrolle und Adjustierung eines Fundamentalsystems in Deklination hat *S. Newcomb* [13]) darin gefunden, daß er die im Anschluß an das Fundamentalsystem gewonnenen Planetenörter darauf prüft, ob sie (nach Abzug der Störungen) mit dem Satze

13) *S. Newcomb,* The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy (*Newcomb,* Fund. Const.), Washington 1895, auch als Supplement to the Amer. Ephem. for 1897 (Washington 1895), p. 89; ferner: *Newcomb,* Fund. Catal. (s. Fußn. 32), p. 188.

der Mechanik vereinbar sind, daß die Planetenbahnen in Ebenen durch die Sonne verlaufen.

Die fundamentale Bestimmung der Rektaszensionen. Der im Prinzip einfachste und durchsichtigste Weg besteht in der Beobachtung des einzelnen Fundamentalsterns und der Sonne am selben Tage nicht allzu weit von den Zeiten der Äquinoktien. Die Beobachtung der Sonne in Deklination liefert, wie oben ausgeführt, die AR. derselben, der Zeitunterschied zwischen der Kulmination der Sonne und der des betreffenden Sterns führt zur Kenntnis der AR. des letzteren. In dieser Weise schloß noch *Bessel* bei seiner Bearbeitung der Beobachtungen *J. Bradley*'s 14 der hellsten Sterne, welche *Bradley* besonders oft auch am Tage beobachtet hatte, einzeln direkt an die Sonne an und begründete auf dieses System die Reduktion der übrigen Beobachtungen. *N. Maskelyne, Bradley*'s Nachfolger in Greenwich, erweiterte dieses erste Fundamentalsystem zu dem System der nach ihm genannten 36 *Maskelyne*'schen Fundamentalsterne; dasselbe besteht aus den hellsten, südlich des Zenits von Greenwich kulminierenden und damit äquatornahen Sternen und hat ein Jahrhundert lang mit geringfügigen Änderungen die Grundlage aller AR.-Beobachtungen gebildet.

Der Weg des direkten Anschlusses der einzelnen Sterne an die Sonne besitzt indessen neben manchen Vorteilen große Unbequemlichkeiten. Einmal sind die Sonnenbeobachtungen, da man auf die schwierige Beobachtung der Sonnenränder angewiesen ist, weit unsicherer und persönlichen Auffassungsunterschieden weit mehr ausgesetzt als Sternbeobachtungen; dann aber bringen sie das den AR.-Beobachtungen an sich gänzlich fremde Element der Deklinationen hinein, die ihre eigenen schwer zu eliminierenden Fehlerquellen haben. Endlich kann man nur die Zeit der Äquinoktien zur Verbesserung des Fundamentalsystems benutzen. Man trennte daher späterhin die beiden Aufgaben der *Bestimmung des Fundamentalsystems in sich* und der *Ableitung seines konstanten Fehlers, d. i. der Bestimmung des Äquinoktiums,* voneinander[14]).

Die *Bestimmung des Fundamentalsystems in sich* ist freilich einer Fehlerquelle ausgesetzt, die sich bei direktem Anschluß an die Sonne

14) Schon *N. Maskelyne* bestimmte bei seinen Katalogen für 1770 (Tables for computing the apparent places of the fixed stars, London 1774), 1790 (*F. Wollaston,* Specimen of a general catalogue, London 1789) und 1805 (Greenw. obs. 1807, II, p. 112 und *F. X. Zach,* Tabulae speciales aberrationis I. Gotha 1806) nur die AR. von α Aquilae durch direkten Anschluß an die Sonne und für die andern 35 Fundamentalsterne ihre AR.-Unterschiede gegen α Aquilae.

leichter eliminieren läßt, den täglich-periodischen Schwankungen[9]) des Uhrganges (im weitesten Sinne, d. h. des eigentlichen Ganges der Uhr, des Instruments und des Beobachters).

Um diesem Einfluß zu begegnen, verband *G. Piazzi*[15]) wenigstens 2 Sterne, α Can. min. (Procyon) und α Aquilae (Atair), deren Rektaszensionsdifferenz nahezu 12^h beträgt, direkt mit der Sonne und schloß die übrigen Sterne an einen dieser beiden Fixpunkte an. *Bessel* beobachtete dieselben beiden Sterne möglichst häufig in verschiedenen Jahreszeiten, um ihre unter Benutzung täglicher Uhrgänge abgeleitete AR.-Differenz unabhängig von den täglichen Schwankungen des Uhrganges zu erhalten, und verfuhr dann so wie *Piazzi*. Trotzdem zeigen seine beiden Fundamentalkataloge[16]) die Spuren systematischer Fehlerquellen[17]). Weiter gingen *U. J. Leverrier*[18]) und *A. Auwers*[19]) in der Elimination dieser Fehlerquellen durch differentielle Anschlüsse.

Nachdem einmal die ersten Fundamentalkataloge vorlagen, schlug man vielfach das Verfahren ein, die Positionen eines Ausgangskatalogs als im Prinzip richtig, d. i. ohne einen gesetzmäßigen Fehler anzusehen und nur die rein individuellen Korrektionen der einzelnen Sternpositionen abzuleiten. Man nimmt dann den Uhrgang nur für wenige Stunden als linear an und reduziert alle inzwischen beobachteten Fundamentalsterne auf ihr Mittel. Dabei wird zwar die Schwierigkeit der täglichen Periode des Uhrgangs zum guten Teil vermieden, dagegen wird ein gesetzmäßiger Fehler des Ausgangskatalogs in den abgeleiteten Verbesserungen nur wenig abgeschwächt wieder auftreten[20]), die unabhängige, fundamentale Natur der Beobachtungen geht verloren; es ist dies tatsächlich bei den Greenwicher Katalogen, die auf *Pond*'s Fundamentalkatalog basiert sind, der Fall gewesen[21]). Diese Fehlerquelle suchten *S. Newcomb*[20]) und *G. B. Airy*[22]) zu umgehen.

15) *G. Piazzi,* Del real osservatorio di Palermo Libro Sesto. Palermo 1806; und: Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae ineunte saeculo XIX, Panormi 1814.

16) *Bessel,* Berl. Abh. 1818—19 und 1825.

17) Siehe u. a.: *F. Cohn,* Astr. Ges. Vjs. 33 (1898), p. 291; und: Königsb. Beob. 39 (1899).

18) Obs. de Paris ann. 2 (1856), p. 186 ff. enthält eine neue Ableitung der 36 Maskelyne'schen Fundamentalsterne aus *Bradley*'s Beobachtungen.

19) *A. Auwers,* Reduktion der Beobachtungen der Fundamentalsterne zu Palermo 1803/05, Astr. Ges. Publ. 5 (1866); und: Neue Reduktion der *Bradley*'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750—1762, 1, St. Petersburg 1903.

20) *S. Newcomb,* Positions of the fundamental stars, Wash. obs. 1867, app. 3; auch separat (Washington 1870).

21) *T. H. Safford,* On the positions of the Radcliffe Catalogue, Lond. Astr.

Wesentlich strenger verfuhr *A. Wagner*[23]), indem er die durch eine solche Gruppenzusammenfassung erhaltenen Verbesserungen nur als relativ zum Gruppenmittel ansah und die Verbesserungen der Gruppenmittel nach den Jahreszeiten[24]) diskutierte. Man vermeidet alle Abhängigkeit von früheren Beobachtungen und eliminiert den Uhrgang ohne Benutzung der Sonne, wenn man die Kulminationszeiten je zweier aufeinander folgend beobachteter Fundamentalsterne nur zu einer Gleichung für die Differenz ihrer AR.-Verbesserungen verwertet und diese Gleichungen unter Berücksichtigung einer etwaigen täglich-periodischen Schwankung des Uhrganges auflöst[17]).

Gegenwärtig fallen diese Schwierigkeiten bei der Ableitung eines fehlerfreien Fundamentalsystems nicht mehr so ins Gewicht, da der tägliche Gang der Uhr durch geeignete Kompensation und Aufstellung in gleichmäßig temperierten Räumen beseitigt, der Gang des Instruments durch Wasserwage und Mire unter Kontrolle gehalten werden kann und die neuere Erfindung des *Repsold*'schen selbstregistrierenden Mikrometers (s. Artikel VI 2, 5 (*Ristenpart*)) eine täglich-periodische Schwankung der persönlichen Auffassung wohl ausschließt.

Festlegung des Aquinoktiums. Ist das Fundamentalsystem hinreichend sicher in sich begründet, so folgt zum Schluß die Bestimmung seines konstanten Fehlers durch Anschluß an die Sonne. Diese setzt sich aus dem eigentlichen Anschluß des Fundamentalsystems an die Sonne und der Bestimmung des Frühlingspunktes durch Beobachtung von Sonnendeklinationen um die Zeit der Äquinoktien zusammen. Den ersteren erhält man, indem man die nach der Uhr beobachteten Durchgangszeiten der Sonne durch Berücksichtigung der aus den gleichzeitigen Beobachtungen der Fundamentalsterne erhaltenen Uhrkorrektionen in Rektaszensionen, bezogen auf das Fundamentalsystem, verwandelt. Die Vergleichung dieser beobachteten mit den aus den Deklinationsbeobachtungen berechneten absoluten Rektaszensionen gibt die Verbesserung des Fundamentalsystems, die demnach sowohl von

---

Soc. Monthly Not. 21 (1861), p. 245; *W. A. Rogers,* On the periodic errors of the right ascensions observed between 1858 and 1871, Amer. Ac. Proc. N. S. 1 (1875).

22) *G. B. Airy,* Nine-Year Cat. for 1872, Greenw. obs. 1876, app. 1. Hier wie ebenso in den beiden folgenden Katalogen für 1880 und 1890 (Ten-Year u. Second Ten-Year Cat., Greenw. obs. 1887, app. 2; 1898, app. 2) werden zur Elimination der periodischen Fehler nur Beobachtungsreihen benutzt, die sich über mindestens 12 Stunden erstrecken (twelve hour groups).

23) *A. Wagner,* Poulkova obs. 3 (1870), und besonders 12 (1887).

24) Verschiedenheiten nach den Jahreszeiten würden auf eine tägliche Schwankung des Uhrganges zurückzuführen sein.

den systematischen Fehlern der Deklinationen, wie von dem persönlichen Auffassungsunterschieden vornehmlich ausgesetzten Anschluß der Sterne an die Sonne abhängig ist[25]).

Historisches über Fundamentalkataloge. Die erwähnten beiden *Bessel*'schen Kataloge der 36 *Maskelyne*'schen Fundamentalsterne haben lange Zeit die Grundlage der meisten astronomischen Arbeiten auf diesem Gebiete gebildet, indem auf ihnen die viel benutzten „Tabulae Regiomontanae"[26]) beruhten. Daneben spielten auch noch andere Bestimmungen derselben Sterne eine Rolle, wie *W. Struve*'s „Positiones mediae", *Fr. Argelander*'s „Catalogus Aboënsis", *J. Ph. Wolfers*' Katalog in seinen „Tabulae reductionum"[27]). Eine grundlegende Bearbeitung der 36 *Maskelyne*'schen Fundamentalsterne führte dann *S. Newcomb* aus[28]).

Allmählich machte sich das Bestreben geltend, die Zahl dieser Fundamentalsterne zu vermehren und sie über den ganzen Himmel auszudehnen, um den differentiellen Anschluß der andern Gestirne (s. später) an das Fundamentalsystem inniger zu gestalten. So entstanden z. B. die Kataloge der Pulkowaer Hauptsterne für 1845, 1865 und 1885[29]). Die Jahrbücher bildeten eigene erweiterte Fundamentalkataloge aus, so der Nautical Almanac im Anschluß an die *Pond*'schen und *Airy*'schen Beobachtungen[30]). Das große Zonenunternehmen der „Astronomischen Gesellschaft" führte zu dem Fundamentalkatalog von *A. Auwers*[31]), der von dem „Berliner astronomischen Jahrbuch" übernommen wurde und mit seinen Erweiterungen in dem letzten Viertel

---

25) Siehe z. B. *A. Wagner,* Poulkova obs. 12 (1887), p. (89) ff.

26) *Bessel,* Tab. Reg., siehe Literaturübersicht p. 17.

27) *J. Ph. Wolfers,* Tabulae reductionum observationum astronomicarum annis 1860 usque ad 1880 respondente, Berolini 1858. Er enthält eine Bearbeitung zahlreicher früherer Beobachtungsreihen.

28) *S. Newcomb,* On the right ascensions of the equatorial fundamental stars, Wash. obs. 1870, app. 3.

29) Poulkova obs. 1, 4, 12 (1869—87); Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. (2) 1, 3, 9 (1898—1903).

30) In verschiedenen Jahrgängen der „Greenwich Observations". — Ferner entstanden: *L. Boss,* Declinations of fixed stars, Washington 1878; *S. Newcomb,* Catalogue of 1098 Standard Clock and Zodiacal Stars, Washigton 1882, Abdruck aus Wash. Astron. Papers 1 (1880).

31) *A. Auwers,* Fundamentalkatalog für die Zonenbeobachtungen am nördlichen Himmel, Astr. Ges. Publ. 14 (1879); 17 (1883); Astr. Nachr. 121 (1889), p. 145; 143 (1897), p. 361 (Südhimmel). — Später erschienen „Vorläufige Verbesserungen . . .", Astr. Nachr. 147, p. 49 u. 105; endlich eine definitive Bearbeitung „Ergebnisse der Beobachtungen 1750—1900 für die Verbesserung des Fundamentalkatalogs des Berl. Jahrbuchs, Astr. Nachr. 164 (1904), p. 225.

des 19. Jahrhunderts die Grundlage der meisten Meridianbeobachtungen bildete. Daneben wurde in neuester Zeit der Fundamentalkatalog von *S. Newcomb*[32]) seiner größeren Zahl von Sternen halber (über 1000) trotz wesentlich geringerer Genauigkeit der individuellen Positionen vielfach angewandt, insbesondere solange die definitive Bearbeitung von *Auwers'* Fundamentalkatalog ausstand. Ganz kürzlich erschien ein Fundamentalkatalog von *Lewis Boss*[33]).

Auch diese Fundamentalkataloge werden zukünftig zur Erzielung eines möglichst innigen Anschlusses an das Fundamentalsystem noch erweitert werden. Dabei muß aber die erforderlich bleibende beständige Verbesserung eines solchen Fundamentalsystems, wenn man nicht die Fehler des Ausgangskatalogs in den abgeleiteten Verbesserungen stets mitschleppen will, stufenweise durch Zurückgehen auf engere Systeme, wie das der *Maskelyne*'schen Sterne oder ein ähnliches, erfolgen.

Relative oder Anschlußbeobachtungen. Man besitzt in den erwähnten Fundamentalkatalogen ein genügend sicher begründetes und genügend umfangreiches System fundamentaler Sternpositionen, um daran bequem die Hauptmasse der Fixsterne, sowie Sonne, Mond und Planeten anschließen zu können. Jede Beobachtung eines solchen Anhaltsternes gibt die Nullpunkte der Zählung, den Äquatorpunkt und die Uhrkorrektion. Dabei ist in beiden Koordinaten auf möglichst differentiellen Anschluß an das Fundamentalsystem zu achten. Am innigsten ist derselbe bei den *Zonenbeobachtungen*, bei denen man nur Sterne eines schmalen Deklinationsgürtels beobachtet und die Anhaltsterne möglichst derselben Himmelsgegend entnimmt.

5. Kritische Untersuchung der Voraussetzungen. Die im vorigen im Prinzip dargestellten Methoden der astronomischen Koordinatenbestimmung erhalten in der Praxis ein ganz anderes Aussehen, sobald man prüft, ob die derart bestimmten Koordinaten den von der Theorie gestellten Ansprüchen genügen. Die Theorie bedarf zur Untersuchung der wahren Bewegungen der auf feste Koordinatenebenen bezogenen sphärischen Koordinaten desjenigen Punktes der scheinbaren Himmelskugel, auf den sich das Objekt von ihrem Mittelpunkt aus gesehen projiziert. Die Beobachtung gibt und kann nur geben die sphärischen Koordinaten der Visierrichtung, in welcher wir das Fernrohr

32) *S. Newcomb,* Catalogue of fundamental stars for 1875 and 1900, Washington 1898, Abdruck aus Wash. Astron. Papers 8 (*Newcomb,* Fund. Catal.).

33) *L. Boss,* Positions and motions of 627 Standard Stars, Astron. Journ. 23 (1903), p. 17.

einstellen, bezogen auf gewisse, leicht bestimmbare Fundamentalebenen, deren Unveränderlichkeit im Raume sie aber nicht verbürgen kann. Zu untersuchen ist also einmal die Abweichung der Richtung, in der das Objekt uns erscheint, der *scheinbaren* Richtung von der geometrischen *wahren*, und ferner die Unveränderlichkeit des Koordinatensystems, auf welches sich die Beobachtung der Koordinaten bezieht. Es zeigt sich, daß das *Prinzip* der Beobachtungen von diesen Einflüssen nicht merklich betroffen wird, daß hingegen die unmittelbar beobachteten Größen keineswegs den Ansprüchen der Theorie genügen, sondern erst einer entsprechenden Reduktion bedürfen.

5a. Änderungen der Visierrichtung. I. *Die Parallaxe.* Das Auge des Beobachters, und damit der Koordinatenanfang, ist nicht im Raume fest, sondern nimmt an der Bewegung des Erdortes teil. Diese Ortsänderung ruft scheinbare Verschiebungen in den Örtern der Himmelskörper hervor, die man als parallaktische bezeichnet und je nach der Art der Ortsveränderung des Beobachters als tägliche, jährliche und säkulare Parallaxe unterscheidet. Man befreit sie davon durch Übergang auf einen von der Bewegung des Erdorts unabhängigen Koordinatenanfang, wozu man neben der Kenntnis dieser Bewegung auch der Entfernung des Gestirns bedarf; umgekehrt bieten diese Bewegungen des Beobachters das wichtigste Hilfsmittel zur Bestimmung der Entfernungen der Gestirne.

II. *Die astronomische Strahlenbrechung.* (Vgl. Art. VI 2, 8 (*Oppolzer*).) Sie wirkt bei den Meridianbeobachtungen in derselben Art, wie Teilungsfehler des Meridiankreises und wird mit diesen zugleich berücksichtigt.

III. *Die Aberration.* Unter dem Namen der „astronomischen Aberration" pflegt man die Erscheinungen zusammenzufassen, die der endlichen Fortpflanzung des Lichts ihre Entstehung verdanken. Diese sind zweierlei Natur. Die eine entsteht dadurch, daß das Gestirn sich zur Zeit, da wir es beobachten, nicht mehr an dem Ort des Himmels befindet, den es zur Zeit der Lichtaussendung einnahm. Man nennt diesen Einfluß oft „Planetenaberration" aus dem äußerlichen Grunde, daß man ihn bisher nur bei den Körpern des Planetensystems in Rechnung zu ziehen Ursache hatte.

Seinen Ursprung verdankt der übliche Name der zweiten Erscheinung, der sog. „Fixsternaberration". Das Objekt erscheint uns infolge derselben in der Richtung der Diagonale des Parallelogramms, welches durch die Geschwindigkeit V des Lichtstrahls und die (nach rückwärts aufzutragende) Geschwindigkeit v des Beobachters

bestimmt ist[34]). Der Aberrationseffekt ist also gleich dem parallaktischen Effekt, der entsteht, wenn man den Beobachter um den Betrag v in seiner Bewegungsrichtung zurückverlegt und das Gestirn in der Entfernung V betrachten läßt.

Die Entdeckung dieser eigentlichen Aberration erfolgte empirisch durch *James Bradley*[35]), der bei seinem Versuche, Fixsternparallaxen zu bestimmen, auf die jährliche Aberration geführt wurde. Auch gab er dafür auf der Grundlage der Emissionstheorie des Lichts eine entsprechende Erklärung[36]). Die Begründung der Aberrationslehre durch die Undulationstheorie setzt mit *Fresnel* ein[37]).

Die beiden Fragen, ob der Aberrationsbetrag vom Medium des Fernrohrs und der daraus folgenden Änderung der Lichtgeschwindigkeit V abhänge[38]) und ob er durch die Bewegung der Lichtquelle beeinflußt werde[39]), sind negativ zu beantworten. Man vergleiche die ausführliche Behandlung der ganzen schwierigen Aberrationsfrage in dem Artikel V 14 (*Lorentz*).

5 b. Änderungen des Koordinatensystems. Präzession, Nutation, Bewegung des Erdpols[40]). Die Rotationsachse der Erde ist sowohl im Raume wie im Erdkörper beweglich, ebenso unterliegt die Ekliptik langsamen Schwankungen. Demnach sind die Grundlagen des Koordinatensystems, auf welches die Beobachtung angewiesen ist, bewegt, und ihre Veränderlichkeit ist, wenn man aus den zu verschiedenen Zeiten beobachteten, auf die momentane Lage der Fundamentalebenen bezogenen Koordinaten der Gestirne auf ihre Bewegungen schließen will, durch Übergang auf feste Grundebenen zu berücksichtigen.

---

34) Siehe *C. F. Gauß,* Theoria motus corporum coelestium, Hamburgi 1809 (auch Werke Bd. 7), § 71.

35) *J. Bradley,* Account of a new discovered motion of the fixed stars, Lond. Phil. Trans. 1728, p. 637 [= abr. 7, p. 308].

36) Vgl. z. B. *Lalande [Jérôme le Français],* Astronomie, 3. éd. Paris 1792, Nr. 2827/29 (3, p. 92—93).

37) *A. Fresnel,* Ann. chim. phys. 9 (1818), Brief an Arago, abgedruckt in *Fresnel,* Oeuvres 2 (Paris 1868), p. 627.

38) S. z. B. *Lalande* l. c. Fußn. 36), Nr. 2833 (3, p. 95), worin *Lalande* erwähnt, daß ihm *R. G. Boscovich* die Idee, durch Einführung einer Wassersäule in das Fernrohr die Frage zu entscheiden, im Jahre 1766 mitteilte; *W. Klinkerfues,* Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie, Leipzig 1867.

39) Vgl. auch *H. Battermann,* Beiträge zur astronomischen Aberrationslehre, Diss. Berlin 1881; *H. Poincaré,* Leçons sur la théorie mathématique de la lumière, Paris 1889 (dtsch. v. *Gumlich* u. *Jaeger,* Berlin 1894), chap. 8.

40) Vgl. hierzu neben den in der Literaturübersicht genannten Werken von *Oppolzer, Tisserand* und *Helmert* noch *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Über die Theorie des Kreisels 3, Leipzig 1903.

Auch die Methoden der Koordinatenbestimmung selbst, sowie die Definitionen der Zeit, Polhöhe etc., die ein festes Koordinatensystem voraussetzten, bedürfen einer Prüfung und verschärften Fassung.

Die Theorie ergibt die folgenden Bewegungen der Fundamentalebenen:

Die Ekliptik. Die Lage der Erdbahn erleidet unter dem Einfluß der Planetenanziehung langsame Änderungen, deren Form und numerischer Betrag theoretisch abgeleitet wird, da die hierzu nötigen Daten, wie die Bahnelemente der Planeten und ihre Massen, sich mit hinreichender Schärfe aus den translatorischen Bewegungen bestimmen lassen. Auf die äquatorealen Koordinaten der Gestirne hat diese Beweglichkeit der Ekliptik nur insofern Einfluß, als der Ausgangspunkt der Zählung der Rektaszensionen davon betroffen wird; sie bewirkt eine für alle Sterne gleiche, von der Zeit abhängende Änderung der Rektaszensionen und läßt die Deklinationen ganz ungeändert. Die numerischen Ausdrücke siehe später.

Die Rotationsachse der Erde. Die Bewegungen der Rotationsachse der Erde im Erdkörper und im Raume werden als besonderer Fall des allgemeinen Problems der Rotation eines Körpers behandelt[41]). Unter Berücksichtigung der quantitativen Verhältnisse und Vernachlässigung alles dessen, was merklich unterhalb einer Beobachtungsgenauigkeit von 0″.01 liegt, ergibt sich für die Bewegung der momentanen Rotationsachse das folgende Bild:

Infolge der Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente A und C führt die momentane Rotationsachse der Erde unter dem Einfluß der Sonnen- und Mondanziehung im Erdkörper eine geringfügige, nahezu täglich-periodische Schwankung um die polare Hauptträgheitsachse, im Raume die sog. Präzessions- und Nutationsbewegung aus. Die erstere verursacht eine Veränderlichkeit der Polhöhe und des Meridians und hat die Form[42]):

$$\xi = +0''.009 \sin \Theta - 0''.007 \sin (\Theta - 2\odot) - 0''.003 \sin (\Theta - 2\mathbb{C})$$

$$\eta = -0''.009 \cos \Theta + 0''.007 \cos (\Theta - 2\odot) + 0''.003 \cos (\Theta - 2\mathbb{C}).$$

41) Die besonderen Voraussetzungen betreffen neben der nahezu völligen Starrheit des Erdkörpers die derzeitige Kleinheit des Winkels zwischen der Rotationsachse und der polaren Hauptträgheitsachse, wozu die Erfahrungstatsachen berechtigen, sowie daß die Differenz der beiden äquatorealen Hauptträgheitsmomente A und B gering sei; aus Pendelbeobachtungen, welche keine merkliche Abhängigkeit der Größe der Schwerkraft von der geographischen Länge ergeben haben, folgt, daß sicher $\frac{B-A}{C-A} < \frac{1}{100}$ ist; vgl. z. B. *Helmert.*

42) Siehe *Helmert* 2, p. 434; *Tisserand* 2, p. 496.

Darin bedeuten ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten des Erdpols in Bezug auf seine Mittellage, derart daß ξ die Polhöhenschwankung eines Erdorts zur Sternzeit Θ darstellt; $\odot$ und $\mathfrak{C}$ sind Länge der Sonne und des Mondes.

Die räumliche Bewegung der Erdachse erzeugt eine Bewegung des ganzen Koordinatensystems; sie zerfällt in eine langperiodische um den Pol der Ekliptik, die „Präzession", und eine Reihe kurzperiodischer Schwankungen um eine Mittellage, welche man zusammenfassend als Nutation bezeichnet. Der Präzession entspricht eine der Zeit nahezu proportionale Drehung der Schnittlinie des Äquators und der Ekliptik in letzterer und damit eine fortschreitende Bewegung des Frühlingspunktes, welche als „Präzession der Äquinoktien" bezeichnet wird, während der Neigungswinkel beider Ebenen ungeändert bleibt. Die „Nutation" bewirkt eine unregelmäßige Schwankung des Frühlingspunktes und zugleich auch der Schiefe der Ekliptik[43]). Die numerischen Ausdrücke siehe später.

Im Falle einer merklichen Ungleichheit der beiden äquatorealen Hauptträgheitsmomente würden Sonne und Mond eine halbtägige Nutation und eine halbtägige Kegelbewegung der Erdachse im Erdkörper erzeugen, deren Betrag indessen wegen $\frac{A-B}{C-A} < \frac{1}{100}$ weit unter der Grenze der Meßbarkeit liegt. Auch eine nicht vollkommene Starrheit des Erdkörpers würde keine merklichen Änderungen hervorrufen[44]).

Zu der geschilderten Bewegung der Rotationsachse der Erde kommt noch eine weitere hinzu, die ihrem nicht genauen Zusammenfallen mit der polaren Hauptträgheitsachse ihre Entstehung verdankt und unabhängig von äußeren Kräften ist. Bei einem absolut starren und äußeren Kräften nicht unterworfenen Erdkörper würden die momentane Rotationsachse und Hauptträgheitsachse entweder dauernd zusammenfallen oder die erste würde um die letztere einen kleinen Kegel konstanter Öffnung α in der sogenannten *Euler*'schen Periode[45]) von

---

43) Die „Präzession der Äquinoktien" entdeckte schon *Hipparch* (siehe *Ptolemäus*, Almagest VII, Kap. 2), die Nutation erst *James Bradley*, Lond. Phil. Trans. 45 (1747—48), p. 1 [= abr. 9, p. 417].

44) Gegenteilige Behauptung von *F. Folie* (Existence et Grandeur de la Précession et de la Nutation diurnes, Bruxelles 1882, und in zahlreichen anderen Schriften) und deren Kritik durch *R. Lehmann-Filhés*, Astr. Nachr. 124 (1890), p. 377, vgl. auch Fußn. 49).

45) *L. Euler*, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostock u. Greifswald 1765.

$\frac{A}{C-A}=304.8$ mittleren Sonnentagen[46]) beschreiben. Im Raume hingegen wäre die momentane Rotationsachse nahezu fest[47]). Die Bewegung der Rotationsachse im Erdkörper würde eine periodische Schwankung der Polhöhen und der Erdmeridiane im Laufe von ca. 10 Monaten hervorrufen. Die nahezu völlige Konstanz der Rotationsachse im Raume bei einer völlig freien Erde bewirkt in der Praxis, daß, wenn wir unsere im momentanen Meridian angestellten Beobachtungen mit der momentanen Polhöhe reduzieren, sie damit auf eine im Raume nur der Präzession und Nutation im gewöhnlichen Sinne[48]) unterworfene Achse bezogen sind[49]).

Ist die Starrheit des Erdkörpers keine vollkommene, so bleibt die Festigkeit der momentanen Rotationsachse im Raume erhalten. Über ihre Bewegung im Erdkörper hingegen können angesichts der unkontrollierbaren Verlagerungen der Hauptträgheitsachse nur Beobachtungen Aufschluß geben[50]). Erst im Laufe des 19. Jahrhunderts gelang es nach mancherlei ergebnislosen Versuchen die reelle Existenz solcher Bewegungen der Erdachse im Erdkörper in der Form von Polhöhenschwankungen nachzuweisen (*C. A. F. Peters*, *M. Nyrén*, *Fr. Küstner*). Indessen erwies sich die *Euler*'sche Periode, die *Peters* und *Nyrén* noch ohne Erfolg ihren Untersuchungen zu Grunde gelegt

---

46) Zahlenwert nach *Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 151.

47) Genauer gesagt beschreibt der momentane Erdpol um den Pol der unveränderlichen Ebene einen kleinen Kreis von $\alpha \cdot \frac{C-A}{C}$ Öffnung, wobei $\frac{C-A}{C}=\frac{1}{305}$, $\alpha<1''$ ist. Siehe z. B. *Helmert* 2, p. 407/08, sowie schon *C. A. F. Peters*, Resultate aus Beobachtungen des Polarsterns, Astr. Nachr. 22 (1845), p. 71, 81, 119.

48) D. h. wie sie die Sonnen- und Mondanziehung beim völligen Zusammenfallen der Rotations- und Hauptträgheitsachse erzeugen würden.

49) In einer unrichtigen Auffassung dieser Verhältnisse liegt der Fehler in den von *F. Folie* gegen die übliche Art der Reduktion der Beobachtungen wiederholt erhobenen Einwänden, soweit sie die „nutation initiale" betreffen. Neben den zahlreichen Schriften *Folie*'s in den Astr. Nachr., Astr. Ges. Vjs., Paris C. R., Paris Bull. astr. 7 (1890), Obs. de Bruxelles annuaire etc. vgl. besonders *R. Radau*, Quelques mots sur la question de la nutation diurne, Paris Bull. astr. 7 (1890), p. 194; *F. Tisserand*, Note sur la nutation diurne, Paris Bull. astr. 7 (1890), p. 278.

50) Unter plausibeln Annahmen kann man wenigstens schließen, daß ihre Schwankungen gering sind, sicherlich $<1''$. Eine Literaturzusammenstellung findet man bei *Helmert* 2, p. 408 ff., sowie insbesondere bei *Tisserand* 2, chap. XXIX und XXX.

hatten, durch andere Einflüsse ganz verdeckt; *S. C. Chandler*[51]) zeigte vielmehr, daß eine nahezu 432 tägige Periode neben einer jährlichen die Beobachtungen am besten darstellt. Doch sind die Schwankungen so unregelmäßig, daß sie beständig unter Kontrolle gehalten werden müssen; diese wird zur Zeit von einem eigens dazu eingerichteten internationalen Breitendienst ausgeübt[52]).

Numerische Angaben über Präzession und Nutation. Die Bewegungen der Fundamentalebenen werden in der beifolgenden Figur, die aus größten Kreisen auf der Himmelssphäre gebildet zu denken ist, veranschaulicht.

Es stellen dar: EE_o, EE_t, AA_o, AA_t die Lagen der beiden Fundamentalebenen für zwei Epochen, deren eine durch den Index o charakterisierte als fest gilt, während die andere durch den Index t als variabel gekennzeichnet wird. t bezeichnet die seit jener fixen Epoche verflossene Zeit in julianischen Jahrhunderten (36525 mittleren Sonnentagen). A und E sind die aufsteigenden Knoten der beweglichen auf der festen Grundebene. Dann sind Υ_o, Υ_t die wahren Frühlingspunkte beider Epochen, ϑ_o, ϑ_t die wahren Schiefen, während ϑ' (oder $\vartheta'_{o,\,t}$), die Schiefe des beweglichen Äquators gegen die feste Ekliptik, für die theoretischen Entwicklungen erforderlich ist[53]). Als

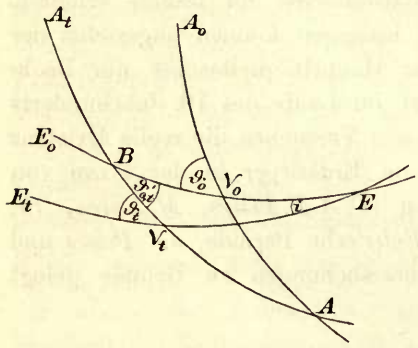


Fig. 1.

51) Vgl. eine Reihe von Aufsätzen *S. C. Chandler*'s: „On the variation of latitude" im Astron. Journ. (der erste 11 (1891), p. 59).

52) Vgl. darüber die verschiedenen Berichte in den Verh. Comm. Erdm., sowie *Th. Albrecht*, Resultate des internationalen Breitendienstes 1, Berlin 1903. Die Polbewegung in dem früheren Jahrzehnt behandeln auf Grund zahlreicher Beobachtungsreihen verschiedene Aufsätze *Albrecht*'s in den Astr. Nachr., der erste 126 (1891), p. 145. — Für hohe nördliche Gegenden wäre auch die Beobachtung von Längendifferenzen (*M. Brendel*, Über den Einfluß von Polschwankungen auf die geographische Lage der Erdorte, Astr. Nachr. 131 (1892), p. 59) und von irdischen Azimuten aussichtsreich. Bisher ist nur gelegentlich der Nachweis versucht worden, daß die Änderung des Azimuts der Meridianmiren zum Teil von der Schwankung des Meridians selbst herrühre. Die erste Andeutung gibt *F. W. Bessel*, Königsb. Beob. 6 (1821), p. XVII; dann *A. Socoloff*, Bestimmung der periodischen Bewegung der Erdpole mittels der Miren des Pulkowaer großen Passageninstruments, Astr. Nachr. 132 (1893), p. 359 und 134 (1894), p. 233. — *E. Becker*, Straßb. Sternw. Ann. 1 (1896), p. LVI.

53) In den Bezeichnungen besteht bisher große Verschiedenheit, s. z. B.

feste Epoche legt man jetzt nach *Leverrier*[54]) gewöhnlich die von 1850, früher nach *Laplace*[55]), dem sich *Bessel*[56]) anschloß, die von 1750 zu Grunde.

Zur Fixierung und rechnerischen Verfolgung der Lageänderungen und ihres Einflusses auf die Koordinaten der Gestirne bedient man sich in der Praxis am einfachsten der gegenseitigen Neigung beider Ebenen und der Länge des Knotens in ihnen, also für die Ekliptik der Größen:

$$E\Upsilon_o = \Omega, \quad E\Upsilon_t = \Omega + \psi, \quad \sphericalangle \Upsilon_o E \Upsilon_t = i,$$

welche die Theorie als Funktionen der Zeit dargestellt liefern muß.

Die Bewegung der Ekliptik für sich läßt sich unabhängig von der Aquatorbewegung darstellen. Für sie findet *Oppolzer*[57]):

$$\operatorname{tg} i \cdot \sin \Omega = + \ 5''.841\, t + 0''.1964\, t^2 + \cdots = g t + r t^2 ;^{58})$$

$$\operatorname{tg} i \cdot \cos \Omega = - \ 47''.594\, t + 0''.0568\, t^2 + \cdots = g' t + r' t^2$$

oder

$$i = 47''.951\, t - 0''.0325\, t^2,$$

$$\Omega = 173^0\, 0'\, 12'' - 868''.3\, t.$$

Um aber in der beweglichen Ekliptik die Lage des Frühlingspunktes zu fixieren, ist die Kenntnis der Äquatorbewegung erforderlich. Die Theorie der Erdrotation legt dieselbe zunächst gegen die

---

Tisserand, Méc. céleste, nach *Laplace, Poisson, Serret* einerseits und die in der Literaturübersicht genannten Werke von *Bessel, Brünnow, Oppolzer* andrerseits. Im folgenden ist großenteils nach *Oppolzer* vorgegangen. Es bezeichnen ϑ die wahre, ε die mittlere Schiefe der Ekliptik, ψ die vollständige, l die rein präzessionale Änderung des Äquinoktiums, ferner die gestrichelten Buchstaben Größen von theoretischer Bedeutung: ϑ' Schiefe des beweglichen Äquators gegen die feste Ekliptik, l' lunisolare Präzession, während beobachtbare Größen durch ungestrichelte Buchstaben bezeichnet sind: ϑ Schiefe des beweglichen Äquators gegen die bewegliche Ekliptik. Endlich sind vielfach Indizes benutzt. Die meisten Größen hängen von beiden Epochen o und t ab, wie $\vartheta'_{o,t}$, $\psi_{o,t}$, $l_{o,t}$ usw.; bei diesen sind gelegentlich beide Indizes fortgelassen; hingegen sind ϑ_t, ε_t nur von der einen Epoche abhängig und führen ihren Index stets mit sich.

54) *U. J. Leverrier*, Recherches astronomiques, Obs. de Paris ann. 1—14 (1855—77).

55) *P. S. Laplace,* Traité de mécanique céleste, 5 Bde., Paris 1799—1825.

56) *Bessel,* Fund. und *Bessel,* Tab. Reg.

57) *Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 124 führt in die *Leverrier*'schen Ausdrücke (Obs. de Paris ann. 4 (1858), p. 49 u. 50), die $g = 5''.888$, $g' = - 47''.566$ geben, einige von *Leverrier* selbst später (p. 96) gegebene Massenkorrektionen ein.

58) Diese vorübergehende Bezeichnung, ebenso wie später Ψ, Θ nach *Tisserand.*

fixe Ekliptik von 1850 fest und charakterisiert sie entsprechend durch $\vartheta'_{o,t}(\vartheta'_{o,o} = \vartheta_o)$ und $B\Upsilon_o = \psi'_{o,t}$, wobei $180^0 - \psi'_{o,t}$ die Länge des aufsteigenden Knotens des beweglichen Äquators auf der festen Ekliptik ist; sie findet dafür:

$$\psi' = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + \Psi = l' + \Psi$$
$$\vartheta' = \varepsilon_0 + b_2 t^2 + \cdots + \Theta = \varepsilon' + \Theta.$$

Die Potenzreihen nach t stellen darin für sich betrachtet die Präzessionsbewegung, d. h. die Bewegung des sog. mittleren Äquators gegen die feste Ekliptik, ε_0 die mittlere Schiefe der Ausgangsepoche dar, während Ψ und Θ periodischen Charakters sind und die Nutationsbewegung des wahren gegen den mittleren Äquator liefern. Man nennt l' die lunisolare Präzession, ε' die mittlere lunisolare Schiefe (besser $\varepsilon' - \varepsilon_0$ die lunisolare Änderung der mittleren Schiefe).

l', ε', sowie die periodischen Glieder Ψ, Θ hängen einmal ab von den Bahnelementen der Erde und des Mondes, die für den vorliegenden Zweck als genügend bekannt gelten können, dann aber noch von zwei anderen Größen, deren Kenntnis zur Zeit auf anderem Wege nicht mit der erforderlichen Schärfe zu erhalten ist und daher umgekehrt gerade aus dem beobachtbaren Effekt der Präzessions- und Nutationsbewegung auf die Koordinaten der Gestirne gewonnen zu werden pflegt. Diese Größen sind $\frac{C-A}{C}$, wo A und C wie früher die von der unbekannten Massenverteilung im Erdkörper abhängenden Hauptträgheitsmomente der Erde bedeuten, und das Verhältnis der Mondmasse zur Sonnenmasse.

Zur Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen ist indessen noch der Übergang auf die bewegliche Ekliptik, auf die sich die Beobachtungen beziehen, auszuführen. Die Beziehung der beiden beweglichen Fundamentalebenen zu einander geben die Größen:

$$E\Upsilon_t = \Omega + \psi \text{ und } \sphericalangle A_t \Upsilon_t E_t = \vartheta_t,$$

die Knotenlänge der beweglichen gegen die feste Ekliptik, bezogen auf den wahren Frühlingspunkt, und die wahre Schiefe zur Zeit t. Für diese Größen ψ und ϑ_t (auch $a = B\Upsilon_t$) gibt das sphärische Dreieck $EB\Upsilon_t$ mit den Seiten $\Omega + \psi'$, $\Omega + \psi$, a und den Winkeln i, ϑ', $180^0 - \vartheta_t$ in den früheren Bezeichnungen die folgende Entwicklung:

$$\psi_{o,t} = (a_1 - g \cdot \operatorname{cotg}\vartheta_o)t + \{a_2 - (r_1 + a_1 g')\operatorname{cotg}\vartheta_o + gg'(\operatorname{cotg}^2\vartheta_o - \tfrac{1}{2})\}t^2 + \Psi = l_{o,t} + \Psi,$$
$$\vartheta_t = \vartheta_o + g't + (b_2 + r' - a_1 g + \tfrac{1}{2}g^2 \operatorname{cotg}\vartheta_o)t^2 + \Theta = \varepsilon_t + \Theta.$$

Darin stellen wieder $l_{o,t}$ und ε_t die säkularen Terme dar, Ψ und Θ die periodischen. Man nennt $l_{o,t}$, d. h. den Überschuß von $E\Upsilon_t$

über $E\Upsilon_0$ (unter Υ_0 und Υ_t jetzt die mittleren Frühlingspunkte verstanden) die allgemeine Präzession[59]), die sich von der lunisolaren $l'_{0,t}$ durch den Effekt der den Planetenstörungen entstammenden Bewegung der Ekliptik unterscheidet; man nennt danach auch $a = B\Upsilon_t$ die Präzession durch die Planeten; ferner ist ε_t die mittlere Schiefe der Ekliptik zur Zeit t.

Diese Größe $l_{0,t}$ ist es nun, die aus den Beobachtungen entnommen wird; man bezeichnet den Koeffizienten des ersten Gliedes von $l_{0,t}$ mit dem Namen der „Präzessionskonstante"

$$P = a_1 - g \cdot \operatorname{cotg} \vartheta_0,$$

die aber natürlich von der Ausgangsepoche T abhängig ist[60]).

Die im 19. Jahrhundert üblichen Werte[61]) sind hier zusammengestellt (T in Jahrhunderten):

$$F.\ W.\ Bessel = 50''.2235 + 0''.02443\ (T - 1800);$$
$$O.\ Struve = 50''.2411 + 0''.02268\ (T - 1800);$$
$$S.\ Newcomb = 50''.2341 + 0.0223\ (T - 1800).$$

Der letzte Wert ist seit Beginn des 20. Jahrhunderts allgemein angenommen[62]).

Als Nutationskonstante N definiert man den Koeffizienten des Hauptgliedes $N\cos\Omega'$ in dem Ausdruck von Θ, wobei Ω' die Länge des aufsteigenden Mondknotens ist. Die üblichen Werte von N sind:

---

59) *Tisserand* bezeichnet (2, p. 435) eigentlich mit ψ'' (unser $\psi_{0,t}$) nicht den Überschuß von $E\Upsilon_t$ über $E\Upsilon_0$, sondern $\Upsilon_0 D$, wenn $\Upsilon_t D$ das von Υ_t auf EB gefällte Lot darstellt. Beide Größen unterscheiden sich um einen Betrag von der Ordnung t^2. Es ist also nicht ganz strenge, wenn er sein ψ'' bis t^2 genau entwickelt und es dann mit jenem Überschuss identifiziert; indessen ist der Effekt $-\frac{gg'}{2} \cdot t^2$ sehr gering und der Koeffizient dieses oben auftretenden, bei *Tisserand* fehlenden Termes erreicht nur 14 Einheiten in der von *Tisserand* noch gegebenen 8. Dezimale.

60) *S. Newcomb* führt statt dessen den Buchstaben P und den Namen Präzessionskonstante für den Ausdruck $a_1 \sec\varepsilon$ ein: A new determination of the precessional constant, Wash. Astron. Papers 8 (1898), p. 6.

61) Vgl. über diese Werte, die als *Bessel*'sche, *Struve*'sche und *Newcomb*'sche Präzessionskonstante bekannt sind, und zahlreiche andere Bestimmungen die Zusammenstellung bei *S. Newcomb* [60]), Section I: Previous Determinations, p. 10.

62) S.: Conférence internationale des étoiles fondamentales de 1896 à Paris. Procès-verbaux, Paris 1896 (*Conf. ét. fond.*). Jede Änderung der Präzessionskonstante verursacht einen erheblichen Aufwand von Arbeit, indem die vorhandenen auf den bisherigen Wert von P bezogenen Reduktionsrechnungen (s. Nr. 8) in den neuen Wert übergeführt werden müssen, und sollte mit größter Vorsicht vorgenommen werden; s. auch die Diskussion zwischen *S. Newcomb* und *L. Boss*, Astron. Journ. 18 (1898).

$N = 9''.2231$ (1800), $9''.2240$ (1900) nach *C. A. F. Peters*[63]);
$N = 9''.2365$ (1850) nach *M. Nyrén*[64]);
$N = 9''.2100$ (1900)[65]).

Die Entwicklung der Ausdrücke Ψ und Θ und ihre Ausführung in numerischer Form geschah unter Erweiterung der *Laplace*'schen auf die Hauptglieder beschränkten Ausdrücke zuerst von *Bessel*[66]); die der Erdbahnexzentrizität entstammenden kleineren Glieder gab *C. A. F. Peters*[63]); nach *Oppolzer*[67]), der diese Entwicklungen weit über die Bedürfnisse der heutigen Praxis ausführte, lauten die Hauptglieder ($> 0''.05$) für 1900.0 (die Koeffizienten sind ein wenig veränderlich):

$$\Psi = 0''.1255 \sin g - 1''.2648 \sin 2\odot - 17''.2819 \sin \Omega' + 0''.2095 \sin 2\Omega' - 0''.2044 \sin 2\mathbb{C} + 0''.0678 \sin g',$$
$$\Theta = 0''.5488 \cos 2\odot + 9''.2365 \cos \Omega' - 0''.0905 \cos 2\Omega' + 0''.0887 \cos 2\mathbb{C},$$

worin $\odot$, $\mathbb{C}$ Sonnen- und Mondlänge, g und g' mittlere Anomalie der Sonne und des Mondes bedeuten. Das Hauptglied besitzt eine Periode von $18^2/_3$ Jahren, welche der Bewegung der Mondknoten in der Ekliptik entspricht und den „wahren" Pol die sog. Nutationsellipse $\left(\text{mit den Achsen } a = 9''.365 \text{ und } b = a\frac{\cos 2\varepsilon}{\cos \varepsilon} = 6''.878\right)$ um eine mittlere Lage, den „mittleren" Pol, beschreiben läßt.

Durch die gegebenen Daten sind die Bewegungen der beweglichen gegen die feste Ekliptik (i, Ω, $\Omega + \psi$), des beweglichen wahren oder mittleren Äquators gegen die feste (ψ', ϑ' oder l', ε') oder die bewegliche Ekliptik ($\Omega + \psi$, ϑ_t oder $\Omega + l$, ε_t) zugleich mit der Lage des jedesmaligen Frühlingspunktes bestimmt.

Die Nutationsausdrücke lassen sich einfach tabulieren und geben dann für jede Epoche die Abweichung der Lage des wahren Äquators gegen den mittleren[68]).

---

63) *C. A. F. Peters,* Numerus constans nutationis ex asc. rectis stellae polaris deductus, Petropoli 1842.

64) *M. Nyrén,* Bestimmung der Nutation der Erdachse, St. Pét. mém. (7) 19 (1872), Nr. 2.

65) Conf. ét. fond., sowie *S. Newcomb,* Fund. Const., p. 131, s. Fußn. 62) und 13).

66) *Bessel,* Fund., p. 125; Astr. Nachr. 2 (1824), p. 157 und 4 (1826), p. 185.

67) *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 124 ff.; numerische Angaben p. 237/38.

68) *Bessel,* Tab. Reg.; *C. A. F. Peters,* s. Fußn. 63); *Oppolzer,* Bahnb. Außerdem in allen Jahrbüchern.

Die Präzessionsformeln, die als säkulare Bewegungen von der Anfangs- und Endepoche abhängen, haben noch die Unbequemlichkeit, auf die feste Anfangsepoche 1850.0 begründet zu sein. Man gibt daher auch die Übertragungsformeln von einer willkürlichen Epoche auf eine andere an.

So erhält man nach *Oppolzer*[69]) zur Übertragung von $1850 + \tau$ auf $1850 + \tau + t$

$$l = \{5023''.572 + 2''.2582\tau + 0''.00093\tau^2\}t + \{1''.1291 + 0''.00093\tau\}t^2 + 0''.00032t^3,$$

$$\varepsilon = (23^0 27' 31''.83 - 47''.594\tau - 0''.0143\tau^2 + 0''.00204\tau^3) - (47''.594 + 0''.0287\tau - 0''.00612\tau^2)t - (0''.0143 - 0''.00612\tau)t^2 + 0''.00204t^3,$$

$$l' = (5037''.032 + 0''.5007\tau + 0''.00001\tau^2)t - (1''.0888 + 0''.00177\tau)t^2 - 0''.00174t^3,$$

$$\varepsilon' = (23^0 27' 31''.83 - 47''.594\tau - 0''.0143\tau^2 + 0''.00204\tau^3) + (0''.0713 - 0''.00936\tau)t^2 - 0''.00786t^3,$$

$$a = (14''.673 - 1''.9173\tau - 0''.00081\tau^2)t - (2''.4184 + 0''.00261\tau)t^2 - 0''.00212t^3,$$

$$\Omega = 173^0 0' 12'' + 3287''.0\tau + 0''.87\tau^2 - (868''.3 + 0''.26\tau)t + 0''.11t^2,$$

$$i = (47''.951 - 0''.0650\tau)t - 0''.0325t^2 - 0''.00014t^3.$$

Diese Formeln enthalten alles zur Reduktion der beobachteten Örter auf ein festes System Erforderliche; doch ist es noch ratsam, auch den beweglichen mittleren[70]) gegen den festen Äquator festzulegen, da die Beobachtung gerade äquatoreale Koordinaten gibt[71]). Die hierzu dienenden Formeln gab zuerst *Bohnenberger*[72]). Führt man nach *Oppolzer* analog den ekliptikalen Größen l, i, Ω die äquatorealen m, n, $90^0 - p$[73]) ein, so daß $m + a$ (entsprechend l') als lunisolare, m als allgemeine Präzession im Äquator von der einen

---

69) *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 197.

70) Der Nutationseffekt in äquatorealen Koordinaten wird differentiell aus dem ekliptikalen abgeleitet.

71) Zwar läßt sich die Transformation der äquatorealen Koordinaten auf dem Umweg über die ekliptikalen stets ausführen; indessen ist es eben häufig ein Umweg.

72) *G. C. Bohnenberger,* Über die Präzession der Fixsterne in gerader Aufsteigung und Abweichung, Tübinger Zs. für Astr. 1 (1816), p. 124 und 270.

73) Die Schnittlinie beider Äquatoren hat bei nicht zu großen Zeitintervallen, wie leicht ersichtlich, nahezu die Rektaszension 90°.

Epoche bis zur anderen bezeichnet werden kann und n die gegenseitige Neigung der beiden Äquatorebenen darstellt, so folgt (aus dem Dreieck $A\Upsilon_0 B$):

$$\operatorname{tg}\frac{m+a}{2} = \operatorname{tg}\frac{l'}{2}\cdot\cos\frac{\varepsilon_t+\varepsilon'}{2}\cdot\sec\frac{\varepsilon_t-\varepsilon'}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(p-\frac{m+a}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{l'}{2}\cdot\sin\frac{\varepsilon_t-\varepsilon'}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{\varepsilon_t+\varepsilon'}{2},$$

$$\sin n = \sin l'\cdot\frac{\sin\varepsilon'}{\cos p} \text{ oder } \operatorname{tg}\frac{n}{2} = \frac{\sin\frac{m+a}{2}}{\cos\left(p-\frac{m+a}{2}\right)}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varepsilon_t+\varepsilon'}{2}.$$

In erster Annäherung ist:

$$m = l'\cdot\cos\varepsilon_t - a,$$
$$n = l'\cdot\sin\varepsilon_t.$$

Die weitere Entwicklung gibt nach *Oppolzer*[74]) für den Übergang von $1850+\tau$ zu $1850+\tau+t$:

$$m = (4606''.029 + 2''.8393\,\tau + 0''.00088\,\tau^2)\,t + (1''.4196 + 0''.00088\,\tau)\,t^2 + 0''.03657\,t^3,$$
$$n = (2005''.193 - 0''.8669\,\tau - 0''.00048\,\tau^2)\,t - (0''.4334 + 0''.00048\,\tau)\,t^2 - 0''.04182\,t^3,$$
$$p = (2303''.0 + 1''.42\,\tau)\,t + 0''.31\,t^2.$$

Diese letzteren Formeln konvergieren offenbar nicht so rasch wie die entsprechenden ekliptikalen, was aber erst bei Zeitdifferenzen von 1000 Jahren und mehr merklich wird. Man muß dann das strenge trigonometrische Formelsystem anwenden.

5 c. Rotationsgeschwindigkeit, Konstanz des Zeitmaßes. Man kann nicht mehr im eigentlichen Sinne von einer Rotationsdauer der Erde reden, sobald die Rotationsachse im Erdkörper wie im Raume beweglich ist, sondern muß die Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Rotationsachse einführen. Die Theorie zeigt, daß unter der Annahme eines absolut starren Erdkörpers diese Rotationsgeschwindigkeit ω weit über die Bedürfnisse der Praxis hinaus als konstant gelten[75]) und danach die Zeiteinheit T durch

$$\int_0^T \omega\,dt = 2\pi$$

definiert werden kann. Etwas anders liegt die Sache, sobald die Starr-

74) *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 197.

75) Eine etwaige geringfügige Ungleichheit von A und B würde nur unmeßbare Schwankungen während einer Umdrehung hervorrufen.

heit des Erdkörpers keine vollkommene ist, da jede Massenverschiebung Einfluß auf ω gewinnen muß. Indessen führen auch hier plausible Annahmen über täglich- oder jährlich-periodische Verlagerungen meteorologischen Ursprunges nur zu unmeßbaren Beträgen, so daß die Konstanz der Zeiteinheit und des Zeitmaßes auf längere Zeit hin als gewährleistet angesehen werden kann. Über säkulare Änderungen durch allmähliche Anhäufung an sich geringfügiger Effekte infolge von Flutreibung, Kontraktion des Erdkörpers, säkulare Vereisung oder Abschmelzen der polaren Gegenden, Erhöhung der Erdmasse durch niederfallende Meteore usw. können nur Beobachtungen Aufschluß geben, und zwar die Beobachtungen anderer Bewegungsvorgänge, deren Verlauf wir schärfer theoretisch zu verfolgen vermögen als die Rotation eines nicht völlig starren Erdkörpers, nämlich der Translationsbewegungen im Sonnensystem. Jede Änderung der in praxi zu Grunde gelegten Zeiteinheit muß sich in ihnen abspiegeln, indem zwischen der auf ein gleichförmiges Zeitmaß aufgebauten Theorie und den auf die übliche Zeitrechnung bezogenen Beobachtungen Widersprüche entstehen. Zur Prüfung dieser Frage werden sich diejenigen Bewegungsvorgänge eignen, die einmal bei entsprechender Beobachtungsgenauigkeit die schnellsten Winkelbewegungen besitzen, deren Theorie aber andrerseits sich in der Schärfe geben läßt, daß man wirklich alle Widersprüche säkularer Natur gegenüber der Beobachtung auf die Ungleichförmigkeit des Zeitmaßes zurückzuführen berechtigt ist.

Die zunächst in Betracht kommende Mondbewegung weist in der Tat merkliche Widersprüche auf, welche seit lange den Verdacht einer veränderlichen Geschwindigkeit der Erdrotation erweckt haben[76]). Aber gerade in neuester Zeit kommt *S. Newcomb*[77]) zu dem Ergebnis, daß die Theorie der Mondbewegung sowohl wie die Genauigkeit der älteren Beobachtungen — teils der eigentlichen Beobachtungen, teils ihrer Reduktion — keineswegs den Ansprüchen genügen, um darauf jenen Verdacht begründen zu können. Schon früher hatte er daher die Bewegung des Merkur zur Entscheidung herangezogen, ohne trotz mancher Übereinstimmung ein völlig befriedigendes Resultat erzielen zu können. Die Beobachtungen der Jupitersatelliten würden demnächst zu befragen sein; doch ist auch hier die Theorie noch nicht genügend entwickelt, resp. das Beobachtungsmaterial nicht genügend bearbeitet. Und nur ein gleichartiges Voreilen oder Zurückbleiben

76) S. z. B. den Artikel VI 2, 23 (*Oppenheim*).

77) *S. Newcomb*, On the desirableness of a reinvestigation of the problems growing out of the mean motion of the moon, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903), p. 316.

gegen die Theorie in *allen diesen* Bewegungen würde man auf die Ungleichförmigkeit unseres Zeitmaßes zurückführen können. Zur Zeit wird man die Frage nach der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit der Erdrotation noch als eine offene bezeichnen müssen.

6. Scharfe Definition der Koordinaten und der Zeit. Die in Nr. 5 erörterten Erscheinungen machen eine schärfere Fassung der früher gegebenen Definition der Koordinaten erforderlich, außerdem beeinflussen die unter Nr. 5 b. behandelten Bewegungsvorgänge die Art ihrer Bestimmung, sowie der der Zeit.

Die beobachteten, d. h. noch mit Parallaxe und Aberration behafteten Örter der Gestirne — die Refraktion berücksichtigt man, wie erwähnt, bei den Instrumentalfehlern — bezeichnet man als „scheinbare" Örter[78]). Sind sie von Parallaxe und Aberration befreit, so stellen sie die wirklichen auf die momentane Lage des Äquators und der Ekliptik bezogenen Koordinaten der Gestirne dar, man nennt sie ihre „wahren"[79]) Koordinaten. Geht man von dem mit den Nutationsschwankungen behafteten wahren Weltpol zu seiner nur der Präzessionsbewegung unterliegenden mittleren Lage über, so nennt man sie „mittlere" Koordinaten der betreffenden Epoche. Schließlich bezieht man sie dann auf den festen Weltpol und die feste Ekliptik einer bestimmten Epoche. Objekte der Beobachtung sind die „scheinbaren" Koordinaten, ihr Zweck die Bestimmung der „mittleren" Örter, bezogen auf das feste Äquinoktium einer bestimmten Epoche. Die Übertragungsformeln siehe Nr. 7.

a) *Polhöhe, Meridian, Deklination.* Die Polhöhe, d. h. der Winkel zwischen Horizont und Erdachse, und der Meridian, d. h. die Ebene durch die Erdachse und die Richtung der Schwerkraft, können Änderungen sowohl durch Schwankungen der Erdachse wie auch der Vertikalen gegen den Erdkörper erleiden. Und diese Schwankungen übertragen sich durch die Art der Meridianbeobachtung auf die äquatorealen Koordinaten der Gestirne. Die Richtung der Schwerkraft kann, soweit sie nur als die vereinigte Wirkung der eigentlichen Massenanziehung der Erde und der Zentrifugalkraft betrachtet wird, als zum Erdkörper fest vorausgesetzt werden, insofern die vorkommenden Massenverlagerungen nur verschwindenden Einfluß ausüben können[80]).

78) Der Ausdruck „scheinbar" ist, soweit er sich auf die Parallaxe bezieht, eine nicht ganz treffende Übersetzung des „locus apparens", des Orts, an dem uns die Gestirne erscheinen.

79) „Wahr" eben im Gegensatz zu „scheinbar". Eine Bezeichnung als Gegensatz zu den „mittleren Örtern" hat sich nicht eingebürgert.

80) Sprunghafte oder säkulare Änderungen durch lokale Massenverschie-

Die hinzutretende Wirkung der Sonne und des Mondes bewirkt indessen infolge des Umlaufs beider um die Erde eine vom Azimut des betreffenden Gestirns abhängige Schwankung der momentanen Lotlinie in einem kleinen Kegel um eine Mittellage, deren Periode bei der Sonne einen Tag, beim Monde etwas mehr beträgt.

Der Betrag der Schwankung ist für die Sonne, resp. den Mond[81]):

$$\xi = \left.\begin{matrix} -0''.008 \\ -0''.017 \end{matrix}\right\} \sin 2z \cos A, \quad \eta = \left.\begin{matrix} -0''.008 \\ -0''.017 \end{matrix}\right\} \sin 2z \sin A,$$

wenn z, A Zenitdistanz und Azimut des Gestirns, ξ, η südliche und westliche Abweichung des gestörten Zenits bedeuten. Es entsteht dadurch einmal eine nahezu täglich-periodische Schwankung der Polhöhe, die bei der Übertragung der gemessenen Meridianzenitdistanzen in Deklinationen in Rechnung zu ziehen ist[82]) und eine periodische Schwankung der Meridianebene, resp. der Neigung der Achse des Meridianinstruments, selbst wenn es an sich gegen den Erdkörper absolut fest aufgestellt wäre. Ihrer Geringfügigkeit halber können diese Schwankungen der Lotlinie bei der Bestimmung der äquatorealen Koordinaten gänzlich unberücksichtigt bleiben und sind nur bei der Untersuchung der Polhöhenschwankungen in Rechnung zu ziehen.

Die momentane Polhöhe und der momentane Meridian, deren man zur Überführung der Beobachtungsgrößen in äquatoreale wahre Koordi-

bungen in der Erdrinde würden hier nicht in Frage kommen; die Frage säkularer Änderungen der Polhöhen ist auch noch keineswegs entschieden, s. z. B. *Helmert* 2, p. 445. — Inwieweit die Lotlinie durch regelmäßige Massenverlagerungen im ganzen Erdkörper periodische Schwankungen, etwa jährlicher Periode erleidet ist ganz neuerdings Gegenstand noch nicht abgeschlossener Untersuchungen geworden, s. *H. Kimura,* On the existence of a new annual term in the variation of the latitude, independent of the components of the pole's motion, Astr. Nachr. 158 (1902), p. 233; *S. C. Chandler,* Questions relating to stellar parallax, aberration and Kimura's phenomenon, Astron. Journ. 23 (1903), p. 12; *Th. Albrecht,* Resultate des internationalen Breitendienstes 1, Berlin 1903, p. 153 ff.

81) *C. A. F. Peters,* Von den kleinen Abweichungen der Lotlinie und des Niveaus, welche durch die Anziehungen der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischen Gegenstände hervorgebracht werden, Astr. Nachr. 22 (1845), p. 33; s. auch *Helmert* 2, p. 383.

82) Würde man das Meridianinstrument absolut fest zum Erdkörper aufstellen können, so könnte man durch Kombination oberer und unterer Kulminationen den Polpunkt auf dem Kreise fixieren und sonach Deklinationen unabhängig von der Richtung der Schwerkraft bestimmen. Indessen ist diese ältere, z. B. noch von *Bessel* anfangs der 20er Jahre des vor. Jahrh. benutzte Methode durch *J. G. F. Bohnenberger*'s Erfindung des Quecksilberhorizonts („Neue Methode, den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen und die Horizontalachse einer Mittagsfernröhre zu berichtigen, ohne Lot oder Libelle", Astr. Nachr. 4 (1826), p. 327) völlig verdrängt worden.

naten bedarf, sind eigentlich nicht in aller Strenge festzustellen, da sie nur durch Kombination zweier um 12^h auseinanderliegender Beobachtungen erhalten werden, und daher nur einem mittleren Zeitmoment entsprechen können. Die Geringfügigkeit der Schwankungen der Rotationsachse im Erdkörper läßt trotzdem die heutige Praxis als berechtigt erscheinen, wonach man den momentanen Meridian und die momentane Polhöhe durch Beobachtung von Circumpolarsternen festlegt und die letztere zur Überführung der beobachteten Zenitdistanzen in Deklinationen (ev. mit einer nachträglich zu ermittelnden Korrektion) verwendet.

b) *Zeit und Rektaszension.* Die Anforderungen an die Gleichförmigkeit des der Zeitmessung dienenden Bewegungsvorgangs sind verschiedene, je nachdem man der Messung der Zeit bedarf, um die Bewegungen der Gestirne in ihrer Abhängigkeit von der Zeit theoretisch untersuchen zu können, oder zu der früher entwickelten Methode der Messung von AR.-Differenzen durch die Zeitdauer zwischen den entsprechenden Kulminationen. Die letztere bleibt von dem veränderten Begriff der Erdrotation unbeeinflußt, da nach dem Früheren die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation um die momentane Achse für alle praktischen Bedürfnisse als konstant gelten kann. Über die etwaigen Folgen einer säkularen Ungleichförmigkeit der Erdrotation für den ersteren Zweck vgl. Nr. **5** c.

Daneben hängt aber die Konstanz des Zeitmaßes noch ab von dem Ausgangspunkte der Rechnung der Zeiteinheit und von der Art, wie man den Zeitmoment festlegt. Die Zeiteinheit war in Nr. **3** als die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen des Frühlingspunktes, die Sternzeit als Stundenwinkel des Frühlingspunktes definiert worden. Diese Definition hält man auch jetzt fest, nur bezieht man sie auf den wahren Frühlingspunkt. Dieser ist freilich am Himmel weder fest noch gleichförmig bewegt und die wahre Sternzeit ebensowenig ein gleichförmiges Zeitmaß wie die wahre Sonnenzeit. Seine Schwankungen sind indessen quantitativ so gering, daß sie nur in den seltensten Fällen bei der Messung der Zeit, niemals bei der Messung von Rektaszensionsdifferenzen berücksichtigt zu werden brauchen. Im Laufe einer Nutationsperiode von $18^2/_3$ Jahren würde eine völlig gleichförmig (nach „mittlerer" Sternzeit) gehende Uhr im Maximum je $1^s.05$ nach beiden Seiten vom Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes abweichen, was wohl nur bei der Bewegung des Mondes merklich werden kann. Dazu käme eine halbjährige Schwankung von $\pm\ 0^s.08$. Und auch die Bewegung des mittleren Frühlingspunktes verläuft nach dem Früheren infolge der Präzession genau genommen

weder der Zeit proportional noch in einem größten Kreise des Himmels; in 1000 Jahren ändert sich dadurch die Länge des Jahrhunderts um etwa $1\frac{1}{2}$ Sekunden, was wieder nur für die Theorie der Mondbewegung in Frage kommt.

Endlich ist der Erdpol auf der Erde nicht absolut fest; somit sind die Erdmeridiane veränderlich und die Differenz der Kulminationszeiten und damit der Rektaszensionen hängt strenge genommen von der geographischen Lage ab; indessen ist das praktisch zu vernachlässigen.

Die Fehler unserer üblichen Zeitmessung (durch den Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes) sind also teils unvermeidliche, herrührend von der etwaigen Ungleichförmigkeit der Erdrotation, teils liegen sie in unserer Definition, in der Wahl des ungleichförmig bewegten, wahren Frühlingspunktes zum Ausgangspunkt der Zählung, teils in der Art ihrer Fixierung durch Sterndurchgänge durch den auf der Erde selbst nicht festen Meridian. Trotzdem reicht die übliche Sternzeitrechnung für alle Bedürfnisse der heutigen Praxis (Bestimmung der AR.-Differenzen aus den Unterschieden der Meridiandurchgangszeiten) völlig aus; nur bei der Zeitmessung selbst werden in der Zukunft zunächst die säkularen Beträge, dann aber bei erhöhter Beobachtungsgenauigkeit auch die periodischen, Berücksichtigung verdienen.

Zusammenfassend ergibt sich die Berechtigung der folgenden Sätze, soweit es sich um praktisch erreichbare Genauigkeit handelt:

Die Durchgangszeit eines Gestirns durch den wahren Meridian nach einer richtige Sternzeit (d. h. den Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes) anzeigenden Uhr ist gleich seiner wahren Rektaszension (natürlich befreit von Aberration usw.); die Meridianzenitdistanzen geben in Verbindung mit der momentanen Polhöhe wahre Deklinationen, d. h. bezogen auf das durch den momentanen Äquator und den momentanen Frühlingspunkt gebildete Koordinatensystem. Dabei können momentaner Meridian und momentane Polhöhe durch aufeinanderfolgende obere und untere Kulminationen von Circumpolarsternen bestimmt werden. Die Reduktion auf ein mittleres Äquinoktium vermitteln dann die üblichen Formeln für die räumliche Bewegung der Erdachse (ohne tägliche Nutation).

7. Reduktion der scheinbaren Sternörter in mittlere. Um den Übergang von den scheinbaren Sternörtern zu mittleren wirklich ausführen zu können, sind die in Nr. **5** allgemein bezeichneten Einflüsse ins einzelne zu verfolgen. Wir schließen jeweils unmittelbar

an die dortigen Ausführungen an und trennen dementsprechend wieder Parallaxe und Aberration einerseits, deren Wirkung sich als eine Verlegung des Koordinatenanfangspunktes darstellt, und Präzession mit Nutation andererseits, welche in einer Drehung des Koordinatensystems bestehen.

Wir bezeichnen im folgenden stets mit r, A, B die Polarkoordinaten des Objekts in einem beliebigen System, befreit von der betreffenden Fehlerquelle, und durch r', A', B' die mit ihr noch behafteten.

7a. Parallaxe und Aberration. Die strengen Formeln für eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems um die Strecken a, b, c in sofort ersichtlicher Zählweise

$$(1)\qquad \begin{cases} r\cos A\cos B = r'\cos A'\cos B' + a, \\ r\sin A\cos B = r'\sin A'\cos B' + b, \\ r\sin B \qquad\quad = r'\sin B' + c \end{cases}$$

bringt man in eine meistens bequemere Gestalt durch Einführung der Differenzen $A'-A$, $B'-B$, $r'-r$. Diese zur Übertragung von O', dem Beobachtungsorte, nach O, dem festen Zentrum, erforderlichen Korrektionen kann man entweder als Funktionen der auf O' oder der auf O bezogenen Koordinaten darstellen. Ersteres ist bei der Reduktion einer einzelnen Beobachtung, letzteres bei der Vorausberechnung einer Ephemeride angebracht. Eine einfache Vertauschung der gestrichelten mit den ungestrichelten Größen unter gleichzeitiger Vorzeichenänderung von a, b, c führt die eine Darstellung in die andere über. Man findet leicht die strengen Formeln[83]):

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(A-A') = \dfrac{-a\sin A' + b\cos A'}{r'\cos B' + a\cos A' + b\sin A'} = \dfrac{-a\sin A + b\cos A}{r\cos B - a\cos A - b\sin A} \\ \operatorname{tg}(B-B') = \dfrac{c\cos B' - \sin B'\sec\dfrac{A-A'}{2}\left(a\cos\dfrac{A+A'}{2} + b\sin\dfrac{A+A'}{2}\right)}{r' + c\sin B' + \cos B'\sec\dfrac{A-A'}{2}\left(a\cos\dfrac{A+A'}{2} + b\sin\dfrac{A+A'}{2}\right)} \\ r - r' = \sec\dfrac{A-A'}{2}\sec\dfrac{B-B'}{2}\left\{a\cos\dfrac{A+A'}{2}\cos\dfrac{B+B'}{2}\right. \\ \qquad\qquad \left. + b\sin\dfrac{A+A'}{2}\cos\dfrac{B+B'}{2} + c\cos\dfrac{A-A'}{2}\sin\dfrac{B+B'}{2}\right\}. \end{cases}$$

Sind a, b, c klein gegen r', so kann man nach Potenzen des Verhältnisses dieser Größen in Reihen entwickeln. Dabei berücksichtigt man

83) S. die entsprechenden Entwicklungen in den Lehrbüchern (z. B. *Brünnow* p. 147 ff., 184 ff.).

entweder nur die Glieder erster Ordnung[84]) oder auch die der zweiten. Reichen auch diese in den festgesetzten Genauigkeitsgrenzen nicht mehr aus, so bleibt man besser bei den strengen Formeln.

I. Die Parallaxe.

Die Befreiung der Beobachtungen von der täglichen und der jährlichen Parallaxe geschieht durch Beziehung auf das Erd-, resp. Sonnenzentrum (geozentrischer, heliozentrischer Ort)[85]); die säkulare Parallaxe wäre, wenn die fortschreitende Bewegung des Sonnensystems bekannt wäre, durch Beziehung auf einen festen Zeitpunkt zu berücksichtigen. Die Behandlung stellt sich verschieden, je nachdem die Entfernung r' des Gestirns, wenn auch nur genähert, bekannt oder ganz unbekannt ist.

Die tägliche Parallaxe. Die Beziehung der Beobachtungen auf das Erdzentrum läßt stets eine differentielle Behandlung mit Reihenentwicklung zu. Legt man das Koordinatensystem des Äquators (α, δ und Δ statt A, B, r) zugrunde[86]), so sind a, b, c die rechtwinkligen, äquatorealen Koordinaten des Erdoberflächenortes in bezug auf den Erdmittelpunkt. Da dessen geozentrische Deklination gleich der geozentrischen Polhöhe φ', seine geozentrische Rektaszension gleich der Sternzeit Θ ist, so folgt, wenn ϱ den Radiusvektor des Erdortes bezeichnet[87]):

$$a = \varrho \cos\varphi' \cos\Theta, \quad b = \varrho \cos\varphi' \sin\Theta, \quad c = \varrho \sin\varphi'.$$

Man nennt $\frac{\varrho}{\Delta}$ die *Horizontalparallaxe*, $\frac{a}{\Delta}$ die *äquatoreale Horizontalparallaxe*[88]) des Gestirns, weil es die Winkel sind, unter denen dem im Horizont des Erdortes befindlichen Gestirn der Radiusvektor des Erdortes, resp. der Äquatorradius der Erde erscheinen. Man

84) In diesem Falle ist es gleichgültig, ob man rechts die gestrichelten oder die ungestrichelten Größen einführt.

85) Streng genommen müßte man statt des letzteren, wenn man die säkulare Bewegung als gradlinig ansehen will, den Schwerpunkt des Sonnensystems wählen.

86) Am anschaulichsten ist der Effekt in Höhe und Azimut; bei genau kugelförmiger Erde verschwindet der letztere ganz; die ellipsoidische Erdgestalt bewirkt eine geringfügige Parallaxe auch im Azimut.

87) Über die Berechnung von ϱ und φ' aus den bekannten Dimensionen des Erdellipsoids siehe die Lehrbücher (*Brünnow*, p. 142; *Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 29); sind vorübergehend a und b beide Halbachsen der Meridianellipse, so ist:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \varrho^2 = a^2 \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \sec(\varphi' - \varphi).$$

88) Kurz Parallaxe des Gestirns.

drückt ϱ gewöhnlich in Einheiten des Äquatorradius, Δ in mittleren Erdbahnradien aus und muß daher in den früheren Formeln $\frac{\varrho}{\Delta}$ noch mit $\sin p_\odot$ ($p_\odot$ Sonnenparallaxe) multiplizieren. Dann lauten unter Einführung des Hilfswinkels γ durch

$$\operatorname{tg}\gamma = \cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cdot\sec\left(\Theta - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi'$$

die strengen Formeln

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha-\alpha') = \dfrac{\frac{\varrho}{\Delta}\sin p_\odot\cos\varphi'\sin(\Theta-\alpha)\sec\delta}{1-\frac{\varrho}{\Delta}\sin p_\odot\cos\varphi'\cos(\Theta-\alpha)\sec\delta}, \\ \operatorname{tg}(\delta-\delta') = \dfrac{\frac{\varrho}{\Delta}\sin p_\odot\sin\varphi'\sin(\gamma-\delta)\operatorname{cosec}\gamma}{1-\frac{\varrho}{\Delta}\sin p_\odot\sin\varphi'\cos(\gamma-\delta)\operatorname{cosec}\gamma}, \\ \Delta' = \Delta\cdot\dfrac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin(\delta'-\gamma)}. \end{cases}$$

Bis auf den Mond[89]) reicht man mit den Gliedern erster Ordnung aus:

$$\begin{cases} \alpha-\alpha' = \frac{\varrho}{\Delta}p_\odot\cos\varphi'\sec\delta\sin(\Theta-\alpha), \\ \delta-\delta' = \frac{\varrho}{\Delta}p_\odot(\cos\delta\sin\varphi' - \sin\delta\cos\varphi'\cos(\Theta-\alpha)), \\ \Delta-\Delta' = \varrho p_\odot(\cos\delta\cos\varphi'\cos(\Theta-\alpha) + \sin\delta\sin\varphi'). \end{cases}$$

In diesen Formeln ist Δ als bekannt vorausgesetzt; sie dienen umgekehrt dazu, aus den beobachteten parallaktischen Effekten die Entfernung des Gestirns in irdischem Maß zu bestimmen[90]).

Die jährliche Parallaxe. Die Größen a, b, c sind hier die heliozentrischen Koordinaten des Erdzentrums, resp. die negativ genommenen geozentrischen Koordinaten des Sonnenzentrums; man findet sie in letzterer Form in den Ephemeriden der verschiedenen Jahrbücher (s. später), die aus den auf Grundlage der Theorie entworfenen Sonnentafeln berechnet sind[91]).

---

89) S. z. B. *Brünnow*, p. 153/154.

90) Über die Berücksichtigung der Abweichung des Beobachtungsorts vom Erdzentrum bei neuentdeckten Planeten und Kometen, deren Entfernung ganz unbekannt ist, vgl. den Artikel VI 2, 9 (*Herglotz*).

91) Die bekannteren Sonnentafeln des 19. Jahrhunderts sind (siehe auch Nr. 8): *F. v. Zach:* Tabulae motuum solis, Gothae 1792 und als Suppl.: Tabulae motuum solis novae et iterum correctae, Gothae 1804; *J. B. J. Delambre,* Tables du soleil, Paris Bur. Long. tabl. astr. 1, Paris 1806; *P. A. Hansen-C. F. R. Olufsen,*

Für die Körper des Sonnensystems, bei denen die Überführung der geozentrischen Örter in heliozentrische für die Zwecke der Theorie geboten ist[92]), wird das Formelsystem (1) praktisch umgeformt[93]).

Für die extrasolaren Himmelskörper ist der Effekt der jährlichen Erdbewegung so gering, daß sich bisher nur für vereinzelte Sterne ihre Parallaxe π, d. h. der Winkel, unter dem die mittlere Entfernung Erde-Sonne von dem Gestirn aus erscheint, hat bestimmen lassen.

Bei Zugrundelegung äquatorealer Koordinaten wird:

$$a = -R\cos\odot, \quad b = -R\sin\odot\cos\varepsilon, \quad c = -R\sin\odot\sin\varepsilon$$

und damit bis zu den Gliedern erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha' &= \pi R\,(\cos\odot\sin\alpha - \sin\odot\cos\varepsilon\cos\alpha)\sec\delta\\ &= \pi R\cos D\sin(\alpha - A)\sec\delta,\\ \delta - \delta' &= \pi R\{(\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta)\sin\odot\\ &\qquad + \cos\odot\sin\delta\cos\alpha\}.\end{aligned}$$

Einfacher ist der Effekt der jährlichen Parallaxe auf die ekliptikalen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\lambda - \lambda' &= \pi R\sin(\lambda - \odot)\sec\beta,\\ \beta - \beta' &= \pi R\cos(\lambda - \odot)\sin\beta.\end{aligned}$$

Die säkulare Parallaxe. Die fortschreitende Bewegung des Sonnensystems kommt allein für die extrasolaren Himmelskörper in Frage, da sie die Körper des Sonnensystems relativ zur Erde in Ruhe läßt. Da indessen a, b, c zunächst als lineare Funktionen der Zeit anzusehen sind, so sind auch die Glieder erster Ordnung in der säkularen Parallaxe für die bisher in Betracht kommenden Zeiträume der Zeit proportional und vermischen sich untrennbar mit den ebenfalls in erster ausreichender Näherung der Zeit proportionalen eigenen Bewegungen der Fixsterne. Erst wenn die rein geometrische Beschreibung der Fixsternbewegungen in eine dynamische übergehen wird, wird man die beiden Vorgänge voneinander trennen können[94]).

II. Die Aberration[95]).

Unter Voraussetzung der Kenntnis der Lichtzeit $t_2 - t_1 = \tau$ zwischen der Aussendung t_1 und dem Eintreffen t_2 des Licht-

Tables du soleil, Copenhague 1853; *U. J. Leverrier,* Tables du soleil, Obs. de Paris ann. 4 (1858); *S. Newcomb,* Tables of the motion of the earth . . ., Wash. Astron. Papers 6 (1898).

92) Statt des nur durch Rechnung festzulegenden Schwerpunkts des ganzen Sonnensystems führt man in der Theorie den beobachtbaren Sonnenmittelpunkt ein.

93) Siehe *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 20 ff.

94) Näheres siehe Artikel VI 2, 26 (*Anding*).

95) Siehe besonders *Y. Villarceau,* Théorie de l'aberration, Addition à la Conn.

strahls[96]) berücksichtigt man zunächst die sog. „Planetenaberration" (oder besser „Lichtzeitparallaxe") durch Übergang auf die Zeit t_1, indem man den parallaktischen Effekt der in der Zeit τ erfolgten Erdbewegung in Rechnung bringt (als tägliche, jährliche, säkulare Lichtzeitparallaxe); dazu kommt dann noch als rein optische Wirkung die eigentliche „Fixsternaberration". Falls die Bewegung des Erdortes während der Lichtzeit als geradlinig gelten kann, lassen sich beide vereinigen. Es gilt nämlich in diesem Falle der Satz:

Die zur Zeit t_2 beobachtete scheinbare Richtung nach einem Gestirn ist gleich der wahren Richtung vom Erdort nach dem Gestirn, beide zur Zeit t_1 genommen; der zur Zeit t_2 beobachtete Ort ist der wahre Ort für die Zeit $t_1 = t_2 - \tau$.

Es bleibt im speziellen zu untersuchen, inwieweit man die Bewegung des Erdortes in der Zeit τ als geradlinig ansehen kann.

Zur Berechnung der Lichtzeit τ benutzt man in $\tau = \frac{\Delta}{V}$ gewöhnlich und ohne besonderen Fehler entweder Δ_1 oder Δ_2, die den Zeiten t_1 oder t_2 entsprechenden geometrischen Entfernungen, während Δ in aller Strenge den Abstand des Sternorts zur Zeit t_1 vom Erdort der Zeit t_2 bedeutet. Den Effekt dieser Vertauschung berechnet *Battermann*[97]) für die jährliche Erdbewegung und findet ihn unmerklich. Für die säkulare Bewegung lassen sich aus Unkenntnis ihres Betrages nicht ähnliche numerische Abschätzungen ausführen. In einer besonderen Form hat *Höffler*[98]) auf diesen Punkt aufmerksam gemacht, indem, die säkulare Bewegung beispielsweise in der Ekliptik vorausgesetzt, die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten eine Ungleichheit von der Periode der Umlaufszeit des Jupiter aufweisen müssen, je nachdem die säkulare Bewegung von der Erde auf Jupiter zu oder von ihm fort gerichtet ist. Für die heute erreichbare Genauigkeit dürften auch diese Einflüsse verschwindend sein, sie zeigen nur für die Zukunft eine Möglichkeit, die säkulare Bewegung zu untersuchen.

Die Formeln für die *Fixsternaberration* ergeben sich nach dem Früheren aus den parallaktischen, wenn man darin für die Entfernung des Gestirns die Lichtgeschwindigkeit, für den Ortsunterschied die

---

des Temps pour 1878, Paris 1876; *H. Battermann,* Beiträge zur astronomischer Aberrationslehre, Diss. Berlin 1881.

96) Ist die Entfernung des Objekts und damit die Lichtzeit unbekannt, so kann man nur die Fixsternaberration berücksichtigen und muß mit dem vom Erdort zur Zeit t_2 gesehenen Sternort der Zeit t_1 rechnen.

97) *Battermann,* Diss. (siehe Fußn. 95), p. 14 ff.

98) *J. F. Höffler,* Über eine Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Sonnensystems, Astr. Ges. Vjs. 31 (1896), p. 297.

negative Geschwindigkeit der Ortsveränderung einführt, d. h. im Formelsystem (1) auf p. 48 r, r' durch V, V'; a, b, c durch $-\frac{da}{dt}$, $-\frac{db}{dt}$, $-\frac{dc}{dt}$ ersetzt.

Die hierin auftretenden Geschwindigkeitskomponenten $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ setzen sich wieder aus drei Summanden zusammen, die der täglichen, jährlichen und säkularen Bewegung des Beobachtungsortes entsprechen und durch Differentiation der bei der Parallaxe aufgestellten Erdortkoordinaten nach der Zeit erhalten werden. Dürfte man die Glieder zweiter Ordnung in den nach $\frac{1}{V}\frac{da}{dt}$, $\frac{1}{V}\frac{db}{dt}$, $\frac{1}{V}\frac{dc}{dt}$ fortschreitenden Reihenentwicklungen vernachlässigen, so könnte man die von diesen drei Bewegungen erzeugten Effekte getrennt behandeln und sie erst nachträglich superponieren. In der Tat darf man die geringfügige tägliche Aberration in dieser Weise sofort ablösen und hat nur die jährliche und säkulare Aberration einer gemeinsamen Betrachtung zu unterwerfen.

Es sei OS die Richtung des wahren Lichtstrahls, OS' die des scheinbaren, wie sie beobachtet wird. Wir zerlegen die absolute Geschwindigkeit OO' in OO_0 die säkulare, und OO_1 die jährliche. Entsprechend erhalten wir in OS_0 die mit säkularer Aberration behaftete wahre, resp. die von jährlicher Aberration befreite scheinbare beobachtete Richtung. Damit ist unmittelbar ersichtlich, daß man von den beobachteten Koordinaten A', B' ausgehend die Gesamtwirkung beider Aberrationen in der folgenden Art berechnen kann:

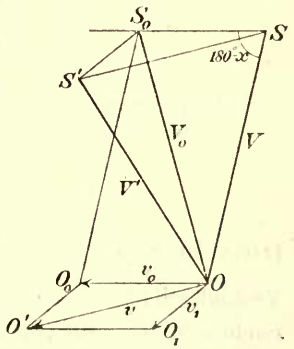


Fig. 2.

Zunächst wird der Effekt der jährlichen Aberration aus den Geschwindigkeitskomponenten der jährlichen Bewegung für sich nach Formelsystem (1) berechnet, wobei man jedoch die absolute Lichtgeschwindigkeit V durch V_0 ersetzt. Um die so von der jährlichen Aberration befreiten Größen A_0, B_0 jetzt noch von der säkularen Aberration zu befreien, hat man die Korrektionen an sie anzubringen, welche aus dem Formelsystem (1) durch Einsetzung der Geschwindigkeitskomponenten der Säkularbewegung hervorgehen.

Das Resultat ist, daß schließlich doch alle drei Bewegungen des Beobachtungsortes getrennt behandelt werden dürfen, wofern man nur bei der Berechnung der jährlichen Aberration die Lichtgeschwindig-

keit mit dem Faktor $1 + \frac{v_0}{V} \cos x$ multipliziert[99]). Nennt man nämlich x den Winkel zwischen den Richtungen des wahren Lichtstrahls und der säkularen Erdbewegung, so hat V_0 den Wert:

$$V_0^2 = V^2 + v_0^2 + 2 v_0 V \cos x$$

oder nahe genug:

$$V_0 = V\left(1 + \frac{v_0}{V} \cos x\right).$$

Die tägliche Aberration. Die Lichtzeitparallaxe kann wie die tägliche Parallaxe überhaupt nur für Körper des Sonnensystems meßbare Beträge erreichen. Da man für die entfernteren Körper die tägliche Bewegung des Erdortes nach *Battermann*[100]) während der Lichtzeit nicht mehr als geradlinig ansehen kann, trennt man Planeten- und Fixsternaberration, vereinigt die erstere mit der täglichen Parallaxe und erhält so für tägliche Parallaxe und Aberration die Vorschrift: Man berechnet die tägliche Parallaxe und Fixsternaberration mit den Erdortkoordinaten der Zeit t_2 und erhält durch ihre Hinzufügung den wahren Ort für die Zeit t_1.[101])

An die Fixsternörter hat man nur die tägliche Fixsternaberration anzubringen; für ihre Berechnung erhält man im System des Äquators:

$$\frac{da}{dt} = -\varrho \cos \varphi' \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt}, \quad \frac{db}{dt} = \varrho \cos \varphi' \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt}, \quad \frac{dc}{dt} = 0$$

und damit, wenn man sich auf die Glieder erster Ordnung beschränkt:

$$\alpha - \alpha' = -c \cos \varphi' \cos(\Theta - \alpha) \sec \delta,$$
$$\delta - \delta' = -c \cos \varphi' \sin(\Theta - \alpha) \sin \delta.$$

Darin ist $c = \frac{\varrho}{V} \cdot \frac{d\Theta}{dt}$ die Konstante der täglichen Aberration (die Veränderlichkeit von ϱ ist verschwindend). Das Einsetzen der numerischen Werte (Lichtgeschwindigkeit, Sonnenparallaxe usw.) ergibt[102]):

$$c = 0''.322.$$

---

99) Zuerst gegeben von *Y. Villarceau* l. c. Fußn. 95). Alle gegenteiligen Angaben beruhen auf Verwechslungen der scheinbaren Koordinaten A', B' mit den wahren A, B, resp. mit A_0, B_0. Vgl. *H. Battermann,* Einige Berichtigungen aus dem Gebiete der Aberration und Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts, Astr. Nachr. 118 (1888), p. 369 und 119 (1888), p. 297.

100) *Battermann,* Diss. (siehe Fußn. 95), p. 20 ff.

101) *Battermann,* Diss., p. 22/33. — Für die näheren Körper des Sonnensystems (bis Jupiter inkl.) ist die gesamte tägliche Aberration durch den Übergang auf die Zeit t_1 schon hinreichend strenge berücksichtigt; man hat dann nur die tägliche Parallaxe für die Zeit t_1 zu berechnen.

102) *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 111.

Bei Beobachtungen im Meridian ist:

$$\alpha - \alpha' = - c \cos \varphi' \sec \delta,$$
$$\delta - \delta' = 0.$$

Die tägliche Aberration beeinflußt dann, wie auch geometrisch anschaulich, nur die Rektaszensionen und ist für ein fest aufgestelltes Instrument von der Natur eines Instrumentalfehlers. Sie wird daher nach *F. W. Bessel* sofort mit dem Kollimationsfehler (s. Artikel VI 2, 5 (*Ristenpart*)) vereinigt[103]).

Die jährliche Aberration. Als jährliche Bewegung betrachtet man bei der Berechnung der Aberration die ungestörte Umlaufsbewegung des Erdmittelpunkts um das Sonnenzentrum nach den *Kepler*'schen Gesetzen. Jede Abweichung von dieser Bewegung erzeugt eine ihr eigentümliche (sowohl Planeten- wie Fixstern-)Aberration, die indessen in keinem Falle meßbare Beträge annimmt[104]). Diese Erdbewegung läßt sich während der Lichtzeit für alle Körper des Sonnensystems als geradlinig ansehen[105]); die gesamte jährliche Aberration ist daher durch Übergang auf die Zeit t_1 berücksichtigt. Für die Fixsterne ist hingegen eine getrennte Behandlung der Lichtzeitparallaxe und der Fixsternaberration erforderlich. Die erstere vereinigt sich völlig mit der eigentlichen jährlichen Parallaxe derart, daß diese nicht für die Zeit t_1, sondern für die Beobachtungszeit t_2 zu berechnen ist.

Die für die Berechnung der jährlichen Fixsternaberration erforderlichen Geschwindigkeitskomponenten der jährlichen Erdbewegung werden im System des Äquators[106]):

$$\frac{da}{dt} = - \cos \odot \frac{dR}{dt} + R \sin \odot \frac{d\odot}{dt} \text{ usw.},$$

---

103) Zuerst berechnet findet sich der Effekt der täglichen Aberration bei *L. Euler*, Petersbg. Commentarii 11 (1739), p. 169 ff.; dann bei *J. W. von Camerer*, Über die tägliche Aberration der Fixsterne, Berl. astr. Jahrb. Suppl. 1 (1793), p. 198 ff. und Berl. astr. Jahrb. für 1798 (1795), p. 139 ff.; zuerst berücksichtigt ist er von *F. W. Bessel*, Königsb. Beob. 4 (1818), p. III.

104) *Battermann*, Diss. (siehe Fußn. 95), p. 28 ff. Einmal führt das Sonnenzentrum selbst periodische, den einzelnen Planetenstörungen entstammende Bewegungen um den Schwerpunkt des ganzen Sonnensystems aus; dazu kommen die Störungen der elliptischen Erdbewegung, insbesondere durch den Mond.

105) *Battermann*, Diss. (siehe Fußn. 95), p. 20. Die Krümmung der Erdbahn bewirkt Aberrationseffekte, die bei Saturn 0″.01, Uranus 0″.02, Neptun 0″.03 erreichen.

106) Der jährliche Aberrationseffekt stellt sich zwar naturgemäß einfacher in den ekliptikalen Koordinaten dar — man hat dazu im folgenden nur $\varepsilon = 0$ zu setzen —, doch ist es der Anwendungen halber ratsam, sogleich das äquatoreale System einzuführen.

die durch Einführung der Formeln der elliptischen Bewegung[107]) übergehen in:

$$\frac{da}{dt} = + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{dM}{dt} (\sin \odot + \sin\varphi \sin \Pi),$$

$$\frac{db}{dt} = - \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi} \frac{dM}{dt} (\cos \odot + \sin\varphi \cos \Pi),$$

$$\frac{dc}{dt} = - \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi} \frac{dM}{dt} (\cos \odot + \sin\varphi \cos \Pi).$$

Darin bezeichnet $\odot$ die Sonnenlänge, M ihre mittlere Anomalie, ε die Schiefe der Ekliptik, $\sin\varphi = e$ die Exzentrizität, Π die Länge des Perigäums. Die Glieder der ersten Ordnung werden damit[108]):

$$\alpha - \alpha' = k' (\sin\alpha \sin \odot + \cos\alpha \cos \odot \cos\varepsilon) \sec\delta$$
$$+ k' \sin\varphi (\sin\alpha \sin \Pi + \cos\alpha \cos \Pi \cos\varepsilon) \sec\delta,$$

$$\delta - \delta' = k' \{ - \cos \odot (\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) + \sin \odot \cos\alpha \sin\delta \}$$
$$+ k' \sin\varphi \{ - \cos \Pi (\sin\alpha \sin\delta \cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon) + \sin \Pi \cos\alpha \sin\delta \}.$$

Beschränkt man sich auf diese Glieder erster Ordnung, so ist es gleichgültig, ob man rechts die unmittelbar beobachteten oder die schon von der jährlichen Aberration befreiten Koordinaten einsetzt. Erst in den Gliedern zweiter Ordnung macht sich ein Unterschied geltend[109]). Auch ist es an sich gleichgültig, ob man den wahren Äquator oder einen mittleren den Formeln zugrunde legt; im ersteren Falle erhält man den Aberrationseffekt in seine beiden Komponenten nach dem wahren, im zweiten nach dem mittleren Äquator zerlegt. Die aufgestellten Formeln gelten zunächst für den wahren Äquator[110]); indessen rechnet man rechts besser mit den mittleren Koordinaten einer naheliegenden Epoche (etwa des Jahresanfangs), um auf diese, längere Zeit festen Argumente die Berechnung von Tafeln aufbauen zu können. Die strenge genommen dadurch hervorgerufenen Korrek-

---

107) Siehe z. B. *Brünnow*, p. 186; *Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 112.

108) Der Index 0 bei α, δ ist sofort weggelassen, da α_0, δ_0, indem man in der Praxis von der Berücksichtigung der säkularen Aberration absehen muß, die wahren Sternkoordinaten sind.

109) Siehe z. B. *E. v. Rebeur-Paschwitz*, Artikel „Aberration" in *Valentiner*, Handwörterbuch 1, p. 166—179.

110) Da man den Effekt an den unmittelbar beobachteten Koordinaten anbringt, und zudem auch die Geschwindigkeitskomponenten der jährlichen Erdbewegung, d. h. die Sonnenkoordinaten, Schiefe der Ekliptik usw. in den Ephemeriden auf den wahren Äquator bezogen sind.

tionsglieder, aus Produkten von Präzession und Nutation in Aberration bestehend, können nur für Polsterne merklich werden[111]).

In der in den obigen Formeln auftretenden Größe: $k' = \frac{1}{V_0 \cos \varphi} \cdot \frac{dM}{dt}$ setzt man in der Praxis unter Vernachlässigung der säkularen Aberration für V_0 die Lichtgeschwindigkeit V ein und pflegt sie dann als Konstante der jährlichen Aberration, kurz als *Aberrationskonstante* k zu bezeichnen. Sie hängt ab von den Dimensionen der Erdbahn und der Lichtgeschwindigkeit. Man pflegt sie indessen nicht aus diesen, den Beobachtungen selbst nur mit merklicher Unsicherheit zu entnehmenden Daten, sondern aus eigens zu diesem Zwecke angestellten Messungen abzuleiten. In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde der Wert:

$$k = 20''.253$$

nach *J. B. J. Delambre* (abgeleitet aus Verfinsterungen der Jupiterstrabanten) benutzt; eine fundamentale Verbesserung erzielte *W. Struve* aus Beobachtungen am Passageninstrument im ersten Vertikal[112]); der von ihm abgeleitete Wert:

$$k = 20''.445$$

war für die zweite Hälfte des Jahrhunderts maßgebend. Die Pariser Konferenz[62]) setzte den Wert:

$$k = 20''.47$$

fest; indessen ist heutzutage wohl sicher, daß der Wert 20″.50 bis 20″.52 der Wahrheit am nächsten kommt[114]).

Die obigen Formeln für den jährlichen Aberrationseffekt in den äquatorealen Koordinaten zerfallen in zwei Teile, deren erster, der Hauptteil, für einen Fixstern von jährlicher Periode ist, während der zweite von der Erdbahnexzentrizität herrührende für jedes feste Gestirn als nahezu konstant gelten kann. Die Konstante dieses zweiten Teils ist nur geringfügig:

$$k \sin \varphi = 0''.343.$$

---

111) *Bessel*, Fund., p. XX ff.; *E. v. Rebeur-Paschwitz* [109]), sowie *H. Battermann*, Astr. Nachr. 118 (1888), p. 369.

112) *W. Struve*, Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes, St. Pét. mém. (6, math., 1) **5** (1844), p. 229 = St. Pét. bull. (phys.) **1** (1843), p. 257.

114) Vgl. z. B. *M. Nyrén*, L'aberration des étoiles fixes, St. Pét. mém. (7) **31** (1883); *S. C. Chandler*, The probable value of the constant of aberration, Astron. Journ. 23 (1903), p. 1. Weitere Werte in *S. Newcomb*, Fund. Const., siehe Fußn. 13).

Daher hat man diesen zweiten Teil bisher meist unberücksichtigt gelassen, was indessen für bewegte Gestirne nicht ratsam ist.

Das Hauptglied der jährlichen Aberration lautet in ekliptikalen Koordinaten:

$$\lambda - \lambda' = + k \cos(\lambda - \odot) \sec \beta,$$
$$\beta - \beta' = - k \sin(\lambda - \odot) \sin \beta$$

und zeigt, daß der Aberrationseffekt darin besteht, den Sternort in jährlicher Periode eine Ellipse, deren halbe große Achse konstant $= k$, deren kleine Halbachse $k \sin \beta$ ist, um eine Mittellage beschreiben zu lassen. Das war auch die Form, in der *J. Bradley* seine Entdeckung machte und auf Grund deren der Aberrationseffekt ursprünglich berechnet wurde. *Delambre*[115]) gab zuerst Aberrationsformeln auf Grund der theoretischen Erklärung der Aberration und erwähnt dabei schon jenes von der Erdbahnexzentrizität abhängige Glied. Später haben *Bessel*[116]) und insbesondere *Oppolzer*[117]) an dieses Glied erinnert. Eine geeignete Form für die Tabulierung gab *Gauß*[118]) und dann im Verein mit Präzession und Nutation *Bessel*[119]).

Will man schließlich den Einfluß der säkularen Aberration auf die jährliche berücksichtigen, so hat man den Nenner V_0 in jener Konstanten nicht völlig konstant zu setzen, sondern von der Lage des unbekannten Apex der säkularen Bewegung gegen den Sternort abhängig zu machen. Aus

$$V_0 = V\left(1 + \frac{v_0}{V} \cos x\right) \text{ folgt: } k' = k\left(1 - \frac{v_0}{V} \cos x\right),$$

wo k in Strenge konstant ist. Die Aberrationskonstante ist also für verschiedene Sterne je nach ihrem Winkelabstand von dem Apex der säkularen Bewegung etwas verschieden und ihre Bestimmung kann die absolute Bewegung des ganzen Sonnensystems (gegen den Lichtäther) kennen lehren. Indessen scheint die Genauigkeit in der Be-

---

115) *J. B. J. Delambre*, Conn. des temps de l'an X (1803), p. 346 und Astronomie théorique et pratique 3, Paris 1814, chap. XXIX, p. 109. Er bemerkt, daß bei der üblichen Art der Berechnung aus der Aberrationsellipse die Exzentrizität vernachlässigt sei, daß er aber zuerst gezeigt habe, daß man dazu berechtigt sei. Zugleich sagt er aber auch, wie man sie sehr einfach berücksichtigen könne.

116) *F. W. Bessel*, Über die Aberration der Planeten und Kometen, Astr. Nachr. 12 (1835), p. 121.

117) *Th. v. Oppolzer*, Eine Bemerkung über die Berechnung der Aberration, Astr. Nachr. 65 (1865), p. 381 und *Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 114 ff.

118) *C. F. Gauß*, Monatl. Corr. 17 (1808), p. 312—317 = Werke 6 (1874), p. 123 ff.

119) *F. W. Bessel*, Tafeln zur Reduktion der Örter der Fixsterne, Astr. Nachr. 1 (1823), p. 49.

stimmung von k' zur Zeit noch nicht derart zu sein, um die jedenfalls geringfügige Abhängigkeit vom Sternort zufolge jenes *Villarceau*schen Faktors hervortreten zu lassen.

Die säkulare Aberration. Die säkulare Bewegung kann selbst für die Lichtzeit der Fixsterne als geradlinig gelten; demnach wird die gesamte säkulare Aberration durch Übergang auf die Zeit t_1 berücksichtigt. Der zur Zeit t_2 beobachtete, von täglicher und jährlicher Aberration befreite Sternort ist gleich dem wahren Ort zur Zeit $t_1 = t_2 - \tau$, gesehen vom Erdort zur Zeit t_1. Da nun einerseits τ für die meisten Fixsterne unbekannt ist und die Bezeichnung der Epoche (ob t_1 oder t_2), so lange man die Bewegungen der einzelnen Sterne isoliert betrachtet, gleichgültig ist, läßt man die säkulare Aberration ganz fort[120]).

Der Effekt der säkularen Fixsternaberration allein ließe sich durch:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{v}{V} \cos D \sin (\alpha - A) \sec \delta$$

$$\delta - \delta_0 = \frac{v}{V} \{\cos D \cos (\alpha - A) \sin \delta - \sin D \cos \delta\}$$

(A, D äquatoreale Koordinaten des Apex der säkularen Bewegung) darstellen, woraus neben einer von der Zeit so gut wie unabhängigen Verzerrung des Himmelsanblicks eine Multiplikation der Eigenbewegungen gerade mit dem *Villarceau*'schen Faktor resultieren würde[121]).

7b. Präzession und Nutation. I. *Präzession.* Den Effekt, den eine Drehung der Fundamentalebene um den Winkel i unter gleichzeitiger Verschiebung des Anfangspunktes der Zählung in ihr auf die Koordinaten eines Gestirns ausübt, berechnet man aus dem von den Polen der beiden Fundamentalebenen und dem Sternorte gebildeten sphärischen Dreieck. An die Bezeichnungen für die Ekliptik anknüpfend (i, Ω, $\Omega + l$) erhält man als Transformationsformeln von λ, β in λ', β':

---

120) Allerdings beziehen sich dann die gleichzeitig erhaltenen Sternörter auf verschiedene Zeitpunkte und Erdörter. Indessen kann das höchstens in ferner Zukunft, wenn etwa die gravitationstheoretische Behandlung der Fixsternbewegungen begonnen hat, in Frage kommen. Jetzt zu berücksichtigen wäre höchstens die Änderung der Lichtzeit infolge der Änderung der Entfernung des Gestirns von der Erde. Da diese Änderung der Entfernung indessen jedenfalls für diesen Zweck als gleichförmig angesehen werden kann, so wären nur die auf üblichem Wege erhaltenen Eigenbewegungen der Fixsterne, um die geometrischen Verschiebungen gegen den Erdort zu geben, mit einem von der Einheit nur unmerklich verschiedenen Faktor zu multiplizieren.

121) *K. Schwarzschild*, Über den Einfluß der säkularen Aberration auf die Fixsternörter, Astr. Nachr. 136 (1894), p. 81.

$$\cos(\lambda' - \Omega - l)\cos\beta' = \cos(\lambda - \Omega)\cos\beta,$$
$$\sin(\lambda' - \Omega - l)\cos\beta' = \sin(\lambda - \Omega)\cos\beta\cos i + \sin\beta\sin i,$$
$$\sin\beta' = -\sin(\lambda - \Omega)\cos\beta\sin i + \sin\beta\cos i.$$

Durch einfache Umformungen erhält man unter Einführung der Hilfsgrößen q und L:

$$q = \sin i\left\{\operatorname{tg}\beta - \sin(\lambda - \Omega)\operatorname{tg}\frac{i}{2}\right\},$$
$$\operatorname{tg}(\lambda' - \lambda - l) = \frac{q\cdot\cos(\lambda - \Omega)}{1 + q\sin(\lambda - \Omega)},$$
$$\lambda' = \lambda + l + L,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta' - \beta}{2} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\sin(\lambda - \Omega + \tfrac{1}{2}L)\sec\tfrac{1}{2}L.$$

Durch Einführung der auf den Äquator bezüglichen Größen m, n, p (s. p. 41/42) erhält man den Präzessionseffekt in den äquatorealen Koordinaten[122]):

$$q = \sin n\,(\operatorname{tg}\delta + \cos(\alpha + p)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n),$$
$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha - m) = \frac{q\sin(\alpha + p)}{1 - q\cos(\alpha + p)},$$
$$\alpha' = \alpha + m + L,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\delta' - \delta}{2} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n\cos\left(\alpha + p + \frac{L}{2}\right)\sec\tfrac{1}{2}L.$$

Für die gewöhnlichen Zwecke der Praxis kommt man mit Reihenentwicklungen aus.

Setzt man:

$$m = \Sigma m_i(t' - t)^i$$
$$n = \Sigma n_i(t' - t)^i$$
$$p = \Sigma p_i(t' - t)^i$$
$$(i = 1, 2, \ldots)$$
$$\alpha' - \alpha = \Sigma A_i(t' - t)^i, \quad \delta' - \delta = \Sigma D_i(t' - t)^i,$$

so wird:

$$A_1 = m_1 + n_1\sin\alpha\operatorname{tg}\delta,$$
$$A_2 = m_2 + \frac{n_1^2}{4}\sin 2\alpha + (n_2\sin\alpha + p_1 n_1\cos\alpha)\operatorname{tg}\delta + \frac{n_1^2}{2}\sin 2\alpha\operatorname{tg}^2\delta,$$
$$D_1 = n_1\cos\alpha,$$
$$D_2 = n_2\cos\alpha - n_1 p_1\sin\alpha - \frac{n_1^2}{2}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\delta,$$

wobei die numerischen Beträge nach p. 42 in abgekürzter und etwas veränderter Form[123]) wiederholt lauten[124]):

122) Im Prinzip zuerst gegeben von *Bohnenberger*, s. Fußn. 72).

123) Die Zeit ist hier (*Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 219) in tropischen Jahren gezählt.

124) Die Größen m_1, n_1 nennt man gewöhnlich m, n, indem bei unseren obigen m, n, p die beiden Indizes t, t' hinzuzudenken sind.

$$m_1 = 46''.05931 + 0''.000284\,(t - 1850.0), \qquad m_2 = 0''.000142,$$
$$n_1 = 20''.05150 - 0''.000087\,(t - 1850.0), \qquad n_2 = -\,0''.000043,$$
$$p_1 = 23''.030.$$

Für ganz kurze Zeiten, etwa ein Jahr, reicht man mit dem ersten Gliede aus. Man bezeichnet daher als „jährliche Präzession", kurz als „Präzession für die Zeit t", Prc_t, die Größen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t'=t}$ und $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_{t'=t}$, d. h.:

$$\mathrm{Prc}_t(\alpha) = A_1 = m_1 + n_1 \sin\alpha \operatorname{tg}\delta, \quad \mathrm{Prc}_t(\delta) = D_1 = n_1 \cos\alpha$$

und berechnet den gesamten Präzessionsbetrag aus

$$\mathrm{Prc}_t^{t'} = \int_t^{t'} \mathrm{Prc}_t\, dt$$

durch mechanische Quadratur. Einen ungefähren Überschlag gibt danach: $(t' - t) \cdot \mathrm{Prc}_t$, eine meistens genügende Annäherung:

$$(t' - t) \cdot \mathrm{Prc}_{\frac{t+t'}{2}},$$

wodurch die zweiten Glieder der Entwicklung berücksichtigt sind. Man pflegt dabei die hundertjährige Änderung der jährlichen Präzession, die variatio saecularis, V einzuführen, indem man setzt

$$V_t(\alpha) = 200 A_2, \quad V_t(\delta) = 200 D_2.$$

Dann ist sehr angenähert

$$\mathrm{Prc}_{\frac{t+t'}{2}} = \mathrm{Prc}_t + \frac{t' - t}{200} \cdot V_t.$$

Man gibt danach in den Sternkatalogen (s. p. 68) neben dem Sternort die Präzession und säkulare Variation für die Katalogepoche an. Hat man nur Prc_t ohne V_t berechnet, so findet man angenähert nach $\frac{t' - t}{2} \cdot \mathrm{Prc}_t$ die Koordinaten für das Mittel der Epochen und daraus $\mathrm{Prc}_{\frac{t+t'}{2}}$ mit meist hinreichender Genauigkeit.

Reicht man auch mit den Gliedern zweiter Ordnung nicht aus — es ist das heute schon für mäßige Deklinationen bei einer Epochendifferenz von 100 Jahren der Fall —, so muß man entweder die Glieder dritter Ordnung hinzunehmen oder eine weitergehende Formel der mechanischen Quadratur anwenden, wie etwa

$$\mathrm{Prc}_t^{t'} = \frac{t' - t}{6}\left\{\mathrm{Prc}_t + 4\,\mathrm{Prc}_{\frac{t'+t}{2}} + \mathrm{Prc}_{t'}\right\},$$

bis auf Glieder vierter Ordnung genau[125]). Auch kann man die

125) z. B. *A. Auwers*, Neue Reduktion der *Bradley*'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750 bis 1762, 3, St. Petersburg 1888, p. 66. Ähnlich für die Sterne über $\delta = 70°$ im Berl. astr. Jahrb.

Glieder dritter Ordnung, da sie doch nur geringfügig sind, in Tabellenform bringen[126]). Die strengen Formeln wird man nur selten anwenden, z. B. wenn es sich um vereinzelte Sternpositionen handelt, die man auf sehr entfernte Epochen (mehrere Jahrhunderte) übertragen will. In Zukunft wird man am besten die Epochen zerlegen und stufenweise den Präzessionsbetrag berechnen.

Die Eigenbewegungen der Fixsterne. Die Übertragungsformeln auf verschiedene Äquinoktien werden dadurch für viele Sterne komplizierter, daß man auf ihre Eigenbewegung Rücksicht nehmen muß.

Hat man alle zu verschiedenen Epochen angestellten Beobachtungen eines Sternes auf ein gemeinsames Äquinoktium bezogen, so stellt die übrig bleibende Abhängigkeit von der Zeit die Eigenbewegung (abgekürzt: *E. B.*) des Sternes (relativ zum Schwerpunkt des Sonnensystems) dar, die man bisher, von einigen physischen Doppelsternen abgesehen, als geradlinig-gleichförmig ansehen kann. Vom Auge des Beobachters aus stellt sie sich als nahezu gleichförmige Winkelbewegung in einem größten Kreise der Himmelskugel dar[127]) und die Theorie dieser Eigenbewegungen ist heutzutage erledigt, sobald man für jeden Stern den konstanten jährlichen Betrag μ_s dieser Winkelbewegung und die Lage des größten Kreises durch seinen Positionswinkel p gegen den Stundenkreis aus den Beobachtungen bestimmt hat. Der letztere ändert sich, selbst bei gleichförmiger Winkelbewegung im größten Kreise, mit der Zeit; es wird in erster völlig ausreichender Annäherung:

---

126) *H. Kloock,* Tafel für das dritte Glied der Präzession, Kiel Sternw. Publ. 5 (1890).

127) In aller Strenge wird diese Winkelbewegung nicht gleichförmig sein, sondern von unserer relativen Ortsveränderung gegen den Stern abhängen müssen. *H. Seeliger* (Bemerkung über veränderliche Eigenbewegungen, Astr. Nachr. 154 (1901), p. 65) stellt für die Winkelbewegung $\frac{d\varphi}{dt}$ die Beziehung auf:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -0.0001024\,\pi\,\frac{d\varrho}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt},$$

worin $\frac{d\varrho}{dt}$ die Geschwindigkeit im Visionsradius in km pro 1^s, π die jährliche Parallaxe in Bogensekunden bedeutet. *F. Ristenpart* versucht (siehe Astr. Ges. Vjs. 37 (1902), p. 242) dieses quadratische Glied der E. B. (Eigenbewegung) in den beobachteten Örtern des schnellstbewegten Sterns der nördlichen Hemisphäre, Groombridge 1830, nachzuweisen, was indessen noch nicht völlig gelingt, da die Parallaxe nicht sicher genug bestimmt erscheint. In ferner Zukunft wird man aus diesem Gliede, das aus dem Effekt der Sonnenbewegung und der des Sterns resultiert, Rückschlüsse auf die Parallaxen der Sterne ziehen können, da eben der Effekt dem Quadrat der Zeit proportional ist. Gegenwärtig wird man es bei allen Sternen noch für Jahrzehnte hinaus vernachlässigen können.

$$p' - p = + \mu_s \sin p \operatorname{tg} \delta \, (t' - t).$$

Indessen ist es nicht üblich, in dieser Weise die E. B. anzugeben, sondern, entsprechend der getrennten Beobachtungsart der äquatorealen Koordinaten, zerlegt in Komponenten μ_α und μ_δ nach Rektaszension und Deklination, sodaß:

$$\mu_\alpha = \mu_s \sin p \sec \delta,$$
$$\mu_\delta = \mu_s \cos p.$$

Es folgt dann:

$$\mu_\alpha' = \mu_\alpha + 2(t' - t)\, \mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tg} \delta,$$
$$\mu_\delta' = \mu_\delta - \tfrac{1}{2}(t' - t)\, \mu^2{}_\alpha \sin 2\delta.$$

In den weitaus meisten Fällen reicht man bis jetzt mit der Annahme einer gleichförmigen Eigenbewegung auch in Rektaszension und Deklination aus; nur bei sehr schnell bewegten Sternen, höheren Deklinationen und großen Zwischenzeiten wird man auf das zweite Glied schon jetzt Rücksicht nehmen müssen[128]).

Zu dieser reellen Änderung der E. B. in den äquatorealen Koordinaten kommt noch eine weitere, der Änderung des Koordinatensystems durch die Präzession entsprechende hinzu. Sie betrifft wieder nur p, nicht μ_s. Es wird mit hinreichender Annäherung:

$$p'' - p' = n_1 (t' - t) \sin \alpha \sec \delta,$$
$$\mu_\alpha'' = \mu_\alpha' + n_1 (\mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta + \mu_\alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \delta),$$
$$\mu_\delta'' = \mu_\delta' - n_1 \mu_\alpha \sin \alpha,$$

μ_α'', μ_δ'' sind dann die jährlichen Eigenbewegungen zur Epoche t', bezogen auf das Äquinoktium t', wenn μ_α, μ_δ die entsprechenden Größen für die Zeit t bedeuten.

Sind alle Beobachtungen eines Sternes auf ein gemeinsames Äquinoktium gebracht, so gibt eine lineare Ausgleichung (unter Vernachlässigung von $\mu' - \mu$, was nur im Falle sehr großer E. B., und dann vorweg, berücksichtigt werden kann) die Werte μ_α, μ_δ, bezogen auf das gemeinsame Äquinoktium. Ihre Änderungen mit der Zeit und mit der Beziehung auf ein anderes Äquinoktium geben die früheren Formeln.

Um die Position eines Sternes mit bekannter E. B. auf andere Äquinoktien zu übertragen, wie es die Verwendung der Sterne als Anhaltspunkte erfordert, kann man zunächst die strengen Formeln benutzen. Man hat nur statt α, δ

---

128) Zuerst wohl gegeben von *John H. C. Coffin* (anonym), Tables to facilitate the reduction of places of the fixed stars, prepared for the use of the Amer. Ephem., Washington 1869, p. XVI ff., auf Veranlassung von *J. Winlock*.

$$\alpha + (t' - t)\mu_\alpha, \quad \delta + (t' - t)\mu_\delta,$$

d. h. die Koordinaten des Sternortes zur Zeit t', bezogen auf das Äquinoktium t, zu setzen und diese auf das Äquinoktium t' zu übertragen. Auch kann man umgekehrt zuerst die Übertragung von α, δ in α', δ' ausführen und dann die E. B., aber nunmehr auf das neue Äquinoktium bezogen, anbringen.

Geht man zu den Entwicklungen über, so treten in den Koeffizienten A_1, A_2, . . .; D_1, D_2 von der E. B. herrührende Terme hinzu[129]).

II. *Die Nutation.* Den Effekt der Nutation auf die äquatorealen Koordinaten berechnet man am einfachsten differentiell aus ihren Veränderungen der ekliptikalen. Da sie die ekliptikalen Breiten nicht beeinflußt, so hat man nur nach λ und ε zu differenzieren und findet:

$$d\alpha = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \operatorname{tg}\delta \sin\alpha)d\lambda - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta\, d\varepsilon,$$

$$d\delta = \cos\alpha \sin\varepsilon\, d\lambda + \sin\alpha d\varepsilon,$$

Formeln, welche bis auf die höchsten Deklinationen ausreichen. Die Beträge $d\lambda$ und $d\varepsilon$ werden, wie früher angegeben, für äquidistante Zeitmomente tabuliert.

7 c. Zusammenfassung der verschiedenen Reduktionen der Beobachtungsgrößen auf ein mittleres Äquinoktium. Die wegen der Instrumentalfehler (inkl. Refraktion und täglicher Aberration) verbesserten Beobachtungsgrößen sind bei den Körpern des Sonnensystems noch von der täglichen Parallaxe (berechnet für den Beobachtungsmoment t_2) zu befreien; bei den Fixsternen ist zur Beziehung auf das Sonnenzentrum die jährliche Parallaxe (für den Moment t_2)[130]) und die jährliche Fixsternaberration anzubringen. Man erhält so die wahren geozentrischen, resp. heliozentrischen, d. h. die vom Ort des Erd-, resp. des Sonnenzentrums der Zeit t_1 gesehenen, auf das wahre Äquinoktium des Beobachtungsmomentes t_2[131]) bezogenen Koordinaten des Gestirns zur Zeit t_1. Es bleibt noch die Nutation zu berücksichtigen. Man vereinigt diese gewöhnlich mit der jährlichen Fixsternaberration und dem Präzessionsbetrag bis zum mittleren Äquinoktium des Jahres-

---

129) Siehe *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 222. — Die Angaben in den Sternkatalogen, betreffend die E. B., sind nicht ganz einheitliche; vgl. z. B. *Fr. Küstner,* Bonn Sternw. Veröff. 2 (1897); *H. Battermann,* Berlin Sternw. Ergebn. 8 (1899) u. 10 (1902); *S. Newcomb,* Fund. Catal., siehe Fußn. 32). Es ist am ratsamsten, auch in den höheren Gliedern Präzession und Eigenbewegung als ganz verschiedenartige Größen getrennt zu berücksichtigen.

130) Meistens wegen ihrer Geringfügigkeit und aus Unkenntnis vernachlässigt.

131) Bei den Körpern des Sonnensystems als identisch mit t_1 anzusehen.

anfanges und nennt den Gesamtbetrag, negativ genommen „die Reduktion auf den scheinbaren Ort“ (reductio ad locum apparentem). Man gibt ihr verschiedene Formen, je nachdem es sich um vereinzelte Sternörter handelt (als Vergleichspunkte für Kometen- und Planetenbeobachtungen) oder um größere Reihen am Meridiankreise wiederholt beobachteter Sterne. Im ersteren Falle hat man:

$$\Delta\alpha = f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \sec \delta,$$
$$\Delta\delta = g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta.$$

Die Größen f, g, G entstammen der Präzession und Nutation, h, H, i der Aberration, es ist

$$f = \tau' m + \cos\varepsilon\, d\lambda, \qquad h \sin H = -k \cos \odot \cos\varepsilon,$$
$$g \cos G = \tau' n + \sin\varepsilon\, d\lambda, \qquad h \cos H = -k \sin \odot,$$
$$g \sin G = -d\varepsilon, \qquad i = -k \cos \odot \sin\varepsilon,$$

worin m, n die früheren Präzessionsgrößen[132]), τ' die seit dem Jahresanfang verflossene Zeit in Jahresteilen, $d\lambda$, $d\varepsilon$ die Nutationsbeträge, k die Aberrationskonstante ist.

Für den zweiten, weit häufigeren Fall setzt *Bessel*[133]) die Reduktion auf den scheinbaren Ort (*Red. ad l. app.*) in die Form:

$$\Delta\alpha = Aa + Bb + Cc + Dd + E,$$
$$\Delta\delta = Aa' + Bb' + Cc' + Dd',$$

wobei

$$A = \tau' + \frac{\sin\varepsilon}{n} d\lambda, \qquad C = h \sin H,$$
$$B = -d\varepsilon, \qquad D = h \cos H,$$
$$a = m + n \sin\alpha \operatorname{tg}\delta, \qquad a' = n \cos\alpha,$$
$$b = \cos\alpha \operatorname{tg}\delta, \qquad b' = -\sin\alpha,$$
$$c = \cos\alpha \sec\delta, \qquad c' = \cos\delta \operatorname{tg}\varepsilon - \sin\alpha \sin\delta,$$
$$d = \sin\alpha \sec\delta, \qquad d' = \cos\alpha \sin\delta$$

gesetzt ist.

$$E = \frac{a}{n} \sin\varepsilon\, d\lambda$$

(a Planetenpräzession) ist außerordentlich klein (im Maximum 0″.05) und kann zudem als gemeinsame Korrektion aller Gestirne fortgelassen werden. Die Größen A, B, C, D sind vom Sternort unabhängige Funktionen der Zeit und lassen sich ebenso wie f, g, G, h, H, i für

132) Man verwendet hinreichend genau die jährl. Präzess. des Jahresanfangs.

133) *F. W. Bessel*, Tafeln zur Reduktion der Örter der Fixsterne, Astr. Nachr. 1 (1823), p. 49.

äquidistante Zeitmomente tabulieren[134]). a, b, c, d, a', b', c', d' sind Sternkonstanten, die sich mit mittleren Koordinaten vorweg berechnen lassen, da sie für einige Jahre trotz Präzession und Eigenbewegung als konstant gelten können[135]).

Die gegebenen Formeln enthalten nur die Glieder erster Ordnung, welche für Polsterne nicht ausreichen. Die Berechnung der Glieder zweiter Ordnung gestaltet sich sehr umständlich[136]). Durch Vermittlung rechtwinkliger Koordinaten vereinfacht *Fabritius* die Berechnung bedeutend[137]).

8. Die weitere Verarbeitung der Meridianbeobachtungen; Sternkataloge, Jahrbücher. Die weitere Verarbeitung der Meridianbeobachtungen richtet sich nach dem Objekte, auf das sie sich beziehen. Die theoretische Vorausberechnung der seit lange beobachteten Körper des Sonnensystems (Sonne, Mond, große Planeten und zahlreiche kleine Planeten) bringt man in eine zur direkten Vergleichung mit den Beob-

---

134) *Bessel* tabuliert (l. c. Fußn. 133) A, B, C, D in zehntägigen Intervallen, und zwar A, B für jedes Jahr, während C, D für lange Zeiträume allein als Funktionen der Sonnenlänge gelten können und demnach nur von τ', dem verflossenen Jahresbruchteil, abhängen. — In den „Tab. Reg." gibt *Bessel* A, B, C, D, E, τ' in Tabula VIII unter: Valores quantitatum ad computationem locorum apparentium Stellarum fixarum generaliter inservientium, pro saeculo 1750—1850 in zehntägigen Intervallen. Die Fortsetzungen von *J. A. Zech* (1850—1860) und *Wolfers* (1860—1880) in *J. Ph. Wolfers,* Tabulae reductionum, siehe Fußn. 27). — Die Pulkowaer Sternwarte hat dieselben Größen von Tag zu Tag für Pulkowaer 0^h Sternzeit veröffentlicht: *O. Struve,* Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1840 ad 1864, Petropoli 1861; 1865—74, Petr. 1867; 1750—1840, Petr. 1869; 1875—79, Petr. 1871 usw. Inzwischen haben die verschiedenen Jahrbücher (s. später) die Berechnung dieser Konstanten aufgenommen und geben sowohl die A, B, C, D wie f, g, G, h, H, i. Über Berücksichtigung der schnell veränderlichen kleinen Mondglieder siehe die betreffenden Erläuterungen.

135) Eine andere Form, die manche Vorzüge besitzt, hat *W. Klinkerfues* (Schreiben an den Herausgeber, Astr. Nachr. 62 (1864), p. 355) der Red. ad l. app. gegeben; s. auch *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 256, der sie in der Form schreibt:

$$\Delta\alpha = f + k \operatorname{cotg}\frac{90^0-\delta}{2}\sin(K+\alpha) + l \operatorname{tg}\frac{90^0-\delta}{2}\cos(L+\alpha),$$

$$\sec\delta\,\Delta\delta = i + k \operatorname{cotg}\frac{90^0-\delta}{2}\cos(K+\alpha) + l \operatorname{tg}\frac{90^0-\delta}{2}\sin(L+\alpha),$$

$$2k\sin K = B + C, \qquad 2l\sin L = g\cos G - D,$$
$$2k\cos K = g\cos G + D, \qquad 2l\cos L = -B + C.$$

136) S. z. B. für die Nutation: *Brünnow,* p. 133; *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 259 ff.

137) *W. Fabritius,* Über eine strenge Methode zur Berechnung des Orts von Polsternen, Astr. Nachr. 87 (1876), p. 113 u. 129. Eine Verbesserung s. *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 259; eine weitere: *Fabritius,* Obs. de Kiew ann. 3 (1891), p.

achtungen geeignete Form durch Tabulierung der zahlreichen Störungsglieder und Berechnung von Ephemeriden, welche den auf Grund solcher Tafeln abgeleiteten scheinbaren (oder wahren) Ort des Gestirns in äquidistanten Zeitintervallen geben[138]). Die nach der Verbesserung der angenommenen Bahnelemente und Massen verbleibenden Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung bilden die Grundlage der weiteren theoretischen Erörterungen.

Bei den erst kürzlich entdeckten Objekten des Sonnensystems bezieht man hingegen alle Beobachtungen auf eine mittlere Epoche und baut auf sie eine erste Theorie der Bewegung auf (vgl. Art. VI 2, 9 (*Herglotz*)).

Auch bei den Fixsternen tritt eine Trennung in der Art der Behandlung ein. Für die Gruppe der Fundamentalsterne findet man in den Jahrbüchern (s. u.) auf der Grundlage der in den Fundamentalkatalogen gegebenen Positionen und Eigenbewegungen Ephemeriden, welche ihre scheinbaren und somit direkt mit den Beobachtungen vergleichbaren Örter geben. Die Vergleichung dient auf der einen Seite zur Verbesserung des Fundamentalkataloges. Auf der andern Seite benutzt man die errechneten Örter als Anhalt für die Positionsbestimmung der übrigen, der Anschlußsterne. Die so erhaltenen scheinbaren Örter dieser Anschlußsterne werden in anderer Weise bearbeitet. Die (mit umgekehrtem Vorzeichen) angebrachte „Reduktion auf den scheinbaren Ort" (Red. ad l. app.) führt sie in wahre Sternörter des Beobachtungsmoments, bezogen auf das mittlere Äquinoktium des Jahresanfangs, über.

Für jeden Fixstern zieht man eine Reihe solcher, während eines längeren Zeitraumes erhaltener Einzelpositionen in ein Mittel zusammen, nachdem man sie von dem Äquinoktium des betreffenden Jahresanfangs auf ein gemeinsames Äquinoktium eines nahezu in der Mitte der Beobachtungsreihe liegenden Jahresanfangs gebracht hat. Diese Mittelwerte bilden, für eine größere Zahl von Sternen

---

138) Über Tafeln u. Ephemeriden vgl. neben *Wolf*, Handb.: *A. Souchon*, Traité d'astronomie pratique, Paris 1883. Die gebräuchlichsten Sonnentafeln s. Fußn. 91); von Mondtafeln nennen wir: *I. T. Bürg*, Tables de la lune, Paris Bur. Long. tabl. astr. 1, Paris 1806; *J. C. Burckhardt*, Tables de la lune, Paris Bur. Long. tabl. astr., Paris 1812; *P. A. Hansen* (1857), s. Fußn. 149); von Planetentafeln: *Al. Bouvard*, Tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, Paris Bur. Long. tabl. astr., Paris 1821; *U. J. Leverrier*, Tables de Mercure (Paris 1859, Obs. de Paris ann. 5), de Vénus et Mars (Paris 1861, ann. 6), de Jupiter et Saturne (1876, 12), d'Uranus et Neptune (1877, 14); *S. Newcomb*, Tables of the four inner planets, Wash. Astron. Papers 6 (1898); Tables of Uranus et Neptune, Wash. Astron. Papers 7 (1898); *G. W. Hill*, Tables of Jupiter and Saturn, Wash. Astron. Papers 7 (1898).

vereinigt, einen *Sternkatalog.* Ein jeder Ort des Katalogs entspricht dann dem Mittel der Beobachtungszeiten, „*Beobachtungsepoche*“ genannt, so lange die Eigenbewegung des Sternes in den beiden äquatorealen Koordinaten als gleichförmig gelten kann und bezieht sich auf das Äquinoktium des Katalogs. Durch die Vergleichung aller Positionen eines Sternes aus verschiedenen Katalogen erhält man dann, indem man sie auf ein einheitliches Äquinoktium überträgt, die Eigenbewegung des Sternes.

Die Reihe der Kataloge, mit denen man derartige Untersuchungen zu beginnen pflegt, eröffnen die aus der Mitte des 18. Jahrhunderts stammenden von *James Bradley* und *Tobias Mayer*[139]). Die Zahl der Sternkataloge des 19. Jahrhunderts ist sehr bedeutend[140]).

Vor der Ableitung der Eigenbewegungen hat man noch die schwierige Aufgabe zu erledigen, die systematischen Fehler der einzelnen Kataloge zu bestimmen, die sich in gesetzmäßigen Unterschieden bei der Vergleichung mehrerer Kataloge geltend machen. Man befreit sie von diesen, indem man sie auf ein möglichst allen stimmfähigen Katalogen angepaßtes mittleres System bezieht. Auch bei den differentiell angelegten Katalogen bedarf es stets noch dieser Untersuchung. Die ausgedehntesten Tafeln zur Beziehung der Sternkataloge auf ein gemeinsames System verdankt man *Auwers*[141]). Ebenso ist auch wegen des verschiedenen Wertes der Sternkataloge eine Festsetzung von Gewichten erforderlich[142]).

Die endgültige Zusammenfassung aller während eines langen Zeitraumes an den verschiedensten Orten erhaltenen Sternpositionen bildet dann wieder einen Katalog von Positionen und Eigenbewegungen, die auf eine bestimmte Epoche und ein bestimmtes „mittleres System“ bezogen sind. Beides, die Verbesserung der Positionen und Eigen-

---

139) Da die *Bessel*'sche Bearbeitung (*Bessel,* Fund.) den Anforderungen der Neuzeit nicht mehr genügen konnte, unternahm *Auwers* eine Neureduktion der *Bradley*'schen Beobachtungen und fügte eine Reduktion der *Mayer*'schen Beobachtungen hinzu: *A. Auwers*, Neue Reduktion der *Bradley*'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750—1762, 3 Bde., St. Petersburg 1882—1903; *A. Auwers*, *Tobias Mayer*'s Sternverzeichnis nach den Beobachtungen auf der Göttinger Sternwarte neu bearbeitet, Leipzig 1894.

140) Vgl. in *Valentiner*, Handwörterbuch 3, 2 den Artikel von *F. Ristenpart*: „Sternkataloge und -karten“, p. 455 u. ff.

141) *A. Auwers*, Tafeln zur Reduktion von Sternkatalogen auf das System des Fundamentalkatalogs der A. G., Astr. Nachr. 134 (1894), p. 33—58; 143 (1897), p. 65—90; 145 (1898), p. 101—106; 162 (1903), p. 357—374.

142) *A. Auwers*, Gewichtstafeln für Sternkataloge, Astr. Nachr. 151 (1900), p. 225—274; 162 (1903), p. 357—374.

bewegungen in dem System und die Verbesserung des Systems, bildet eine ständige Aufgabe des Meridianbeobachters. Seit einigen Jahren hat die Akademie der Wissenschaften zu Berlin dieses Werk einer Sammlung und Zusammenfassung aller bis 1900 veröffentlichten, noch heute brauchbaren Sternpositionen in Angriff genommen; die „Geschichte des Fixsternhimmels" von *Fr. Ristenpart* soll in diesem Sinne und auf diesem Gebiete das gesamte Beobachtungsmaterial bis zum Ende des 19. Jahrhunderts enthalten; an sie werden alle ferneren Untersuchungen über die Bewegungen der Fixsterne anzuknüpfen haben[143]).

Die Hilfsmittel zu den zahlreichen Rechnungen, deren man bedarf, um das unmittelbare Beobachtungsergebnis in jenen Zustand überzuführen, der eine Vergleichung mit der Theorie oder die Aufstellung einer solchen ermöglicht, bieten die *astronomischen Jahrbücher*, deren namhafteste das „Berliner Astronomische Jahrbuch", die „Connaissance des temps", der „Nautical Almanac" und die „American Ephemeris and Nautical Almanac" sind[144]). Sie enthalten Ephemeriden der wichtigsten Körper des Sonnensystems, der Sonne, des Mondes und der großen Planeten. Die Intervalle, in denen man die Ephemeriden gibt, richten sich nach der Größe der Winkelbewegung, d. h. im wesentlichen nach der Entfernung des Gestirns von der Erde, um die Berücksichtigung höherer Differenzen bei den erforderlichen Interpolationen entbehrlich zu machen. Die Sonnenephemeriden, wie die der näheren Planeten, laufen von Tag zu Tag, bei den entfernteren begnügt man sich zuweilen damit, sie von 2 zu 2 Tagen zu geben. Für den Mond gibt der Naut. Alm. stündliche Positionen. Sie beziehen sich in der Regel auf das wahre Äquinoktium des Zeitmoments und enthalten den Effekt der Aberration; so können die Beobachtungen (event. noch von Aberrationszeit befreit) direkt mit ihnen verglichen werden. Dann folgen die mittleren und scheinbaren Örter der Anhaltsterne, die bei dem Berliner Jahrbuch dem *Auwers*'schen, bei den anderen dem *Newcomb*'schen Fundamentalkatalog entnommen sind, sowie die zur Red. ad l. app. erforderlichen Daten (*f*, *g*, *G*, *h*, *H*, *i*, *A*, *B*, *C*, *D*) von Tag zu Tag. Endlich folgen einige spezielleren

143) *A. Auwers*, Bericht über die Geschichte des Fixsternhimmels, Berl. Ber. 1901, p. 79; s. auch *A. Auwers*, Festrede, Berl. Ber. 1900, p. 657 und die Berichte in Berl. Ber. 1902 u. 1903.

144) Zur Geschichte und Einrichtung der Jahrbücher vgl. das zitierte Werk von *A. Souchon* (Fußn. 138), sowie im besondern *H. Clemens*, Die älteren Ephemeriden-Ausgaben der Berliner Akademie und die Begründung des astronomischen Jahrbuchs; Berl. Rechen-Inst. Veröff. Nr. 26 (1902), p. 171.

Punkten, wie Sonnen- und Mondfinsternissen, Sternbedeckungen, den Jupiter- und Saturntrabanten, sowie den kleinen Planeten gewidmete Abschnitte.

9. Die Bestimmung der Entfernungen der Gestirne. Zur Bestimmung der Entfernung eines Gestirns bedarf es der Verknüpfung zweier von räumlich verschiedenen Punkten aus beobachteter Richtungen nach dem Gestirne. Die Messung des Richtungsunterschiedes kann dabei entweder aus der Differenz zweier absoluter Richtungen, wie bei terrestrischen Objekten, oder differentiell durch die Verschiebung des Objekts auf dem Hintergrunde, der sich in endlicher oder unendlicher Entfernung befinden kann, erfolgen.

Die erforderliche Grundlinie schafft man sich entweder, indem man das Himmelsobjekt von verschiedenen Erdorten aus betrachtet — es ist dazu das Zusammenwirken mehrerer Sternwarten erforderlich — oder, indem man von dem Bewegtsein des Erdortes Nutzen zieht, das ihn im Laufe der Zeit eine Basis beschreiben läßt; es sind dazu nur Beobachtungen von *einem* Erdorte aus erforderlich, die aber als nicht gleichzeitige die genaue Kenntnis der Bahnbewegung des Objekts und des Beobachters voraussetzen. In beiden Fällen mißt man den Winkelbetrag der parallaktischen Verschiebung, welche der Ortsveränderung des Beobachters entspringt, und geht dann unter Berücksichtigung der Größe dieser Ortsveränderung auf lineares Maß über.

Die letztere Aufgabe, die Bestimmung der Basislänge, setzt die Kenntnis der Figur und der Dimensionen des Erdkörpers voraus und gehört so in das Gebiet der Geodäsie. Zur Messung der parallaktischen Verschiebung eignen sich alle Größen, bei denen die nach dem Früheren erforderliche Korrektion wegen Parallaxe einen möglichst großen Betrag erreicht, wie Deklinationen im Meridian, Rektaszensionen nahe dem ersten Vertikal usw. Unter den systematischen Fehlerquellen erfordert besonders die Refraktion eine eingehende Untersuchung.

Das Haupthindernis einer durchgängigen Anwendung dieser trigonometrischen Methode ist die Geringfügigkeit der irdischen Entfernungen, die als Basis der Messung dienen können und nur für die allernächsten Körper des Sonnensystems einen meßbaren Betrag der parallaktischen Verschiebung bewirken. Bei den entfernteren Himmelskörpern muß man daher ihre gegenseitige Einwirkung, die, sei es hinsichtlich ihrer Intensität (materielle Anziehung), sei es hinsichtlich der Zeit ihres Eintretens (Fortpflanzung des Lichtes) von der Entfernung abhängt, in Rechnung ziehen. Da diese Methoden stets andere Reduktionselemente als bekannt voraussetzen, erfordert ihre Anwendung im

allgemeinen eine Mitbestimmung zahlreicher anderer fundamentaler astronomischer Konstanten.

Die Brauchbarkeit der einzelnen Methoden und die Art ihrer Anwendung richtet sich in der Hauptsache nach der Entfernung des Objekts, deren Größenordnung man typisch durch Mond, Sonne und Fixsterne veranschaulichen kann.

9a. Der Mond. Der Mond besitzt eine so große Parallaxe[145]), daß ihre Bestimmung nach der trigonometrischen Methode an sich keine Schwierigkeit machen würde; eine solche entsteht erst durch die Unsicherheit, die der nur durch Beobachtung der Mondränder möglichen Festlegung des Orts des Mondmittelpunktes anhaftet. Die Mondparallaxe ist wiederholt durch absolute Messungen bestimmt worden, indem von verschiedenen, nahezu auf einem Meridian, aber in möglichst verschiedener geographischer Breite gelegenen Erdorten die Kulminationshöhen des Mondmittelpunktes und unter Berücksichtigung der geographischen Breitendifferenz die parallaktische Verschiebung ermittelt wurde[146]). Die differentielle Methode durch Anschluß des Mondes an benachbarte Fixsterne hat man bisher nur in der besonderen Form der Beobachtung von Sternbedeckungen durch den Mond angewendet, ohne indessen eine zuverlässige Bestimmung der Mondparallaxe zu erzielen[147]).

Um die gemessene Verschiebung in eine Bestimmung der Parallaxe selbst zu verwandeln, ist eine ziemlich scharfe Kenntnis der Erdfigur erforderlich[148]).

---

145) Bei den Körpern des Sonnensystems versteht man kurz unter „Parallaxe" den Winkel, unter dem der Äquatorradius der Erde von dem Gestirn in seiner mittleren Entfernung erscheint; bei den Fixsternen tritt an seine Stelle die halbe große Achse der Erdbahn.

146) Vergl. zur Geschichte der Bestimmung der Parallaxe: *Wolf*, Handb. 2, § 443 u. 444, p. 240—243. Aus den 1751—53 von *N.-L. de Lacaille* am Cap, *Jér. de Lalande* zu Berlin usw. angestellten Beobachtungen leitete *C. F. R. Olufsen* (Untersuchungen über den Wert der Mondparallaxe . . , Astr. Nachr. 14 (1837), p. 226) $p_{\mathbb{C}} = 57'\ 2''.95$ ab.

147) Z. B. *L. Struve*, Bestimmung des Mondhalbmessers aus den während der totalen Mondfinsternisse 4. Oktober 1884 und 28. Januar 1888 beobachteten Sternbedeckungen, Astr. Nachr. 135 (1894), p. 169; *H. Battermann*, Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen, Berlin Sternw. Ergebn. 5 (1891) und Resultate für Mondort . . ., vorläuf. Mitteil., Astr. Nachr. 157 (1902), p. 165.

148) *L. Euler* dachte zuerst daran, aus Mondbeobachtungen die Figur der Erde zu bestimmen: „Versuch, die Figur der Erde durch Beobachtung des Mondes zu bestimmen", Münch. Abh. 5 (1768). *H. Bruns* bemerkt („Figur der Erde", Berlin 1876), daß man jedenfalls aus den Mondbeobachtungen schließen könne,

Neben diese trigonometrische Methode der Bestimmung der Mondparallaxe tritt die gravitationstheoretische, deren Ursprung aufs engste mit der Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch *Newton* verknüpft ist. Das 3. *Kepler*'sche Gesetz lautet in seiner berichtigten Form

$$\frac{k^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2(M+m)}.$$

Das Verhältnis der dritten Potenz der halben großen Bahnachse r eines Körpers des Sonnensystems zum Quadrat der Umlaufszeit T um seinen Zentralkörper, multipliziert in die Summe der beiderseitigen Massen M und m, ist eine Konstante. Im allgemeinen wird diese Beziehung in der Weise verwertet, daß man k^2, die *Gauß*'sche Gravitationskonstante, aus dem System Erde-Sonne bestimmt und dann die Entfernungen der anderen Planeten in Einheiten der mittleren Entfernung Erde-Sonne oder aus dem System eines Planeten und seiner Satelliten die Summe der Massen in Einheiten der Sonnenmasse ermittelt. Um zu einer Bestimmung der Mondparallaxe $p_{\mathbb{C}}$ zu gelangen, bestimmt man k^2 durch Messung der irdischen Schwerkraft (s. Pendelmessungen) und erhält dann

$$r = \left(\frac{k^2}{4\pi^2} \cdot T^2(M+m)\right)^{\frac{1}{3}},$$

worin r die halbe große Achse der Mondbahn, T die Umlaufszeit des Mondes, M und m Erd- und Mondmasse bedeuten. Indessen ist zu beachten, daß das 3. *Kepler*'sche Gesetz strenge nur für zwei Körper gilt, daß also an Stelle der halben großen Achse r die infolge der Störungen der Mondbewegung durch die Sonne davon abweichende mittlere Entfernung des Mondes einzuführen ist. In Wirklichkeit ist die rechte Seite dieser Gleichung noch mit einem Faktor zu multiplizieren, den *Hansen*[149]) gleich 1.006 537 angibt, sodaß:

$$\sin p_{\mathbb{C}} = 1.006\,537\, a\left(\frac{4\pi^2}{T^2k^2(M+m)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

wird. Durch Einsetzen der numerischen Beträge erhält *Hansen*[150]) $p_{\mathbb{C}} = 57'2''.27$, während *Newcomb*[151]) dafür $p_{\mathbb{C}} = 57'2''.68$, findet, in

daß die radialen Abweichungen des Geoids einige Kilometer nicht überschreiten; *Helmert* widmet dieser Methode zur Bestimmung der geozentrischen Koordinaten eines Erdoberflächenpunktes einen besonderen Paragraphen, Geodäsie 2, Kap. 6, § 2, p. 451; *H. Battermann* (Fußn. 147) führt die Korrektionen der geozentrischen Koordinaten des Beobachtungsortes als Unbekannte ein.

149) *P. A. Hansen*, Tables de la lune, construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle, Londres 1857.

150) *Hansen* (Fußn. 149), p. 4, nach Reduktion des dortigen $\log \sin p = \log 56' 59''.57$ auf p selbst.

151) *Newcomb*, Fund. Const. (s. Fußn. 13), p. 194.

hinreichender Übereinstimmung mit dem Ergebnis der trigonometrischen Methode[152]).

9b. Die Sonne. Das Problem der Bestimmung der Sonnenparallaxe ist seit den Zeiten des *Aristarch* eins der berühmtesten in der Astronomie und kann auch heutzutage noch nicht als mit der wünschenswerten Schärfe gelöst gelten. Die direkte trigonometrische Methode versagt hier, da einmal die Sonnenbeobachtungen an sich nahezu dieselben Schwierigkeiten wie die des Mondes bieten, ferner die thermischen Einflüsse, die sie auf die Meßwerkzeuge und die sie umgebenden Luftschichten ausübt, systematische Fehlerquellen erzeugen, und vor allem der zu messende Betrag nur wenige Bogensekunden beträgt. Man ist demnach auf indirekte Methoden, auf eine Kombination der trigonometrischen Methode mit der gravitationstheoretischen, angewiesen, deren Prinzip darin beruht, die Parallaxe eines anderen Planeten trigonometrisch zu bestimmen und unter Anwendung des 3. *Kepler*'schen Gesetzes die Sonnenparallaxe daraus zu berechnen[153]). Man überträgt die irdischen Maße zunächst trigonometrisch auf die Entfernung eines Planeten, von diesem nach dem 3. *Kepler*'schen Gesetz auf die Sonne, von dieser dann in gleicher Weise auf die übrigen entfernteren Planeten.

Auch zur erfolgreichen Anwendung dieser indirekten Methode eignen sich nur die uns nächsten Körper des Sonnensystems: Merkur, Venus, Mars und einige der kleinen Planeten, bei denen die etwas grössere Entfernung durch die größere Schärfe der Beobachtung mehr als ausgeglichen wird.

Am nächsten der Erde kommt Venus; indessen ist sie zu den Zeiten ihrer Erdnähe unsichtbar, und sobald sie eine meßbare Sichel aufweist, schon in größerer Entfernung von der Erde, zugleich auch

---

152) *Helmert* 2, p. 463 gibt dieser Beziehung in der sehr angenähert richtigen Form:

$$a = G\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{\sin^3 p}{n^2\left(1 + \frac{n^2}{2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{2}{3}(\alpha - \epsilon)\right)},$$

worin G ein gewisser Mittelwert der irdischen Schwerkraft, π und n die Winkelgeschwindigkeiten der Mond- und Erdbewegung, α die Erdabplattung, ϵ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnen, und berechnet aus den astronomischen Daten den Äquatorradius a der Erde.

153) In der Praxis stellt sich die Methode in der Form dar, daß die die Störungen mit enthaltenden Ephemeriden den Abstand des betreffenden Planeten in der mittleren Entfernung Erde-Sonne als Einheit darstellen und sonach jede Bestimmung jenes Abstandes in irdischem Maß auch die Länge dieser Einheit in gleichem Maß ausdrückt.

wegen dieser Sichelform schwer zu beobachten. Nur in einem Falle, der zu historischer Berühmtheit gelangt ist, bietet Venus eine scheinbar ausgezeichnete Gelegenheit zur Parallaxenbestimmung, nämlich wenn sie direkt vor der Sonnenscheibe vorübergeht und auf ihr als dunkles Fleckchen sichtbar wird. Sie ist dann erstens in ihrer Erdnähe, ihre Parallaxe beinahe viermal größer als die der Sonne, dann aber bietet hier die Sonnenscheibe jenen Hintergrund dar, auf dem die Verschiebung des Venusscheibchens, von verschiedenen Erdorten aus gesehen, direkt wahrgenommen und entweder mikrometrisch durch Anschluß an den Sonnenrand gemessen oder aus der Verschiedenheit der Eintritts- und Austrittszeiten berechnet werden kann.

Schon *Halley*[154]) machte vor 200 Jahren auf diese äußerst günstige Gelegenheit aufmerksam. Indessen brachten die Venusdurchgänge von 1761 und 1769 die erste Enttäuschung, indem die von *Halley* auf 1^s geschätzte Genauigkeit in der Fixierung der Eintritts- und Austrittszeiten kaum 1^m betrug. In ähnlicher Weise haben auch die Ergebnisse der 1874 und 1882 erfolgten Venusvorübergänge, zu denen äußerst umfangreiche Vorbereitungen getroffen waren, den hochgespannten Erwartungen nicht ganz entsprochen[155]). Da der nächste Venusdurchgang erst im Jahre 2004 stattfindet, scheidet diese Methode zunächst völlig aus[156]).

Was für Venus gilt, gilt in noch höherem Grade von Merkur. Es kommt daher demnächst Mars in Frage, dessen Annäherung an die Erde zwar nicht ganz die der Venus erreicht, aber doch bis auf 0,375 Erdbahnradien gehen kann. In älterer Zeit wandte man auf ihn die absolute Methode an, indem man ähnlich wie beim Monde aus den Differenzen der in möglichst verschiedenen geographischen Breiten beobachteten Deklinationen die Entfernung berechnete. Diese Methode war die erste, die zu näherungsweise richtigen Werten der Sonnenentfernung führte[157]).

---

154) *E. Halley*, De visibili conjunctione inferiorum Planetarum cum Sole, Lond. Phil. Trans. 1691, p. 511 [abr. 3, p. 448, engl.] und Methodus singularis qua Solis parallaxis, ope Veneris intra Solem conspiciendae tuto determinari poterit, Lond. Phil. Trans. 1716, p. 454 [abr. 6, p. 243, engl.].

155) *A. Auwers*, Die Venusdurchgänge 1874 und 1882, Bericht über die deutschen Beobachtungen, 1—6. Berlin 1887—1898.

156) Vgl. bezüglich der sehr umfangreichen Literatur über Venusdurchgänge *Wolf*, Handb. 2, p. 252—257.

157) Vgl. über die 1672 von der französischen Akademie zur Beobachtung der Mars-Opposition nach Cayenne gesandte Expedition *J. Richer*'s und die von ihr erhaltenen Ergebnisse *Wolf*, Handb. 2, § 441, p. 236 ff. In neuerer Zeit ist die Methode in verbesserter Form auf *Th. Winnecke*'s Vorschlag wieder zur An-

Später ist man dann zu dem mikrometrischen Anschluß des Mars[158]) und einiger kleinen Planeten[159]) an benachbarte Fixsterne übergegangen. Dabei hat man sowohl Deklinationsmessungen auf nördlich und südlich gelegenen Sternwarten, wie auch Beobachtungen auf *einer* Sternwarte in möglichst verschiedenen Stundenwinkeln angestellt und ganz neuerdings[160]) auch die photographische Beobachtung in Anwendung gebracht. Bisher bildet den Höhepunkt der zur Bestimmung der Sonnenparallaxe nach der trigonometrischen Methode angestellten Bemühungen die von *Gill* ins Werk gesetzte Kooperation verschiedener Sternwarten zur heliometrischen Beobachtung der kleinen Planeten Iris, Victoria und Sappho gelegentlich ihrer Opposition in den Jahren 1887 und 1888[161]), deren Erfolg ungewöhnlich groß war.

Eine besonders günstige Gelegenheit eröffnete die Entdeckung des kleinen Planeten Eros im Jahre 1898, dessen Annäherung an die Erde bis auf 0.15 der mittleren Sonnenentfernung gehen kann. Indessen sind die Ergebnisse des umfangreichen Zusammenwirkens zahlreicher Sternwarten gelegentlich der günstigen Eros-Opposition des Winters 1900/01 noch nicht zu übersehen[162]).

So große Fortschritte neuerdings die Bestimmung der Sonnenparallaxe durch die Beobachtung der kleinen Planeten gemacht hat, so wird man sich doch bei der Bestimmung einer so fundamentalen Größe nicht auf eine einzige Methode beschränken, die leicht systematischen Fehlern ausgesetzt sein kann[163]), sondern eine Kontrolle durch

---

wendung gelangt; vgl. z. B. *Th. Winnecke*, Vorläufige Ableitung der Sonnenparallaxe aus den Pulkowaer und Cap-Beobachtungen der Mars-Opposition 1862, Astr. Nachr. 59 (1863), p. 264.

158) *D. Gill*, Lond. Astr. Soc. Mem. 46 (1881), p. 1.

159) *J. G. Galle*, Über die Anwendung der kleinen Planeten zur Ermittelung des Wertes der Sonnenparallaxe, Astr. Nachr. 80 (1873), p. 1, sowie neben weiteren Aufsätzen in den Astr. Nachr.: Über eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus korrespond. Beobachtungen des Planeten Flora, Breslau 1875.

160) Bei der Eros-Opposition 1900/01.

161) *D. Gill*, A determination of the solar parallax and mass of the moon from heliometer observations of the minor planets Iris, Victoria, Sappho, made in the years 1888 and 1889, 2 vols., Cape Obs. ann. 6 (1897) u. 7 (1896).

162) Vgl. Conférence astrophotographique internationale de Juillet 1900, Circulaire Nr. 1 und die seither erschienenen Circulaires Nr. 2—10 (publiées par *M. Loewy*), Paris 1900—03.

163) Besonders zu befürchten ist bei den Beobachtungen in verschiedenen Stundenwinkeln und von verschiedenen Erdorten aus der Einfluß der Refraktion, insbesondere, wenn die Farbengattung des Planeten eine andere ist als die der Vergleichssterne; vgl. darüber *Gill*, l. c. Fußn. 161, I, part. 6, p. 7, und *Newcomb*'s Kritik der verschiedenen Methoden in *Newcomb*, Fund. Const., s. Fußn. 13).

andere Methoden als wünschenswert erachten. Diese beruhen, wie erwähnt, einmal in der Verfolgung der Wirkungen des Gravitationsgesetzes in den wahrnehmbaren Bewegungsvorgängen und der Erscheinungen, die aus der Endlichkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts hervorgehen.

Die eigentliche Aufgabe der trigonometrischen Methode, die Gravitationskonstante k^2 zu bestimmen, kann ähnlich wie bei der Anwendung auf die Mondparallaxe auch durch irdische Beobachtungen in Angriff genommen, d. h. die Sonnenparallaxe durch Vergleichung der irdischen Schwerkraft mit der Sonnenanziehung abgeleitet werden. Die dazu erforderliche Kenntnis der Erdmasse entnimmt *Newcomb* den Störungen der andern Planeten[164]). Eine fernere Gelegenheit zur Bestimmung der Sonnenparallaxe bietet die Bewegung des Mondes, in welcher ein der Sonnenanziehung entstammendes Störungsglied monatlicher Periode, die sogenannte parallaktische Ungleichheit, auftritt. Durch den großen Wert, den sie besitzt, nach *Newcomb*[165]) 124″.66, würde sie eine sehr sichere Bestimmung der Sonnenparallaxe ermöglichen, wenn nur die Schwierigkeit der Beobachtung des Mondortes und die dabei auftretenden systematischen Fehler diesen Vorteil würden ausnützen lassen. Neuerdings haben *Battermann*[166]) durch Beobachtung von Sternbedeckungen und *Franz*[167]) durch Beobachtung eines Mondkraters an Stelle der Mondränder hierin wesentliche Fortschritte erzielt.

Die Kenntnis der Mondentfernung läßt sich ebenfalls zur Bestimmung der Sonnenparallaxe verwerten, zwar nicht direkt durch das 3. *Kepler*'sche Gesetz, da dieses vielmehr besser zur Ableitung der Erdmasse dient[168]), sondern durch ein Störungsglied der Erdbewegung, die sogenannte Mondgleichung. Der Erdmittelpunkt beschreibt in einem Monat um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Erde-Mond eine kleine Ellipse, deren lineare Dimensionen

---

164) *Newcomb*, Fund. Const. (s. Fußn. 13), p. 123. Er leitet dort den stark abweichenden Wert $p_\odot = 8''.759$ ab und diskutiert eingehend die möglichen Fehlerquellen des Werts der Erdmasse, der im wesentlichen auf der Knotenbewegung der Venus, abgeleitet aus den Durchgängen von 1761 und 1769, beruht.

165) *Newcomb*, Fund. Const. (s. Fußn. 13), p. 190.

166) *H. Battermann*, s. Fußn. 147), p. 165.

167) *J. Franz*, Königsberger Meridianbeobachtungen von Mösting A, Astr. Nachr. 136 (1894), p. 353.

168) *P. S. de Laplace*, Sur quelques points du système du monde, Paris hist. (2) mém. 1789, auch Oeuvres 11 (1895), p. 490 bestimmte die Erdmasse auf Grund der Sonnenparallaxe und der Pendellänge; die Angabe in *Wolf*, Handb. 2, p. 258 ist irreführend

in irdischem Maße nur von dem Massenverhältnis beider Körper und der Mondentfernung abhängen. Diese periodische Bewegung des Erdzentrums ruft entsprechende scheinbare Bewegungen der anderen Himmelskörper hervor, deren Beobachtung die Entfernung des Objekts liefert. Obgleich der Effekt für die Sonne nur auf $\pm$ 6″.5 steigt, also kleiner als die Sonnenparallaxe selbst ist, haben ihn doch, da es sich um eine monatliche Periode handelt, schon *Laplace* und nach ihm *Leverrier* und *Newcomb* ziemlich sicher aus Beobachtungen der Sonne selbst ermitteln können. Besser noch bestimmt man ihn aus Beobachtungen der anderen uns besonders nahen Gestirne, wie *Gill* dies vorschlug[169]). Neuerdings zieht man es vor, die Mondgleichung zur Ableitung der Mondmasse zu verwenden[170]) und eventuell daraus die Nutationskonstante zu bestimmen[171]).

Die Kenntnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts[172]) läßt sich in verschiedener Art zur Ableitung der Sonnenentfernung verwerten; einmal gibt die Beobachtung der Verfinsterungen der Jupitertrabanten die Zeit, welche das Licht braucht, die Erdbahn zu durchlaufen, und damit die Dimensionen dieser Bahn selbst[173]). Ferner finden wir durch Bestimmung der Aberrationskonstante die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn (im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit) und damit wieder die Dimensionen dieser Bahn.

Der um die Mitte des vorigen Jahrhunderts allgemein angenommene Wert der Sonnenparallaxe war

$$p_\odot = 8''.578.$$

Er entstammte der Berechnung der Venusdurchgänge von 1761 und 1769, welche *Encke*[174]) ausgeführt hat. Im Jahre 1867 unternahm *Newcomb*[175]) eine umfangreiche Diskussion aller Bestimmungen

169) *D. Gill*, Remarks on the best methods of determining the positions of the planets by observation, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 54 (1894), p. 351.

170) Z. B. *D. Gill*, Cape Obs. ann. 6, Part 6, p. 11.

171) Vgl. *K. Laves*, Der Koeffizient der sog. lunaren Gleichung der Erdbewegung, Astr. Nachr. 132 (1893), p. 177, und On the determination of the principal term of the nutation, Astron. Journ. 14 (1895), p. 33.

172) Über die Bestimmung derselben vgl. *Wolf*, Handb. 2, p. 286 ff.

173) Dieselbe Betrachtung führte i. J. 1675 *Olaus Römer* dazu, die Endlichkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts zu erweisen; vgl. *O. Römer*, Démonstration touchant le mouvement de la lumière, Paris hist. (1) 1 u. 10, 1733 u. 1730.

174) *J. F. Encke*, Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgange von 1761 hergeleitet, Gotha 1822, und: Der Venusdurchgang von 1769, Gotha 1824.

175) *S. Newcomb*, Investigation of the distance of the sun and of the elements which depend upon it, Wash. obs. 1865, app. 2.

der Sonnenparallaxe, die ihn zu dem Werte $p_\odot = 8''.848$ führte. Die neueren Bestimmungen ergaben größtenteils wieder eine merkliche Verkleinerung dieses Wertes, sodaß die Pariser Konferenz von 1896[176]) nach einer neuen Diskussion *Newcomb*'s[177]) den seitdem angenommenen Wert

$$p_\odot = 8''.800$$

für die Anwendung in den Jahrbüchern festsetzte. Eine ausführliche Zusammenstellung aller stimmfähigen Werte gibt *Newcomb*[178]).

9c. Die Fixsterne. Zur Messung der Entfernung der Fixsterne kann man praktisch nur durch die Zwischenstufe der mittleren Sonnenentfernung gelangen, indem man dabei als Basis die Bahn benutzt, welche die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne den Beobachter beschreiben läßt. Auch diese Basis hat freilich Jahrhunderte hindurch nicht genügt, um eine sichere Fixsternparallaxe zu bestimmen, und reicht auch heutzutage trotz der so wesentlich gesteigerten Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen nur für die uns nächsten Fixsterne aus. Insbesondere für die zunächst versuchte Bestimmung absoluter Fixsternparallaxen erwies sich die Beobachtungsgenauigkeit als unzureichend[179]). Erst der Versuch, die mikrometrische Messungsmethode zur Bestimmung relativer Parallaxen in der Art zu verwerten, daß man den Parallaxenstern an Vergleichssterne anschloß, die man als wesentlich weiter entfernt ansah, führte *Bessel* und *W. Struve* zu den ersten einigermaßen Vertrauen verdienenden Werten. Insbesondere war es *Bessel*, der durch seine heliometrische Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni bahnbrechend auf diesem Gebiete wirkte[180]).

Seitdem haben zahlreiche Beobachter nach verschiedenen Methoden an verschiedenen Instrumenten — am Heliometer durch Distanzdifferenzen[181]), am Refraktor durch Deklinationsanschluß[182]), am Me-

176) s. Fußn. 62).

177) *S. Newcomb*, Fund. Const. (s. Fußn. 13), chapter VIII.

178) *Newcomb*, Fund. Const. [13]), p. 157, und in anderer Anordnung p. 166.

179) Über diese Versuche (von *Tycho Brahe*, *Hooke*, *Picard*, *Flamsteed*, *Cassini*, *Römer*, *Bradley*, *Piazzi*, *Brinkley*, *Bessel* usw.) vergleiche *C. A. F. Peters*, Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes, St. Pétersbourg 1848, auch enthalten in: Recueil de Mémoires présentés à l'Académie des sciences par les astronomes de Poulkova 1, St. Pétersbourg 1853.

180) *F. W. Bessel*, Bestimmung der Entfernung des 61. Sternes des Schwans, Astr. Nachr. 16 (1839), p. 65; und Fernere Nachricht von der Bestimmung der Entfernung von 61 Cygni, Astr. Nachr. 17 (1840), p. 257.

181) Insbesondere sind hier die Arbeiten von *Bessel*, *Schlüter*, *Wichmann*, *Winnecke*, *Krüger*, *Auwers* aus früherer Zeit, *Gill*, *Elkin*, *Peter* aus neuester zu nennen.

182) Zuweilen auch durch Distanz und Positionswinkel.

ridiankreis durch Rektaszensionsdifferenzen[183]), endlich auch durch Photographie[184]) — die Parallaxenbestimmung in Angriff genommen, indessen bisher nur verhältnismäßig wenig Werte mit Sicherheit bestimmen können[185]).

Für die Verwertung der weit größeren Basis, welche die fortschreitende Bewegung des ganzen Sonnensystems mit der Zeit erzeugt, zur Parallaxenbestimmung besteht ein großes Hindernis in den Eigenbewegungen der Gestirne. Während der Effekt der jährlich-periodischen Erdbewegung auf die Sternörter sich von diesen wesentlich linearen Bewegungen trennen läßt, sobald die Beobachtungen sich mindestens über ein Jahr erstrecken, vermischt sich die säkulare Bewegung völlig mit ihnen. Erst wenn die von diesen an sich als geradlinig-gleichförmig vorausgesetzten Bewegungen (des Sonnensystems, wie der Fixsterne) in den Richtungskoordinaten erzeugten quadratischen Zeitglieder merklich werden, ist an eine Bestimmung der Fixsternparallaxen auf diesem Wege zu denken[186]). Dabei würde dann immer noch die Voraussetzung selbst unrichtig sein und eine Krümmung der Bahn der Sonne oder des Fixsterns die Ursache der scheinbar der Zeit nicht proportionalen Eigenbewegung sein können.

---

183) *J. C. Kapteyn*, Bestimmung von Parallaxen durch Registrierbeobachtungen am Meridiankreise, Leiden Sternw. Ann. 7 (1897), p. 117.

184) Die ersten Versuche stellte *H. Jacoby*, The parallaxes of μ and δ Cassiopejae, N. York Ann. 8, auch Columb. Contrib. 5 (1893) an. Eine eigenartige Methode wandte *J. C. Kapteyn*, The parallax of 248 stars on the region around BD + 35°4013, Groningen Labor. Publ. 1 (1900), mit Erfolg zur Parallaxenbestimmung aller auf einer photographischen Platte enthaltenen Sterne an.

185) Eine bis zum Jahre 1889 gehende Zusammenstellung aller einigermaßen zuverlässigen Parallaxenbestimmungen, von denen sich allerdings seitdem ein großer Teil als noch ganz unsicher erwiesen hat, gibt *J. A. C. Oudemans*, Übersicht der in den letzten 60 Jahren ausgeführten Bestimmungen von Fixsternparallaxen, Astr. Nachr. 122 (1889), p. 193.

186) Den ersten Versuch hierzu machte, wie schon früher erwähnt, *F. Ristenpart*, s. Fußn. 127).

(Abgeschlossen im Juni 1905.)

VI 2, 3. GEOGRAPHISCHE ORTSBESTIMMUNG, NAUTISCHE ASTRONOMIE.

Von

C. W. WIRTZ

IN STRASSBURG I. E.

Inhaltsübersicht.

Literatur.

I. Allgemeine Lehrbücher.
II. Monographien.
III. Nautische Astronomie.

Einleitung.

1. Begrenzung des Themas.
2. Definition von Polhöhe, Zeit und Länge.
3. Einfluß der Erdfigur bei Ortsbestimmungen.

I. Zeitbestimmung.

A. Durch Höhen.

4. Eine einzelne Höhe.
5. Korrespondierende Höhen.
6. Gleiche Höhen verschiedener Gestirne.
7. Eine Höhendifferenz.

B. Durch Azimute.

8. Im Meridian.
9. Im Vertikal des Polarsterns.
10. In beliebigem Azimut; *Olbers*'sches Verfahren.
11. Mehrere Azimute.
12. Näherungsmethoden.
13. Azimut-, Höhen- und Zeitdifferenz.

II. Polhöhenbestimmung.

14. Meridianhöhe.
15. Circummeridianhöhe.
16. Polarishöhe.
17. Zweihöhenproblem, Spezialfälle und verwandte Aufgaben.
18. *Gauß*'sche Methode.

19. Drei Höhen.
20. *Horrebow-Talcott*'sche Methode.
21. Durchgänge durch den Ersten Vertikal.
22. Digressionen.
23. Absolute Methoden.
24. Instrumente zur Beobachtung gleicher Höhen.
25. Photographische Methoden.

III. Längenbestimmung.

A. Durch gleichzeitige Signale.*)

26. Mondfinsternisse, Verfinsterungen*) der Jupitersatelliten.
27. Sternschnuppen.
28. Künstliche Signale.

B. Durch Zeitübertragungen.

29. Chronometerreisen.
30. Telegraph.

C. Auf den Mondort gegründete Methoden.**)

31. Mondkulminationen.
32. Mondhöhen.
33. Monddistanzen.
34. Sternbedeckungen und Sonnenfinsternisse.
35. Verwandte Okkultationsphänomene.

IV. Azimutbestimmung.

36. Allgemeiner Weg.
37. Spezielle Methoden.

V. Nautische Astronomie.

38. Die Kimm und ihr Verhalten.
39. Instrumente zur Bestimmung und Elimination der Kimmtiefe.
40. Begriff der Standlinie und ihre Festlegung.
41. Zweihöhenproblem nach der Standlinienmethode.
42. Drei oder mehr Standlinien.
43. Standlinie für eine Höhendifferenz.
44. Berechnung der Höhe, Höhentafeln.
45. Gebrauch der Merkatorfunktion.
46. Azimuttafeln.
47. Ortsbestimmung mit Hilfe der erdmagnetischen Elemente.
48. Aeronautische Astronomie.

VI. Anhang.

49. Die sphärischen Grundformeln der geographischen Ortsbestimmung.
50. Weitere Literatur.

*) *Vorübergänge* der Planeten oder Satelliten siehe Nr. **35**.
) *Photographische* Methoden siehe Nr. **25.

Literatur.

I. Allgemeine Lehrbücher.

J. G. F. Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich mittels des Spiegelsextanten, Göttingen 1795, 2. Aufl. bearbeitet von *G. A. Jahn,* Göttingen 1852 (*Bohnenberger*).

A. Sawitsch, Abriß der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung, übersetzt von *W. C. Götze,* Hamburg 1850—51, 2. Aufl. von *C. F. W. Peters,* Leipzig 1879 (*Sawitsch*). (Das russische Original erschien Petersburg 1845.)

F. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, 4. Aufl. Berlin 1881 (*Brünnow*).

W. Chauvenet, A manual of spherical and practical astronomy, 2 vols., Philadelphia 1863, 5th ed. 1885, 1893, 1900 (5th ed.: *Chauvenet*).

W. Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885.

J. P. Herr, Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung. Vollendet von *W. Tinter,* Wien 1887.

S. Günther, Handbuch der mathematischen Geographie, Stuttgart 1890 (*Günther*).

W. F. Wislicenus, Handbuch der geographischen Ortsbestimmungen auf Reisen, Leipzig 1891.

G. V. Schiaparelli, Sulla determinazione della posizione geografica dei luoghi per mezzo di osservazioni astronomiche. Litografia dell' Istituto geografico militare, Firenze 1896.

II. Monographieen.

C. F. Gauß, Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat, Göttingen 1808 = *Gauß'* Werke 6 (1874), p. 37 (*Gauß, Method. pecul.*).

A. F. Möbius, De computandis occultationibus fixarum per planetas, Lipsiae 1815.

F. W. Bessel, Analyse der Finsternisse, erschien in *Bessel,* Astron. Untersuch., Bd. 2, p. 95, Königsberg 1842. Abgedruckt in *Bessel,* Abhdl., Bd. 3, p. 369.

P. A. Hansen, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 4 (1859).

W. Döllen, Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Vertikale des Polarsternes, 2 Teile, St. Petersburg 1863 und 1874.

N. Zinger, Die Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen verschiedener Sterne (russ.), Petersburg 1874; Referat: Astr. Ges. Vjs. 9 (1874), p. 155; deutsch von *H. Kelchner,* Leipzig 1877 (*Zinger*).

P. Harzer, Über geographische Ortsbestimmungen ohne astronomische Instrumente, Berlin 1896 (*Harzer, Ortsbest.*; vgl. Fußn. 38).

— Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns, Kiel Sternw. Publ. 10 (1899).

III. Nautische Astronomie.

N. Bowditch, The improved practical navigator. Revised by *Th. Kirby,* London 1802. — The american practical navigator. Revised by *P. H. Cooper* and *G. W. Logan,* Washington 1904.

C. Rümker, Handbuch der Schiffahrtskunde, Hamburg 1820. 6. Aufl. 1857.

H. Raper, The practice of navigation and nautical astronomy, London 1840. 19th ed. 1891.

A. Breusing, Kleine Steuermannskunst, Bremen 1852. *Breusing's* Steuermannskunst, hrsg. von *C. Schilling,* 7. Aufl. Leipzig 1904.

M. F. Albrecht und *C. S. Vierow*, Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hülfswissenschaften, Berlin 1854. 8. Aufl. bearbeitet von *G. Holz*, 1900.
G. D. E. Weyer, Vorlesungen über nautische Astronomie, Kiel 1871.
Y. Villarceau et *A. de Magnac*, Nouvelle navigation astronomique, Paris 1877. Teil I: Théorie, Teil II: Pratique (*Villarceau-de Magnac*).
A. Roth, Lehrbuch der astronomischen Navigation, Fiume 1898 (*Roth, Navig.*).
F. Bolte, Neues Handbuch der Schiffahrtskunde, Hamburg 1899.
Lehrbuch der Navigation. Herausgegeben vom *Reichs-Marine-Amt*, 3 Bde., Berlin 1901 (*Reichs-Marine-Amt, Navig.*).

Einige weder hier noch in den Fußnoten zitierte Schriften sind an den Schluß (Nr. **50**) des Artikels verwiesen; das Gleiche gilt von der Zusammenstellung der Tafelwerke und Ephemeriden. —

Zahlreiche Literaturnachweise gibt *Rudolf Wolf*, Handbuch der Astronomie, 2 Bde., Zürich 1890/93 (*Wolf, Handb.*), in den Abschnitten XIV, XVI, XVIII.

Einleitung.

1. Begrenzung des Themas. Die geographische Ortsbestimmung stellt sich vor allen Dingen in den Dienst der Erdkunde und Geodäsie; für die Astronomie im engeren Sinne ist die Disziplin nur von untergeordneter Bedeutung. Da sie sich aber ausschließlich astronomischer Daten zur Lösung der ihr erwachsenden Aufgaben bedient, hat man sie von alters her im Anschluß an die Astronomie behandelt, und zwar an dasjenige Kapitel der Himmelskunde, dem die geographische Ortsbestimmung einzig ihre Elemente und Hilfsmittel entlehnt, der sphärischen Astronomie. Das Hauptziel des vorliegenden Abrisses soll nun darin bestehen, die Grundlehren der Ortsbestimmung kurz darzustellen und unter den zahlreichen Methoden nicht nur jene herauszugreifen, die unmittelbar aus den Grundanschauungen hervorgehend als klassische oder fundamentale bezeichnet werden, sondern auch von den andern die, welche für irgend einen Zweig des Wissens und der Technik unter Umständen von Bedeutung sein mögen.

2. Definition von Polhöhe, Zeit und Länge. Die Lage eines Punktes auf der Erdoberfläche ist durch zwei sphärische Koordinaten eindeutig definiert, deren eine (Breite) die Entfernung vom Äquator im Bogen größten Kugelkreises darstellt und deren andere (Länge) der im Parallelkreis gemessene Winkelabstand vom Ausgangsmeridian ist. Die Zeit dient bei den Rechnungen zur geographischen Ortsbestimmung nie als Selbstzweck, sondern nur als Durchgangselement.

Unter *geographischer Breite* oder *Polhöhe* verstehen wir die Deklination des Zenits des Beobachtungsortes.

Sternzeit ist der Stundenwinkel des Frühlingspunktes, oder die Rektaszension des Zenits des Beobachtungsortes. Mit *wahrer Sonnenzeit*

bezeichnen wir den Stundenwinkel der wahren Sonne, mit *mittlerer Sonnenzeit* den Stundenwinkel der mittleren Sonne. Die Differenz mittlere Sonnenzeit minus wahre Sonnenzeit heißt *Zeitgleichung.*

Geographische Länge ist der Winkel, den die Meridianebenen zweier Orte untereinander einschließen. Während also den Ausgangspunkt für die Breite, die Breite Null, die Natur selbst schafft, unterliegt der *Nullmeridian* der Willkür. Im Altertum, z. B. bei *Marinus* und *Ptolemäus,* war es der etwa einen Grad westwärts von den glückseligen Inseln (wahrscheinlich die Kap-Verden) verlaufende Meridian, die Araber des Mittelalters blieben entweder bei den Säulen des Herkules und den Fortunaten stehen oder zählten nach dem Vorgange *Zarquala*'s (*Arzachel*) die Längen vom weltteilenden Meridian von Arin oder richtiger Azin aus, den sie genau 10^0 östlich von Bagdad festsetzten; die Seefahrer und Kartenzeichner des 16. und 17. Jahrhunderts zogen ihren ersten Meridian abwechselnd durch die Azoren, die Kanarischen und die Kapverdischen Inseln; Atlanten des 17. und 18. Jahrhunderts adoptieren den durch den Pik von Teneriffa gelegten als Nullmeridian, der insbesondere bei den Holländern zu *Abel Tasman*'s und *Nikolaus Vischer*'s Zeiten Aufnahme fand. Lange Zeit beherrschte der Meridian von Ferro das Feld, den eine im Juli 1630 zu Paris stattgehabte Versammlung von Astronomen und Mathematikern in Vorschlag brachte. Allmählich wurde indes seine Definition dahin gebräuchlich, daß er genau 20^0 westlich von Paris verlaufen solle, d. h. er bedeutet im Grunde den verkappten Pariser Meridian[1]). Heutigentages endlich erfreut sich der Greenwicher Meridian fast allgemeiner Anerkennung[2]), sowohl bei geodätischen Operationen, als auch vor allem in der nautischen Praxis. Selbst Frankreich bekennt sich neuerdings zur Greenwicher Zeit, die durch die Chambre des députés am 24. Februar 1898 in folgender bemerkenswerten Fassung angenommen wurde: „L'heure légale, en France et en Algérie, est l'heure temps moyen de Paris, rétardée de $9^m\ 21^s.$[3])

---

1) Vgl. *Gehler*'s physikal. Wörterbuch, 2. Aufl. Bd. 6, Leipzig 1831; *E. Müller,* Longitudinum geographicarum gradus num astronomicis et quibus methodis usi veteres Arabique determinaverint, Berolini 1862; ferner *O. Peschel,* Geschichte der Erdkunde, München 1877.

2) Unification des longitudes par l'adoption d'un méridien initial unique, Berlin 1884, Abdruck aus: Verh. 7. Allg. Conf. Erdm., Berlin 1884, 1. u. 9. Sitzung.

3) Geographisches Jahrbuch 26, Gotha 1904, p. 364. Das Annuaire du bureau des longitudes hingegen definiert noch immer unter Berufung auf das Gesetz vom 15. März 1891 die mittlere Zeit von Paris als gesetzliche Zeit von Frankreich und Algier (z. B. annuaire pour 1905, Paris 1905, p. 546).

Wie man die Breiten vom Äquator aus nach Nord (+) und nach Süd (−) bis zu den Polen (90°) durchzählt, so pflegt man die Längen vom ersten Meridian aus nach Osten (+) und nach Westen (−) bis 180° zu rechnen. Der Halbmeridian 180° von Greenwich dient den Seefahrern als Datumgrenze; auf der Fahrt von Ost nach West überschlägt man einen Tag und von West nach Ost segelnd nimmt man ein Datum zweimal nacheinander.

3. Einfluß der Erdfigur bei Ortsbestimmungen. Auf die von der mathematischen abweichende dynamische Erdfigur braucht bei astronomischen Ortsbestimmungen keine Rücksicht genommen zu werden. Denn wir verlangen stets nur die Kenntnis der Deklination des Lotes auf die für den Beobachtungsort geltende Niveaufläche. Aufgabe der Geodäsie ist es, die Abweichung der Niveaufläche des Geoids in Beziehung zu setzen zum Referenzellipsoid, dessen Konstanten zumeist nach *Bessel* angenommen werden. Das Referenzellipsoid reicht auch vollständig hin zur scharfen Berechnung der parallaktischen Wirkung, i. e. der kleinen Verschiebung, die ein Gestirn an der Himmelssphäre erleidet, jenachdem ich es vom Beobachtungsort oder vom Erdmittelpunkt aus betrachte.

I. Zeitbestimmung.

A. Durch Höhen.

4. Eine einzelne Höhe. Die Ermittlung der Zeit läuft auf die Ableitung des Stundenwinkels des Frühlingspunktes hinaus. Jedes seiner Beziehung zum Frühlingspunkt nach bekannte Gestirn kann demnach dieser Absicht dienen.

Die einfachste mit den geringsten Beschränkungen verknüpfte Methode besteht in der Beobachtung der *Höhe* oder *Zenitdistanz* eines an sich beliebigen Himmelskörpers. Aus dem astronomischen Grunddreieck Pol-Zenit-Stern, dessen drei Seiten (Zenitdistanz, Poldistanz und Komplement der Breite) nun bekannt, läßt sich der Stundenwinkel, i. e. der Winkel am Pol auswerten, und die Beobachtungsfehler üben offenbar dann ihren geringsten Einfluß auf das Resultat aus, wenn der Stern so steht, daß zu einer bestimmten Änderung des Stundenwinkels die größtmögliche Höhenänderung gehört. Dies tritt beim Durchgang durch den *ersten Vertikal* ein, das heißt, wenn das Azimut 90° beträgt. Gleichzeitig erzielen wir den Vorteil, daß ein Fehler in der angenommenen Breite das Ergebnis auf die kleinste Weise entstellt. Bei rationeller Anwendung der Methode darf man

somit vom ersten Vertikal sich nicht allzuweit entfernen, und unter dieser Voraussetzung vereinfachen sich auch die Formeln um ein weniges, da man dann, wie *Donner*[4]) zeigt, von dem rechtwinklig-sphärischen Dreieck ausgehen und die Abweichungen vom idealen Fall durch einfache Reihenentwickelung darstellen darf.

Natürlich beschränkt man sich nicht auf eine Höhe, sondern nimmt deren mehrere, und zwar bei Gebrauch eines Universalinstrumentes mit ein- oder mehrmaligem Durchschlagen des Fernrohrs zur Elimination des Zenitpunktes des Teilkreises; beim Spiegelsextanten bestimme man den Indexfehler vor und nach der Beobachtungsreihe und setze inmitten derselben das Glas- oder Glimmerdach des Quecksilberhorizontes um. Bei der Sonne sind beide Ränder wechselweise einzustellen, um die persönlichen Auffassungsfehler, die einen von der Ephemeride abweichenden Sonnenradius hervorrufen, herauszuschaffen. Das Gleiche gilt in einem kräftigen Fernrohr für die Planeten mit merklichem Durchmesser. Dagegen steht bei Mond und Venus (und Merkur) immer nur ein beleuchteter Rand zur Verfügung. Außer den Instrumentalfehlern bringt man an die Höhen Parallaxe und Refraktion an und kann dann zur Berechnung des Stundenwinkels schreiten, entweder für jede Höhe getrennt — und dies gewährt die Annehmlichkeit, daß man die innere Genauigkeit der Beobachtung aus der Übereinstimmung der Einzelwerte abzuschätzen vermag — oder man vereinigt sofort die Uhrzeiten und die zugehörigen Zenitdistanzen zu je einem Mittel, hat aber noch entweder an den gefundenen Stundenwinkel oder zuvor an die Mittelhöhe eine Verbesserung anzubringen[5]), die um so kleiner sich ergibt, je rascher die Messungen aufeinander folgen und je näher ihre Mittelzeit dem ersten Vertikal liegt.

Ist der Stundenwinkel bekannt, so geht daraus durch Hinzufügung der Rektaszension des Sternes die Sternzeit der Beobachtung hervor, deren Vergleich mit der nach Sternzeit regulierten Beobachtungsuhr deren Stand ergibt. Geht die Uhr nach mittlerer Zeit, so ist die gefundene Sternzeit mit Hilfe der Angaben der Ephemeriden in mittlere Sonnenzeit umzusetzen. Ähnlich bleibt das Verfahren, wenn die Sonne beobachtet worden; man geht alsdann mittels der Zeitgleichung von wahrer Zeit, gleich dem Stundenwinkel der Sonne, auf mittlere und dann eventuell auf Sternzeit über.

4) *A. Donner,* Formeln und Tafeln zur Berechnung von Zeitbestimmungen durch Höhen in der Nähe des I. Vertikals, Helsingfors 1890.

5) Siehe z. B. *Brünnow,* p. 267; ferner *J. Soldner,* Berl. astr. Jahrb. für 1818, p. 123.

Für die Zwecke des bürgerlichen Lebens und den Liebhaber der Astronomie empfiehlt sich zur beiläufigen Bestimmung der Uhrkorrektion ein von *Eble*[6]) konstruierter Holzsextant, dessen Teilung schon Rücksicht nimmt auf die mittlere Refraktion. Ein graphisches Netz macht sphärische Rechnung überflüssig und gestattet mit zulänglicher Schärfe den Stundenwinkel an einem Lineal abzulesen. *Eble*'s Vorgänger war *F. C. Müller*[7]), der einen ähnlichen Sextanten herausgab, die Rechnung aber nicht durch ein Diagramm, sondern durch umfangreiche Tafeln umging, die direkt die wahre Sonnenzeit zu jeder Höhe für jeden Tag des Jahres enthalten. Sehr nahe verwandt mit den *Müller*'schen Tafeln sind die später von *M. R. Pressler*[8]) veröffentlichten, während *O. Müller*'s[9]) Tafeln bei genauer Rechnung nur eine geringe Zeitersparnis gewährleisten. Tafeln zur Bestimmung der Zeit nach Sonnenhöhen bilden auch den Anhang zu *C. Bremiker*'s fünfstelligen Logarithmentafeln[10]).

Will man im resultierenden Uhrstande frei werden von konstanten Fehlern in der Höhe, so muß man die Zenitdistanzen sowohl im Ost- als im Westzweig des Ersten Vertikals nehmen. Ist der zu befürchtende Fehler noch variabel mit der Höhe, so fällt er nur bei strenger Gleichheit der absoluten Höhen heraus. Man erzielt eine beträchtliche Vereinfachung der Rechnung, wenn in Ost und West dasselbe Gestirn beobachtet wird.

Unter dieser Bedingung haben wir

5. Die Methode der **Korrespondierenden Höhen** in ihrer reinen Gestalt vor uns, die sich bei den Astronomen des Altertums, Mittelalters bis tief in das 18. Jahrhundert hinein besonderer Beliebtheit erfreute. Da ein Fixstern Ost und West vom Meridian bei absolut gleichen Stundenwinkeln auch die gleichen Höhen erreicht, so muß seine Kulmination in die Mitte zwischen jene beiden beobachteten Zeiten fallen. Die Abweichung des arithmetischen Mittels jener Zeiten gegen die durch die Rektaszension bekannte Kulminationszeit des Gestirnes stellt mithin die Uhrverbesserung dar. Die Kenntnis der Polhöhe spielt gar keine Rolle, die der absoluten Höhen auch nicht; einziges Erfordernis bleibt die Konstanz der Höhen, die teils durch

6) *M. Eble,* Neues Zeitbestimmungswerk, Tübingen 1853.

7) *F. C. Müller,* Tafeln der Sonnenhöhen für ganz Deutschland. Nebst einem in Kupfer gestochenen Sextanten, Leipzig 1791.

8) *M. R. Pressler,* Ein Zeitmeßknecht oder der Meßknecht als Normaluhr, 2 Teile, Braunschweig 1856.

9) *O. Müller,* Tavole per la determinazione del tempo, Milano 1881.

10) Berlin 1872, 5. Aufl. Berlin 1887.

Universalinstrument, teils durch Spiegelsextant, teils durch eine Gattung von Apparaten erzielt werden kann, die speziell nur die Verbürgung der Stabilität in Höhe beanspruchen (vergl. Nr. **24**). Notwendige Variationen in Höhe bringen schon die zwischen Ost- und Westdurchgang unvermeidlichen meteorologischen Verschiedenheiten mit sich, die eine Refraktionsschwankung zum Gefolge haben, deren Größe man den Refraktionstafeln entnimmt und in der Mittelzeit differentiell berücksichtigt[11]).

Verharrt das Gestirn nicht fest an der Sphäre, sei es ein Planet oder die Sonne, so deckt sich infolge der während kurzer Zeit als gleichförmig anzusetzenden Deklinationsänderung die Mittelzeit nicht mehr mit der Kulminationszeit, sondern fällt ein weniges dahinter oder davor. Für die kleine deshalb notwendig werdende *Mittagsverbesserung*, die zuerst von *Euler*[12]) behandelt wurde, bedient man sich heute allgemein der *Gauß*'schen[13]) Formeln, zumal ihre Anwendung einige viel verbreitete Tafeln sehr erleichtern.

Vervielfachung der Beobachtungen erreicht man bei einem Reflexionsinstrument dadurch, daß man die Alhidade der Reihe nach auf volle 10′- oder 20′-Striche einstellt und beim Universal oder Theodoliten, indem man mehrere parallele Horizontalfäden einreiht, an denen man die Antritte der Sterne oder des oberen und unteren Sonnenrandes beobachtet. Ist einmal die Vormittagshöhe der Sonne mißlungen, so gibt die Verbindung einer Nachmittagshöhe mit der darauffolgenden Vormittagshöhe die Uhrzeit der wahren Mitternacht, nachdem noch eine der Mittagsverbesserung analoge und mit Hilfe derselben Tafeln eruierbare *Mitternachtsverbesserung*[13]) angebracht worden.

Zur Beobachtung korrespondierender Sonnenhöhen gab *Chandler*[14]) ein Instrument an, das er „Chronodeik" nannte; es besteht aus einem vertikal abwärts gerichteten Fernrohr, unter welchem ein drehbarer Spiegel angebracht ist.

Für die Nautik legte *Wendt*[15]) dar, wie die Fahrt des Schiffes

---

11) Siehe z. B. *Brünnow*, p. 289.

12) *L. Euler*, Methodus computandi aequationem meridiei, Petersbg. Commentarii 8 (1736), p. 48.

13) *C. F. Gauß*, Tafeln für die Mittagsverbesserung, Monatl. Corr. 23 (1811), p. 401 = Werke 6 (1874), p. 166. Derartige Tafeln finden sich z. B. in *C. F. W. Peters*, Astr. Tafeln u. Formeln, Hamburg 1871, p. 89; *H. Göring*, Der Zeitmesser, Tafeln der Mittagsverbesserung für die Breitengrade 30° bis 60° und der Zeitgleichung, Paderborn 1862.

14) *S. C. Chandler*, The Observatory 4 (1881), p. 14; *J. Palisa*, Astron. Kalender f. 1889, hrsg. von der k. k. Sternwarte in Wien, Wien 1888.

15) *E. Wendt*, Ann. d. Hydr. 1900, p. 186, 198 und 1902, p. 152.

zwischen beiden zusammengehörigen Beobachtungen das Ergebnis beeinflusse, und empfahl eine Modifikation in dem Sinne, daß man solche Höhen beobachte, zu denen gleiche östliche und westliche Stundenwinkel gehören.

Die korrespondierenden Höhen erfordern nicht nur lange Zeit zur vollständigen Beobachtung, sondern ihr Zustandekommen ist obendrein durch die Launen der Witterung gefährdet. Darum strebte man nach einer rasch arbeitenden Methode, die an den Hauptvorzügen der reinen korrespondierenden Höhen teilnahm. Sie gelangte aber erst zum Durchbruch, als hinlänglich viele scharfe Sternörter vorlagen.

6. Gleiche Höhen verschiedener Gestirne. Läßt man die Gleichheit des Gestirns bei der Methode der korrespondierenden Höhen fallen, so erwächst die allgemeine Aufgabe: aus den *Durchgängen zweier Sterne durch denselben Höhenkreis*[106]) bei bekannter geographischer Breite die Zeit zu bestimmen. Diese Art der Zeitbestimmung, schon von *Köhler*[16]), *Tammelander*[17]), *Koch*[18]) vorgeschlagen, ist späterhin von *Gauß*[19]) und vor allem von russischen Astronomen *Zinger*[20]), *Pjewzow*[21]) u. a. behandelt worden, die sie für besonders geeignet erachteten, das astronomische Netz in den weiten Steppenflächen des russischen Reiches festzulegen. Auch der Spanier *Cañete del Pinar*[22]) brachte die Methode gleicher Höhen mit Hilfe eines eigenartig konstruierten Spiegelsextanten zu Ehren. Natürlich ist die Aufgabe umkehrbar: die Breite kann bestimmt werden bei vorgelegter Zeit, ohne daß man der absoluten Höhe bedarf. Ja, als Nebenresultat kommen noch Werte für die Höhe heraus, deren Vergleich mit der Ablesung am Teilkreis des Instrumentes die Indexkorrektion ergibt. Jenachdem Zeit oder Breite bestimmt werden

---

16) *J. G. Köhler,* Berl. astr. Jahrb. für 1784, p. 148.

17) *A. J. Tammelander,* Methodus inveniendi tempus verum, Aboae 1785—1787.

18) *J. A. Koch,* Astronomische Tafeln zur Bestimmung der Zeit aus der beobachteten gleichen Höhe zweier Fixsterne, als Anhang zum Berl. astr. Jahrb. für 1799 separat erschienen, Berlin und Stralsund 1797; ferner *W. T. Pabst,* Monatl. Corr. 20 (1809), p. 140 und *K. B. Mollweide,* Monatl. Corr. 25 (1812), p. 484.

19) *Gauß,* Method. pecul.

20) Siehe *Zinger*; *N. Schtschetkin,* Sternephemeride für die Zeitbestimmung nach der Zinger'schen Meth., St. Petersburg 1902. In russischer Sprache.

21) *M. Pjewzow,* Üb. d. Bestimmung der geographischen Breite durch korrespondierende Höhen, St. Petersburg 1900. In russischer Sprache.

22) *de Cañete del Pinar,* Algo más sobre observaciones de precisión con el sextante, Madrid 1900.

sollen, liegen die günstigsten Verhältnisse der Beobachtungen entweder so, daß die beiden Sterne je im Ost- und Westzweig des Ersten Vertikals oder im Nord- und Südbogen des Meridians stehen. Bei der Zeitbestimmung sollen ferner die Deklinationen der Sterne um nicht mehr als ein paar Grade verschieden sein.

7. Eine Höhendifferenz. In der Verallgemeinerung darf man noch einen Schritt weiter gehen. Die Methoden der korrespondierenden Höhen sind nur Spezialfälle der allgemeinen Aufgabe: aus einer *Höhendifferenz zweier Sterne* bei bekannter Breite die Zeit zu bestimmen. Dieses Problem wurde zuerst von *v. Tempelhof*[23]) als Erweiterung der korrespondierenden Sonnenhöhen behandelt, aber die Rechnungsvorschriften gelten nur für sehr geringe Höhendifferenzen. Eine allgemeine Lösung gab *Wirtz*[24]) an; die günstigsten Bedingungen treten dann ein, wenn der eine Stern genau im Osten, der andere genau im Westen steht. Die Höhendifferenz verlangt vor ihrer Benutzung noch eine Verbesserung wegen Refraktion und eventuell wegen Parallaxe.

B. Zeitbestimmung durch Azimute.

8. Im Meridian. Während die bisher besprochenen Zeitbestimmungen allesamt auf Höhenbeobachtungen hinausliefen, beruhen die schärfsten Methoden auf Beobachtungen von Durchgängen durch Vertikalkreise, zunächst durch den wichtigsten Vertikalkreis, den Meridian.

Ein *Meridiankreis* oder *Passageninstrument*, fest oder transportabel, steht so, daß seine Achse horizontal Ost—West gerichtet ist und die Absehenslinie des Fernrohrs den Meridian innehält. Merke ich nun am Fadennetz — der vertikale Mittelfaden repräsentiert ein Stück des Meridians — den Augenblick der Bisektion eines Sternes, so gewinne ich in der Differenz der Uhrzeit dieses Augenblicks gegen die anderweitig bekannte Rektaszension des Sternes den Stand der Uhr gegen Sternzeit.

In der Ausführung des Gedankens, den zuerst *Olaus Römer*[25]) instrumentell verwirklichte, gestalten sich die Verhältnisse erheblich komplizierter. Man beschränkt sich nicht auf einen Stern, sondern vereinigt ihrer sechs bis acht zu einer Zeitbestimmung; ebensowenig verläßt man sich darauf, daß der Tubus den Meridian beschreibt; man

23) *G. F. v. Tempelhof,* Berl. astr. Jahrb. Suppl. 1 (1793), p. 214.

24) Ann. d. Hydr. 1901, p. 372.

25) *Olaus Römer* i. J. 1689 nach *P. Horrebow,* Basis astronomiae, Havniae 1735, p. 49, abgedruckt in: *Petri Horrebowii* operum tomus 3, Havniae 1741.

kontrolliert vielmehr die Fehler seiner Aufstellung, nämlich Neigung der Umdrehungsachse und Azimut, fortwährend im Laufe der Messung; erstere durch die Libelle, letzteres durch die Mitbeobachtung eines dem Pol nahestehenden Sternes. Bei kleinen transportablen Instrumenten eliminiert man den „Kollimationsfehler", d. i. die Abweichung des Winkels zwischen Rohr und Achse von 90^0, dadurch, daß man die Achse „umlegt", d. h. in ihrer Horizontalebene um 180^0 dreht und den Stern in beiden Lagen der Achse beobachtet. Solange keine besonderen Verhältnisse vorliegen, wird die mittlere Deklination der Zeitsterne nicht etwa am Äquator zu wählen sein, sondern so, daß beiläufig die Kulminationshöhe der Zeitsterne übereinstimmt mit der Polhöhe des Beobachtungsortes. Gelang kein Polstern, so müssen die Zeitsterne möglichst nahe am Zenit kulminieren, da in diesem Falle der Einfluß eines azimutalen Fehlers verschwindet. Das Azimut selbst wird sehr scharf gefunden durch drei aufeinander folgende (abwechselnd obere und untere) Kulminationen eines Circumpolarsternes; Maß für das Azimut bildet die Differenz der beiden Zwischenzeiten; eine Uhr von gleichmäßigem Gang ist freilich unerläßlich.

Zur Berechnung sind Formeln gebräuchlich, die nach ihren Urhebern als *Mayer*'sche[26]), *Bessel*'sche[27]) und *Hansen*'sche[28]) unterschieden werden. Für die Zeitbestimmung zu geographischen und geodätischen Zwecken gilt die *Mayer*'sche Darstellung, in der alle drei Fehlerquellen (Neigung, Azimut, Kollimation) getrennte Berücksichtigung erfahren, als die zweckmäßigste. Eine neue wesentlich graphische Reduktionsmethode für Sätze von Transitbeobachtungen gab *C. Braun*[29]) an. Er erstrebt die Ausgleichung aller Durchgänge in sich und umgeht dabei die Methode der kleinsten Quadrate. An festen Sternwarten fällt es nicht schwer, die Zeit mit einer Genauigkeit von $\pm$ $0^s.02$ mittlerem Fehler abzuleiten, wohlverstanden innerhalb des zugrunde gelegten Rektaszensionssystems der Fundamentalsterne, sei es nach *Auwers*, *Newcomb* oder nach einem der früher in den Sternephemeriden des Nautical Almanac und der American Ephemeris adoptierten Fundamentalkataloge.

Während man auf Observatorien nur in Notfällen den Durch-

---

26) *Tobias Mayer*, Observationes astronomicae quadrante murali habitae (vorgetragen 1756) = Opera inedita, 1, Gottingae 1775, p. 19.

27) *F. W. Bessel*, Königsb. Beob. 2 (1816), p. III = Abhdl. 2, p. 33.

28) *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 6 (1828), p. 421—458.

29) *C. Braun*, Berichte von dem erzbischöfl. Haynald'schen Observatorium zu Kalócsa in Ungarn, p. 59, Münster i. W. 1886. Siehe auch Astr. Nachr. 109 (1884), p. 33.

gang der Sonne zur Zeitbestimmung benutzt, existieren, abgesehen vom uralten Gnomon, den *Jordan*[30]) wieder zu Ehren brachte, einige kleine Apparate, die dies bequem dem Amateur ermöglichen. Hierher gehört das Dipleidoskop, das der Londoner Uhrmacher *E. Dent*[31]) erfand. Es besteht aus zwei ebenen Glasspiegeln und einer durchsichtigen Glasplatte, die so zusammengefügt sind, daß ihr Grundriß ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Richtige Orientierung vorausgesetzt, eilen dann kurz vor der Kulmination die zwei von den Spiegeln entworfenen Sonnenbilder in dem zugehörigen kleinen Fernrohr gesehen rasch aufeinander zu und decken sich im Moment des wahren Mittags. Eine Verschärfung tritt ein, wenn man das Mittel der Uhrzeiten der beiden Randberührungen bildet. Auf dasselbe Beobachtungsprinzip stützt sich das *Steinheil*'sche[32]) Passagenprisma, welches die Duplizität der aufeinander zulaufenden Sonnenscheiben dadurch erreicht, daß die Hälfte des Fernrohrobjektivs von einem Prisma bedeckt ist, dessen Hypotenusenfläche parallel steht zur optischen Achse des Rohres. Der zu erwartende Fehler einer Zeitbestimmung mit diesem Instrument liegt bei hinlänglich stabiler Aufstellung immer unter 1^s. *E. Dent*'s *Universaldipleidoskop*[33]) gestattet auch außer Mittag die wahre Zeit zu finden.

9. Im Vertikal des Polarsterns. Der raschen Anwendung der Zeitbestimmung strenge im Meridian steht bei geodätischen Operationen und auf geographischen Expeditionen der Umstand entgegen, daß hinreichend helle Polsterne, die der Festlegung des Azimutes dienen, selten sind; die kleineren Instrumente sind, insbesondere am Tage und in der Dämmerung, auf den eigentlichen Polarstern, α Ursae minoris, angewiesen. Aus dieser Erwägung heraus ist ein Verfahren entstanden, das diesem Übelstande ausweicht. Man beobachtet den Durchgang der Zeitsterne nicht mehr im Meridian, sondern in einem durch einen Polstern gehenden Vertikalkreis. Da dieser Stern gewöhnlich α Ursae minoris ist, heißt die ganze Methode: *Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns.* Zuerst angegeben wurde das Verfahren von *Littrow*[34]), *Tiarks*[35]) und *Hansen*[36]), später weiter ent-

30) *W. Jordan,* Grundzüge, p. 141.

31) *E. J. Dent,* A description of the dipleidoscope, London 1843.

32) Vgl. darüber *C. Hornstein, L. Seidel, C. A. v. Steinheil,* Astr. Nachr. 24 (1846).

33) Siehe *A. W. Hofmann,* Bericht üb. d. wiss. Apparate auf der Londoner internat. Ausstellung 1876, Braunschweig 1878, p. 180.

34) *J. J. v. Littrow,* Über den erweiterten Gebrauch der Multiplikationskreise, Prag 1820.

35) *J. L. Tiarks,* Lond. Astr. Soc. Mem. 3 (1829), p. 77.

wickelt von *W. Döllen*[37]) und *P. Harzer*[38]). Die Reduktion, natürlich nicht mehr so einfach wie bei der meridiannahen Methode, tritt bald in direkter, bald in indirekter Form auf; durch *Harzer*'s Abhandlung scheint die direkte Methode als die bequemere erkannt zu sein. Die Vorschriften zur Wahrung möglichster Genauigkeit unterscheiden sich nicht viel von den für den Meridian geltenden. Umlegung des Instrumentes während der Reihe und symmetrische Anordnung der Zeitsterne zum Polstern bilden die Hauptsache. Die schließliche Zuverlässigkeit der Methode reicht an jene im Meridian nahe heran, und sie hat sich an einigen Sternwarten und Chronometerobservatorien fest eingebürgert. Als Nebenprodukt fällt das eingestellte Azimut ab, das sich bei Triangulationen mit Nutzen wird verwerten lassen. Besondere Hilfstafeln und Ephemeriden[39]) erleichtern die Anwendung des Verfahrens. — Eine Spezialisierung der Formeln *Döllen*'s für den Meridian behandelten *E. Borrass* und nach ihm *H. Kimura*[40]), der durch ausgedehnte Tafeln mit doppeltem Eingang die Rechnung zu erleichtern sucht.

Zu einer Abart der Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns mag man greifen, wenn ungünstiges Wetter jeden klaren Moment auf einer Station auszunützen gebietet. Man mißt dann den *Azimutunterschied des Polarsterns gegen einen Zeitstern* mittels eines Universalinstrumentes, ersteren in beliebigem Stundenwinkel, letzteren so dicht wie zulässig beim Meridian. An Genauigkeit steht das Verfahren, mehr ein Notbehelf, den Durchgängen bei festem Azimut natürlich nach.

10. In beliebigem Azimut; Olbers'sches Verfahren. Wie aus einer einzelnen Zenitdistanz, so kann man auch aus *einer Azimutbestimmung* bei bekannter Breite den Stundenwinkel und damit die Zeit ableiten, ein Verfahren, das aber bei der Schwierigkeit, den Meridianpunkt des Horizontalkreises zu ermitteln und konstant zu

---

36) *P. A. Hansen,* Astr. Nachr. 9 (1831), p. 117 und 48 (1858), p. 113.

37) u. 38) Vgl. Lit. II. *Harzer, Ortsbest.* ist Sonder-Abdr. aus: Mitteil. d. Vereinig. v. Freund. d. Astronomie 6, Berlin 1896.

39) *W. Döllen,* Hülfstafeln für d. Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsternes, Petersburg 1874 u. 1878; *W. Döllen,* Sternephemeriden zur Bestimmung von Zeit u. Azimut im Vertikal des Polarsternes, Petersburg 1886—90, Berlin 1891, Dorpat 1893. Seit 1895 von der *Petersbg. Astr. Ges.* hrsg. u. d. Titel „Ephémerides des étoiles pour la détermination de l'heure et de l'azimut dans le plan vertical de la polaire pour l'an . . .", Petersburg 1894 ff.

40) *H. Kimura,* Formulae and tables for determ. the time in the meridian. Tōkyō sūgaku-buturigaku kwai kizi. Maki no VIII, Dai 6, Tokyo 1901, p. 209.

halten, sich sehr wenig empfiehlt, wenn man nicht zu fester Aufstellung in den Meridian, d. h. zum Passageninstrument in oder nahe dem Meridian übergeht.

Dagegen hat sich eine nach instrumentellen und rechnerischen Anforderungen ungemein einfache Modifikation als sehr praktisch erwiesen. Man beobachtet nämlich das Verschwinden eines Fixsterns hinter einer entfernten senkrechten Wand, etwa eines Kirchturms oder Schornsteins, die am Beobachtungsort ein konstantes Azimut fixiert. Tag für Tag findet das Verschwinden des Sterns immer zur selben Sternzeit statt und gibt damit ein Mittel zur Prüfung des Uhr*ganges*. Wenn man nun noch auf irgend eine Weise sich die absolute Zeit jenes Momentes verschafft, fließt daraus die Möglichkeit, jederzeit auch den Uhr*stand* kennen zu lernen; denn an den ersten Stern, der ja bald in die Tageshelle rücken würde, lassen sich immer wieder andere, später verschwindende anschließen, die einen Gürtel um den Himmel herum bilden und für das ganze Jahr genügend Anhaltspunkte zu gelegener Abendstunde abgeben. Die langsamen Ortsveränderungen der Sterne, veranlaßt durch Präzession, Nutation, Aberration und Eigenbewegung, ziehen eine geringe Variabilität des Zeitpunktes des Verschwindens nach sich, die mittels einfach gebauter Differentialformeln in Rechnung gestellt wird. Mit bestem Erfolge ist die beschriebene Art der Zeitbestimmung von *Olbers*[41]) verwertet worden, der zuerst für ihre Brauchbarkeit eintrat und ihr Eingang bei den Liebhabern der Himmelskunde verschaffte.

11. Mehrere Azimute. Daß sich aus der Beobachtung der *Durchgänge zweier beliebiger Sterne* die Zeit ableiten läßt, ergibt sich schon aus dem speziellen Fall der Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns; die günstigsten Bedingungen führen eben auf jenen Spezialfall. Für die Aufgabe: die Zeit zu bestimmen, zu der zwei Sterne in den gleichen Vertikalkreis kommen, fand schon *J. H. Lambert*[42]) eine kurze Lösung. — Aus dem Durchgang dreier Sterne durch denselben Vertikalkreis Polhöhe, Zeit und Azimut zu ermitteln, wie man vielleicht nach Analogie der später zu besprechenden *Gauß*schen Dreihöhenaufgabe (siehe Nr. 18) versuchen könnte, geht nicht an; in den drei Gleichungen lassen sich zwei Unbekannte (Zeit und Azimut) nicht trennen.

12. Näherungsmethoden. Einige leicht auszuführende Näherungsmethoden, die sowohl Zeit wie Polhöhe ergeben, mögen noch

41) *W. Olbers,* Monatl. Corr. 3 (1801), p. 124.
42) *J. H. Lambert,* Berl. astr. Jahrb. für 1789, p. 213.

hier miterledigt werden. Die Aufgabe: aus den Uhrangaben, zu welchen vier Sterne durch zwei beliebige Vertikale gehen, Uhrkorrektion und Breite zu bestimmen, hat 1789 Graf *v. Platen zu Hallermund*[43]) diskutiert. *Wislicenus*[44]) kleidete die Lösung in ein modernes Gewand und wies darauf hin, daß, wie bei *Olbers*, die Azimute durch ferne terrestrische Gegenstände (Fahnenstange, Hauskante etc.) markiert sein dürften und Instrumente, abgesehen von einem schwach vergrößernden Fernrohr, nicht nötig seien.

Einer gleich einfachen Art der Zeit- und Ortsbestimmung gedenkt *P. Harzer*[45]). Er legt die Azimute durch senkrechte Schnüre fest, die zur Vermeidung einer parallaktischen Verschiebung gegen das nahe Auge des Beobachters über ein primitives in den Boden gerammtes Gestelle geschlungen und beschwert werden. *Harzer*'s Methode leistet trotz der denkbar einfachsten Hilfsmittel eine Genauigkeit von 1′ bis 2′ in beiden Koordinaten. Von *E. Hammer*[46]) stammt der Vorschlag, ein einfaches Senklot in Verbindung mit den Ergebnissen einer Landesvermessung zu benutzen. Man beobachtet den Moment, zu dem die Sonne das auf diese Weise festgelegte Azimut passiert. — Im Zusammenhang sind die mit einfachen Hilfsmitteln optisch und photographisch zu erledigenden Aufgaben der Zeit- und Ortsbestimmung von *K. Schwarzschild*[47]) dargestellt worden.

13. Azimut-, Höhen- und Zeitdifferenz. Den Schluß bilde eine nur auf die Messung von Koordinaten*differenzen* gestützte Methode, die der Kenntnis irgend eines instrumentellen Nullpunktes enträt. An einem Universalinstrument beobachte man für zwei Sterne die Differenzen der Höhen, Azimute und zugehörigen Uhrzeiten, Daten, die zur Ableitung von Zeit, Polhöhe und Meridianrichtung hinreichen. Zur Herabdrückung der Fehlereinflüsse verlangen die Differentialformeln möglichst großen Azimut- und Höhenunterschied. Die Aufgabe ist so zuerst von *Encke*[48]) gefaßt worden. Nahe Verwandtschaft weist ein von *Lyons*[49]) diskutiertes Problem auf: Zeit und Polhöhe

43) *E. F. v. Platen zu Hallermund,* Berl. astr. Jahrb. für 1789, p. 126—127.

44) *W. F. Wislicenus,* Astr. Nachr. 124 (1890), p. 89.

45) Siehe *Harzer,* Ortsbest.

46) *E. Hammer,* Zeitbestimmung (Uhrkontrole) ohne Instrumente, Stuttgart 1893.

47) *K. Schwarzschild,* Astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln, in den „Beiträgen zur Frage des Unterrichts in der Mathematik, Physik u. Astronomie", hrsg. von *F. Klein* u. *E. Riecke,* Leipzig 1904.

48) *J. F. Encke,* Über eine Erweiterung des *Douwes*'schen Problems, Berl. astr. Jahrb. für 1859, p. 334.

49) *J. Lyons,* Naut. Alm. for 1778.

zu bestimmen, wenn man nur das Intervall kennt, das der Durchmesser der Sonne gebraucht, um einen Vertikalkreis und einen Höhenkreis[106]) zu passieren. *H. G. v. Mattuschka*[50]), *J. K. Schulze*[51]) und auch einige neuere Schriftsteller wandten der in praxi fast bedeutungslosen Aufgabe Aufmerksamkeit zu.

II. Polhöhenbestimmung.

14. Meridianhöhe. Wie Nr. 4 zu einer beobachteten Höhe die Zeit zu ermitteln lehrte, so läßt sich umgekehrt aus einer Höhe bei bekannter Zeit die Polhöhe ableiten. Ein Fehler in der Zeit geht um so geringer in die errechnete Breite ein, je kleiner die Änderung der Höhe während desselben Zeitintervalls wird. Null wird diese Änderung an zwei Punkten der täglichen Sternbahn, im Meridian, den die Zirkumpolarsterne zweimal sichtbar kreuzen. Zugleich nimmt auch die Rechenvorschrift die bequemste Gestalt an: man braucht nur Zenitdistanz und Deklination im richtigen Sinne, den man aus der Anschauung abliest, zu addieren. Man kann noch auf die Kenntnis der Deklination der Sterne verzichten, wenn man beide Kulminationshöhen eines Zirkumpolarsternes mißt; das arithmetische Mittel liefert die geographische Breite des Beobachtungsortes, ihre halbe Differenz die Poldistanz des benutzten Sternes. Die Methode findet vor allem Anwendung an festen Sternwarten mit Hilfe des Meridiankreises; da an demselben aber der Zenitpunkt nicht, wie beim Universal, durch Durchschlagen bestimmt werden kann, so verschafft man sich die Lotlinie durch die Beobachtung des Nadirs, d. h. man richtet das Fernrohr auf einen darunter stehenden Quecksilberspiegel und liest am Kreis die der Deckung des direkt gesehenen und des reflektierten Fadenbildes entsprechende Stellung ab. Die angedeutete Methode gewährt eine absolute, vom Sternort unabhängige Ermittelung der Polhöhe und der Deklination. Es pflegt mit einer derartigen Untersuchung stets eine solche der Biegung des Tubus, der atmosphärischen Refraktion und der Teilfehler des Kreises verbunden zu werden.

Der Kenntnis der Deklination enthebt man sich auch durch Messung der größten und kleinsten Meridianhöhe der Sonne zur Zeit der Solstitien; die halbe Summe gibt die Äquatorhöhe, die halbe Differenz die Schiefe der Ekliptik. Schon um das Jahr 1100 a. C. führten chinesische Astronomen diese Beobachtungsreihen mittels

50) und 51) Siehe Berl. astr. Jahrb. für 1781, 2. Teil, p. 185 u. 186.

des Gnomons aus[52]) und auch von *Pytheas von Massilia*[53]) berichtet die Geschichte ein Gleiches. —

Die Methode der Meridianzenitdistanzen in ihrer einfachen Form wurde nach dem Vorgang des österreichischen Obersten *R. v. Sterneck* vom kgl. preußischen geodätischen Institut[54]) angewandt, wenn nicht der äußerste Grad von Genauigkeit vonnöten, z. B. für Untersuchungen von Lotablenkungen. Die Ergebnisse fallen befriedigend aus: es scheint leicht, einer Polhöhe den mittleren Fehler von $\pm 1''$ zu wahren. Allerdings war auch behufs Elimination systematischer Fehlerquellen nichts unterlassen: Beobachtung in beiden Kreislagen des Universalinstrumentes und in mehreren Ständen des geteilten Kreises, symmetrische Anordnung der Sterne zum Zenit, sodaß Refraktion und Biegung fast ganz herausfallen.

Mit einem Reflexionsinstrument wird der Beobachtungsmodus darin bestehen, daß man das Gestirn kurz vor dem Meridiandurchgang im Auge behält und es verfolgt, bis es die größte Höhe erreicht, die man abliest. Die Sonne erreicht indes, ihrer eigenen Bewegung in Deklination wegen, ihre größte Höhe nicht genau im Meridian, und man hat dieserhalb noch eine Reduktion der größten Höhe auf die Meridianhöhe anzubringen[55]), die in den Solstitien verschwindet und in den Äquinoktien am größten ist. Ähnliches trifft bei andern beweglichen Himmelskörpern zu, insbesondere beim Mond, dessen Verwendung zur nautischen Ortsbestimmung neuerdings wieder befürwortet, aber auch abgelehnt wurde[56]).

Schließlich möge noch eine von *M. Loewy* angegebene und von *W. Ebert, J. Perchot* und *H. Renan*[57]) am Pariser Meridiankreis erprobte Methode hier Platz finden. Einen dem Pol eng benachbarten Stern (Polardistanz kleiner als 1^0) beobachte man in zwei zum 6^h-Stundenkreis nahe symmetrischen Örtern seiner täglichen Bahn, die einen

---

52) Siehe *Gehler*'s physikal. Wörterbuch, 2. Aufl. Bd. 9, Leipzig 1840, p. 2138.

53) Um 350 a. C. Näheres in *Gehler*'s physikal. Wörterbuch, 2. Aufl. Bd. 9, Leipzig 1840, p. 2172; ferner bei *W. Bessell*, Über Pytheas von Massilia, Göttingen 1858.

54) *Geod. Inst.* Veröff.: Die Polhöhe von Potsdam, I. Heft, Berlin 1898; ferner *Geod. Inst.* Veröff.: Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen, Berlin 1896.

55) Siehe z. B. *Roth*, Navig., p. 131.

56) Siehe *Reichs-Marine-Amt*, Navig. 2, p. 176.

57) Obs. de Paris ann., obs. 1897, Paris 1899, und *H. Renan* et *W. Ebert*, Détermination de la latitude d'après les méthodes de Loewy, Obs. de Paris ann., obs. 1900, Paris 1904.

Schluß auf die Lage des Pols zulassen. Bequeme Relationen zur Berechnung der Änderungen wegen Aberration, Nutation, Präzession für äußerst polnahe Sterne lehrte *W. Ebert*[58]).

Wiewohl noch nicht direkt zur Breitenbestimmung verwertet, verdient hier ein Instrument Erwähnung, das *G. B. Airy*[59]) für Greenwich konstruierte. Der „Reflexzenit-Tube" besteht aus einem Objektiv mit vertikal gerichteter Achse. Darunter in halbem Fokalabstand ein Quecksilberspiegel; etwas über dem Objektiv, ihm zur Seite und fest damit verbunden ein Mikrometer, dessen Fadenebene mit der Bildebene zusammenfällt. Durch eine Drehung der Mikrometer-Objektiv-Platte um 180° vermag man kleine Zenitdistanzen mit großer Schärfe zu messen. Die Theorie hat *Ch. L. Poor*[60]) revidiert, *J. C. Kapteyn*[61]) eine photographische Modifikation angegeben.

15. Zirkummeridianhöhen. Zur Erhöhung der inneren Genauigkeit der Meridianzenitdistanzmethode können am Universalinstrument die Einstellungen um den Meridian herum vervielfältigt werden; man geht zur Methode der *Zirkummeridianhöhen* über, die die Kenntnis einer genäherten Zeit verlangen. Die unmittelbar sich darbietende Berechnungsart bestünde darin, das sphärische Dreieck Pol-Zenit-Stern nach der Seite Pol-Zenit (= Komplement der Breite) aufzulösen; indes darf man, da nur kleine Stundenwinkel auftreten, von Reihenentwickelungen Gebrauch machen, denen je nach der Zahl der mitgenommenen Glieder eine mehr oder minder hohe Präzision zueignet. Nimmt man nur das erste Glied und schreibt es so, daß man einen Faktor herausschält, der nur mehr mit dem Quadrate des in Zeitminuten ausgedrückten Stundenwinkels multipliziert zu werden braucht, um die Reduktion der gemessenen Höhe auf den Meridian zu ergeben, so entsteht die besonders in der nautischen Astronomie gebräuchliche *Methode der Kulminationssekunden*[62]). Aus jeder Höhe gewinnt man nach einer der zahlreichen dazu aufgestellten Formeln die Meridianhöhe und aus deren Mittel die gesuchte Polhöhe. Für die Sonne, überhaupt für ein bewegliches Gestirn, spielt noch die Deklinationsänderung eine Rolle, die dadurch bequem in Rechnung gezogen werden kann, daß man zwar die im Augenblick der Kulmination geltende Deklination zugrunde legt, dann aber die Stunden-

58) *W. Ebert,* Astr. Nachr. 151 (1899), p. 145.
59) *G. B. Airy,* Greenw. obs. 1854, app. 1.
60) *C. L. Poor,* Astron. Journ. 9 (1890), p. 153.
61) *J. C. Kapteyn,* Astr. Nachr. 125 (1890), p. 81.
62) Siehe z. B. *Reichs-Marine-Amt,* Navig. 2, p. 181.

winkel vom Moment der größten Höhe an zählt[63]). In nautischen Kreisen fand großen Beifall eine Arbeit von *Goodwin*[64]), der die Höhenänderung der Sonne zusammenwirken läßt mit der Schiffsbewegung zur Reduktion einer Sonnenhöhe nächst dem Meridian.

In Beobachtung und Rechnung sehr einfache Methoden ergeben sich aus der Überlegung, daß drei nahe am Meridian gemessene Höhen nebst ihren Azimutdifferenzen, wie sie das Universal liefert, ohne Kenntnis der Breite dazu dienen können, die Meridianhöhe zu berechnen und daß bei genähert gegebener Breite schon zwei Höhen mit ihrer Azimutdifferenz ausreichen. Mit Benutzung einer Uhr läßt sich, auch wenn Gang und Stand unbekannt, aus drei Höhen und den Zwischenzeiten die Meridianhöhe eruieren[65]).

Daß man statt der Zeit das Azimut neben der Höhe substituieren darf, ist klar[66]).

16. Polarishöhe. Während man bei einem beliebigen Stern immer an die Nachbarschaft des Meridians gebunden ist, fällt diese Einschränkung bei dem langsam beweglichen *Polarstern* fort; im ungünstigsten Punkte seiner Bahn, in den Stundenwinkeln 18^h und 6^h wächst oder sinkt seine Höhe in einer Zeitminute um nicht ganz $20''$. Sphärische Rechnung ist auch hier der geringen Poldistanz wegen nicht erforderlich; man kommt mit einer Reihenentwicklung aus[67]). Verteilt man bei einer die höchste Genauigkeit anstrebenden Beobachtungsserie die Einstellungen von Polaris symmetrisch über seine tägliche Bahn, so wird man frei von dem zugrunde gelegten Ort des Sternes an der Sphäre.

Die Zirkummeridianhöhen in Verbindung mit Polarishöhen bilden eine der drei Hauptmethoden zur Bestimmung der Breite für die modernen Festlegungen von Punkten erster Ordnung bei großen Triangulationen und Gradmessungen.

---

63) Siehe *Brünnow*, p. 275.

64) *M. A. Goodwin*, The Ex-meridian, London 1894.

65) Siehe z. B. *Th. Albrecht*, Formeln u. Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1873, 3. Aufl. 1894, p. 55; ferner *J. J. Åstrand*, Neue einfache Methode für Zeit- und Längenbestimmung, Wien. Ber. 56 (1867), p. 350; *C. L. v. Littrow*, Wien. Sternw. Ann. 21 = N. F. 1 (1841), p. LVI; *Th. v. Oppolzer*, C. v. Littrow's Methode der Zeitbestimmung durch Circummeridianhöhen, Wien. Ber. 58 (1868), p. 772; *P. Bouguer*, Nouveau Traité de navigation, 2. Ausg. hrsg. von *N.-L. de Lacaille*, Paris 1760; *G. S. Klügel*, Berl. astr. Jahrb. für 1799, p. 148, Berlin 1796.

66) *J. J. v. Littrow*, Lond. Astr. Soc. Mem. 2 (1826), p. 321.

67) Z. B. bei *Brünnow*, p. 277. — Vgl. Nr. **49**, 2, p. 157.

17. Zweihöhenproblem, Spezialfälle und verwandte Aufgaben. Will man für Zwecke der Technik und auf geographischen Forschungsreisen möglichst rasch Zeit und Polhöhe ermitteln, so mag man sich nicht an Meridian und Ersten Vertikal binden. Zur Festlegung der zwei Unbekannten genügen zwei Daten, *zwei Höhen nebst ihrer Zwischenzeit.* Die Aufgabe trat schon vor mehr als 400 Jahren in den Gesichtskreis der Astronomen und ist seit jener Zeit, wie kaum ein zweites Problem der sphärischen Astronomie, variiert und permutiert worden. Da man die allgemeine strenge Lösung für zwei verschiedene Sterne sofort richtig erkannte, konnte es fürder nur darauf ankommen, die Rechnung zu vereinfachen.

Der Gang der strengen Auflösung gestaltet sich wie folgt: zunächst löse man das vom Pol und den beiden Sternen gebildete Dreieck auf, sodann das vom Zenit und den beiden Gestirnen definierte, in welchem die drei Seiten gegeben. Jetzt hat man in jedem der beiden von Pol, Zenit und einem Stern eingeschlossenen Dreiecke zwei Seiten und den Zwischenwinkel und damit Breite und Stundenwinkel. Wird scharfe Trennung der Unbekannten angestrebt, so soll die eine Höhe dicht beim Meridian, die andere dicht beim ersten Vertikal genommen sein. Die Zuverlässigkeit der Breite hängt wesentlich von der Genauigkeit der meridiannahen Höhe, die der Zeit von der Schärfe der beim ersten Vertikal beobachteten Höhe ab.

Eine erste Vereinfachung ergab sich, wenn beide Male dasselbe Gestirn beobachtet war, und da der Seemann vor allem die Sonne zu Hülfe nahm, so entstanden zahlreiche indirekte Näherungsmethoden, die die kleine Deklinationsänderung der Sonne während der 3^h bis 6^h, um die beide Messungen voneinander abliegen mochten, differentiell berücksichtigten. Unter diesen hat sich der meisten Empfehlung lange Zeit die indirekte *Douwes*'sche[68]) Methode erfreut. Ihr Prinzip beruht in folgendem: Die aus der Schiffsrechnung nach Kompaß und Log beiläufig bekannte (gegißte) Breite, die dem ersten Vertikal nächste Höhe, die Zwischenzeit und die Deklination liefern eine freilich nur näherungsweise richtige Zeitbestimmung, mit der die meridiannahe Höhe nun die Breite liefert. Mit dieser neuen Polhöhe wird die Berechnung des Stundenwinkels wiederholt. *Douwes* konstruierte umfangreiche Tafeln zur Erleichterung der Anwendung jener

68) *C. Douwes,* Verhandeling om buiten den Middag op Zee de waare Middags-Breedte te vinden, Haarlem 1754; De noodige Zeemanstafeln en voorbeelden tot het vinden der breedte buiten den Middag, Amsterdam 1775; op nieuw overzien door *J. Floryn,* 1820.

Methode, die man in allen älteren nautischen Tafelwerken[69]) vorfindet. Der Gewinn, den die Tafeln bringen, ist indes äußerst gering, wenn nicht ganz illusorisch. Ja, die ganze Methode leidet an dem Übelstande, daß sie unter gewissen Bedingungen, insbesondere bei stark fehlerhafter gegißter Breite, überhaupt keine Annäherung an die Wahrheit mehr liefert, sondern daß die von ihr sukzessive beigetragenen Resultate dann immer weiter divergieren. Auch auf See fand die *Douwes*'sche Methode nicht jene ausgedehnte Anwendung, die man vielleicht nach dem Umfang der ihretwegen in nautischen Werken mitgeführten Tafeln zu erwarten geneigt sein könnte.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Die allgemeine Aufgabe und ihre Lösung ist sehr alt. Sie geht auf *Regiomontan* (1472)[70]), *Tycho de Brahe*[71]) und den Landgrafen *Wilhelm IV. von Hessen* (1566)[72]) zurück, wenn sie den Ort eines Sternes ableiten durch Messung seiner Distanz von zwei bekannten Sternen. Später wurde sie von *Nuñez*[73]), *Hues*[74]), *Gietermaker*[75]), *Fatio*[76]) behandelt, aber erst von *Douwes*[68]) und *Nieuwland*[77]) in eine dem Seemann plausibele Form gegossen.

Mit strengen Lösungen befaßten sich *Schubert*[78]), *Krafft*[79]), *Mollweide*[80]), *J. F. Hennert*[81]), *Ivory*[82]), weß letzteren Methode mit der *Krafft*'schen[79]) identisch ist. Eine rein analytische Darlegung gab *Gauß*[83]), während *Encke*[48]) wieder eingehend das trigonometrische Ver-

---

69) Z. B. in *J. F. Domke,* Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln, 7. Aufl., Berlin 1879, die Tafeln Nr. 37, 38, 39.

70) *J. Regiomontanus,* De cometae magnit., longit. ac loco vero, problemata XVI, Nürnberg 1531 = Scripta Regiomontani, ed. *J. Schoner,* Norimbergae 1544.

71) *Tycho Brahe,* De nova stella anno 1572, Hafniae 1573. Denuo edidit regia societas danica, Kopenhagen 1901.

72) Vgl. *Willebrord Snellius,* Coeli et siderum in eo errantium observationes Hassiacae Principis Wilhelmi, Lugdunum Batavorum 1618.

73) *P. Nonius,* De crepusculis, Olyssipone 1542, Conimbricae 1573.

74) *R. Hues,* Tractatus de globis et eorum usu, Lugdunum (Lyon) 1594, Amstelodami 1611.

75) *C. H. Gietermaker,* Vergulden Licht der Zeevaert, Amsterdam 1660.

76) *N. Fatio,* Navigation improved, beeing chiefly the method for finding the latit., London 1728.

77) *P. Nieuwland,* Berl. astr. Jahrb. Suppl. 1 (1793), p. 42.

78) *F. T. Schubert,* Berl. astr. Jahrb. für 1790, p. 188.

79) *W. L. Krafft,* Petersbg. Nova Acta 9 (1795), p. 353, présenté 1794.

80) *K. B. Mollweide,* Monatl. Corr. 19 (1809), p. 545 und Astr. Nachr. 3 (1825), p. 197.

81) *J. F. Hennert,* Berl. astr. Jahrb. für 1803, Berlin 1800, p. 124.

82) *J. Ivory,* Phil. Mag. 58 (1821), p. 81.

83) *Gauß,* Method. pecul.

fahren entwickelte. Auch *Grunert*[85]) und *Matern*[86]) teilten Lösungen der „Douwes'schen Aufgabe" mit. — Eine erschöpfende historische Würdigung ließ *Weyer*[87]) dem Zweihöhenproblem angedeihen, auf die hier besonders verwiesen sei. —

Ein Spezialfall ist der Übergang auf zwei gleiche Höhen, den ebenfalls *Gauß*[83]) in seiner erwähnten Abhandlung lehrt. Behufs Zeitbestimmung beobachtet man einen Stern im Osten und einen im Westen, für die Breite einen im Norden und einen im Süden. Spätere Schriftsteller, insbesondere *N. Zinger*[88]), der eigene Ephemeriden veranlaßte[89]) und neuerdings *Cañete del Pinar*[90]), der den Sextanten zum Präzisionsinstrument zu erheben sich bemüht, bildeten die Methode nach der praktischen Seite aus, *M. Pjewzow*[21]) sucht sie durch umfangreiche Tafeln einzubürgern. *Hayn*[91]) nnd *Kohlschütter*[92]), beide mit dem gleichen kleinen Zenitteleskop ausgestattet, verwerteten die Methode in den Deutschen Kolonien und erzielten in Anbetracht der ungünstigen äußeren Verhältnisse recht befriedigende Resultate.

Staatsminister *v. Camphausen*[93]) machte den Vorschlag, zur Ermittelung von Breite, Zeit und Richtung des Meridians die Azimutdifferenz zweier Sterne in Ost und West an einem Universal dann zu beobachten, wenn ihre Höhe der Deklination gleich sei. Wir glauben, diesen Gedanken schon hier erwähnen zu dürfen, weil er *Encke*'s Bearbeitung des Douwes'schen Problems[48]) veranlaßte.

Eine Ortsbestimmung läßt sich auch dadurch erzielen, daß man die Höhen mißt, in welchen zwei bekannte Sterne nacheinander denselben Stundenkreis[94])[44]) oder aber denselben Vertikalkreis[44]) passieren,

---

85) *J. A. Grunert,* Arch. Math. Phys. 14 (1850), p. 83.

86) *A. Matern,* Ann. d. Hydr. 1882, p. 400.

87) *G. D. E. Weyer,* Die direkten oder strengen Auflösungen für die Bestimmung des Beobachtungsortes . . . ., Ann. d. Hydr. 1884; Die indirekten oder genäherten Auflösungen für das Zweihöhenproblem, Ann. d. Hydr. 1884.

88) Siehe die p. 82 (Lit. II) zitierte Monographie *Zinger.*

89) *N. Schtschetkin,* siehe [20]), ferner *Th. Fr. G. Wittram,* Tables auxiliaires pour la détermination de l'heure par des hauteurs corresp., Pétersbourg 1892.

90) *de Cañete del Pinar,* Observaciones de precisión con el sextante, Madrid 1895.

91) *F. Hayn,* Astronomische Ortsbestimmungen im Deutschen Schutzgebiete der Südsee, Berlin 1897.

92) *E. Kohlschütter,* Bericht über die astron. und geodät. Arbeiten der Deutschen Grenzregulierungskommission zwischen dem Nyassa- und Tanganyika-See, Mittheilungen von Forschungsreisenden und Gelehrten a. d. Deutschen Schutzgebieten, 13 (Berlin 1900), p. 265.

93) Vgl. *Encke* [48]).

94) *J. W. von Camerer,* Berl. astr. Jahrb. für 1797, p. 246. — *Wislicenus* [44]).

dessen Stundenwinkel resp. Azimut man nicht zu kennen braucht. Letztere Methode verlangt ein Universalinstrument, aber, soweit die Polhöhenbestimmung in Frage kommt, keine Uhr, erstere nur einen Sextanten, kein Stativ, aber eine Uhr mit bekanntem Gang.

Die dem Zweihöhenproblem nahe verwandte Aufgabe: aus zwei Höhen desselben Gestirns und der Azimutaldifferenz bei bekannter Polhöhe die Azimute abzuleiten, kannte schon *Ibn Yunis*[95]).

18. Gauß'sche Methode. Das Zweihöhenproblem setzte den Ort des Gestirns als bekannt voraus; nimmt man drei Höhen desselben Himmelskörpers, so macht man sich auch unabhängig von der Deklination des Objekts. Diese auf den ersten Blick sehr bestechende und vielfach untersuchte Methode[96]) verdient aber aus dem Grunde keine Empfehlung, weil in den Höhen begangene kleine Beobachtungsfehler die Resultate stark entstellen. Verzichtet man dagegen auf die Mitbestimmung der Deklination, wählt drei verschiedene Sterne aus und setzt die Gleichheit der Höhen fest, so hat man die *Gauß*sche *Methode*[97]), eine von denjenigen, die bei geringsten instrumentellen Anforderungen eine sehr hohe Genauigkeit zulassen.

Diese Methode führt auf die trigonometrische Aufgabe, aus den Durchgangszeiten der drei Sterne durch denselben Höhenkreis[106]) die Polhöhe zu berechnen. Schon *Cagnoli*[98]) löste diese Aufgabe, allerdings in anderem Zusammenhang: er suchte nämlich aus drei heliozentrischen Örtern eines Sonnenflecks die Lage des Äquators der Sonne und die Deklination des Flecks abzuleiten. Auf die Identität beider Aufgaben wies dann *Gauß*[97]) hin. Will man eine Verschärfung durch Multiplikation der Beobachtungen erzielen, so gelingt dies entweder dadurch, daß man bei Anwendung eines festen Instrumentes die Durchgänge an mehreren im Gesichtsfeld ausgespannten Horizontalfäden nimmt, oder dadurch, daß man die Zahl der Sterne vermehrt. Diese letztere Verallgemeinerung der Gauß'schen

95) *Ibn Yunis* (Kairo 960—1008), Hakimitische Tafeln, Kap. 23 (nicht im Druck erschienen); vgl. *A. v. Braunmühl*, Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie, Nova Acta, Abhdl. d. Leopold.-Carolin. Akad. der Naturforscher 71, Halle 1897, p. 24—26.

96) Z. B. *J. F. Hennert*, Berl. astr. Jahrb. für 1803, Berlin 1800, p. 124 und *J. K. F. Hauff*, Berl. astr. Jahrb. Suppl. 4, Berlin 1808, p. 237.

97) *C. F. Gauß*, Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie, Monatl. Corr. 18 (1808), p. 277 = *Gauß*' Werke 6 (1874), p. 129, sowie p. 142.

98) *A. Cagnoli*, Trigonométrie rectiligne et sphérique, Paris 1786. — Die kunstlos aus der Anschauung der Figur fließende Lösung findet man z. B. bei *Th. Epstein*, Die Sonnenflecke, Festschr. z. Jahrh.-Feier der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt, Frankfurt a. M. 1904, p. 108.

Methode hat *Knorre*[99]) näher durchgeführt; es kommt natürlich auf die Ermittelung der wahrscheinlichsten Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate heraus, da ja der Daten jetzt mehr als Unbekannte vorliegen. Sehr eingehend befaßte sich auch *Perrin*[100]) mit dem Gegenstande. Da die absolute Höhe keine Rolle spielt, nur ihre Konstanz, so fallen Indexfehler, Teilungsfehler, Refraktionseinflüsse, Exzentrizität ganz aus dem Resultat heraus; die Beobachtung ist leicht und einfach auszuführen. Neuerdings ist die Vorbereitungsrechnung von *B. Cohn*[101]) einer Diskussion unterzogen worden, die darauf hinausläuft, daß man auf graphischem Wege die drei bestgelegenen Sterne herausfindet. Die günstigsten Bedingungen der Beobachtung treffen dann zu, wenn die drei Sterne sich gleichförmig um den Himmel verteilen, d. h. wenn ihre Azimutdifferenz 120° beträgt. Als den einen Stern kann man auf der Nordhalbkugel aus Gründen der Bequemlichkeit stets den in Höhe nur um 3° veränderlichen Polarstern wählen.

Einige weitere Vorteile bietet die Beobachtung genau in dem durch den sichtbaren Himmelspol gehenden Höhenkreis[106]), den die Sterne in einer der geographischen Breite gleichen Höhe passieren. Ein großes auf Quecksilber schwimmendes Instrument speziell für diesen Zweck hat *Chandler*[102]) bauen lassen, einen sogenannten Almukantarat, der aber nicht nur zur Polhöhenbestimmung, sondern allgemein zur Ortsbestimmung von Sternen dienen soll. *Sampson*[103]) hat sich gleichfalls mit dem Verfahren beschäftigt und eine Anzahl Fundamentalsternörter danach beobachtet. Für jeden Beobachtungsort sind natürlich nur jene Sterne der Methode zugänglich, deren obere Kulminationshöhe größer ist als die geographische Breite.

19. Drei Höhen. Setze ich drei Höhen als gemessen voraus, so wird die Aufgabe überbestimmt und der natürlichste Weg zur Erlangung der beiden Unbekannten Breite und Zeit gestaltet sich etwa so: mit angenommener Polhöhe und Uhrkorrektion berechnet man die zu jeder Beobachtungszeit gehörigen Sternhöhen und stellt deren kleine Unterschiede gegen die Messungen durch die Differentiale von Polhöhe und Stundenwinkel dar. Man gewinnt soviel lineare Gleichungen als Höhen zu Gebote stehen und vermag daraus nach der

99) *H. Knorre,* siehe *Sawitsch,* p. 776.

100) *E. Perrin,* Détermination exacte de la latitude et du temps par la méth. des hauteurs égales, Annales du Bureau des Longitudes 4, Paris 1890.

101) *Berthold Cohn,* Über die Gauß'sche Methode, Diss. Straßburg i. E. 1897.

102) *S. C. Chandler,* The Almucantar, Harvard Obs. ann. 17 (1887).

103) *R. A. Sampson,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903), p. 338.

Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Verbesserungen an die der Berechnung der Höhen zugrunde gelegten Werte von Breite und Uhrstand abzuleiten. — Ein „Dreihöhenproblem", wie man es wohl bei nautischen Schriftstellern findet, gibt es im engeren Sinne nicht. Der wahrscheinlichste Schiffsort aus drei Höhen ist stets nur der nach dem beschriebenen oder einem verwandten Verfahren erhaltene[104]).

Einfach bestimmt wird wieder die Aufgabe: aus den *Höhendifferenzen dreier Sterne* und den Zwischenzeiten Polhöhe, Zeit und die Höhen zu ermitteln. Ein indirektes Lösungsverfahren dieser Verallgemeinerung des Gauß'schen Problems hat *Wirtz*[105]) behandelt.

20. Horrebow-Talcott'sche Methode. Wie man aus dem Durchgang zweier Sterne durch denselben Höhenkreis[106]) die Breite bestimmt, wurde in Nr. 6 dargelegt. Je näher wir an den Meridian herangehen, einen desto geringeren Einfluß übt eine Ungenauigkeit in der Kenntnis der Zeit auf die errechnete Polhöhe aus und er verschwindet gänzlich, wenn ich beide Sterne im Nord und Süd strenge im Meridian beobachte. Jegliche Höhenänderung fällt dort weg, so daß von einer Passage durch einen Höhenkreis nicht mehr die Rede sein kann. Man leistet auf völlige Gleichheit der Höhen beider Sterne Verzicht und beschränkt die Forderung darauf, daß die Sterne in so nahe gleichen Höhen kulminieren, daß der Unterschied mit einem Fadenmikrometer meßbar bleibt. Wir stehen also vor einem Spezialfall der Aufgabe: aus der Höhendifferenz zweier Sterne die Polhöhe abzuleiten. Die Lösung besteht hier in der einfachen Regel, daß die Breite sich darstellt als Summe des arithmetischen Mittels der Deklinationen beider Sterne und der am Mikrometer gemessenen halben Differenz der Zenitdistanzen. Den Grundzug des Verfahrens wendet man auch dann an, wenn man Höhen im Nord- und Südzweig des Meridians an irgend einem Instrument mißt: wesentlich die Höhendifferenz bedingt das Resultat. Auf die Idee der Methode kam *Horrebow*[107]) und unabhängig auch *M. Hell*[108]), der sie gelegentlich des Venusdurchganges von 1769 zur Bestimmung der Breite von Wardoehus benutzte. Ferner wandte *Carsten Niebuhr*[240]) sie auf den Rat

104) u. 105) Vgl. Ann. d. Hydr. 1901, p. 467 und p. 323.

106) Höhenkreis (auch *Almukantarat*, *Horizontalkreis*) bedeutet an der Himmelssphäre einen Kleinkreis, dessen Pol im Zenit liegt, also einen Kreis konstanter Höhe. Über andere Bedeutungen vgl. Fußn. 310.

107) *P. Horrebow,* Opera mathematico-physica 3, Havniae 1740—41.

108) *M. Hell,* Observatio transitus Veneris, Hafniae 1770; Beob. d. Durchg. der Venus 1769 zu Wardoehus, Breslau und Hirschberg 1793.

T. Mayer's in Arabien mit gutem Erfolge an. Sie geriet einige Zeit in Vergessenheit, bis sie, von *A. Talcott*[109]) wieder ans Licht gezogen, zu Breitenbestimmungen bei der amerikanischen Küstenvermessung Verwendung fand.

Eine neue Belebung erfuhr *Horrebow*'s Gedanke, als *F. Küstner*[110]) ihn zur Untersuchung der Aberrationskonstante zu verwerten lehrte und gleichzeitig den endgültigen praktischen Beweis für die schon von *Bessel*[111]) vermutete Polhöhenschwankung lieferte. Zur weiteren Verfolgung der Frage ging *Marcuse*[112]) nach Honolulu, um dort in Kooperation mit europäischen Observatorien die Schwankungen näher zu studieren. Dann nahm das Zentralbureau der internationalen Erdmessung die systematische Erforschung der Bahn des Erdpoles in die Hand und beschloß, nachdem schon seit 1895 alle Jahre Berichte über den Stand der Erforschung der Breitenvariationen[113]) herausgegeben worden waren, einen geregelten Breitendienst einzurichten. Der Ausführung dieses Planes gingen Versuche über die zweckmäßigste Art der Instrumente voraus, wobei man auch das schon von *Küstner*[110]) angemerkte, von *Marcuse*[114]) durch ein eigens den Zwecken der Horrebow-Methode angepaßtes photographisches Fernrohr von 5 Zoll Öffnung ausprobierte photographische Verfahren in den Kreis der Erwägungen zog. Man entschied sich für die rein optische Methode, die an einem Zenitteleskop von 108 mm Öffnung und 130 cm Brennweite ausgeübt wird. Das Beobachtungsverfahren[115]) ist dem *Küst-*

109) *A. Talcott* im „Report of the superintendent of the U. S. coast survey for 1857, Washington 1858", p. 324—334.

110) *F. Küstner,* Zur Bestimmung der Aberrationsconstante, Berlin Sternw. Ergebn. 3 (1888) und Astr. Nachr. 126 (1891), p. 233.

111) *F. W. Bessel*'s Brief an *Humboldt* 1844 Juni 1, erwähnt in: Briefe zwischen *A. v. Humboldt* und *Gauß*, hrsg. von *K. Bruhns,* Leipzig 1877, p. 53. — Eine elementare Theorie der Polhöhenschwankungen: *F. Klein* und *A. Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, Heft 3, p. 663, Leipzig 1903.

112) *A. Marcuse,* Bericht über die Expedition nach Honolulu, enthalten in: Verh. 10. Allg. Conf. Erdm., Berlin 1893, p. 631; ferner Astr. Nachr. 131 (1892), p. 297 und *Th. Albrecht,* Resultate der Beobachtungsreihe in Honolulu, betreffend die Veränderlichkeit der Polhöhe, erschienen als „CentrBur. Erdm. Veröff.", Berlin 1892, auch in: Verh. 10. Allg. Conf. Erdm., Berlin 1893, als Annexe A VII.

113) *Th. Albrecht,* Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Jahre ...., jährlich erstattet in den „Verh. Comm. oder Allg. Conf. Erdm." seit der Innsbrucker Tagung 1894; erscheint seit 1898 selbständig als „CentrBur. Erdm. Veröff.", Berlin 1898ff.; Auszüge in den Astr. Nachr., vgl. deren „General-Register", Kiel 1902, p. 2.

114) *A. Marcuse,* Berlin Sternw. Ergebn. 7 (1897).

115) *Th. Albrecht,* Anleitung zum Gebrauche des Zenitteleskopes auf den internationalen Breitenstationen, 2. Ausgabe, Berlin 1902.

ner'schen nachgebildet. Mit dem Mikrometerfaden stellt man nach Ablesung zweier in der Ebene des Meridians liegender Libellen den ersten Stern im Süden ein, dreht das Instrument um 180°, bringt die Libellen mit der Feinschraube nahe zum Einspielen und führt den Mikrometerfaden auf den nördlichen Stern. Die Kombination der Niveauangaben mit den Schraubenablesungen ergibt den verlangten Höhenunterschied beider Sterne.

Der innere zufällige Fehler einer Polhöhenbeobachtung fällt sehr gering aus. *Küstner* findet ihn zu $\pm$ 0.″20 mittlerem Fehler und auf den internationalen Stationen folgt er im Durchschnitt zu $\pm$ 0.″15 mittlerem Fehler. Systematische Fehler sind, da der differentielle Charakter der Messungen strenge gewahrt bleibt, nur in geringem Maße zu befürchten. Gewisse Erscheinungen lassen freilich Spuren von lokalen Refraktionsanomalien vermuten. Da indes Zenitdistanzen von 25° bei den eigentlichen Polhöhensternen nie überschritten werden, kann eine Anomalie bei der Kleinheit schon der absoluten Refraktionen das Resultat kaum gefährden. Überdies wird versucht, hierfür eine Kontrolle durch Beobachtung von Sternpaaren, die in 60° Zenitdistanz kulminieren, zu schaffen[116]).

Ganz ohne Mikrometer läßt sich nach einem Hinweise *Angelitti*'s[117]) der Höhenunterschied dadurch messen, daß man das Fernrohr in eine Zenitdistanz einstellt, die etwas größer ist, als die größere der Meridianzenitdistanzen beider Sterne und dann die Mikrometermessungen durch Durchgangsbeobachtungen beider Sterne östlich und westlich vom Meridian durch einen oder mehrere Horizontalfäden ersetzt.

21. Durchgänge durch den Ersten Vertikal. An den nächst dem Meridian wichtigsten (zu ihm senkrechten) Vertikalkreis des sphärischen Horizontalsystems, an den *Ersten Vertikal*, knüpft sich eine Methode der Breitenbestimmung an, die mehrere Vorzüge mit der *Horrebow*'schen gemein hat. Der Grundgedanke, der nach dem Zeugnisse *Horrebow*'s und einer im Jahre 1704 gestochenen Tafel der „Basis astronomiae" auf *Olaus Römer*[118]) zurückgeht, ist folgender. Wenn ein Stern im Ersten Vertikal anlangt, so geht das sphärische Dreieck Pol-Stern-Zenit in ein am Zenit rechtwinkliges über, in welchem von vorneherein eine Seite, die Polardistanz des Sternes, bekannt vorliegt. Beobachtet man noch das Zeitintervall, das verfließt zwischen dem Durchgang des Sternes durch den Ostzweig und dem

116) *Th. Albrecht*, Resultate des internationalen Breitendienstes 1, Berlin 1903.

117) *F. Angelitti*, Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Napoli), (2) 4 (Napoli 1890), p. 50.

118) *P. Horrebow*, Basis astronomiae, Havniae 1735 (vgl. Fußn. 25), Tafel VIII.

durch den Westzweig des Ersten Vertikals, so ergibt die halbe Zeitdifferenz in dem erwähnten rechtwinklig-sphärischen Dreieck den Winkel am Pol, i. e. den Stundenwinkel im Moment der Passage durch den Ersten Vertikal.

Vom Urheber nicht richtig gewürdigt fand das Verfahren erst bei *Bessel*[119]) Aufnahme, theoretische Durcharbeitung und praktische Verwertung bei der in Gemeinschaft mit *Baeyer* unternommenen Gradmessung in Ostpreußen[120]). *Bessel* zeigte, daß der Kollimationsfehler des Passageninstrumentes ganz aus dem Ergebnis herausfällt, wenn zwischen Ost- und Westdurchgang desselben Sternes das Instrument umgelegt wird; die Größe des Azimuts spielt keine Rolle, solange es überhaupt klein bleibt; dagegen müssen an seine Konstanz hohe Anforderungen gestellt und die Neigung der Achse aufs schärfste bestimmt werden, da sie mit vollem Betrage in die Polhöhe eingeht.

Ein weiteres Studium erfuhr die Aufgabe zunächst durch *Hansen*[121]) und *Encke*[122]), die noch an dem skizzierten *Römer-Bessel*'schen Beobachtungsverfahren mit einmaliger Umlegung des Passageninstruments *zwischen* Ost- und Westdurchgang desselben Sternes festhielten. *W. Struve*[123]) erschloß dem Transit im Ersten Vertikal ein neues Feld: die Bestimmung der Aberrationskonstante neben jener der Polhöhe. *Struve* ließ zu dem Ende ein von *G.* u. *A. Repsold* konstruiertes, leicht umlegbares Transit mit lichtstarkem Fernrohr in Pulkowo aufstellen und beobachtete jetzt so, daß er *während*[123]) jedes Durchganges in Ost und West je einmal umlegte. Der unmittelbare Vorteil bestand darin, daß die Konstanz des Kollimationsfehlers auf eine viel engere Zeit beschränkt sein durfte; überdies ergaben sich einige Vereinfachungen der Rechenvorschriften.

Mag man nach der *Römer-Bessel*'schen oder der *Struve*'schen Methode beobachten, zur Bestimmung der Polhöhe soll man Sterne

---

119) *F. W. Bessel,* Astr. Nachr. 3 (1825), p. 9 und ebenda 6 (1828), p. 221 = *Bessel,* Abhdl. 1, p. 317 und 2, p. 45.

120) *F. W. Bessel* und *J. J. Baeyer,* Gradmessung in Ostpreußen und ihre Verbindung mit preuß. und russ. Dreiecksketten, Berlin 1838 = *Bessel,* Abhdl. 3, p. 62.

121) *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 6 (1828), p. 101—116 und p. 421—458.

122) *J. F. Encke,* Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West, Berl. astr. Jahrb. für 1843; ferner *H. Raper,* Lond Astr. Soc. Mem. 10 (1838), p. 337; *W. H. Simms*, daselbst 26 (1858), p. 1; *J. F. Tennant,* daselbst 28 (1860), p. 235—248.

123) *F. G. W. Struve,* Notice sur l'instrument des passages de *Repsold,* établi dans le premier vertical, St. Pét. bull. scient. 10 (1842), p. 209; *O. v. Struve,* Tabulae auxiliares ad transitus per primum verticale reducendos inservientes, Petropoli 1868. — Über *W. Struve*'s Methode vgl. auch *Albrecht*[65]), 3. Aufl., p. 66.

in möglichster Nähe des Zenits nehmen, und zwar wähle man die Meridianzenitdistanz der Sterne nicht über 3^0. Je weiter man sich vom Zenit entfernt, um so stärker geht ein Fehler der Zeit in die abgeleitete Polhöhe ein, um so länger wird das Zeitintervall zwischen Ost- und Westpassage und um so höhere Anforderungen müssen an die Konstanz des Azimuts gestellt werden. Zur Prüfung und Ermittelung des Azimuts, in Ermangelung von Miren, hat *Foerster*[124]) ein Verfahren angegeben: er beobachtet die Durchgänge zweier dem Horizont nahen rasch laufenden Sterne kurz nacheinander in Ost und West und leitet daraus mit Hilfe der bekannten Zeit das Azimut der Umdrehungsachse ab.

Neben der reinen Bestimmungsmethode im Ersten Vertikal tauchten verschiedene Modifikationsvorschläge auf. *R. Mauritius*[125]) strebte die Ausdehnung der *Römer-Bessel*'schen Methode auf den ganzen Himmel an; er verlangt ein Passageninstrument, dessen Rohr man unter beliebigem Winkel gegen die Drehungsachse neigen könne. Der Vorschlag scheint nie ausgeführt worden zu sein. Dagegen ist der Plan von *N. Herz*[126]), dem Transit im Ersten Vertikal einen feingeteilten Vertikalkreis zuzufügen, verwirklicht, von den Erfolgen aber noch nichts bekannt geworden.

Nur mehr an die *Nähe* des Ersten Vertikals ist eine Methode geknüpft, die *R. Schumann*[127]) im Anschluß an *H. Bruns* diskutiert. Grundidee: Von zwei Sternen, die in der Nähe des Ersten Vertikals gleichzeitig ein und denselben Vertikalkreis passieren, beobachtet man die Durchgänge durch diesen; die eine Komponente des Paares ist dem Zenit nahe und dient zur eigentlichen Ableitung der Polhöhe, die andere Komponente liefert das Azimut des Instrumentes und bedarf einer größeren Zenitdistanz. Durch weitgehende Elimination der Instrumentalfehler zeichnet sich das von *W. Doellen* gelehrte, von *B. Wanach*[128]) bekannt gemachte Verfahren der Breitenbestimmung nahe beim Ersten Vertikal aus, es bildet schon den Übergang zu den Digressionen (siehe Nr. 22).

Die Beobachtung im Ersten Vertikal bildet den bequemsten und

---

124) *W. Foerster,* De altitudine poli Bonnensi, Diss. Bonn 1854.

125) *R. Mauritius,* Bestimmung der Polhöhe von Marburg, Diss. Marburg 1862.

126) *N. Herz,* Theorie eines mit einem Vertikalkreise versehenen Passageinstrumentes im I. Vertikal, Publicationen der *v. Kuffner*'schen Sternw. in Wien-Ottakring, 2, Wien 1892.

127) *R. Schumann,* Astr. Nachr. 134 (1894), p. 249.

128) *B. Wanach,* Astr. Nachr. 136 (1894), p. 51; siehe auch *F. Contarino,* Astr. Nachr 136 (1894), p. 369.

günstigsten Fall der allgemeinen Aufgabe: aus den Durchgängen zweier Sterne durch denselben Vertikalkreis die Breite (oder Zeit) zu ermitteln, ein in dieser Gestalt kaum je in die Praxis eingedrungenes Verfahren. Ebenso bietet die von *C. Rümker*[129]) behandelte *Übertragung des Pothenot'schen Problems auf die Sphäre* („Aus den Azimutdifferenzen dreier Sterne die Polhöhe zu berechnen") vorwiegend theoretisches Interesse.

22. Digressionen. Nur diejenigen Sterne ziehen auf ihrer täglichen Bahn sichtbar durch den Ersten Vertikal, deren Deklination zwischen 0^0 und der Polhöhe liegt. Die polwärts vom Zenit kulminierenden Sterne weisen analoge ausgezeichnete Bahnpunkte in den *Digressionen* auf, i. e. jene Stellen ihrer Bahn, in denen ihr Parallelkreis den Vertikalkreis berührt. In der Digression wird das Dreieck Pol-Stern-Zenit am Stern rechtwinklig und zur Breitenbestimmung würde es dann genügen, den Winkel am Zenit zu beobachten. Man erreicht dies dadurch, daß man mit Hilfe eines Theodoliten die Azimutdifferenz zweier aufeinander folgender Digressionen bestimmt, deren Hälfte den gesuchten Winkel darstellt. Die Beobachtung besteht darin, den Horizontalkreis dann abzulesen, wenn der Stern keine Azimutänderung mehr zeigt, sondern vertikal ab- oder aufwärts durch das Feld des Fernrohrs zu laufen scheint. Am günstigsten gestalten sich die Bedingungen, wenn man Sterne von großer Poldistanz wählt, die hart an den Ersten Vertikal heranstreifen. Eine ausführliche Darstellung der Methode lieferte *J. G. Böhm*[130]). Einer weiten Verbreitung erfreute sich die Verwertung der Digressionen nie.

23. Absolute Methoden. Mit einer Ausnahme (untere und obere Kulmination eines Zirkumpolarsterns) erforderten alle Methoden der Breitenbestimmung, die bisher zur Sprache kamen, die Kenntnis der Sterndeklination in dem Grade, daß Fehler dieser Koordinate in gleichem Maße die errechnete Polhöhe entstellten. Das Streben nach *absoluten, vom Sternort unabhängigen Methoden* machte sich daher sofort geltend, als die Frage der Veränderlichkeit der Polhöhe auftauchte. Zunächst war es *W. Foerster*[131]), der sich mit dem Problem

---

129) *C. Rümker,* Handbuch der Schifffahrtskunde, 4. Aufl. Hamburg 1844, p. 151 und bei *Günther,* p. 561.

130) *J. G. Böhm,* Methode, geographische Breite und Azimut auf das Genaueste zu finden, Prag 1855.

131) *W. Foerster,* Zur Theorie des Durchgangs-Instrumentes, Berl. astr. Jahrb. für 1880 und 1882 (Wieder-Abdruck in *W. Foerster,* Studien zur Astrometrie, Berlin 1888); *W. Foerster,* Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen

beschäftigte. Seine Auflösung gründet sich auf die Anwendung eines mit *Horrebow*-Einrichtung versehenen Passageninstrumentes, welches azimutal so verstellt werden kann, daß es die Ausführung von Durchgangsbeobachtungen in beliebigen Vertikalebenen gestattet. *Foerster* wählt einen Pol-, einen Zenit- und einen Südstern aus, und die ganze Beobachtungstätigkeit kommt nur auf Durchgangsmomente und Höhendifferenzen hinaus, die in drei verschiedenen Azimuten beobachtet werden. Das Verfahren verlangt eine ausgezeichnete Uhr und eine hervorragende Stabilität des Instrumentes. Ein der Methode angemessenes Universaltransit ließ *Foerster* für die Berliner Sternwarte vom Mechaniker *Bamberg* konstruieren.

Eine andere absolute Methode veröffentlichte *J. C. Kapteyn*[132]), die vielleicht einige Vorzüge vor der *Foerster*'schen besitzt. *Kapteyn* fordert die Messung von Azimutunterschieden, von kleinen Höhendifferenzen und kleinen Zeitintervallen. Die Höhendifferenzen werden nach der *Horrebow*-Methode für zwei Sterne im Nord- und Südzweig des Meridians bestimmt, die Azimutdifferenzen aber an zwei Sternen von nahe gleicher Deklination gemessen, die kurz nacheinander östlich und westlich vom Meridian in gleiche Höhe gelangen. Auf diese Weise wird man frei von Fehlern der Deklination, der Refraktion, der Biegung und des Uhrganges, die jetzt praktisch nur unmerklich das Resultat zu entstellen vermögen.

Neuerdings trat *F. Contarino*[133]) mit einem Vorschlage hervor, der mit dem *Kapteyn*'schen einige Ähnlichkeit aufweist. Der Idealfall liegt so: das Azimut eines Sternes mit einer der Polhöhe gleichen Deklination werde dann beobachtet, wenn er durch den 6^h-Stundenkreis geht. In praxi ersetzt man den einen Zenitstern durch zwei Sterne von ungefähr 12^h Rektaszensionsdifferenz und bestimmt deren Azimutdifferenz beim Durchgang durch den 6^h-Kreis in Ost und West. Hierzu treten noch Meridianzenitdistanzen beider Sterne in Verbindung mit Mikrometermessungen nach Art der bei der Horrebow-Methode vorkommenden.

L. Courvoisier[134]), der nach *Kapteyn*'s Methode in Straßburg

---

Ortsbestimmungen am Himmel, Astronomische Abhandlungen (als Ergzh. zu „Astr. Nachr." hrsg. von *H. Kreutz*) Nr. 5, Kiel 1904.

132) *J. C. Kapteyn*, Methode, die Polhöhe möglichst frei von systematischen Fehlern zu bestimmen, Copernicus (journal) 3 (Dublin 1884), p. 147.

133) *F. Contarino*, Su di un metodo per determinare la latitudine geografica, Napoli 1897.

134) *L. Courvoisier*, Untersuchungen über die absolute Polhöhe von Straßburg i. E., Diss. Heidelberg 1901.

Beobachtungen angestellt, gibt im dritten Teil seiner Arbeit ein eigenes Verfahren zur Bestimmung der absoluten Polhöhe an. Es stützt sich auf Azimutbeobachtungen von vier Sternen, deren Deklinationen der Polhöhe nahe gleich, deren Rektaszensionen aber untereinander um 6^h verschieden sind. Einheitlichkeit und Einfachheit der Beobachtung und die Elimination konstanter Fehler in Höhenrefraktion und Höhenbiegung werden vor allem angestrebt.

24. Instrumente zur Beobachtung gleicher Höhen. Es sei noch einer Art von Instrumenten gedacht, die mit besonderer Rücksicht auf jene Methoden geographischer Ortsbestimmung erdacht worden sind, welche die Durchgänge von Sternen durch den gleichen Höhenkreis als Beobachtungselement voraussetzen. Des einfachsten Instrumentes, des Chronodeiks, erwähnten wir bereits in Nr. 5. *A. Beck*[135]) begann im Jahre 1890 der Konstruktion eines Hilfsmittels zur Festlegung konstanter Höhen seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Das Prinzip der verschiedenen von ihm vorgeschlagenen und zum Teil ausgeführten Instrumente, Nadirinstrumente genannt, besteht darin, daß in ein vertikal abwärts gerichtetes Fernrohr ein darunter befindliches geeignet geformtes Prisma das Bild eines Sternes dann reflektiert, wenn der Stern die Zenitdistanz 60^0 passiert; beobachtet werden die Durchgangszeiten durch eine Gruppe von Fäden. Theorie, Anlage der Rechnung und verschiedene Variationen seines Instrumentes hat *Beck* eingehend bearbeitet.

Von der *Beck*'schen Konstruktion weicht der von *F. Nušl* und *J. J. Frič*[136]) angegebene und erprobte „Zirkumzenitalapparat" nicht unerheblich ab. Hier ist vor einem horizontal gelagerten Fernrohr mit gleichfalls horizontal gerichteter Kante ein Prisma angebracht, dessen beide dem Fernrohr zugekehrte Flächen versilbert sind. Dicht unter dem Prisma befindet sich ein Quecksilberspiegel, und die Beobachtung besteht in der Festlegung des Augenblicks, zu dem die demselben Stern angehörigen Bilder koinzidieren, die einerseits von der oberen Prismenfläche, anderseits nach doppelter Reflexion am Quecksilberspiegel und an der unteren Prismenfläche ins Rohr gelangen.

Auf ähnlichen Erwägungen scheint nach der vorliegenden Beschreibung und warmen Empfehlung *Guyou*'s das *Claude*'sche „Prismen-

135) *A. Beck,* Über die geographische Breite von Riga aus Beobachtungen an einem neuen astronomischen Instrument (Riga Naturf.-Verein Festschr.), Riga 1895. Ferner Astr. Nachr. 126, 130, 132, 136, 140, 159, 163 (1891—1903).

136) *F. Nušl* et *J. J. Frič,* Étude sur l'appareil circumzénital, Bull. international de l'Acad. des Sc. de Bohême 8, Prague 1903.

astrolabium“ [137]) zu beruhen, von dem indes praktische Erfolge noch nicht veröffentlicht worden sind.

25. Photographische Methoden. Mehrfach hat man versucht, die *Photographie* in den Dienst der geographischen Ortsbestimmung zu stellen. Eine Art streiften wir schon in Nr. **14** und **20**. *C. Runge* [138]) erteilte der *Längenbestimmung* durch den Mond — wir erledigen in dieser Schlußnummer des zweiten Teiles die vollständige photographische Ortsbestimmung — die folgende Form: mit einer gewöhnlichen Kamera photographierte er zuerst den Mond und dann bei ungeänderter Stellung der Kamera nach Ablauf einer mit der Uhr gemessenen Zwischenzeit eine hinreichend helle Sterngruppe; die Ausmessung der Platte lieferte den Mondort und damit die Zeit des Nullmeridians und die Länge. Den gleichen Weg beschritt später *E. H. Hills* [139]), der besonders schwere Kameras benutzte. *C. Koppe* [140]) lehrte den stets unscharfen Mondrand aus der Messung eliminieren: er leitete mit dem kleinen Fernrohr seines Phototheodoliten auf den Mond und drehte zwischen zwei Aufnahmen einer Monddistanz die Platte durch Durchschlagen des Theodoliten um 180^0, so daß er in dem Abstand der beiden Sternbilder die doppelte Monddistanz gewann. Auch zur *Breitenbestimmung* durch Zirkummeridianhöhen verwandte *Koppe* den von ihm konstruierten Phototheodoliten. Ein photographisches Universal, das diesem Phototheodoliten sehr ähnlich sieht, konstruierte *A. Marcuse* [141]). Nachdem ein Vorschlag von *F. Stolze* [142]) sich als undurchführbar erwiesen, zeigte *M. Schnauder* [143]), daß man bei einer auf das Zenit gerichteten Kamera den Zenitpunkt durch drei Expositionen mit kurzen und gleichen Zwischenzeiten dadurch bestimmen könne, daß für die mittlere Aufnahme die Platte in ihrer Ebene um 180^0 gedreht wird. *Schnauder's* Zenitkamera besteht aus einer einfachen um eine vertikale Achse zwischen Anschlägen um 180^0 drehbaren photographischen Kamera, deren senkrechte Achse zwei Libellen justieren. *C. Runge* ersetzt die Libellen dadurch, daß er die Kamera in einem Wassertrog schwimmen

137) *E. Guyou,* Paris C. R. 135 (1902), p. 1174.

138) *C. Runge,* Zs. für Vermessungswesen 22 (1893), p. 417.

139) *E. H. Hills,* Lond. Astr. Soc. Mem. 53 (1899), p. 117.

140) *C. Koppe,* Photogrammetrie u. internationale Wolkenmessung, Braunschweig 1896.

141) *A. Marcuse,* Astr. Ges. Vjs. 33 (1898), p. 285.

142) Photographische Bibliothek, hrsg. von *F. Stolze*, Band 1: *F. Stolze*, Die photographische Ortsbestimmung ohne Chronometer, Berlin 1893.

143) *M. Schnauder,* Astr. Nachr. 154 (1900), p. 134.

läßt, *K. Schwarzschild*[144]) hängt den ganzen Apparat an feinen Stahlfedern auf. Eine andere von *Schwarzschild* angegebene Methode[145]) erfordert eine möglichst unveränderlich aufgestellte, nach dem Zenit gerichtete Kamera und einen hängenden Zenitkollimator. Letzterer bestand aus einem nach abwärts gerichteten, an einer Stahlfeder hängenden Fernrohr, dessen Brennebene eine schwarze Platte mit eingerissener Kreuzmarke trug. Der Zenitpunkt fand nun seine Festlegung in der Weise, daß vor der Exposition die beschriebene Hängevorrichtung über das Kameraobjektiv geschoben und mittels eines Glühlämpchens zwei Bilder des Kreuzes, die zu zwei um 180^0 verschiedenen Lagen des Kollimatorfernrohrs gehörten, auf die Platte gebracht wurden. Das Zenit liegt in der Mitte beider Kreuze. Hierauf wurde die Platte eine halbe oder ganze Stunde auf den Himmel exponiert, indes die zenitnahen Sterne ihre Strichspuren beschrieben. Die spätere Ausmessung ergab die Meridianzenitdistanz der auf der Platte vorkommenden Sterne. Das gleiche Prinzip verwandte *Schwarzschild* auch zur Konstruktion einer für Expeditionsreisen geeigneten leichten Kamera[146]). Den hängenden Kollimator ersetzt hier ein abwärts gerichtetes festes Röhrchen, das vermittels zweier Libellen justiert wird.

III. Längenbestimmung.

A. Durch gleichzeitige Signale.

(Über Okkultationsphänomene siehe Nr. **35**.)

26. Mondfinsternisse, Verfinsterungen der Jupitersatelliten. Während die Ableitung der Breite auf die Beobachtungen an dem zu bestimmenden Orte allein gegründet werden kann, bedarf man zur Längenbestimmung auch noch der Zeit des Nullmeridians. Am einfachsten wäre es, Himmelsereignisse zu beobachten, die für die ganze Hemisphäre, der sie sichtbar sind, zur gleichen absoluten Zeit eintreten. Die Differenzen der Ortszeiten des Phänomens deckten sich dann mit den Längendifferenzen.

Vor allen Dingen haben sich die *Mondfinsternisse* dieser Verwertung im Altertum und im Mittelalter erfreut, ja noch im 18. Jahrhundert sind sie zu genaueren Längenbestimmungen benutzt worden[147]). Streng genommen finden Beginn und Ende einer Finsternis, d. h. der Beschattung der für einen Ort sichtbaren scheinbaren Vollmond-

144) und 145) *K. Schwarzschild,* Astr. Nachr. 164 (1904), p. 177 und p. 1.
146) *K. Schwarzschild,* Jahrbuch f. Photogr. u. Reprod.-Technik, Halle 1903.
147) Vgl. u. a. *Bohnenberger*, p. 316.

scheibe, infolge der parallaktischen Verschiebung nicht gleichzeitig statt; doch fließt aus dieser stets begangenen Vernachlässigung nur ein verschwindend geringer Fehler, der gar nicht mehr in Frage kommt gegenüber der natürlichen Unsicherheit, die dem Phänomen anhaftet und die sich daraus herleitet, daß die Grenzen des Erdschattens sich durch eine Verwaschenheit auszeichnen, deren Grad von Finsternis zu Finsternis erheblich schwankt. Überdies ist der Schattendurchmesser größer als er geometrisch sein sollte. Die Erklärung für diese scheinbare Vergrößerung gab *H. Seeliger*[148]), der nachwies, daß uns hier ein wesentlich physiologischer Vorgang entgegentritt. Merklich genauer als Anfang und Ende lassen sich, nach dem Vorgange *Richer's*[149]), die Augenblicke beobachten, zu denen der Erdschatten einzelne Formationen (Krater, Ringgebirge, Wallebenen) bedeckt oder freigibt. Diese Momente treten für alle Punkte der Erde strenge gleichzeitig ein. Immerhin mag es möglich sein mit Beachtung aller Vorsichtsmaßregeln (Gleichartigkeit der Fernrohre, Auswahl scharf definierter Mondkrater, Verabredung über die zu beobachtende Schattenkontur) aus einer Mondfinsternis die Längendifferenz zweier Orte auf einige Zeitsekunden genau herauszubringen. Heute haben die Finsternisse ihre Bedeutung für die Länge eingebüßt; ihr Wert liegt lediglich auf dem Gebiete der Physik der Atmosphäre.

Ein identisches in größerer Entfernung von der Erde sich abspielendes Phänomen wurde nach Erfindung des Fernrohrs zugänglich: die *Verfinsterung der Jupitersatelliten. Galilei*[150]) scheint der erste gewesen zu sein, der ihre Brauchbarkeit zum angezeigten Zwecke durchschaute. Zuerst hatte er wohl nicht die Verfinsterung selbst im Auge, sondern, wie auch *de Peiresc*[151]), die Konstellationen der vier alten Trabanten, durch deren Anblick schon die entsprechende Zeit des Nullmeridians abzulesen sei. Jedoch blieben diese frühen Bemühungen fruchtlos, bis *D. Cassini*[152]) brauchbare Trabantentafeln schuf. Später, insbesondere im 18. Jahrhundert, erfreute sich die

148) *H. Seeliger,* Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen, Münch. Abh. 19, München 1898, p. 383.

149) *J. Richer*, Observations astronomiques faites en l'île de Cayenne, Paris 1679.

150) *G. Galilei,* Sidereus nuncius, Venetiis 1610 = Opere 2 (Padova 1744), p. 35; ferner in *Galilei's* Schreiben von 1636 an die holländischen Generalstaaten = Opere 3 (Firenze 1718), p. 155 = Opere 2 (Padova 1744), p. 459 = Opere 7 (Firenze 1848), p. 82.

151) *N. C. F. de Peiresc,* geb. 1580, gest. 1637; *Wolf,* Handb. 2, p. 149.

152) *D. Cassini,* Ephemerides Bononienses Mediceorum siderum, Bononiae 1668.

Methode großer Beliebtheit, vornehmlich nachdem *Hell*[153]) sich ihrer angenommen und eine Anzahl Regeln zur genauen Beobachtung der nach Art unserer Mondfinsternisse nicht plötzlichen Verfinsterungen aufgestellt. Er wollte wegen der rascheren Bewegung und infolgedessen des rascheren Eintauchens in den Jupiterschatten nur die Satelliten I und II zur Längenbestimmung verwandt wissen; ferner verlangte er identische Fernrohre, gleichmäßige Verteilung der Momente auf Ein- und Austritt und Vermeidung der Nähe der Jupiteropposition. Die neuesten Verschärfungen, die die Beobachtung der Jupitersatelliten in ihrer praktischen und theoretischen Verwertung durch *Cornu*[154]), *Obrecht*[155]), *Seeliger*[156]), *Anding*[157]) erfahren, hat mit dem Gedanken an Längenbestimmung nichts mehr zu tun. Sie dienen dem Studium teils der Mechanik des Jupitersystems, teils des photometrischen Verhaltens während des Verweilens des Trabanten im Schatten des Hauptkörpers und der Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit.

27. Sternschnuppen. Auf einen sehr viel weniger ausgedehnten Bereich der Erdoberfläche ist die Wahrnehmbarkeit jener Phänomene beschränkt, die schon sehr früh, als noch kaum die Überzeugung von ihrer kosmischen Natur aufgetaucht, als zu Längenbestimmungen geeignet in Vorschlag gebracht wurden. *Halley*[158]) wies zuerst auf die Möglichkeit hin, durch das Aufblitzen einer *Sternschnuppe* eine Uhrvergleichung zu erzielen; bald darauf wiederholte *G. Lynn*[159]) diesen einfachen Gedanken, der nachmals von *Benzenberg*[160]) aufgegriffen wurde. Erfolge hat indes die Methode nie gezeitigt; einmal deshalb, weil man nie genau weiß, wann und wo ein Meteorit auftaucht, und ein weiterer Einwand erhebt sich aus der Schwierigkeit der Identifikation der an beiden Orten gesehenen Erscheinung. Nichtsdestoweniger hat jüngst nochmals *Bouquet de la Grye*[161]) Sternschnuppen zur Längenbestimmung heranziehen wollen.

153) *M. Hell,* Ephemerides astronomicae [Vindobonenses] anni 1764, p. 189, Viennae 1763—64 (*Ephem. Vindob.* 1764). Über die Genauigkeit der Beobachtung der Verfinsterung der Jupitermonde stellte *F. X. v. Zach* eine vergleichende Studie an: Berl. astr. Jahrb. Suppl. 3 (1797), p. 44.

154) *A. Cornu,* Paris C. R. 96 (1883), p. 1815.

155) *A. Obrecht,* Obs. de Paris ann. 18 (1885).

156) *H. Seeliger,* Astr. Ges. Vjs. 20 (1885), p. 176 und 267.

157) *E. Anding,* Photometrische Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, München 1889.

158) *E. Halley,* Lond. Phil. Trans. 1719, p. 978 [abr. 6, p. 409].

159) *G. Lynn,* Lond. Phil. Trans. 1727, p. 351 [abr. 7, p. 207].

160) *J. F. Benzenberg,* Über die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen, Hamburg 1802.

161) *A. Bouquet de la Grye,* Paris C. R. 129 (1899), p. 464.

28. Künstliche Signale. Sehr viel sicherer stellte man derartige plötzliche Erscheinungen durch *künstliche Signale* her und von diesem Verfahren wurde früher sehr häufig dann Gebrauch gemacht, wenn die Natur der Aufgabe eine sehr genaue Kenntnis der Längendifferenz zweier Punkte erheischte, z. B. bei Längengradmessungen, die dem Studium der Größe und Figur der Erde dienten. *Picard* und *O. Römer*[162]) bestimmten so schon 1671 die Längendifferenz zwischen der durch *Tycho Brahe*'s Uranienburg bekannten Insel Hveen und Kopenhagen. *N. L. de Lacaille* und *Cassini de Thury*[163]) benutzten das Aufblitzen von Schießpulver, um den Längenunterschied von $1^{0}.9$ einer in der Breite $+ 43^{0}.5$ vorgenommenen Gradmessung (1739—1740) zu ermitteln. Um den Anfang des 19. Jahrhunderts bis in die vierziger Jahre hinein fand die Methode in ganz Europa vielfache Anwendung und gelangte zu hoher Ausbildung vornehmlich, nachdem *Gauß*[164]) den Heliotropen erfunden hatte und mittels dieses Instrumentchens leicht und bequem Lichtsignale nach den gewählten Stationen gegeben werden konnten. Die Station, an der die Pulver- oder Heliotropsignale stattfanden, verlegte man möglichst in die Mitte der zu bestimmenden Orte oder schaltete, wenn deren Entfernung eine sehr große, Zwischenstationen ein, für die keine Bestimmung der Ortszeit, sondern nur die Beobachtung der Signalzwischenzeit erforderlich war; unabhängige Zeitbestimmungen fallen lediglich den beiden Endpunkten des Bogens zu. Die größte in vorelektrischer Zeit durchgeführte Längenbestimmung ist die auf dem Parallel $45^{0}43'.2$ ausgeführte, die von Bordeaux an der atlantischen Küste bis Fiume an der Adria über 15.5 Längengrade reicht; sie wurde französischerseits von Oberst *Brousseaud* begonnen und gegen 1824 vom italienischen, sardinischen und österreichischen Generalstabe abgeschlossen[165]).

---

162) *J. Picard,* Voyage d'Uraniborg, ou observations astronomiques faites en Dannemarck, Paris 1680.

163) *C. F. Cassini de Thury,* La méridienne de l'observatoire royal de Paris, Paris 1744.

164) *C. F. Gauß*, Göttingische gelehrte Anzeigen 1821, p. 1249 = Werke 9 (1903), p. 461.

165) Siehe näheres u. a. bei *F. Arago*, Astronomie populaire, Paris u. Leipzig 1856, 4 vols., tome 3, p. 339; oder: Sämtl. Werke, deutsche Ausgabe von *W. G. Hankel,* Leipzig 1856, 13, p. 258; ferner *Brousseaud,* Mesure d'un arc du parallèle moyen, Limoges 1839. Die 1. Ausgabe erschien Paris 1826 in: Conn. des temps pour 1829, p. 252—295.

B. Durch Zeitübertragungen.

29. Chronometerreisen. An die Entwickelung eines der wichtigsten astronomischen Apparate, der Uhr, war die Ausführung einer sehr einfachen Art der Zeitvergleichung gebunden. *Gemma-Frisius*[166]) erwähnte als der erste die Möglichkeit, mit Hilfe transportabler Uhren *die Zeit des einen Ortes auf den andern in Länge anzuschließenden zu übertragen;* aber es hat noch mehr als zwei Jahrhunderte gewährt, bis die Technik Werkzeuge herzustellen vermochte, die den zu fordernden Grad der Zuverlässigkeit bewährten. Die leitende Idee ist folgende: am Orte A beobachte ich das durch Stand und Gang und dessen Abhängigkeit von Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit ausdrückbare Verhalten des Chronometers eine geraume Zeit hindurch, reise dann nach dem in Länge zu ermittelnden Orte B und bestimme dort an dem in A geprüften Chronometer die Ortszeit, deren Differenz gegen die aus dem bekannten Verhalten der Uhr abzuleitende Ortszeit in A sofort den Längenunterschied von A und B liefert. Eine Kontrolle gewährt die Rückreise nach A und nochmalige Untersuchung des Chronometers am Ausgangsorte. Eine weitere Verschärfung und Vervielfachung erzielt man durch Mitnahme einer größeren Anzahl von Chronometern. Derartige *„Chronometerreisen"* haben einige Male in vorelektrischer Zeit zur Bestimmung fundamentaler Längendifferenzen Nordeuropas gedient, so in den Jahren 1817 bis 1821 unter *Schumacher*'s Leitung zwischen Altona und Kopenhagen[167]), 1823 und 1824 unter *Tiarks* zwischen Greenwich und Altona[168]), und endlich hat *W. Struve* die größte Operation dieser Gattung zwischen Pulkowo, Altona und Greenwich[169]) unternommen, freilich zu einer Zeit, wo in Amerika schon die telegraphische Methode (siehe Nr. **30**) Triumphe zu feiern begann.

Nach wie vor ist aber die chronometrische Zeitübertragung in der Nautik von größter Bedeutung, seitdem es *J. Harrison*[170]) 1735 gelang, das erste Marinechronometer herzustellen. Heutigentages

---

166) *R. Gemma[-Frisius],* De principiis astronomiae, cosmonomiae et cosmographiae, Antuerpiae 1530, Paris 1547.

167) *H. C. Schumacher,* Astr. Nachr. 1 (1823), p. 303—306.

168) *J. L. Tiarks,* siehe *H. C. Schumacher,* Astr. Nachr. 5 (1827), p. 225.

169) *F. G. W. Struve,* Expédition chronométrique (1843—44) entre Poulkova et Altona, 2 vols., St.-Pétersbourg 1844/46.

170) *J. Harrison* (1693—1776), An account of the proceedings in order to the discovery of the longitude at sea, 2nd ed., London 1763. The principles of Mr. *Harrison*'s time-keeper, London 1767. Vgl. *E. Gelcich,* Geschichte d. Uhrmacherkunst, 5. Aufl., Weimar 1892, p. 56.

bildet diese Methode zur See die fast allein angewandte Art der Längenbestimmung, neben welcher die übrigen auf den Mondort gestützten Methoden lediglich den Rang von erwünschten Kontrollen einnehmen. Die Untersuchung an den Chronometerobservatorien (e. g. Hamburg, Kiel, Wilhelmshaven) bestimmt für jedes Chronometer die Formeln, nach denen mit Rücksicht auf ein von der Temperatur abhängiges Glied die Greenwichzeit für einen beliebigen Moment zu berechnen sei, und da die Beobachtung an Bord die zugehörige Ortszeit festlegt, so geht aus dem Unterschied beider Zeiten die gesuchte Länge gegen Greenwich hervor. Kriegsschiffe auf großer Fahrt haben mindestens drei Chronometer an Bord und auch auf Handelsschiffen finden sich in vielen, wenn auch nicht den meisten Fällen zwei oder drei Chronometer vor[171]). Für das relative Gewicht der von den verschiedenen Chronometern beigesteuerten Greenwichzeit bei der Mittelbildung existieren verschiedene Vorschriften, die teils das Verhalten während der Prüfung an Land, teils die täglichen Vergleichungen zur See zugrunde legen. Die wichtigste Abhandlung über diesen Gegenstand stammt von *Gauß*[172]).

Auf Expeditionsreisen zu Lande bedient man sich statt der langsam schwingenden Marine-(Box-)Chronometer, die den kurzen und unregelmäßigen Erschütterungen eines Landtransportes nicht gewachsen sein würden, der schnell schwingenden ($^1/_5$ Sekunden schlagenden) Taschenchronometer, deren man leicht eine größere Anzahl mitnehmen kann. — Versuche aus neuester Zeit von *P. Ditisheim*[173]) weisen einen Barometerkoeffizienten für Chronometer deutlich nach.

30. Telegraph. Eine Uhrvergleichung ohne Uhrentransport brach sich Bahn, als die von *Gauß* und *Weber* 1833 begründete Telegraphie begann, allgemeines Verkehrsmittel zu werden. Wiederum waren die Amerikaner die ersten, die der 1839 von *S. F. B. Morse* gegebenen Anregung folgten und 1844 durch *K. Wilkes* und *Eld*[174]) die erste telegraphische Uhrvergleichung zwischen Washington und Baltimore anstellten. 1845 fand dann die Methode unter *A. D. Bache* und *S. C. Walker*[175]) Eingang in die nordamerikanische Coast Survey, der

171) Vgl. *E. Knipping*, Statistik der Schiffschronometer der Deutschen Kriegs- und Handelsmarine von 1877—1903, Ann. d. Hydr. 1904, p. 231.

172) *C. F. Gauß*, Astr. Nachr. 5 (1827), p. 227 = Werke 6 (1874), p. 455.

173) *P. Ditisheim*, Paris C. R. 138 (1904), p. 1027 und Ann. d. Hydr. 1904, p. 287. Vgl. ferner VI 2, 4 (*Caspari*), Nr. 8.

174) Siehe *J. Hilfiker*, Die astronomische Längenbestimmung, Aarau Naturf. Ges. Mitth. 1881, Aarau 1882, p. 31.

175) *S. C. Walker*, Astr. Nachr. 27 (1848), p. 121.

sie zur Ableitung der Längendifferenzen zwischen den Hauptstationen diente[176]). Heutigentages ist die telegraphische Längenbestimmung jene, die mit dem geringsten Aufwand an Beobachtung und Rechnung die schärfsten Resultate liefert und daher als einzige für die internationale Erdmessung in Frage kommt. Die Ergebnisse sind gleichwertig mit den Breiten; ein schließlicher innerer zufälliger Fehler von $\pm$ 0.″1 Bogen größten Kreises ($= \pm$ 3 m auf der Erdoberfläche) wird kaum mehr überschritten. Um ein möglichst gutes Gelingen zu gewährleisten, befreit man sich bei der Zeitbestimmung von den Fehlern der Rektaszensionen der Sterne dadurch, daß man, so lange die Längenentfernung das zuläßt, an beiden Stationen dieselben Sterne beobachtet. Die persönliche Gleichung der Beobachter eliminiert man durch einen Beobachter- und Instrumentenwechsel inmitten der Operation. Den Instrumentalfehlern bleibt nur ein kleiner Einfluß auf das Resultat gestattet, wenn das Mittel der Zenitdistanzen der Zeitsterne möglichst nahe jenem der Polsterne liegt. Statt der Tasterregistrierung der Fadenantritte der Sterne wendet man heute meist das *Repsold*'sche unpersönliche Mikrometer[177]) an, bei welchem der Beobachter nur den das Feld durcheilenden Zeitstern durch einen mit einer Schraube nachgeführten Faden biseciert zu halten hat; eine Anzahl Kontakte an der Schraubentrommel verzeichnen selbsttätig Signale auf dem Chronographenstreifen. Man ist davon abgekommen, die Sterndurchgänge auf den Chronographen beider Stationen zu registrieren und man beschränkt sich darauf, die Uhren im Laufe eines Abends hinlänglich oft untereinander in Beziehung zu setzen. Der Fernleitung bedarf man auf diese Weise nur eine kurze Zeit, und darauf muß der Astronom in unserem Zeitalter des Verkehrs insbesondere auf überlasteten Strecken Rücksicht nehmen. — Die zahlreichen bisher vorgenommenen Längenbestimmungen liefern nebenher Werte für die *Stromzeit*, i. e. die Zeit, die der elektrische Strom zum Durchlaufen der Leitung braucht. Für eine Strecke von 1000 km ergibt sich diese Zeit zu $0^s.042$, doch schreitet sie nicht linear mit der Leitungslänge fort, sondern nimmt rascher zu als jene[178]).

In Deutschland fand die erste telegraphische Längenbestimmung erst im Sommer 1852 zwischen Berlin und Frankfurt a. M. statt[179]). Die erste transozeanische Längenbestimmung gelang der Coast Survey

176) Vgl. *E. Loomis*, The recent progress of astronomy, especially in the United states, New York 1850, new edit 1856.

177) Siehe Astr. Nachr. 141 (1896), p. 279.

178) Vgl. *Th. Albrecht*, l. c. Fußn. 65), 3. Aufl., p. 110.

179) Physik. Verein zu Frankfurt a. M., JahrBer. 1852—1853, Frankf. 1853.

1866 zwischen Hearts-Content (Newfoundland), Valencia (Irland) und Greenwich. Seitdem liegen indes schon zahlreiche Längenverbindungen mit nord- und südamerikanischen Punkten vor.

Nicht mehr ferne scheint die Zeit zu sein, wo die elektrische Methode der Längenbestimmung in ihrer durch *Marconi* erfundenen drahtlosen Ausgestaltung die Nautik erobert und die im folgenden zu besprechenden auf den Mondort gegründeten weit unsichereren Verfahrungsarten verdrängt. Man denke sich nur, daß an verschiedenen Observatorien zu fest vorgeschriebener Greenwichzeit ein drahtloses Signal gegeben würde, das mit Hilfe der Marconiempfangsapparate auf allen Schiffen des Weltmeeres wahrnehmbar sei. Den Navigationsoffizieren fiele dann nur mehr die astronomische Ermittelung der Ortszeit zu, und an die Seeuhren brauchten fürderhin geringe Anforderungen gestellt zu werden.

C. Auf den Mondort gegründete Methoden.

(Photographische Methoden siehe Nr. 25.)

31. Mondkulminationen. Nahezu gleichaltrig mit der chronometrischen Längenbestimmung sind die auf den Mondort gegründeten Methoden. Da der Mond in $27^d\,1/3$ einen siderischen Umlauf um die Erde vollendet, so bewegt er sich in 1^d um beiläufig $13^0.2$ unter den Fixsternen weiter nach Osten; man müßte also, wollte man die Zeit des Ephemeridenmeridians auf 1^s genau ableiten, den Mondort auf $1/2$ Bogensekunde definieren. Hierzu bedarf es jedoch recht genauer Instrumente und sehr vorgeschrittener Beobachtungsmethoden und aus diesem Grunde mag es nicht Wunder nehmen, wenn vor dem Jahre 1500 vom Gebrauch des Mondes zur Längenbestimmung in der Literatur keine Rede ist. Erst der Nürnberger *J. Werner*[180]) deutet in seinem Kommentar zur Geographie des Ptolemäus die Methode 1514 leise an. Zur See konnte jener Vorschlag erst lebensfähig werden, als es gelang, brauchbare Mondtafeln herzustellen, eine Forderung, die *Tobias Mayer*[181]) 1752 erfüllte.

Einer glücklichen Spezialisierung unterwarf der Pariser *Orontius Finaeus*[182]) die Methode des Mondortes, indem er den Mond im

180) *Johann Werner,* Claudii Ptolemaei geographia, liber primum, argumenta, cap. IV, annot. VIII, Norimbergae 1514; auch hrsg. von *P. Apianus,* Ingolstadt 1533. — Historische Nachweise in *Wolf,* Handb. 2, p. 153 ff.

181) *J. Tobias Mayer* (senior), Tabulae motuum solis et lunae novae et correctae, quibus accedit methodus longitudinum promota, ed. *N. Maskelyne,* London 1770 (posthum).

182) *Orontius Finaeus,* De invenienda longitudinis locorum differentia, Lutetiae 1544.

Moment seines Durchganges durch den Meridian beobachtete, hieraus die Rektaszension ableitete und entweder auf die entsprechende Zeit des Nullmeridians der Ephemeride überging oder aus der an zwei Orten beobachteten Rektaszensionsdifferenz mit Hilfe der Rektaszensionsänderung den Längenunterschied berechnete. Der englische Seefahrer *W. Baffin* [183]) scheint der erste gewesen zu sein, der das Verfahren im Sommer 1615 sich praktisch zu nutze machte. Vor den später zu besprechenden Methoden genießen die *Mondkulminationen* den Vorzug der Einfachheit der Berechnung; denn im Moment der Meridianpassage verschwindet die parallaktische Verschiebung des Mondes in Rektaszension. *J. Toaldo* [184]) und *E. Pigott* [185]) empfahlen, die Kulminationen nahe beim Mond und in dessen Parallel stehender Sterne mitzubeobachten, da dann nicht nur die Instrumentalfehler fast ganz herausfielen, sondern auch die Sternörter. Da sich dies Verfahren bewährt hat, teilen die Ephemeriden die *scheinbaren* [186]) Rektaszensionen geeigneter Moon culminating stars mit. *F. B. G. Nicolai* [187]) entwickelte ein Berechnungsverfahren, bei welchem Uhrkorrektion, Mondradius und Fehler der Mondtafeln fast keine Rolle im Resultat mehr spielten. Die Diffraktion, die den Mondradius für verschiedene Fernrohre und Beobachter verschieden gestaltet, beeinträchtigte indes das Ergebnis immer noch sehr und wurde selbst dann nicht völlig eliminiert, wenn man durch Kombination von Morgen- und Abendkulminationen beide Ränder der Beobachtung unterwarf. Nach *J. Franz'* Vorgang, der gestützt auf *J. H. Mädler, M. L. G. Wichmann* und *H. Schlüter* den der Mondmitte nahen Krater Mösting A statt der Ränder zu beobachten riet und Ephemeriden zur Reduktion im Berliner Jahrbuch mitteilte [188]), hat *A. Alessio* [189]) die Längenbestimmung durch Beobachtung des Kraters Mösting A befürwortet und praktisch erprobt.

183) *W. Baffin* (geb. 1584, gest. 1622) wandte die Methode der Mondkulminationen auf seiner Grönlandreise an. Vgl. u. a. *Thomas Rundall,* Narratives of voyages towards the North-West 1496—1631, Works issued by the Hakluyt-Society 5, London 1849, p. 117.

184) *J. Toaldo,* De methodo longitudinum ex observato transitu lunae per meridianum ad *N. Maskelyne* epistola, Patavii 1784.

185) *E. Pigott,* Lond. Phil. Trans. 1786, p. 409 [abr. 16, p. 145].

186) Zuerst Naut. Alm. for 1834, vgl. daselbst p. XVI, Report § 16. — *M. Loewy,* Ephémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour l'an 1878 ff., Paris 1877 ff., jährl. hrsg. vom „Bureau des Longitudes".

187) *F. B. G. Nicolai,* Astr. Nachr. 1 (1823), p. 7 und 2 (1824), p. 17; *F. Baily,* Lond. Astr. Soc. Mem. 2 (1826), p. 1.

188) *J. Franz,* Astr. Nachr. 136 (1895), p. 1.

189) *A. Alessio,* Determinazione speditiva della longitudine con osservazioni del cratere lunare Mösting A, Rivista Marittima 36c suppl., Roma 1902.

In umfangreichem Maße sind die Mondkulminationen zu Bestimmungen[190]) fundamentaler Meridiane in Amerika, Asien und Australien in den Jahren 1867 bis 1870 von *G. Fleuriais* verwendet worden, wovon Berichte in den Anhängen der Connaissance des temps aus den Jahren 1870 bis 1874 Zeugnis ablegen.

A. D. Pio[191]) suchte die Mondkulminationen auch den auf der Reise meist gebrauchten Spiegelinstrumenten zugänglich zu machen und modifizierte sie daher in der Weise, daß er vorschlug, man solle korrespondierende Höhen des Mondes nehmen und daraus die Ortszeit des höchsten Standes ableiten. Schon viel früher behandelte den gleichen Gedanken *A. Mackay*[192]), der ihn insbesondere für die Nautik nutzbringend erachtete.

Eine sehr wenig in praxi verwertete Verallgemeinerung der Mondkulminationen ist die der *Mondazimute*, deren günstigsten Fall eben wieder die Mondkulminationen repräsentieren. Neben der erschwerten Beobachtung ergibt sich die Notwendigkeit, der Mondparallaxe Rechnung zu tragen. Ernstlich in Frage kommen die Mondazimute nur in hohen Breiten. Dagegen läßt sich die Verbindung eines Monddurchganges mit einer Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsterns (siehe Nr. 9) nur befürworten.

32. Mondhöhen. *Bouguer*[193]) empfahl die Beobachtung der *Mondhöhen* zur Längenbestimmung; denn man kann nach Reduktion der Höhe auf das Erdzentrum mit der langsamer veränderlichen Deklination des Mondes aus dem Dreieck Mond-Zenit-Pol den Stundenwinkel und daraus mit der bekannten Ortssternzeit die Rektaszension des Mondes und dann die Länge des Beobachtungsortes ableiten. Um konstanten Fehlern aus dem Wege zu gehen, soll man ein paar Sterne, die nahe gleiche Höhe und gleiches Azimut mit dem Monde haben, mitbeobachten. Schon lange vor *Bouguer* hatte *F. de Herrera*[194]) aus Mondhöhen Längen für *F. de Magellan*'s letzte Reise abzuleiten versucht, freilich ohne Erfolg. Die Mondhöhen können unter niedrigen Breiten sehr wohl mit den Monddistanzen konkurrieren und sind nicht nur schon zur See angewandt worden, sondern auch auf geographischen Forschungsreisen zu Lande, z. B. von *d'Abbadie*[195]) in

190) Neureduktion von *A. Auwers*, Astr. Nachr. 108 (1884), p. 313.

191) *A. D. Pio*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 59 (1899), p. 513.

192) *A. Mackay*, Theory and practice of finding the longitude, 3d ed., 2 vols., London 1804, vol. I, p. 214.

193) *P. Bouguer*, Nouveau traité de navigation, Paris 1753.

194) Vgl. l. c. Fußn. 343), Ex. crit. 1, p. 301—302 = Krit. Unt. 1, p. 251.

195) *A. d'Abbadie*, Résumé géodésique des positions déterminées en Éthiopie, Leipzig 1859.

Äthiopien, *Wißmann*[196]) auf seiner Afrikadurchquerung, *F. Hayn*[197]) in der Südsee; *Hayn* modifizierte die Methode dahin, daß er an einem Zenitteleskop gleiche Höhen des Mondes und zweier Sterne beobachtete.

Eine von *R. Radau*[198]) in Vorschlag gebrachte Methode, durch Kombination von Zenitdistanzen und Azimutdifferenzen des Mondes und eines Nachbarsternes die Zeit des Nullmeridians zu erlangen, hat wohl nie praktische Bedeutung gewonnen.

F. de Herrera[199]) wollte auch schon die Deklination des Mondes zur Längenbestimmung verwerten, ein Gedanke, den *J. Oltmanns*[200]) näher prüfte und unter günstigen Bedingungen für durchführbar hielt. Viel später beschäftigte sich *W. Spottiswoode*[201]) mit der Aufgabe; er meint, man solle die größte Höhe des Mondes beobachten, daraus dessen Deklination ableiten und aus deren Vergleich mit der Ephemeride die Länge finden.

33. Monddistanzen. Auf See war eine Zeitlang ein Verfahren der Längenbestimmung heimisch, um dessen Ausbildung sich zahlreiche astronomische und nautische Schriftsteller bemüht: die *Monddistanzen*, i. e. die Messung des Abstandsbogens des Mondes von geeigneten Fixsternen, den vier hellen Planeten oder der Sonne. Vor den Mondkulminationen genießen sie den Vorzug, nicht an einen bestimmten Moment gebunden, sondern immer dann anwendbar zu sein, wenn der Mond über dem Horizont des Beobachtungsortes weilt, und vor den Mondhöhen haben sie auch das voraus, daß sie frei sind von den Anomalieen der Kimm, denen man den jüngsten Erfahrungen gemäß nicht völlig auszuweichen vermag. Selbst auf beschwerlichen Expeditionsreisen zu Lande machen sie den Mondhöhen den Vorrang streitig; während diese zur scharfen Messung eines fest aufstellbaren Apparates bedürfen — denn mit Reflexionsinstrument und Quecksilberhorizont lassen sich Mondhöhen schon deshalb nicht einstellen, weil man (Vollmond ausgenommen) keine Randberührung herzustellen vermag — können jene mit beträchtlicher Sicherheit am Spiegelsextanten oder Prismenkreis gewonnen werden, wenn möglich mit Zuhilfenahme eines bequemen Stativs, an das man keinerlei exakte

196) *H. Wißmann,* Unter deutscher Flagge quer durch Afrika von West nach Ost, Berlin 1889.

197) Siehe [91]).

198) *R. Radau*, Astr. Nachr. 54 (1861), p. 345.

199) Vgl. l. c. Fußn. 343), Ex. crit. 1, p. 301—302 = Krit. Unt. 1, p. 251.

200) *J. Oltmanns*, Berl. astr. Jahrb. für 1824, p. 181, Berlin 1821.

201) *W. Spottiswoode,* Lond. Astr. Soc. Mem. 29 (1861), p. 343.

Anforderungen stellt. Mit der Praxis der Monddistanzmessung befaßt sich sehr eingehend eine Schrift von *de Cañete del Pinar*[202]).

Bekannt ist die Erzählung, welche *Amerigo Vespucci* 1499 August 23 an der Küste von Venezuela die erste Längenbestimmung aus einer Monddistanz ausführen läßt[203]); sie trifft jedoch nicht zu. Von einer eigentlichen Methode der Berechnung finden sich erst Spuren bei *A. Pigafetta*[204]) und *J. Werner*[180]); eine konsequente Anwendung auf See ließ der Mangel geeigneter Instrumente und zuverlässiger Mondephemeriden noch nicht zu. Als endlich *T. Mayer*[181]) seine Mondtafeln schuf, setzte nahe gleichzeitig *Harrison*[170]) durch die Konstruktion ausgezeichneter Chronometer die Bedeutung der Monddistanzen auf die einer Kontrolle der Uhren oder ihres Ersatzes im Notfall herab.

Abgesehen davon, daß die Beobachtung einer Monddistanz mit einem Reflexionsinstrument aus freier Hand keine leichte Sache ist, gestaltet sich die Reduktion bei strengem Vorgehen sehr umständlich. Sie zerfällt in zwei Teile: zunächst muß man den auf der Erdoberfläche gemessenen Abstand auf den Erdmittelpunkt reduzieren und dann mit dieser reduzierten Distanz die zugehörige Zeit des Nullmeridians der Ephemeride entnehmen. Am weitaus langwierigsten ist der erste Teil der Berechnung. Vor deren Beginn verschafft man sich die Zenitdistanzen von Mond und Gestirn, sei es durch Beobachtung, wie auf See, sei es durch eine beiläufige Rechnung. Die Auflösung zweier sphärischer Dreiecke führt dann zunächst zu der wegen Refraktion korrigierten Distanz. Von diesen Dreiecken hat das erste den geographischen Zenit und die scheinbaren Zenitdistanzen der verbundenen Objekte zu Stücken, das zweite denselben Zenit und die wegen Strahlenbrechung verbesserten Zenitdistanzen. Hierauf überträgt man die Zenitdistanzen auf den geozentrischen Zenit und findet endlich die gesuchte geozentrische Monddistanz durch die folgeweise Durchrechnung zweier weiterer sphärischer Dreiecke, die den geozentrischen Zenit gemein haben; die von ihm ausgehenden Seiten werden von den wegen Strahlenbrechung und zu zweit von den obendrein noch wegen Parallaxe verbesserten Zenitdistanzen dargestellt.

---

202) *de Cañete del Pinar*, De cómo se han de observar las distancias lunares, Madrid 1904, auch in: Revista General de Marina 52, Madrid 1903, p. 635, 697.

203) Vgl. [*F. X. v. Zach*] (anonym), Monatl. Corr. 22 (1810), p. 530.

204) *F. A. Pigafetta*, geb. 1491, gest. 1534, machte *Magellan*'s Weltumsegelung mit und führte ein Reisejournal; vgl. *Stanley of Alderley*, The first voyage round the world by Magellan, Works issued by the Hakluyt Society 52, London 1874; *Wolf*, Handb. 2, p. 151.

Auf See konnte eine solche mindestens sechsstellig zu führende Rechnung nicht Platz greifen; die erste Vereinfachung bestand in der Vernachlässigung der Abplattung der Erde, und damit hatte man es nur noch mit zwei Dreiecken zu tun, denen eine Ecke, der geographische Zenit, und der dort gelegene Winkel (Azimutdifferenz von Mond und Gestirn) gemein war. Um die Art der Berechnung der verlangten geozentrischen Monddistanz aus diesen beiden Dreiecken bemühten sich viele Schriftsteller, die teils die strenge Lösung rechenflüchtig durchzuarbeiten suchten, teils indirekte Methoden entwickelten, die eine an die beobachtete Distanz anzubringende Korrektion lieferten. Heutigentages haben zur See die letzteren Methoden den Sieg davon getragen; sie gestatten einen beliebigen Grad der Annäherung an die Wahrheit und die einzelnen Glieder kommen mit vierstelligen Logarithmen hinlänglich genau heraus. Wir greifen im folgenden unter jenen Methoden nur die wichtigsten heraus, um die sich die Fülle der anderen Variationen kristallisiert. Eine erschöpfende Darstellung der Geschichte des Problems verfaßte *G. D. E. Weyer*[205]).

Eine der ältesten und kürzesten direkten Formeln stammt von *R. Dunthorne*[206]), der eine Tafel für einen in ihr auftretenden, von der Höhe beider Gestirne abhängigen Faktor berechnete. Auf *Dunthorne*'s Formel gründen sich alle andern. *A. Mackay*[207]) führte zur Vermeidung des Vorzeichenwechsels den Sinus versus[349]) ein, *Lexell*[208]) gestaltete die Formel für logarithmische Rechnung geschmeidiger. Großen Anklanges erfreute sich lange Zeit hindurch die von *Borda*[209]) gegebene Entwickelung, der u. a. auch *J. Bohnenberger* den Vorzug erteilte. *W. L. Krafft*'s[210]) Methode wurde durch eine von *J. H. van Swinden*[211]) berechnete Tafel unterstützt. Sie vermeidet logarithmische Rechnung fast ganz und setzt nur eine Tafel der natür-

---

205) *G. D. E. Weyer,* Ann. d. Hydr. 1881, 1882, 1890.

206) *R. Dunthorne,* The practical astronomy of the moon: or, new tables of the moon's motions, London and Cambridge 1739.

207) Siehe [192]).

208) *A. J. Lexell,* Observationes circa methodum inveniendi longitudinem. Petersbg. Acta 1780, Teil II, p. 350.

209) *de Verdun de la Crenne, J. C. de Borda, A. G. Pingré,* Voyage fait par ordre du roi en 1771 et 1772, p. 367, Paris 1778. Vgl. Paris hist. (2) mém. 1773.

210) *W. L. Krafft,* Méthode à la portée des navigateurs, Petersbg. Nova Acta 7 (1793), p. 370.

211) *J. H. van Swinden,* Verhandling over het bepaalen der lengte op zee, p. 77, Amsterdam 1802.

lichen Sinus versus voraus. Wenig umgeformt gab *J. Mendoza*[212]) für *Krafft*'s Verfahren ein umfangreiches Tabellenwerk heraus. Einen recht empfehlenswerten Weg, dessen Grundgedanke sich schon bei *Lexell*[208]) findet, verdankt man *C. Bremiker*[213]), dessen Formel von *Ligowski*[214]) etwas transformiert wurde, und *Simonoff*[215]) schrieb die Grundgleichung so um, daß ein paar kleine durch vierstellige Rechnung auszuwertende Zusatzglieder erschienen, wie früher schon *Huber*[216]) getan hatte; später nahm *Ligowski*[217]) diesen Zweck wieder auf. Die letztgenannten Verfahren bilden den Übergang zu den indirekten Methoden, vor deren Aufzählung indes hier der strengsten und allein vollständigen Auflösung gedacht sein möge, die *Bessel*[218]) dem Problem angedeihen ließ. *Bessel* kehrte die Fragestellung um; er ging aus von einer wahren geozentrischen Distanz, die er auf den lokalen Abstand der Ränder reduzierte, und nun ergab die Differenz gegen die Beobachtung ein Mittel zur Verbesserung der angenommenen Länge. Einige Jahre, von 1835 bis 1838, gab *Schumacher*[219]) besondere Ephemeriden für die nach *Bessel*'s Methode zu berechnenden Monddistanzen heraus.

Falls man bei Chronometerschäden und dergleichen zur See überhaupt noch zu Monddistanzen greift, wendet der Seemann zur Reduktion eine der zahlreichen indirekten Methoden an, die alle viel Ähnlichkeit untereinander besitzen. *Lacaille*[220]) nahm nur die beiden ersten Glieder der Reihenentwickelung nach Refraktion und Parallaxe

---

212) *J. Mendoza y Rios*, Memoria sobre algunos métodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares, Madrid 1795; derselbe: Recherches sur les principaux problèmes de l'astronomie nautique, Lond. Phil. Trans. 1797, p. 43 [abr. 18, p. 95, engl.].

213) *C. Bremiker*, Astr. Nachr. 30 (1850), p. 311.

214) *W. J. O. Ligowski*, Arch. Math. Phys. 51 (1870), p. 374; 53 (1871), p. 103 u. 498.

215) *J. M. Simonoff*, vgl.: Library of useful knowledge, Nr. I—IV; *R. W. Rothman*, History of astronomy, London 1832, p. 227.

216) *D. Huber*, Versuch über das astronomisch-nautische Problem betreffend die Reduktion der scheinbaren Monddistanzen auf wahre, Monatl. Corr. 12 (1805), p. 309.

217) *W. J. O. Ligowski*, Arch. Math. Phys. 40 (1863), p. 250.

218) *F. W. Bessel*, Neue Berechnungsart f. d. Meth. d. Entfern. des Mondes von andern Himmelskörpern, Astr. Nachr. 10 (1833), p. 17 = *Bessel*, Astron. Untersuch. 2 (Königsberg 1842), p. 266 = *Bessel*, Abhdl. 3, p. 434.

219) *H. C. Schumacher*, Distances of the Sun and the four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the moon calculated according to Mr. *Bessel*'s method, Copenhagen 1834—37.

220) *N. L. de Lacaille*, Paris hist. (2) mém. 1759, p. 63.

mit, *Maskelyne*[221]), *Lyons*[222]), *Lexell*[223]), *Bowditch*[224]) berücksichtigten in einer „3. Korrektion" die vom Quadrat der Parallaxe und Strahlenbrechung abhängigen Glieder. Große Sympathie genießt noch immer die Formel von *Witchell*[225]), für die ein geschmeidiges Rechenschema und einfache geometrische Bedeutung der auftretenden Größen sprechen. Ein dem *Witchell*'schen ähnliches Verfahren entwickelte *J. J. Åstrand*[226]). Mit zwei Gliedern reicht *Legendre*[227]) aus, indem er beweist, daß völlige Strenge bis zum dritten Gliede einschließlich eintritt, wenn er die Winkel an Mond und Gestirn nicht für deren scheinbare Örter, sondern für die Mitte zwischen scheinbaren und wahren (geozentrischen) Örtern berechnet. Auf dieses Verfahren wies auch *Delambre*[228]) hin, und später ist es auf *W. Döllen*'s Anregung von *L. Schwarz*[229]) weiter ausgeführt worden. *Delambre*'s Methode fand u. a. auch einen Vertreter in *C. Rümker*[230]), der eine Hilfstafel für die Delambre'sche Größe *N* entwarf. Unabhängig kam auf analytischem Wege *Airy*[231]) zu einer wesentlich mit der Legendre'schen identischen Methode.

Von englischen Rechnern ging das Unternehmen aus, die gesamte Distanzkorrektion in Zahlen- oder graphische Tafeln zu bringen und so den Seemann jeglicher Rechnung zu entheben. Eine derartige Zahlentafel, gerechnet von *G. Witchell*, *J. Lyons*, *T. Parkinson* und *S. Williams*, gab *Shepherd* 1772 heraus[232]); *Margetts*[233]) veröffentlichte graphische Tafeln erst 1794. Beide Werke fanden keine Verwertung in der Praxis; wohl aber gaben sie die Anregung zu der heute fast allgemein auf See gebräuchlichen kürzesten Methode der

221) *N. Maskelyne,* Lond. Phil. Trans. 1764, p. 271 [abr. 12, p. 152].

222) *J. Lyons,* Tables requisite to be used with the astron. and naut. ephemeris, London 1766, p. 44.

223) *A. J. Lexell,* Petersbg. Acta 1780, II, p. 348.

224) *N. Bowditch,* l. c. pag. 82, (Literatur III).

225) *G. Witchell,* Naut. Alm. for 1772.

226) *J. J. Åstrand,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 39 (1879), p. 425.

227) *A. M. Legendre,* Paris Inst. (math.) mém. 6 (1806), p. 30.

228) *J. B. J. Delambre,* Astronomie théorique et pratique 3, p. 625, Paris 1814.

229) *Ludw. Schwarz,* Über die Reduktion der scheinbaren und wahren Monddistanzen aufeinander, Dorpat 1865.

230) *C. Rümker,* Längenbestimmung durch den Mond, Hamburg 1849; ferner *C. Rümker,* Vorschlag zur genaueren Berechnung der Refraktion bei der Längenbestimmung durch Monddistanzen, Hamburg 1835.

231) *G. B. Airy,* A new method of clearing the lunar distance, London 1881.

232) *A. Shepherd,* Tables for correcting the apparent distance of the moon and a star, Publ. by order of the commissioners of longitude, Cambridge 1772.

233) *G. Margetts,* Longitude tables for correcting the effect of parallax and refraction on the observed distance, London 1794; ähnliche Tafeln edierte *J. W. Norie,* A set of linear tables for corr. the app. distance ..., London 1815.

Monddistanzrechnung, die man mit *Elford*'s Namen zu verbinden pflegt[234]).

Das Wesen dieser *Elford*'schen oder Neger-Methode besteht darin, daß durch eine einfache mit vier Stellen genügend scharf zu führende Rechnung das Hauptglied des Einflusses der Mondparallaxe gewonnen wird, während sich die Korrektion für Refraktion, Sonnenparallaxe und die kleinen Verbesserungen von der zweiten Ordnung der Mondparallaxe in einer mit drei Argumenten geordneten Tafel vorfinden, für die die konstante Annahme einer mittleren Mondparallaxe genügt. Die Argumente sind Distanz, Mond- und Gestirnshöhe; statt dessen unterscheidet man aber wohl auch zwischen größerer und kleinerer Höhe. Eine solche „Tafel des dritten Gliedes" der Elford-Methode enthält jede moderne nautische Tafelsammlung. —

Nachdem die Reduktion der Monddistanz auf das Erdzentrum unter Annahme der Kugelform erledigt ist, muß man noch die Verbesserung wegen Abplattung des Erdkörpers nachträglich anbringen, die in maximo an 15″ heranreicht. Es gibt in der Hauptsache zwei Wege zu deren Berücksichtigung. Der eine, auf den *Delambre*[235]) hinwies, verlangt die genäherte Kenntnis des Mondazimuts und geht durch die Seitenparallaxe des Mondes hindurch. In den nautischen Tafeln und Jahrbüchern werden stets Hilfstafeln, die bei bekanntem Mondazimut jede Rechnung ersparen, mitgeführt. Eine andere bequemere Methode lehrte *Borda*[236]). Das Mondazimut fällt fort und es gehen nur die beiläufigen Deklinationen der Gestirne und ihr Abstand ein. Diesem Verfahren folgten u. a. *Bohnenberger* (Lit. I), *Bessel*[218]), *Airy*[231]), *Chauvenet*[237]); in der nautischen Praxis aber faßte es nie Fuß, trotzdem sich durch eine kleine Tafel mit drei Argumenten (Distanz, Mond- und Sterndeklination) jegliche Rechnung umgehen ließe.

Vor Beginn der ganzen Reduktionsarbeit erfordern die unmittelbar gemessenen Abstände einige Korrektionen. Zunächst beobachtet man keine Mittelpunkts-, sondern Randdistanzen; es ist also der Mondradius und, wenn die Sonne das andere Gestirn, auch der Sonnenradius in Rechnung zu stellen. Beide Halbmesser werden noch von

234) *James M. Elford*, Second edition of longitude tables . . ., Charleston 1818, abgedruckt in *F. X. v. Zach*'s Correspondance astronomique, 6, Genua 1822, p. 209—232. Vgl. *G. D. E. Weyer*, Ann. d. Hydr. 1881/82; *J. F. Encke*, Berl. astr. Jahrb. für 1842, p. 307; *F. X. v. Zach*, Lond. Astr. Soc. Mem. 5 (1833), p. 245.

235) *J. B. J. Delambre*, Astronomie théorique et pratique 3, Paris 1814, p. 636.

236) *J. Ch. de Borda*, Description et usage du cercle de réflexion, Paris 1787; 4ième éd. 1816, p. 82.

237) *W. Chauvenet*, On a new method of correcting lunar distances for parallax and refraction, Astron. Journ. 2 (1852), p. 24.

der Refraktion verzerrt, deren Beträge eigens konstruierten Tabellen, die alle nautischen Tafeln und Ephemeriden bringen, entnommen werden können. Außerdem erscheint uns der lokale Mondradius größer als der auf den Erdmittelpunkt bezogene der Ephemeride; diese parallaktische Vergrößerung erreicht in maximo 18″.[238]) Weiter unterwirft man in Strenge den kürzesten Berührungsabstand von Gestirn und der infolge der Strahlenbrechung nicht genau kreisförmigen Mondscheibe der Beobachtung; nach *Bessel*[218]) ist jedoch der Unterschied verschwindend gering gegenüber der Voraussetzung der gewöhnlichen Rechnung, die die Randpunkte in der Verbindungslinie der Zentren der Gestirne als gemessen annimmt. — Ein Fehler der Messung fälscht im selben Grade die geozentrische Distanz; die absoluten Höhen spielen indes keine große Rolle; viel wichtiger ist die Genauigkeit der Unterschiede der scheinbaren und wahren Höhen.

Zur Erleichterung des Aufsuchens der zur geozentrischen Monddistanz gehörigen Zeit geben die Ephemeriden von 3^h zu 3^h die Distanz des Mondes von der Sonne, hellen Fixsternen oder Planeten an und fügen einen bequemen Interpolationsapparat für erste und zweite Differenzen bei. Derartige Vorausberechnungen erscheinen schon im Nautical Almanac seit seiner Gründung im Jahre 1767 für die neun hellen Fixsterne α Arietis, α Tauri (Aldebaran), β Geminorum (Pollux), α Leonis (Regulus), α Virginis (Spica), α Scorpii (Antares), α Aquilae (Atair), α Piscis austr. (Fomalhaut), α Pegasi (Markab). Im Jahre 1774 folgte die Connaissance des temps, während das Berliner Jahrbuch nur kurze Zeit hindurch, von 1844 bis 1851, eine Monddistanzephemeride führte. Auf den Vorschlag *Lovenörn*'s wurden von 1821 an durch *Schumacher*[239]) besondere Abstandsephemeriden für die Planeten Venus, Mars, Jupiter, Saturn herausgegeben, die nicht lange nachher vom Nautical Almanac und der Connaissance des temps regelmäßig mitgeführt wurden, so daß 1838 *Schumacher*'s Publikation einging. Von den gewählten Fixsternen, die möglichst nahe der scheinbaren Mondbahn hätten liegen sollen, stehen manche sehr ungünstig (α Aquilae, α Piscium, α Pegasi, die 20^0 bis 30^0 von der Ekliptik sich entfernen). So kommt es, daß in extremen Fällen der Faktor, mit dem ein Fehler der Distanz die Länge entstellt, statt des Durchschnittswertes 27 auf 45 ansteigt. Von konstanten Fehlern, wie sie dem Instrument und dem Beobachter zur Last fallen können,

238) Siehe die Tafeln in den nautischen Tafelsammlungen und Ephemeriden.

239) *H. C. Schumacher,* Ephemeris of the distances of the four planets Venus etc. from the Moon for 1822—38, Copenhagen 1820—36.

wird man frei, wenn man zwei Distanzsterne, einen östlich, einen westlich vom Mond nimmt, womöglich in nahe gleichem Abstand.

Auf Forschungsreisen zu Lande tragen Monddistanzen nicht gerade oft zur Längenbestimmung bei. *Carsten Niebuhr*, von *T. Mayer* selbst noch instruiert und ausgerüstet[240]), benutzte sie mit Erfolg auf seiner Reise durch Arabien in den Jahren 1762 bis 1767, und mehr als ein Jahrhundert später maß *W. Jordan*[241]) Monddistanzen für Länge während der *G. Rohlfs*'schen Expedition in die libysche Wüste 1873/74. *Jordan* kommt zu dem Schluß, daß die Monddistanzen zu der am Ende erreichten Genauigkeit wenig beigetragen haben.

Der sinkenden Bedeutung der Monddistanzen für die Nautik gehorchend hat die Connaissance des temps von dem Jahrgang 1905 an die Vorausberechnung der Monddistanzen unterdrückt; 1907 folgte auch der Nautical Almanac. In Zukunft wird daher der Seefahrer, dem eine auf den Mondort gegründete Chronometerkontrolle zur Verfügung stehen muß, zu einer Berechnung übergehen, die ihn die Distanzephemeride verschmerzen läßt und auf die Auswertung der Mondrektaszension hinausläuft.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch ein bemerkenswerter Spezialfall Erwähnung finden, den *C. Rümker*[242]) zuerst beobachtete und *Bessel*[218]) theoretisch bearbeitete. Wenn das Gestirn, dessen Entfernung man mißt, sich dem Untergange zuneigt, der Mond aber sehr hoch steht, so kann es infolge der im selben Sinne wirkenden Ursachen von eigener Bewegung des Mondes und Refraktion des Sternes sich ereignen, daß der scheinbare lokale Abstand langsam bis zu einem flachen Maximum wächst und dann wieder abnimmt. Es ist aber dann eine Längenbestimmung ebenso gut möglich, wie unter normalen Verhältnissen, ja, die Beobachtung eines solchen Maximums allein ergibt ohne Zuziehung der Zeitbestimmung eine Länge. Nähere Diskussion erfuhr die interessante Frage durch *G. D. E. Weyer*[243]).

Da jede Einstellung des Mondrandes durch eigentümliche, von Fall zu Fall schwankende Beugungs- und Irradiationserscheinungen entstellt wird, so ist es empfehlenswert, bei absoluten Längenbestimmungen an Land von hohen Genauigkeitsanforderungen den Stern, statt auf den Rand, auf einen passenden Krater zu pointieren. Dies

240) Resultate seiner Beobachtungen in Monatl. Corr. 4 und 5 (1801—02).

241) *W. Jordan*, Phys. Geographie u. Meteorologie der libyschen Wüste, Cassel 1876; ferner *Jordan*, Grundzüge (Lit. I).

242) *C. Rümker*, Astr. Nachr. 1 (1823), p. 77.

243) *G. D. E. Weyer*, Über das nautische Längenproblem, Ann. d. Hydr. 1890, p. 471.

läßt mit besonderer Schärfe die sehr regelmäßige Wallebene Plato zu, in deren auffallend dunkle Fläche der helle Sternpunkt mit großer Sicherheit eingestellt werden kann, selbst mit den üblichen kleinen Sextantenfernröhrchen.

34. Sternbedeckungen und Sonnenfinsternisse. Eine große Sicherheit in der Bestimmung der Zeit des Nullmeridians eignet einem Spezialfall der Monddistanzen zu, der sich ohne Instrumente beobachten läßt. Es sind das die durch den Mond veranlaßten Okkultationserscheinungen von Fixsternen, Planeten und der Sonne. Wird die östliche Monddistanz immer kleiner und kleiner und schließlich dem scheinbaren Mondradius gleich, so verschwindet der Stern im nächsten Augenblick, da ihn der Mond auf seiner Bahn bedeckt (*Sternbedeckungen*). Ebenso kann der Mond bei Neumond vom Beobachtungsort gesehen mit der Sonne nahe in einer Richtung stehen; wir beobachten dann eine partielle, ringförmige oder totale *Sonnenfinsternis*. An Präzision ist das Phänomen einer Sternbedeckung der Sonnenfinsternis überlegen, insbesondere wenn es sich um das Verschwinden oder Auftauchen eines helleren Sternes am dunklen Mondrand handelt. Am beleuchteten Mondrand muß man zur Erzielung guter Resultate schon große Fernrohre und starke Vergrößerungen zuziehen; andernfalls bringen es Irradiation uud Beugung dahin, daß die Sterne zu früh verschwinden oder zu spät auftauchen. Bei einer Sonnenfinsternis verdient die erste äußere Berührung wenig Zutrauen: der Moment wird stets zu spät notiert. Nicht selten wird von Fällen berichtet, in denen das Verlöschen des Sternes am Mondrand einige Zeit, die sich nach Bruchteilen von Sekunden bemaß, beanspruchte und deren Ursache man auf eine Mondatmosphäre zu schieben geneigt war. Daß der Stern fast immer etwas innerhalb der scheinbaren Mondscheibe verschwindet oder auftaucht, ist eines der einfachsten Beispiele von Irradiation.

Die durch den Mond veranlaßten Okkultationsvorgänge sind nicht, wie die in Nr. **26** behandelten Finsternisse tautochron; ihr Eintritt wechselt wegen der großen Nähe des Mondes rasch von Ort zu Ort. Die an verschiedenen Punkten beobachteten Zeitmomente müssen somit vor ihrer Vergleichung noch auf eine bestimmte Phase der Erscheinung, wie sie im Erdmittelpunkt gesehen wird, reduziert werden, z. B. kann man aus dem notierten Moment mit Hilfe der bekannten, den Ephemeriden zu entnehmenden Elemente die Konjunktionszeit in Länge oder Rektaszension suchen. Man versteht darunter den Augenblick, in welchem für das Erdzentrum beide Himmelskörper gleiche Länge oder Rektaszension besitzen.

Nach Analogie der Monddistanzen bietet sich das folgende Rechnungsverfahren dar, bei dessen Beschreibung man nach Belieben statt Sonne auch Stern oder Planet lesen und unter Pol entweder den Ekliptikalpol oder den Äquatorpol sich denken darf. Aus dem sphärischen Dreieck Pol-Mond-Sonne, dessen Seiten bekannt, leite man den Winkel am Pol, i. e. den lokalen scheinbaren Längen- oder Rektaszensionsunterschied ab und reduziere ihn mit Hilfe der parallaktischen Verschiebung auf den Erdmittelpunkt. Da weiter die relative Geschwindigkeit in Länge oder Rektaszension beider Himmelskörper gegeben, so vermag man aus der Koordinatendifferenz im Beobachtungsaugenblick den Moment der gesuchten Konjunktionszeit abzuleiten, die dann zur Längenbestimmung entweder mit der in der Ephemeride angegebenen Konjunktionszeit des Nullmeridians oder besser mit der in analoger Weise gefundenen Konjunktionszeit eines anderen Ortes verglichen wird. Fehler der Mondtafeln üben im letzteren Falle nur einen unerheblichen Einfluß aus, und wenn man gleichartige Phasen, z. B. nur Eintritte oder Austritte kombiniert, so gehen auch Fehler in den Gestirnsradien nicht merklich in das Ergebnis ein. — Ebenfalls sehr einfach ist das im Anschluß an *H. Raper* von *J. A. C. Oudemans*[245]) eingeschlagene Verfahren. Aus der Rektaszension des Sternes sucht er die Rektaszension des Mondes und mit dieser in der Ephemeride die entsprechende Greenwich-Zeit.

Der erste, der ein korrektes Verfahren zur Berechnung einer Okkultationserscheinung besaß, war *Kepler*[246]), der mit Hilfe der Sonnenfinsternis vom 7. März 1598 die Längendifferenz zwischen Graz und Uranienborg abzuleiten sich bemühte. Als Vorläufer erscheinen die von *Chr. Columbus, A. Vespucci, A. Pigafetta, A. San Martino* kultivierten Konjunktionen des Mondes und der Planeten[247]). Später wurde die Aufgabe von vielen Astronomen aufgegriffen, u. a. von *Ch. Wren*[248]), *Flamsteed*[249]), *Lacaille*[250]), *J. Cassini*[251]), *Cagnoli*[252]), *Lambert*[253]),

245) *J. A. C. Oudemans,* Astr. Nachr. 74 (1869), p. 168.

246) *J. Kepler,* Ad Vitellionem paralipomena, Astronomiae pars optica, Caput 11, probl. 27, p. 392, Francofurti 1604 = Opera, ed. *Ch. Frisch,* 2, Francof. 1859, p. 372.

247) Vgl. l. c. Fußn. 343), Ex. crit. IV, p. 183 = Krit. Unt. 2, p. 415.

248) *Ch. Wren,* geb. 1632, gest. 1723, hat selbst nichts bekannt gemacht, doch berichtet *J. Flamsteed* darüber. Siehe auch *Wolf,* Handb. 2, p. 292.

249) *J. Flamsteed,* The doctrine of the sphere, London 1680 (in *J. Moore,* New system of mathematics, London 1680—81).

250) *N. L. de Lacaille,* Calcul des projections, Paris hist. (2) mém. 1744, p. 191.

251) *J. Cassini* (le fils), Méth. de déterm. les longit., Paris hist. (2) mém. 1705, p. 194.

Lalande[254]), *Euler*[255]), *Lagrange*[256]), indes gewann erst *Bessel*[257]) der Sache eine neue Seite ab. Eine weitere unabhängige Bearbeitung erfuhr das Problem durch *P. A. Hansen*[258]), der insbesondere der Darstellung der Sichtbarkeitsverhältnisse auf der Erde seine Aufmerksamkeit zuwandte. Vereinfachungen der *Bessel*'schen Formeln für Sternbedeckungen fanden *A. R. Clarke*[259]), *Klinkerfues*[260]) und *F. Küstner*[261]). — Fehler in *Gauß*' Entwickelungen glaubt *N. Garbich* gefunden zu haben[262]).

Die *Bessel*'schen Formeln verwertet man heute allgemein zur Berechnung und Vorausberechnung von Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen. Eine leichtverständliche Anleitung dazu schrieb *Encke*[263]), der sich wesentlich auf *Bessel*'s Arbeit stützt. *H. Battermann*[264]) gab bequeme Tafeln der Mondparallaxe für Berlin heraus, die auch leicht einen Übergang auf andere Breiten gestatten. *G. Bigourdan*[265]) erstrebte dasselbe Ziel auf umständlicherem Wege. Eine Sonnenfinsternis graphisch vollständig zu berechnen und ihre Sichtbarkeitsverhältnisse auf der Erde übersichtlich darzustellen, lehrte *Cayley*[266]). *Temple Chevallier*[267]) betrachtete den Einfluß, den die Differenz der Parallaxen

252) *A. Cagnoli,* Méthode pour calculer les longit. géogr., Vérone 1789.

253) *J. H. Lambert,* Berl. astr. Jahrb. für 1778, p. 49.

254) *J. J. Lalande,* Nouvelle méthode pour calculer rigoureusement les éclipses de soleil, Paris hist. (2) mém. 1763, p. 426.

255) *L. Euler,* De eclipsibus solaribus, Petersbg. Acta 1780, II, p. 308.

256) *J. L. Lagrange,* Berl. astr. Jahrb. für 1782 = Oeuvres 7, p. 415.

257) und 258) Vgl. die p. 82 (Lit. II) zitierten Monographieen.

259) *A. R. Clarke,* Lond. Astr. Soc. Mem. 27 (1859), p. 97.

260) *W. Klinkerfues* in *H. W. T. Seeling*, Berechnung der Tafelfehler des Mondes aus der Plejadenbedeckung von 1858 Febr. 20, Astr. Nachr. 52 (1860) p. 289 ff.

261) *F. Küstner,* Bestimmungen des Monddurchmessers aus neun Plejadenbedeckungen, Nova Acta, Abhdl. d. Leopold.-Carolin. Akad. der Naturforscher 41 (Halle 1879), auch als Diss. Straßburg, 1879 (Halle 1880); weitere Literatur: *J. A. Grunert,* Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen, Wien Denkschr. 8 (1854), 1. Abt., p. 133; *L. J. Gruey,* Les formules écliptiques de Hansen simplifiées, Paris Bull. astr. 9 (1892), p. 233, 286; *C. Rümker,* Über die Berechnung der Sonnenfinsternisse, Hamburg 1837; *R. Schram,* Beitrag zur Hansen'schen Theorie der Finsternisse, Wien Ber. 92 (1885).

262) *N. Garbich,* Analytische Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse sowie aller andern Occultationen, Triest 1871.

263) *J. F. Encke,* Berl. astr. Jahrb. für 1830, Berlin 1828, p. 253.

264) *H. Battermann,* Astr. Nachr. 144 (1897), p. 1.

265) *G. Bigourdan,* Obs. de Paris ann. (mém.) 23 (1902) E.

266) *A. Cayley,* Lond. Astr. Soc. Mem. 39 (1871), p. 1.

267) *Temple Chevallier,* Lond. Astr. Soc. Mem. 19 (1851), p. 231.

auf die Zeiten des Aus- und Eintritts bedeckter Sterne ausübt. Weitere Abkürzung des Rechnungsverfahrens strebte *C. Stechert*[268]) an, der sowohl die Vorausberechnung derartiger Phänomene als auch die Längenberechnung durch umfangreiche Tafeln unterstützt. Insbesondere soll auf diese Weise die Ausnutzung der Okkultationsphänomene zur See und an den in Länge schlecht bestimmten Hafenplätzen, vor allem in der Südsee, in die Wege geleitet werden. Kurz zuvor hatte *L. Cruls*[269]) ausgedehnte Tafeln publiziert, denen ebenfalls *Bessel*'s Gedanke zugrunde lag; einen Teil der Rechnung läßt *Cruls* graphisch ausführen. Rein graphisch ist eine von *W. Rigge*[270]) vorgeschlagene Methode. Mit besonderer Berücksichtigung der nautischen Verwertbarkeit bearbeitete *C. Berry*[271]) eine Theorie der Okkultationen. — Den bei Berechnungen von Sonnenfinsternissen anzuwendenden Mondradius revidierte *J. Peters*[272]) und fand ihn 1″.4 kleiner als den aus Sternbedeckungen gefolgerten.

Die Bedeutung der Sternbedeckungen und Sonnenfinsternisse war noch in dem ersten Drittel des 19. Jahrhunderts für die Zwecke der Längenbestimmung eine sehr hohe; vornehmlich *Wurm* und *Triesnecker*[273]) bearbeiteten in jener Zeit alle ihnen bekannt gewordenen Beobachtungen und leiteten daraus Längendifferenzen der Hauptorte der Erdoberfläche ab. Heutzutage liegt die Bedeutung jener Erscheinungen auf wesentlich anderem Gebiete: Sternbedeckungen liefern Beiträge zur Kenntnis der Mondbahn, des Mondradius und der Mond- und Sonnenparallaxe[274]), und Sonnenfinsternisse fördern die Physik der Sonnenatmosphäre.

Während eine Sternbedeckung nur zwei Phasen, Ein- und Austritt, liefert, läßt sich bei Sonnenfinsternissen der ganze Verlauf des

---

268) *C. Stechert,* Tafeln f. d. Vorausberechn. d. Sternbedeckungen, Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, 19. Jahrg., Nr. 3, Hamburg 1896; *C. Stechert,* Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse u. ihre Verwertung zur Längenbest., Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, 22. Jahrg., Nr. 1, Hamburg 1899.

269) *L. Cruls,* Méthode graphique pour la détermination des heures approchées des éclipses du soleil et des occultations, Rio de Janeiro 1894.

270) *W. Rigge,* Astr. Nachr. 158 (1902), p. 274.

271) *C. Berry,* Théorie complète des occultations, Paris 1880.

272) *J. Peters,* Berl. Rechen-Inst. Veröff. Nr. 20 (1902), p. 135.

273) Zahlreiche Reduktionen teilten *J. F. Wurm* und *F. Triesnecker* in Monatl. Corr., den Astr. Nachr. und den Allgemeinen geographischen Ephemeriden (hrsg. von *F. X. von Zach* u. a., Weimar 1798—1816) mit. Siehe ferner *J. F. Wurm,* Praktische Anleitung zur Parallaxen-Rechnung, Tübingen 1804.

274) Siehe z. B. *H. Battermann,* Best. der Mondlänge, des Mondhalbmessers und der Sonnenparallaxe aus Sternbedeckungen, Berlin Sternw. Ergebn. 11 (1902).

Eindringens der schwarzen Mondscheibe in die Sonnenscheibe verfolgen und daher eine große Anzahl von Daten zur Ableitung der Konjunktionszeit festlegen. Vorteilhaft ist es, während der Sonnenfinsternis die Distanzen der Hörnerspitzen mit einem Doppelbildmikrometer (Heliometer) zu messen; *Hansen*[258]) hat die Rechnungsvorschriften für diese Methode entwickelt. Minder empfiehlt es sich, mit dem Refraktor die Rektaszensions- und Deklinationsunterschiede der Hörnerspitzen zu bestimmen; die Bearbeitung kompliziert sich erheblich und an Sicherheit wird gewiß nichts gewonnen.

Die Genauigkeit der aus einer Okkultation abgeleiteten Länge entspricht nicht der Schärfe, mit der man das plötzliche Verschwinden und Auftauchen aufzufassen imstande ist. Die Ursache liegt in den Unebenheiten des Mondrandes, den Berge und Täler recht rauh erscheinen lassen. Vereinzelte Randgebirge ragen bis zu 4″ über den normalen kreisförmigen Verlauf des Randes hervor; die hieraus fließende Fälschung der Länge würde 8^s betragen. Die Erfahrung lehrt, daß einer Sternbedeckung ein mittlerer Fehler von durchschnittlich $\pm 2^s2$ anhaftet[275]).

35. Verwandte Okkultationsphänomene. Der Theorie für die durch den Mond veranlaßten Okkultationsphänomene folgen eine Anzahl verwandter Erscheinungen, deren Verwertung zur Längenbestimmung zwar möglich, aber nicht zweckmäßig wäre. Eine sehr reiche Literatur haben die *Vorübergänge der Venus* vor der Sonnenscheibe wachgerufen, durch deren Beobachtung man fast zwei Jahrhunderte lang glaubte, den besten Wert für die Sonnenparallaxe erlangen zu können. Für die Theorie des sonnennächsten Planeten *Merkur* sind dessen Vorübergänge, die weit häufiger sich ereignen (etwa 13mal im Jahrhundert) als jene der Venus, von großer Bedeutung geworden. Teils nach *Encke*'s, teils nach *Hansen*'s Vorgang hat *K. Friesach*[276]) eine elementare Theorie der Planetenvorübergänge dargestellt. Geometrisch anschaulich (mit Hilfe von Figuren) will *L. Weinek*[277]) den von *Lagrange* betretenen, von *Encke* ausgebauten Weg klar legen. Nicht nur der langsamen scheinbaren Bewegung beider Planeten

275) Vgl. *A. Auwers,* Bestimmung eines absoluten Meridians für Australien durch absolute Methoden, Astr. Nachr. 110 (1884), p. 289, und *J. Peters,* Astr. Nachr. 138 (1895), p. 113.

276) *K. Friesach,* Theorie der Planetenvorübergänge, Leipzig 1874.

277) *L. Weinek,* Zur Theorie der Planetenvorübergänge, Wien Ber. 112 (1904), p. 1752; *J. L. Lagrange,* Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769, Berl. hist. 1766, p. 265 = Oeuvres 2, p. 335; *J. F. Encke,* Vorausberechnung der Planetenvorübergänge, Berl. astr. Jahrb. für 1842, Berlin 1840.

halber, sondern auch wegen eigentümlicher, zum Teil physiologischer Vorgänge lassen sich die vier Kontakte der schwarzen Planetenscheibe mit der Sonnenscheibe nicht sicher auffassen, so daß die daraus gefolgerte Länge des Beobachtungsortes auf große Genauigkeit keinen Anspruch zu erheben vermöchte.

Mannigfaltige Phänomene bietet das *Jupitersystem* in seinen vier hellen Monden dar. Abgesehen von den schon in Nr. **26** besprochenen Finsternissen werden die Trabanten auf ihrem Laufe um den Hauptplaneten bald vor demselben vorübergehen, bald hinter ihm verschwinden und in den Kontakten wieder Hilfsmittel zur Längenbestimmung gewähren. Diese Momente sind indes ob der Helligkeit des Jupiter selbst in großen Refraktoren nicht mit Präzision wahrzunehmen und zur Längenbestimmung somit unbrauchbar.

Ähnliches gilt von den seltenen *Sternbedeckungen durch Planeten.* Die Langsamkeit der scheinbaren Bewegung der Planeten, ihre Helligkeit und ihre mehr oder minder dichte Atmosphäre bewirkt es, daß das Verschwinden und Auftauchen der Sterne ein allmähliches zu sein scheint. Derartige Phänomene tragen vor allen Dingen bei zum Studium der Physik der Atmosphäre des die Bedeckung verursachenden Planeten[278]). Eine allgemeine analytische Bearbeitung der Bedeckungen von Fixsternen durch Planeten führte *A. F. Moebius*[279]) durch.

IV. Azimutbestimmung.

36. Allgemeiner Weg. Die Aufgabe der Azimutbestimmung kommt in erster Linie der Geodäsie zugute, z. B. zur Orientierung einer ausgedehnten Dreieckskette gegen den Meridian.

Man darf ganz allgemein sagen, daß alle Methoden, die zur Polhöhenbestimmung angewandt werden, mit leichten Modifikationen auch zur Azimutbestimmung dienen können. Ebenso gut wie man nämlich aus den sphärischen Dreiecken den Winkel am Pol (Stundenwinkel) zur Zeitbestimmung oder die Seite Pol-Zenit (Komplement der Breite) zur Polhöhenbestimmung ableitet, kann man auch den Winkel am Zenit, das Azimut eines der beobachteten Gestirne berechnen. Legt man dann noch die am Horizontalkreis des Universals gemessene Azimutaldifferenz des Sternes und eines terrestrischen Signals („Mire") zum Sternazimut hinzu, so gewinnt man das Azimut des Signals. Eine weitere Bedeutung gewinnt die Azimutbestimmung in fernen Ländern beim Ausmessen einer langen Basis für topographische Auf-

278) Vgl. u. a. *A. Pannekoek,* Astr. Nachr. 164 (1904), p. 6.

279) *A. F. Moebius,* l. c. p. 82 (Lit. II) = Werke, 4, p. 343.

nahmen: auf astronomischem Wege ermittelt man die Polhöhen der Basisendpunkte und ihr gegenseitiges Azimut und berechnet daraus auf Grund der bekannten Erddimensionen die Länge der Basis in Kilometern.

Unter den vielen möglichen Wegen zur Azimutbestimmung seien jene skizziert, die bei geodätischen Operationen größeren Stiles bevorzugt werden.

37. Spezielle Methoden. Kann man die Mire so nahe am Meridian errichten, daß sie im Gesichtsfeld des Passagenrohres erscheint, so wird man ihr Azimut *durch eine Zeitbestimmung im Meridian* (siehe Nr. 8), die zunächst das Azimut der Absehenslinie festlegt, erhalten, indem man mit einem Mikrometer den Winkelabstand des Signals vom Mittelfaden des Fadennetzes ermittelt. Etwas weitere Grenzen für die Lage der Mire eröffnen sich im Vertikal des Polarsterns (siehe Nr. 9).

Eine andere, bei beliebiger Stellung des Signals anwendbare Methode geht von der *Beobachtung des Polarsternes* aus. Man stellt wechselweise Mire und Stern ein und erhält mit dem aus der Ortszeit zu berechnenden Polarisazimut und dem gemessenen Azimutunterschied das Azimut der Mire. Die Azimutberechnung für den Polarstern erleichtern Hilfstafeln, wie sie u. a. *Valentiner*[280]) und *Albrecht*[65]) gegeben haben. Ein Fehler in der Zeit entstellt das Azimut am meisten, wenn der Stern im Meridian sich befindet, und ein Fehler in der Deklination wirkt am stärksten in den Digressionen. Die besten Resultate erzielt man, wenn man, wie dies schon Landgraf *Wilhelm von Kassel*[281]) und *G. D. Cassini*[282]) taten, die *beiden* Digressionen beobachtet; unabhängig von Sternort und Zeit ergibt hier das Mittel der Ablesungen des Horizontalkreises den Nordpunkt des Kreises. Bei Sternen niederer Deklinationen vertreten die Stelle der Digressionen vorteilhaft die korrespondierenden Höhen, deren Azimutmittel den Südpunkt des Horizontalkreises darstellt. Aus drei Höhen und den Azimutunterschieden das Azimut zu bestimmen, lehrt eingehend *Mollweide*[283]).

280) *W. Valentiner,* Beiträge zur kürzesten u. zweckmäßigsten Behandlung geogr. Ortsbest., Leipzig 1869; ferner *E. Block,* Hilfstafeln zur Berechnung der Polarisazimute, Petersburg 1875.

281) Vgl. *R. Wolf* in: Astronomische Mittheilungen von *Rudolf Wolf*, Nr. 45, Zürich 1878, p. 142. Abdruck aus: Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 22. Jahrg., Zürich 1877, p. 370.

282) Während der frz. Gradmessung (1683—1718); vgl. *J. Cassini,* Traité de la grandeur et de la figure de la terre, Paris 1720.

283) *K. B. Mollweide,* Monatl. Corr. 28 (1813), p. 419.

In Ermangelung eines fest aufstellbaren Universals kann das Azimut durch *Distanzmessung an einem Reflexionsinstrument* eruiert werden. Die scheinbare Höhe des Signals ist hierbei unerläßlich; ebenso muß die Zeit genau bekannt sein. Dann vervollständigt der Abstand der Mire von einem Gestirn — zumeist ist das wohl die Sonne — das sphärische Dreieck Signal-Zenit-Sonne, dessen drei Seiten gegeben, und man berechnet nun daraus den Winkel am Zenit, i. e. die Azimutdifferenz zwischen Sonne und Signal. Soll ein Fehler in der Zeit keinen großen Einfluß ausüben, so darf die Sonnenhöhe etwa 10^0 nicht erheblich übersteigen. Dieser Art der Azimutbestimmung hat *v. Zach*[284]) eine eingehende Darstellung gewidmet.

V. Nautische Astronomie.

38. Die Kimm und ihr Verhalten. Die nautische Astronomie hat zur einzigen Aufgabe die Ermittelung des Schiffsortes nach Länge und Breite durch astronomische Beobachtungen; als Durchgangsstadien zur Verwertung des Kompasses und von Lotungen gehen noch die Bestimmung der Zeit und des Azimuts ein. Da die Benutzung fest aufstellbarer Apparate an Bord des schwankenden Schiffes ein Ding der Unmöglichkeit ist, kommen nur Reflexionsinstrumente in Betracht, unter denen fast einzig der Spiegelsextant in praxi zur Anwendung gelangt. Die Gründe mag man vor allen Dingen in der historischen Gewöhnung suchen. Die Kriegsmarine beobachtet bisweilen auch mit dem Spiegelprismenkreis, vor allem zur Festlegung von Küstenplätzen.

Gelegentlich der Behandlung der Methoden der Ortsbestimmung wurde stets auf die Bedeutung der betreffenden Aufgabe für die Nautik hingewiesen; es erübrigt hier, einige Eigentümlichkeiten nautischer Messungen, die daraus fließenden Fehlerquellen und die Bestrebungen zu ihrer Hebung zu erwähnen, und endlich eine Betrachtungsweise des Problems der Ortsbestimmung darzustellen, die heute unter der jüngeren Generation allgemeine Einführung gefunden hat und unter dem Namen „Moderne Navigation“ begriffen wird. Für den Gebrauch zur See fallen alle jene Methoden der Ortsbestimmung aus, die sich auf Azimutmessungen gründen. Denn mit hinlänglicher Genauigkeit können an Bord nur Höhen, und zwar Höhen über der Kimmlinie (Kimmabstände) gemessen werden.

---

284) *F. X. v. Zach,* Berl. astr. Jahrb. für 1793, p. 167; ferner *J. F. van Beeck-Calkoen,* Berl. astr. Jahrb. für 1814, Berlin 1811, p. 99.

Hier tritt schon gleich eine Schwierigkeit auf. Die Kimm bedeutet auf See das, was zu Lande die Libelle oder der Quecksilberhorizont leistet; sie errichtet die Lotlinie und definiert das Zenit des Beobachtungsortes. Das über der Meeresfläche, auf der Kommandobrücke oder an einem sonst geeigneten Platze des Schiffes befindliche Auge sieht die Kimm um die Kimmtiefe unter den scheinbaren Horizont, von dem an die Höhen zählen, herabgedrückt. Unter *Kimmtiefe* wird der Winkel verstanden, den die vom Auge an den Seespiegel gezogene Tangente mit der Horizontalen einschließt; man kann sie auch definieren als das Komplement des scheinbaren Radius der Erdkugel vom beobachtenden Auge aus gesehen. Wäre die Erde streng kugelförmig und keine Atmosphäre vorhanden, so ließe sich die Kimmtiefe trigonometrisch aus dem ebenen Dreieck: Erdzentrum-Auge-Berührungspunkt des Sehstrahls genau ermitteln. Da die an Bord unserer Schiffe vorkommenden Augeshöhen in maximo nicht an 20 m heranreichen, so ist die aus der ellipsoidischen Erdfigur folgende Ungleichförmigkeit der Kimmtiefe verschwindend gering[285]).

Anders stellen sich die Verhältnisse bei den durch die Refraktion hervorgerufenen Störungen. Aus geodätischen Messungen der Zenitdistanzen irdischer Objekte war der Einfluß der terrestrischen Refraction durch *Picard*[286]) bekannt geworden. Die Kimm mußte ihrem Einfluß in ähnlicher Weise unterworfen sein, und man nimmt darauf Rücksicht, indem man die rein geometrische Kimmtiefe um ihren 13ten Teil verringert und diesen aus Tafeln zu entnehmenden Wert dann an die erhaltenen Kimmabstände negativ anbringt. Die Arbeiten von *Gauß*[287]), *Sabler*[288]), *Hartl*[289]), *Bauernfeind*[290]) unterwarfen die variabelen Verhältnisse der terrestrischen Refraktion, wie sie bei geodätischen Operationen eingeht, genauerer Diskussion, die auch der gleichen Gesetzen gehorchenden Kimmtiefe zugute kam. Aus-

285) Siehe *C. W. Wirtz,* Marine-Rundschau 12, Berlin 1901, p. 837.

286) *J. Picard* im Jahre 1669 gelegentlich der Messung von Depressionswinkeln zwischen Montlehéry und Mareuil; vgl. *J. Picard,* la mesure de la terre, Paris 1671.

287) *C. F. Gauß,* Berl. astr. Jahrb. für 1826, p. 89 = Werke 9 (1903), p. 437.

288) *G. Sabler,* Höhenunterschied zwischen dem Schwarzen und Kaspischen Meer, hrsg. von *W. Struve,* St. Petersburg 1849; und *G. Sabler,* Beobachtungen über die irdische Strahlenbrechung, Diss. Dorpat 1839.

289) *H. Hartl,* Zts. der österr. Gesellschaft für Meteorologie 16, Wien 1881, p. 129, und Mitt. d. k. k. militär.-geograph. Instit. in Wien, 3, Wien 1883.

290) *C. M. Bauernfeind,* Die terrestrische Refraktion und ihr Einfluß auf trigonometrische Höhenmessungen, München 1866; Ergebnisse aus Beobacht. d. terrestr. Refrakt., Münch. Abh. 13, 3. Abt. (1880), p. 179.

gedehntere Beobachtungsreihen über die Kimmtiefe rühren her von *Lingg*[291]) am Starnberger See, *E. Kayser*[292]) an der Ostsee bei Danzig, *Forel*[293]) am Genfer See und von dem französischen Schiff „*La Galissonnière*“[294]) 1884 im Roten Meer nnd Indischen Ozean. Einen Abschluß fanden die Untersuchungen in dieser Richtung durch die Beobachtungen, die *K. Koß* und *E. v. Thun-Hohenstein*[295]), Offiziere der österreichischen Kriegsmarine, teils im Roten Meer, teils durch Messungen an Land, vom Fort Verudella bei Pola aus unternahmen. Nicht nur, daß die Kimm Verschiebungen von ihrer mittleren Lage bis zu fast 10′ erleidet, sie ist auch nicht gleichförmig in allen Azimuten. Sie ändert sich mit dem Unterschied zwischen Luft- und Wassertemperatur, ohne daß Luftdruck, Feuchtigkeit und Bewölkung nachweisbar darauf einwirkten. Das regelloseste Verhalten tritt bei Windstille oder ganz schwachen Winden ein, während eine die Luft gut durchmischende Brise von der Stärke 2 bis 3 eine leidlich gleichförmige Kimmtiefe um den Horizont herum konstatieren ließ. *Koß* spricht einen Teil seiner Ergebnisse in dem Satz aus, daß für dieselbe Augeshöhe die Hebung oder Senkung der Kimm über die geodätische Kimm eine lineare Funktion des Unterschieds zwischen Luft- und Wassertemperatur ist und gibt seiner Abhandlung zwei Kimmtiefentafeln bei, die beide zu Argumenten Augeshöhe und Differenz der Luft- und Wasserwärme haben; die eine gilt bei lebhafter Brise, die andere bei Windstille. Theoretische Durcharbeitung erfuhren die österreichischen Kimmtiefenbeobachtungen durch *E. Kohlschütter*[296]), der u. a. die Aufmerksamkeit auf die Gestalt der Bahn der von der Kimm ins Auge dringenden Lichtstrahlen lenkt und die Unzulänglichkeit der Annahme einer Kreisbogenbahn aufdeckt.

---

291) *F. Lingg*, Über die bei Kimmbeobachtungen am Starnberger See wahrgenommenen Refraktionserscheinungen, Nova Acta, Abhandl. der Leopoldinisch-Carolinischen Akad. der Naturforscher, 55, Halle 1891, p. 1—95.

292) *Ernst Kayser,* Beob. der Refraktion des Seehorizontes und Leuchtturms von Hela, Danzig Naturf. Ges. Schriften N. F. 4, Heft 2, Danzig 1877.

293) Vgl. *J. B. Messerschmitt,* Resultate neuerer Kimmtiefenbeobachtungen, Ann. d. Hydr. 1901, p. 162.

294) Siehe l. c. Fußn. 293); ferner bemerkenswert *Alois Walter,* Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung, Leipzig 1898.

295) *K. Koß* und *Graf Thun-Hohenstein,* Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella, Wien Denkschr. 70 (1901), p. 347. Ferner: *K. Koß,* Nächtliche Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella, Veröff. d. Hydrographischen Amtes in Pola, Nr. 18, Pola 1904.

296) *E. Kohlschütter,* Folgerungen aus den *Koß*'schen Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella, Ann. d. Hydr. 1903, p. 533.

39. Instrumente zur Bestimmung und Elimination der Kimmtiefe. Die dargelegte Unsicherheit der Kimm einerseits und andererseits ihre schwierige Sichtbarkeit bei Nacht und düsigem Wetter lassen die Bestrebungen begreiflich erscheinen, sich durch geeignete Instrumente von ihr ganz unabhängig zu machen. Einige andere Apparate gehen nur darauf aus, ein Mittel zu ihrer Bestimmung bei jeder Beobachtung an die Hand zu geben und so ihre Anomalien von Fall zu Fall zu eliminieren.

Die Idee, die Einstellung auf die Kimm entbehrlich zu machen, hatte schon *Hadley*[297]), der Erfinder des Spiegelsextanten; er wollte mit einem gewöhnlichen Höhenquadranten eine Libelle verbinden, die von einem Gehilfen hätte abgelesen werden müssen. Später brachte man die Libelle so an, daß der Beobachter selbst sich über ihren Stand zu vergewissern vermochte. Ein solches Instrument liegt in dem *Butenschön*'schen[298]) Libellenquadranten vor, bei welchem die Blase der Libelle zugleich mit dem Fadenkreuz und dem in Höhe zu messenden Gestirn im Feld des Quadrantenfernrohrs erscheint.

Einen ganz anderen Weg schlug *Fleuriais*[299]) mit seinem Gyroskopkollimator ein; hier wird die Horizontale mit Hilfe eines schnell rotierenden Kreisels, auf dem zwei Kollimatorlinsen angebracht sind, hergestellt. *E. Gelcich*[300]) hat indes mit einem solchen Apparat wenig ermutigende Erfahrungen gemacht; von erfolgreichen Anwendungen auch des Butenschön'schen Libellenoktanten auf See ist noch nichts bekannt geworden.

Nach wie vor ist man vielmehr auf die Beobachtung über der Kimm angewiesen und hat deshalb einmal durch lichthelle Fernrohre diese des Nachts besser wahrnehmbar gemacht, andererseits durch verschiedene Mittel die Einstellung eines Sternes auf die Kimmlinie genauer gestaltet, entweder indem man nach *Fleuriais'* Vorgang zwischen beiden Sextantenspiegeln ein das Sternbild verdoppelndes Prisma einschaltete und die Kimm zwischen beide Bildchen brachte, oder indem man mit *Laurent*[301]) den Stern zu einer kurzen Lichtlinie auszog[302]).

297) *J. Hadley,* A spirit level to be fixed to a quadrant, Lond. Phil. Trans. 1733, p. 167 [abr. 7, p. 620].

298) *G. Butenschön,* Deutsches Reichspatent Nr. 76668; Zts. f. Instrumentenkunde 15 (1895), p. 152 und 17 (1897), p. 186.

299) *G. E. Fleuriais,* Paris C. R. 103 (1886), p. 1305. Genaue Beschreibung und Theorie eines verbesserten Fleuriais'schen Sextanten gibt *M. E. J. Gheury* in Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 64 (1904), p. 768.

300) *E. Gelcich,* Hansa, Deutsche Nautische Zts., 38 (Hamburg 1901), p. 125.

301) *Laurent*, Kapitän der „Impératrice-Eugénie", vgl. Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences (hrsg. v. *F. Moigno*), 8 (Paris 1865), p. 612.

Auf ein originelles Verfahren zur Elimination der Kimm verfällt *C. Decante*[303]). Er projiziert mittels eines dritten beweglichen, dem Sextanten neu beigefügten Spiegels die Zenitdistanz eines ersten Sterns auf die eines zweiten und mißt die Differenz der Zenitdistanz des zweiten Sterns und des Projektionspunktes des ersten Sterns. Um die verlangte Vertikalhaltung des Instrumentes zu erzielen, zählt er drei Methoden auf, die aber in praxi alle gleich schwer gangbar sind und in jedem Falle den Sextanten sehr belasten und seine Handhabung ungemein erschweren.

Die Kimmtiefe für jede Höhenbeobachtung eigens zu messen wäre eine andere Art, sich ihrer Anomalien zu entledigen. Mit einem gewöhnlichen Sextanten läßt sich dies schon dann erreichen, wenn das Gestirn eine 50° übersteigende Höhe besitzt. Dann mißt man seinen Abstand über beiden diametral gegenüberliegenden Kimmpunkten und erhält in dem halben Überschuß der Summe beider Abstände über 180° die Kimmtiefe. Mit den Prismenkreisen verschiedener Konstruktion können zwei entgegengesetzte Partien der Kimm direkt zur Deckung gebracht und so die Kimmtiefen bestimmt werden. Ein speziell diesem Zweck gewidmetes Instrument konstruierte *W. H. Wollaston* 1817 in seinem Dipsektor[304]), von dem man indes neuerlich nichts mehr hört. Recht kompliziert fiel das von *E. Kayser*[305]) konstruierte Depressionsmikrometer aus, dessen Messungsbereich 2° beträgt und das wesentlich aus einem abwärts oder aufwärts zu richtenden Fernrohr und zwei daran angebrachten rechtwinkligen Prismen besteht. Vermittelst eines leicht am Sextanten anzubringenden Doppelprismas vereinigt *E. Kohlschütter*[296]) die Bilder zweier im Azimut um 180° verschiedener Kimmpunkte im Feld des Fernrohrs und gibt eine konstruktive Möglichkeit an, die Kimm dadurch zu eliminieren, daß man nach dem Vorgange *T. Ferguson*'s[306]) auch das Supplement der Höhe eines Gestirnes mitmißt. Diesem Doppelprisma zieht jedoch *Kohlschütter* selbst ein von *J. B. Blish* erfundenes Kimmprisma[307]) vor, welches die Summe der Kimmtiefen vor und hinter

302) Vgl. *Reichs-Marine-Amt,* Navig. 2, p. 79.

303) *C. Decante,* Position du navire quand l'horizon n'est pas visible, Revue maritime, 147 (Paris 1900), p. 491.

304) Über den *Dipsektor* vgl. *Gehler*'s physikal. Wörterbuch, 2. Aufl., 2, Leipzig 1826, p. 558.

305) *E. Kayser,* Das Depressionsmikrometer, Danzig Naturf. Ges. Schriften, N. F. 1, Heft 2, Danzig 1864.

306) *T. Ferguson,* De Zee (Tijdschrift) 1895, Rotterdam 1895.

307) Siehe *E. Kohlschütter,* Ann. d. Hydr. 1904, p. 84; Mittheilungen aus dem Gebiet des Seewesens 32 (1904), Nr. VII, Pola und Wien 1904.

dem Beobachter ergibt. Der neue Apparat für die Kimmtiefe von *C. Pulfrich*[308]) besteht im wesentlichen aus einem Winkelspiegel, und die Messung geschieht entweder mittels einer im Gesichtsfeld des zugehörigen Fernrohrs angebrachten Skale oder einer den einen Spiegel bewegenden Mikrometerschraube. Alle diese Verfahren machen die stillschweigende Voraussetzung, daß die Kimmtiefe um den ganzen Horizont herum gleich sei, und das ist durchaus nicht immer der Fall.

40. Begriff der Standlinie und ihre Festlegung. Lange Zeit hindurch haben die Seeleute den Rang astronomischer Messungen der Gestirne auf See ähnlich eingeschätzt wie zu Lande: eine Höhe am Meridian diente zur Bestimmung der Breite, eine solche beim Ersten Vertikal für die Ortszeit und Länge. Vereinzelte Höhen in mittleren Azimuten verstand man nicht auszunutzen. Erst dira necessitas brachte durch Zufall den amerikanischen Kapitän *Sumner*[309]) bei der Einsegelung in den St. Georgskanal auf einer Reise von Nordamerika nach Greenock auf die Möglichkeit, jede beliebige Gestirnshöhe zu einem geometrischen Ort für die Position des Schiffes, zu einer *Standlinie*, zu verwerten. Durch ein an Bord mitgeführtes Chronometer *muß die zugehörige Greenwichzeit bekannt sein* (Nr. 29). Seit jenem 17. Dezember 1837, der *Sumner* auf die Standlinie und ihre allgemeine nautische Bedeutung führte, hat sich um den einfachen Gedanken eine große Literatur gerankt, die noch von Tag zu Tag anwächst.

Die Zenitdistanz z eines Gestirnes in einem bestimmten Momente gilt für alle die Punkte, die auf einem mit der Zenitdistanz als sphärischen Radius um den Projektionspunkt P des beobachteten Gestirns beschriebenen kleinen Kreise k liegen (Fig. 1). Unter Projektionspunkt versteht man den Ort der Erdoberfläche, in dem die vom Stern zum Erdmittelpunkt gezogene Gerade sie durchstößt, oder anders gesagt: den Ort, der das beobachtete Objekt im Zenit hat. Die geographische Breite des Projektionspunktes ist stets der Deklination und seine geographische Länge gegen Greenwich dem (aus Rektaszensionen und Greenwichzeit zu berechnenden) Stundenwinkel des Gestirns in Greenwich gleich. Zenitdistanz z und Projektionspunkt P legen also den Kleinkreis k auf der Erde fest, und irgendwo auf diesem Kreise muß das Schiff zur Zeit der Messung sich befunden haben. Trägt man an Bord die Schiffsroute auf einer Seekarte[309a]) ein, so

308) *C. Pulfrich*, Zts. für Instrumentenkunde 24, Berlin 1904, p. 225.

309) *Thomas H. Sumner*, A new and accurate method of finding a ships position at sea by projection on *Mercator*'s chart, Boston 1843, 2. ed. 1845.

309a) Die Seekarten werden stets in Merkatorprojektion entworfen, weil bei derselben jeder *Loxodrome* (Schiffahrtslinie, Linie konstanten Kurses, die

kommt die *Merkatorprojektion* des *Sumner*kreises k in Betracht, die sog. „Standkurve“ (*courbe de hauteur*)[309b]).

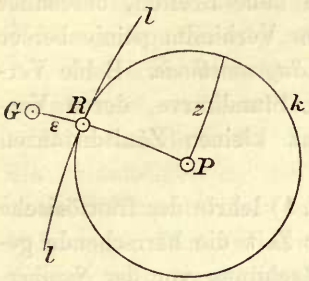


Fig. 1: Zur „Höhenmethode“ (Figur auf der Erdkugel).

z = beobachtete Zenitdistanz.
P = Projektionspunkt des Gestirns.
k = *Sumner*kreis, Höhenkreis[310]), Höhengleiche, *circle of position, circle of equal altitude, cercle de hauteur.*
G = gegißter Schiffsort, *estimated place, point estimé.*
R = wahrscheinlichster Schiffsort, *point rapproché.*
l = Standlinie, *Sumner line, droite de hauteur.*

In praxi ist der Seemann auch ohne astronomische Ortsbestimmung über den Ort seines Fahrzeuges nur um Bruchteile eines Grades, wenn es hoch kommt um $^1/_2{}^0 = 30$ Seemeilen, ungewiß; denn einen genäherten, sog. *„gegißten“ Schiffsort* kennt er schon aus der sog. „Schiffsrechnung“, die auf regelmäßigen Bestimmungen der Fahrtgeschwindigkeit nach Größe und Richtung mittelst Log und Kompaß beruht; er bedarf daher nur eines kurzen, dem gegißten Schiffsort G nahegelegenen Stückes l des *Sumner*kreises. Auf der Seekarte[309a]) ersetzt er — von einem noch zu besprechenden, seltenen Ausnahmefall abgesehen — dieses Stück durch eine Loxodrome, in der Merkatorprojektion also durch eine Gerade, die entweder eine kurze Sehne (ältere Methode) oder eine Tangente (neuere Methode) der genauen Standkurve bildet. Diese Gerade heißt „Standlinie“.

Die ältere Methode zur Bestimmung der Standlinie, auf die schon *Sumner*[309]) kam, ist die *Breiten- und Längenmethode* (*Sumnermethode*). Wenn das Azimut des Gestirns kleiner als 45^0, so berechnet *Sumner* mit zwei angenommenen, die gegißte umschließenden Längen die der gemessenen Höhe zugehörigen beiden Breiten; die Verbindungslinie der zwei so definierten Punkte in der Karte ist die gesuchte Stand-

jeden Meridian unter demselben Winkel schneidet) eine *geradlinige* Transversale der Seekarte entspricht. Vgl. Fußn. 330), sowie *Gauß'* Werke 4 (1880), p. 204 und den Artikel „Kartographie“, VI 1, 4 (*Bourgeois*).

309b) Über die analytischen und graphischen Methoden zur strengen oder genäherten Konstruktion der Stand*kurven* vgl. etwa *Guyou*[352]) und *Villarceau-de Magnac.*

310) Das Wort „*Höhenkreis*“ bedeutet also bald einen *Sumnerkreis*, bald einen *Almukantarat*[106]). Vereinzelt ist ferner als „Höhenkreis“ das definiert worden, was wir heute „*Vertikalkreis*“ nennen, nämlich ein Großkreis durch das Zenit, oder auch ein zur Messung von Zenitdistanzen bestimmter Teilkreis.

linie, die in diesem Falle nach der *Breitenmethode* gewonnen ist. Liegt aber die beobachtete Höhe näher am Ersten Vertikal als am Meridian, so wählt man zwei der gegißten nahe Breiten, berechnet mit ihnen die beiden Längen und hat in der Verbindungslinie beider Punkte wiederum die Standlinie nach der *Längenmethode*. Beide Verfahren geben strenggenommen Sehnen der Standkurve, deren Verwechselung mit dem Bogen nur bei ganz kleinen Zenitdistanzen unstatthaft wird.

Die neuere Methode (*Höhenmethode*, Fig. 1) lehrte der französische Admiral *Marcq St. Hilaire*[311]); sie ist zur Zeit die herrschende geworden, da sie Einheit und Ökonomie der Rechnung vor der *Sumner*schen voraus hat. Während bei *Sumner entweder* die Länge *oder* die Breite berechnet werden mußte, wird nach *Marcq St. Hilaire* in *allen* Fällen mit dem gegißten Schiffsort und der Greenwichzeit der sphärische Radius des *Sumner*kreises, d. h. die Zenitdistanz berechnet, deren Vergleich mit der beobachteten ein Maß für die Richtigkeit des gegißten Schiffsortes abgibt. Und zwar so. Den Unterschied ε zwischen berechneter und gemessener Höhe setzt man in der Seekarte vom gegißten Schiffsort G in der Richtung des beobachteten Gestirns ab, je nach dem Vorzeichen der Differenz bald vom Projektionspunkt P weg, bald auf ihn zu (Fig. 1). Die durch diesen neuen Punkt R gezogene, zu RP senkrechte Gerade l stellt dann die gewünschte Standlinie dar, die somit bei dieser *Höhenmethode* eine Tangente an die Standkurve im wahrscheinlichsten Schiffsort ist. Als wahrscheinlichsten Schiffsort spricht man nämlich den dem gegißten zunächstliegenden Punkt R der Standlinie an. Außer der Höhenrechnung hat man also noch eine solche des Azimutes auszuführen, die aber beiläufig auf volle Grade genügt.

In dem Ausnahmefall, daß die Gestirnshöhe nahe 90^0 beträgt, darf man die Standlinie als gegeben betrachten durch den um den Projektionspunkt mit der jetzt sehr kleinen Zenitdistanz beschriebenen Kreisbogen. Eine bessere Annäherung an die Standkurve gibt ein gegen den Projektionspunkt exzentrischer Kreis oder noch besser eine Ellipse, deren Zentrum ebenfalls gegen den Projektionspunkt verschoben ist[312]).

41. Zweihöhenproblem nach der Standlinienmethode. In einfacher Weise erledigt die Standlinienmethode das *Zweihöhenproblem*. Liegen zwei Höhenmessungen vor, so ergeben sich zwei Standlinien,

311) Vgl. *Villarceau-de Magnac*, Pratique, p. 104* (Fußnote).
312) Vgl. *Villarceau-de Magnac.*

in deren Schnittpunkt das Schiff sich befinden muß. Denkt man sich die *Sumner*kreise ganz ausgezeichnet, so sieht man, daß *zwei* Schnittpunkte den gemessenen Höhen Genüge leisten. Die Entscheidung über den wahren Ort folgt dann leicht aus den Azimuten der Gestirne. Am schärfsten wird der Schnittpunkt festgelegt, wenn die Linien einander unter rechtem Winkel durchschneiden; das absolute Azimut spielt keine Rolle für die Genauigkeit des Schiffsortes, sondern nur die Azimutdifferenz, die im günstigsten Falle 90° betragen und nie unter 30° herabsinken soll. Infolge der raschen Fahrt der modernen Fahrzeuge, Dampfer sowohl wie Segler, genügt es nicht mehr, die beiden gefundenen Standlinien als für denselben Ort gültig anzusehen; es hat vielmehr wegen der Ortsveränderung des Schiffes eine Reduktion etwa der zuerst erhaltenen Standlinie auf den Augenblick der zweiten stattzufinden. Ein Weg, dies zu erreichen, besteht darin, daß man die eine Standlinie um die in der Zwischenzeit vom Schiff gutgemachte Fahrt parallel zu sich selbst verschiebt, ein anderes Verfahren reduziert rechnerisch vor Beginn der ganzen Reduktion die eine gemessene Höhe auf den Beobachtungsort der anderen (Zenitreduktion) und behandelt dann beide Höhen, als wären sie im selben Punkt der Erdoberfläche beobachtet.

Der angedeutete graphische Weg des Überganges vom gegißten auf den wahren Schiffsort erledigt sich durch Rechnung mit der Auflösung kleiner ebener Dreiecke. An diese Aufgabe hat sich, wie an das ganze Zweihöhenproblem, eine große Reihe von Aufsätzen in nautischen Zeitschriften angeschlossen. Überdies existieren spezielle Tafeln, die der Erleichterung jener Schlußrechnung dienen sollen.

42. Drei oder mehr Standlinien, Dreihöhenproblem. In der nautischen Literatur kommt die Bezeichnung *„Dreihöhenproblem“* oder *„Vielhöhenproblem“* vor; es handelt sich aber dann nicht um ein eindeutig bestimmtes Problem, sondern um eine überbestimmte Aufgabe; denn zwei Unbekannten, Länge und Breite, stehen drei oder mehr Daten gegenüber. Bestimmt wird die Aufgabe erst wieder, wenn ich die Bedingung hinzufüge, daß die Quadratsumme der in den Höhen übrigbleibenden Fehler ein Minimum werden soll, und dann muß die Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen. Will man wieder die Standlinien zur Lösung verwenden, so ergeben sich deren im Falle des „Dreihöhenproblems“ drei, die sich der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wegen nicht in einem Punkte durchschneiden, sondern ein Dreieck bilden werden. Am günstigsten sind die Sterne dann verteilt, wenn die Azimute um beiläufig 120° sich unterscheiden. Der wahrscheinlichste Schiffsort ist stets derjenige

Punkt im Innern des Dreiecks, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den drei Seiten ein Minimum ist; dieser Punkt heißt nach seinem ersten Bearbeiter[313]) der *Grebe*'sche Punkt[314]). Mehr als drei günstig verteilte Höhen zu messen bringt wenig Gewinn. Das Auge ermüdet rasch, schon durch die meist schlechte Sichtbarkeit der Kimm bei Nacht, und die letzten Einstellungen fallen daher erheblich gegen die ersten ab. — Daß man ohne Instrumente und ohne Rechnung durch bloße Schätzung von Gestirnshöhen den Schiffsort leicht innerhalb eines Grades festlegen kann, zeigt *A. A. Nijland*[315]).

43. Standlinie für eine Höhendifferenz. Die eindeutig bestimmte Aufgabe: aus den zwei Höhendifferenzen dreier Sterne den Schiffsort abzuleiten (siehe Nr. **19**), trug dazu bei, das Hauptglied der Kimmanomalie zu eliminieren. Weiter erwächst nun die Frage nach der Art des *durch eine Höhendifferenz auf der Erdkugel gegebenen geometrischen Ortes.* Die Frage ist von *Wirtz*[316]) diskutiert worden; die Standlinie geht über in eine sphärische Hyperbel, entstanden als Schnittkurve eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Kugel. Das dem gegißten Schiffsort nahegelegene Stück dieser „kimmfreien" Standlinie wird definiert durch einen Punkt der Standlinie und ihr Azimut in diesem Punkte.

44. Berechnung der Höhe, Höhentafeln. Keine andere Disziplin hat so sehr das Bestreben, alle rechnerischen Operationen durch Tabulierung zu umgehen, wie die Nautik, und seit dem Durchdringen der *Marcq St. Hilaire*'schen Standlinienmethode (p. 146) sind daher immer wieder Versuche aufgetaucht, die einzige erforderliche genauere sphärische Rechnung, die *Berechnung der Höhe* aus Breite, Deklination und Stundenwinkel bequemer zu gestalten oder durch Tafeln ganz zu umgehen.

Die Zeiten liegen noch nicht lange hinter uns, wo der Seemann seine kaum auf die Bogenminute zuverlässigen Messungen sechs- oder siebenstellig unter Mitnahme der Bogensekunde ausrechnete. Ein erster zögernder Schritt zur Besserung war der Rückgang zu fünf- oder gar vierstelligen Logarithmen. Die kaiserliche Marine

313) *E. W. Grebe,* Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte auf seine Seiten fällen kann, Arch. Math. Phys. 9 (1847), p. 250.

314) Über den *Grebe*'schen oder *Lemoine*'schen Punkt vgl. III B 13 *(Neuberg),* sowie etwa *Emil Hain,* Arch. Math. Phys. 58 (1876), p. 84.

315) *A. A. Nijland,* Astr. Nachr. 160 (1902), p. 257.

316) *C. W. Wirtz,* Über eine neue „kimmfreie" astronomische Standlinie, Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, 25. Jahrg., Nr. 3, Hamburg 1902.

hält an fünf Stellen fest, nachdem *E. Kohlschütter*[317]) zeigte, daß nur so in allen Fällen die Genauigkeit von 2′ in der errechneten Höhe könne innegehalten werden. In der Handelsmarine greift der Gebrauch der vierstelligen Logarithmen immer mehr um sich, da die Höhenformel leicht so transformiert werden kann, daß sie auch vierstellig eine praktisch stets zureichende Genauigkeit besitzt. Aus der Grundform der Höhenformel sind wohl alle möglichen Variationen — es gibt deren an die 80 — gezogen und auf ihre Bequemlichkeit und Eignung zur Tabulierung hin durchprobiert worden. Indessen existiert keine Höhentafel, die die Höhen rascher und sicherer liefert als direkte Rechnung. Die wichtigsten bisher konstruierten oder in Vorschlag gebrachten Höhentafeln (vgl. p. 157) stammen von *F. Souillagouët*[318]), *R. Delafon*[319]), *W. Doellen*[320]), *V. v. Fuß*[321]) und *A. Vital*[322]). Unter ihnen ist die *Souillagouët*'sche Tafel noch die brauchbarste, weil sie auf der einfachsten Formel sich aufbaut. — Nur geringen Erfolg hatten auch die Vorschläge zur direkten Berechnung des Unterschiedes der beobachteten und der aus dem gegißten Schiffsort gefolgerten Höhe[323]).

Ein anderes Stück des nautisch-astronomischen Grunddreiecks den Stundenwinkel, hat *Davis*[324]) mit den drei Argumenten Breite Deklination, Höhe in Tafeln gebracht, die indes nach dem Urteil des vom Reichs-Marine-Amt herausgegebenen Lehrbuches der Navigation[325]) in bezug auf sämtliche Unterlagen der Ortsbestimmung in so engen Grenzen gehalten sind, daß sie den Anforderungen der heutigen Schiffahrt nicht mehr gerecht werden.

Einen neuen Plan zur Konstruktion einer Höhentafel legte in

317) *E. Kohlschütter,* Marine-Rundschau 13, Berlin 1902, p. 1330.

318) *F. Souillagouët,* Tables du point auxiliaire, pour . . . la hauteur et l'azimut estimés, Paris 1891; nouvelle éd. Toulouse 1900.

319) *R. Delafon,* Méthode rapide pour determ. les droites et les courbes de hauteur et faire le point, Paris 1893.

320) *W. Doellen,* Zur Reform der naut. Astronomie, Dorpat 1896.

321) *V. v. Fuß,* Tafel zur Berechnung der Höhe und des Azimuts der Gestirne, Verhdl. des 7. internat. Geographen-Kongresses zu Berlin 1899, 2. Teil, Berlin 1901, p. 27. — *V. v. Fuß,* Tafeln f. d. Berechn. v. Höhe u. Azimut, Petersburg 1901 (in russischer Sprache).

322) *A. Vital,* Über Höhentafeln, Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens 30, Pola 1902, p. 283.

323) Vgl. darüber u. a. *O. Fulst,* Ann. d. Hydr. 1900, p. 320; *W. Reuter,* ebenda 1902, p. 32 und 1902, p. 583; *H. Teege,* ebenda 1903, p. 153 und 1903, p. 501.

324) *P. L. H. Davis,* Chronometer tables or hour angles for selected altitudes between latitudes 0° and 50°, London 1899.

325) *Reichs-Marine-Amt,* Navig., 2, p. 233.

jüngster Zeit *G. W. Littlehales*[326]) vor. Auf Karten in stereographischer Projektion löst er graphisch das nautische Grunddreieck nach Höhe und Azimut auf. Die Priorität des Gedankens fällt jedoch *C. Braun*[327]) zu, der schon 1873 ein Instrumentchen konstruiert hatte, das aus zwei konzentrischen, übereinander verschiebbaren stereographischen Äquatorealprojektionen besteht, deren obere auf durchsichtiges Papier gezeichnet ist. Die mittlere Genauigkeit des Apparates, den *Braun* „Trigonometer" nennt, stellt sich bei einem Durchmesser von 45 cm auf etwa $\pm 5'$. — In weniger zweckdienlicher Weise wollte *M. A. F. Prestel*[328]) die Rechnung durch ein graphisches Abgreifen in dem von ihm entworfenen „astronomischen Diagramm" ersetzen. Für geringere Genauigkeit finden sich gute Diagramme, freilich nur für die Pariser Polhöhe, bei *G. Bigourdan*[329]).

45. Gebrauch der Merkatorfunktion[330]). Infolge des Anschwellens der zur Erleichterung der nautisch-astronomischen Rech-

326) *G. W. Littlehales,* A new and abridged method of finding the locus of geographical position and the compass error, Bulletin of the Philosophical Society of Washington, 14, Washington 1903, p. 233; besprochen von *J. W. Froley,* Bulletin of the American Geographical Society 36, New York 1904, p. 299.

327) *C. Braun,* Berichte von dem erzbischöfl. *Haynald*'schen Observatorium zu Kalocsa in Ungarn, Münster i. W. 1886, p. 142.

328) *M. A. F. Prestel,* Das astronomische Diagramm, Braunschweig 1859.

329) *G. Bigourdan,* Obs. de Paris ann., obs. 1885, Paris 1893.

330) Unter dem Namen Longitudinalzahl, *transcendenter Lambert*'scher oder *Gudermann*'scher Winkel ist eine Funktion

$$\tau = gd(x)$$

bekannt, durch die man gemäss den Formeln

$$-i \cdot \sin(i \cdot x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x = \operatorname{tang} \tau,$$

$$\cos(i \cdot x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x = \frac{1}{\cos \tau},$$

$$-i \cdot \operatorname{tang}(i \cdot x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{tangh} x = \sin \tau$$

von den hyperbolischen Funktionen zu den Kreisfunktionen übergeht. Mit Hilfe der *inversen* Funktion (*Gudermann*'s „Längezahl")

$$x = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\cos \tau} = \log \operatorname{nat} \operatorname{tang} \left(45^0 + \frac{\tau}{2}\right)$$

definiert man die Merkatorfunktion $f(\tau)$ und ihre Cofunktion $cof(\tau)$ durch die Formeln[335])

$$f(\tau) = A \cdot x, \quad cof(\tau) = f(90^0 - \tau).$$

nungen konstruierten Tabellen machte sich bald das Bestreben geltend, deren Zahl nach Möglichkeit zu beschränken und durch *Einführung der Merkator'schen Meridionalteile* die trigonometrischen Rechnungen entbehrlich zu machen. Auf die Bedeutung der Merkatorfunktion hat zuerst *Preuß*[331]) hingewiesen und nach ihm ist das Thema konsequent ausgebaut von *Guyou*[332]), *Türr*[333]), *Goodwin*[334]) und vor allem von *Börgen*[335])[335a]), der ausführlich zeigt, wie einfach und einheitlich sich die sphärischen Dreiecksaufgaben, insbesondere die der geographischen Ortsbestimmung, durch Merkatorfunktionen lösen lassen; eine bequeme Tabelle dieser Funktion von Minute zu Minute bildet den Schluß seiner wichtigen Arbeit[335]).

46. Azimuttafeln. Nicht nur zur Berechnung der Standlinie nach der Höhenmethode (p. 146) bedarf der Seemann der Kenntnis des *Gestirnsazimuts*, sondern auch zur Bestimmung der *Deviation des Kompasses*[336]), einer Größe, die auf den modernen aus Eisen oder Stahl

---

Hier hat der Zahlenfaktor

$$A = \frac{10800}{\pi} = \text{Verhältnis der absoluten Winkeleinheit zur Bogenminute}$$

den Zweck, den *Abstand* $f(\varphi_1) - f(\varphi_2)$, in welchem irgend zwei Breitengrade φ_1 und φ_2 auf einer Merkatorkarte[309a]) verlaufen, auf die *Bogenminute* der geographischen Länge *als Einheit* zu beziehen; er gewährt übrigens gewisse Vorteile bei der Interpolation der Tafeln und tut der Eleganz der theoretischen Entwicklungen keinen Abbruch: die sphärischen Dreiecksaufgaben lassen sich nämlich mit Hilfe der Funktionen $f(\tau)$ und $cof(\tau)$ in *homogenen* linearen Formeln lösen (l. c. Fußn. 335). — *Chr. Gudermann*, J. f. Math. 7 und 8 (1831—32) gibt Tafeln für $x = \mathfrak{L}(\tau)$. Literatur über den *Lambert*'schen Winkel etc. weisen nach: *A. v. Braunmühl*, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, 2. Teil, Leipzig 1903, p. 134, 231; *E. Pascal*, Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von *A. Schepp*, 1, Leipzig 1900, p. 470; *Wolf*, Handb. 1, p. 205—207.

331) *W. H. Preuß*, Homographische Nautik, Ann. d. Hydr. 1876 und 1877.

332) *E. Guyou*, Les problèmes de navigation et la carte marine, Annales hydrographiques (2) 17 (année 1895), p. 113—158, auch als Buch erschienen, Paris 1895.

333) *R. Türr*, Metodo per fare il punto astronomico, Milano 1894.

334) *H. B. Goodwin*, A nautical astronomy of a new type, Nautical Magazin 64, London 1895.

335) Siehe *C. Börgen*, Über die Auflösung nautisch-astronomischer Aufgaben mit Hilfe der Tabelle der Meridionalteile (der „*Mercator*'schen Funktion"), Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, 21. Jahrg. 1898, Nr. 1, Hamburg 1898.

335a) *C. Börgen*, Über die Berechnung von Monddistanzen mit Hilfe der *Mercator*'schen Funktionen, Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte, 26. Jahrg. 1903, Nr. 1, Hamburg 1903.

336) *Deviation* ist die Ablenkung der Kompaßnadel durch die Eisenteile des Schiffskörpers.

gebauten Fahrzeugen sowohl zu erheblichen Beträgen anwächst, als auch in einigen Gliedern einer raschen Veränderlichkeit unterworfen ist. Aus diesem Grunde wird eine stete Kontrolle der Deviation für die Sicherheit der Navigierung unumgänglich notwendig, und diese erzielt man durch eine „Peilung" (d. h. Azimutanschluß an die Magnetnadel) eines nicht gar zu hoch stehenden Gestirnes. Aus der Differenz des abgelesenen Azimutes gegen das aus Ortsbreite, Deklination und Stundenwinkel berechnete des Gestirns folgt nach Abzug der bekannten im Schiffsort stattfindenden magnetischen Deklination die gesuchte Deviation des Kompasses.

Zur Erleichterung der häufig vorkommenden Berechnung des Azimutes sind Tafeln konstruiert worden, die ihren Zwecken weit besser dienen, als die bisher veröffentlichten Höhentafeln. Zum Teil rührt das daher, daß bei den *Azimuttafeln* nicht jene Genauigkeit verlangt wird, die bei Höhentafeln notwendig ist. Die Angabe auf $0^{0}.1$ reicht bei Azimuttafeln völlig aus; durch Interpolation mag der Fehler auch auf $^1/_2{}^0$ gesteigert werden, ohne daß darum eine unerlaubte Unschärfe einträte.

Die Tafeln lassen sich in zwei Hauptgruppen trennen, deren erste die Azimute nach den drei Argumenten Breite, Stundenwinkel und Deklination kunstlos zusammenstellt. Hierzu rechnen u. a. die Tafeln von *Burdwood*[336a]), *Davis* und *Percy*[337]), *Labrosse*[338]) und *Ebsen*[339]). Die Tafeln der zweiten Gruppe zerlegen die *eine* Tafel mit drei Argumenten in drei Tafeln mit je zwei Argumenten und erreichen so eine kompendiösere Form. Fast in jeder neueren nautischen Tafel findet sich eine solche nach *Perrin*'s oder *Fulst*'s[340]) Vorgang angeordnete kurze Azimuttabelle. Anders konstruierte *Weyer*[341]) seine Azimuttafeln, die vor allem bei Anwendung der Standlinienmethode nach *Marcq St. Hilaire* (Höhenmethode, p. 146) sich empfehlen. Sie

---

336a) *J. Burdwood,* Sun's true bearing or azimuth tables between latitude 30° N and 60° N, London [1850?], 3d ed. London 1873; London 1894.

337) *J. E. Davis, L. H. Percy,* Sun's true bearing or azimuth tables between 30° N and 30° S, London 1875; Star's true bearing or azimuth tables between 60° N and 60° S, London 1902.

338) *F. Labrosse,* Tables des azimuts du soleil entre 55° S et 55° N, Paris 1868; in engl. Sprache London 1868.

339) *J. Ebsen,* Azimut-Tabellen, enthaltend die wahren Richtungen der Sonne von 70° N bis 70° S, Hamburg 1896; 3. Aufl. Hamburg 1903.

340) *E. Perrin,* Nouvelles tables destinées à abréger les calcules nautiques, 2. éd. Paris 1892. — *O. Fulst,* Azimuttafel, Bremen 1898.

341) *G. D. E. Weyer,* Kurze Azimuttafel für alle Deklinationen, Stundenwinkel und Höhen auf beliebigen Breiten, Hamburg 1890.

umfassen in Breite, Höhe und Deklination den ganzen Himmel, während die anderen Tafeln nur eine mehr oder minder beschränkte Zone der drei Daten berücksichtigen.

47. Ortsbestimmung mit Hilfe der erdmagnetischen Elemente. Nur der Vollständigkeit und des historischen Interesses wegen sei endlich noch darauf hingewiesen, daß es einige Male versucht worden ist, die räumlich und zeitlich rasch veränderliche magnetische Deklination zur Längenbestimmung auf See heranzuziehen, u. a. von *A. Pigafetta*, der diese Methode in seiner Nautik lehrt [342]). Der Gedanke geht indes auf *Columbus* zurück, dem *W. Bourne* (1577), *L. Sanutio* (1588), *S. Cabot* [343]) folgten. Wieder später beschäftigte sich *Z. Williams* [344]) mit dieser Art der Längenbestimmung und entwarf Tafeln, die aber von *J. Bradley* nicht eben günstig beurteilt wurden. Zuletzt hat noch *A. v. Humboldt* [345]) auf die von ihm erprobte Brauchbarkeit der Methode der Breitenbestimmung durch die magnetische Inklination hingewiesen.

48. Aëronautische Astronomie. Gleichwie die nautische Astronomie im Grunde nur einen in den Genauigkeitsansprüchen sehr herabgestimmten Ableger der exakten geographisch-astronomischen Ortsbestimmung bildet, so hat die seit etwa einem Jahrzehnt emporblühende wissenschaftliche Luftschiffahrt eine aëronautische Astronomie gezeitigt, die es dem Meteorologen bei nach unten unsichtigem Wetter ermöglichen soll, während der Ballonfahrt die geographische Länge und Breite mit mäßiger Genauigkeit zu fixieren und so auch Horizontalprojektion und Geschwindigkeit des in der freien Atmosphäre zurückgelegten Weges aufzuzeichnen.

Natürlich sind die Methoden keine anderen, als die schon für den nautischen Gebrauch als zweckmäßig gekennzeichneten. Am Tage legen Sonnen- und Mondhöhen, in kurzen Zeitintervallen genommen, die Route fest; falls die Sonne allein sichtbar, muß Sonnenhöhe und

342) Vgl. *Stanley of Alderley*, The first voyage round the world by Magellan = Works issued by the Hakluyt Society 52, London 1874, p. 167—169; siehe auch Fußn. 204).

343) Vgl. *A. v. Humboldt*, Ex. crit. III, p. 38—41 = Krit. Unt. 2, p. 27—28. — Zur Abkürzung in den Fußnoten 194, 199, 247, 343, 345: *Ex. crit.* = *A. v. Humboldt*, Examen critique de l'histoire de la géographie du Nouveau Continent et des progrès de l'astronomie nautique aux 15. et 16. siècles. 5 vols. 8°, Paris 1836—39. — Dasselbe ins Deutsche übersetzt: *Krit. Unt.* = *A. v. Humboldt*, Kritische Untersuchungen über die historische Entwicklung der geogr. Kenntnisse von der Neuen Welt . . ., übers. von *J. L. Ideler*, 3 Bde., Berlin 1836—39.

344) Vgl. *W. T. Lynn*, The longitude and the Magnetic Variation, The Observatory 27 (1904), p. 276.

345) l. c. 343), Ex. crit. III, p. 43 = Krit. Unt. 2, p. 29.

-azimut ermittelt werden. Nachts geben ein paar passend verteilte Fixsternhöhen die Grundlagen ab. Gedrängte Tafeln, die aus den gemessenen Höhen auf einfache Weise den Ballonort liefern, will *A. Marcuse*[346]) herstellen. Erstrebt ist hier eine der Beobachtungsgenauigkeit angemessene Rechnungsschärfe von je nach dem Zweck $\pm$ 5′ (9 km) oder $\pm$ 10′ (18 km). Als Instrument zur Höhenmessung erachtet *A. Marcuse* den *Butenschön*'schen Libellenquadranten (siehe Nr. **39**) am geeignetsten, mit dem sich an Bord von Schiffen die Unsicherheit einer Einstellung auf $\pm$ 3′ herabdrücken lasse. Korvettenkapitän *Lans*[346]) hingegen maß bei einer Hochfahrt i. J. 1902 die Sonnenhöhe über der Schleppleine des Ballons mittels eines Prismenkreises nur auf etwa $^1/_2{}^0$ genau, und *A. Berson*[346]) führte auf seinen bekannten Fahrten einen mit Kompaß versehenen Apparat mit, der Höhe und Azimut der Sonne auf etwa 1^0 genau zu finden gestattete.

Unabhängig von astronomischen Bestimmungen läßt sich bei nach oben und unten unsichtigem Wetter der Ballonort durch die *erdmagnetischen* Elemente festlegen. *H. Ebert*[347]) empfiehlt zu dem Zwecke insbesondere die Messung der Horizontalintensität, zu deren sicherer Bestimmung im Freiballon er ein neues magnetisches Ballonvariometer angibt; er hält es an diesem Instrument für ein Kleines, bis auf wenige Kilometer die Entfernungen zu beurteilen, welche die Projektion des Ballonortes von der Ostseeküste im Norden, der Nordgrenze der Alpen im Süden trennen.

VI. Anhang.

49. Die sphärischen Grundformeln der geographischen Ortsbestimmung. In der Darlegung der Methoden der geographischen Ortsbestimmung ist mathematischer Formelapparat grundsätzlich vermieden und lediglich der leitende Gedanke eines jeden Verfahrens soweit skizziert worden, daß sich mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie der jeder Methode eigentümliche Formelkomplex rekonstruieren läßt. Es mag nun hier hinreichen, eine kurze Übersicht über die der sphärischen Trigonometrie[348]) entlehnten Grundformeln der geo-

346) Siehe *A. Marcuse,* Zur Frage der astronomischen Ortsbestimmung im Ballon, *Protokoll* über die 3. Versammlung der internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt (Berliner Tagung 1902), Straßburg i. E. 1903, Beilage 22, p. 145; ist abgedruckt in: Sirius, Zs. für popul. Astronomie, 36, Leipzig 1903, p. 169.

347) *H. Ebert,* Über ein neues magnetisches Ballonvariometer, Protokoll[346]), Beilage 21, p. 142.

348) Über Lehrbücher der *sphärischen Trigonometrie* vgl. die Schlußbemerkung von Nr. **49** auf Seite 159.

graphischen Ortsbestimmung und ihrer wichtigsten Umformungen zusammenzustellen, in der Absicht, eine Anschauung von dem Bau der in praxi gebräuchlichen Formeln zu vermitteln.

In Figur 2 stellen wir das sphärisch-astronomische Grunddreieck P(ol)-Z(enit)-S(tern) dar, in dessen Seiten und Winkeln wir alle für uns wesentlichen Größen wiederfinden. Es bedeuten hier

φ die Polhöhe des Beobachtungsortes,
t den Stundenwinkel des Gestirns,
δ die Deklination des Gestirns,
p den parallaktischen Winkel des Gestirns,
h die Höhe des Gestirns,
$z = 90^0 - h$ die Zenitdistanz des Gestirns,
a das Azimut des Gestirns.

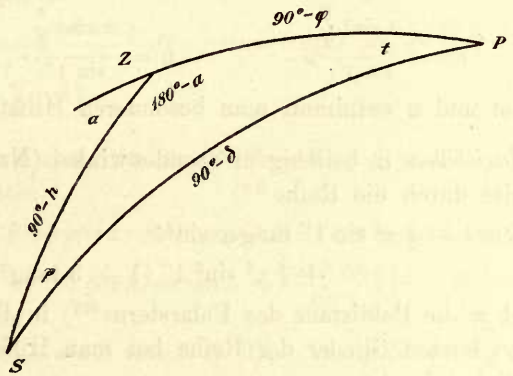


Fig. 2:
Das sphärisch-astronomische Grunddreieck.

1) Zur Bestimmung von t gilt die Grundformel

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} = \frac{\cos z}{\cos\varphi\cos\delta} - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta,$$

die man für logarithmische Rechnung etwa so umschreiben kann

$$\operatorname{tang}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\sin(S-\delta)}{\cos S \cos(S-z)}}, \quad 2S = \varphi + \delta + z$$

oder noch[349])

$$\operatorname{sem} t = \sec\varphi \sec\delta \sin\frac{z+(\varphi-\delta)}{2} \sin\frac{z-(\varphi-\delta)}{2}.$$

349) Tafeln der *Semiversusfunktion*

$$\operatorname{sem} t = \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2} = \frac{\operatorname{sin vers} t}{2}$$

findet man z. B. in den *Nautischen Tafeln*, hrsg. vom *Reichs-Marine-Amt*, Kiel 1903.

Über den Einfluß kleiner Fehler in φ, δ, z auf t orientiert der Differentialausdruck

$$dt = -\frac{1}{\cos\varphi \operatorname{tang} a}\,d\varphi + \frac{1}{\cos\delta \operatorname{tang} p}\,d\delta + \frac{1}{\cos\varphi \sin a}\,dz.$$

Anwendung in Nr. **4.**

2) Bestimmung von φ. Durch Einführung eines Hilfswinkels geht aus der Grundgleichung hervor

$$\cos(\varphi - M) = \frac{\cos z}{\sin\delta}\sin M, \qquad \operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos t}.$$

Für *Zirkummeridianhöhen* (Nr. **15**) reicht eine Reihenentwicklung[350]) aus:

$$\varphi = \delta + z - \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\,m + \left\{\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}\right\}^2 \operatorname{cotg}(\varphi-\delta)\cdot n,$$

$$m = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin 1''}, \qquad n = \frac{2\sin^4\frac{t}{2}}{\sin 1''}.$$

Die Größen m und n entnimmt man besonderen Hilfstafeln[351]).

Aus *Polarishöhen* in beliebigem Stundenwinkel (Nr. **16**) bekommt man die Breite durch die Reihe[350])

$$\varphi = h - \pi\cos t + \tfrac{1}{2}\pi^2 \sin 1'' \operatorname{tang}\varphi \sin^2 t + \tfrac{1}{6}\pi^3 \sin^2 1''\,(1 + 3\operatorname{tang}^2\varphi)\sin^2 t\cos t.$$

Hier bedeutet π die Poldistanz des Polarsterns[352]) in Bogensekunden; für die beiden letzten Glieder der Reihe hat man Hilfstafeln[353]).

Differentialausdruck:

$$d\varphi = -\cos\varphi \operatorname{tang} a\,dt + \frac{1}{\cos a}\,dz + \frac{\cos p}{\cos a}\,d\delta.$$

Im Ersten Vertikal (Nr. **21**) besteht die einfache Beziehung:

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\delta \sec t.$$

Differentialausdruck:

$$d\varphi = \sin\varphi \operatorname{tang} z\,dt + \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta}\,d\delta.$$

Für die *Digressionen* (Nr. **22**) sieht die Formel ähnlich aus:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\delta}{\sin a}.$$

350) Auf der rechten Seite der Formel tritt φ nur in kleinen Korrektionsgrößen auf und darf durch einen rohen Näherungswert ersetzt werden.

351) Etwa *C. F. W. Peters,* Astronomische Tafeln und Formeln, Hamburg 1871, oder *Albrecht,* l. c. Fußn. 65), 3. Aufl., p. 53 und Hülfstafeln 27—30.

352) Zur Zeit (1904) ist für Polaris (α Ursae minoris) $\pi = 1^\circ 12'$ und nimmt jährlich um $18''.7$ ab (Präzession).

353) Z. B. *Albrecht,* l. c. Fußn. 65), 3. Aufl., p. 47, 48 und Hülfstafel 26.

Differentialausdruck:

$$d\varphi = \frac{2 \sin \delta}{\sin 2\varphi} d\delta - \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} \varphi \, da.$$

3) Bestimmung von a.

$$\sin a = \frac{\cos \delta \sin t}{\sin z},$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tang} \delta},$$

$$\operatorname{tang} a = -\frac{\operatorname{cotg} \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tang} \varphi \cos t}$$

oder mit Einführung eines Hilfswinkels M

$$\operatorname{tang} a = \frac{\cos M \operatorname{tang} t}{\sin (\varphi - M)}, \qquad \operatorname{tang} M = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos t}.$$

Differentialausdruck:

$$da = \frac{\cos \delta \cos p}{\sin z} dt - \sin a \operatorname{cotg} z \, d\varphi + \frac{\sin p}{\sin z} d\delta.$$

Anwendung in Nr. **37**.

4) Bestimmung von $z = 90^0 - h$.

Grundformeln:

$$\sin h = \cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\left[\cos h = \sin z = \frac{\cos \delta \sin t}{\sin a}\right].$$

Mit Hilfswinkeln:

$$\cos z = \sin \varphi \sec N \sin (N + \delta), \quad \operatorname{tang} N = \operatorname{cotg} \varphi \cos t.$$

Auf diese Formel gründet sich die Höhentafel von *F. Souillagouët*[318]). Eine andre Umformung ist:

$$\sin a = \cos \delta \sin t, \qquad \operatorname{cotg} b = \operatorname{cotg} \delta \cos t,$$

$$\cos z = \cos a \sin B, \quad B = b + \psi, \quad \psi = 90^0 - \varphi.$$

V. v. Fuß hat hiernach seine Höhentafel gerechnet[321]). *A. Vital*'s Vorschlag zur Konstruktion von Höhentafeln[322]) geht von der Formel aus:

$$\cos z = \cos^2 \frac{t}{2} \cos (\varphi - \delta) - \sin^2 \frac{t}{2} \cos (\varphi + \delta).$$

Weitere Umformungen sind:

$$\operatorname{sem} z = \operatorname{sem} (\varphi - \delta) \sec^2 N, \qquad \operatorname{tang} N = \sqrt{\frac{\operatorname{sem} t \cos \varphi \cos \delta}{\operatorname{sem} (\varphi - \delta)}},$$

oder

$$\cos z = \cos (\varphi - \delta) \cos N, \quad \operatorname{sem} N = \cos \varphi \cos \delta \operatorname{sem} t \sec (\varphi - \delta).$$

Definition der Funktion $\operatorname{sem} x$ in Fußnote 349.

Differentialausdruck:

$$dz = \cos a \, d\varphi - \cos p \, d\delta + \cos \delta \sin p \, dt.$$

Anwendungen in Nr. **44**.

5) Nur selten wird man bei der Berechnung des sphärisch-astronomischen Grunddreiecks (p. 155, Fig. 2) mit Vorteil Gebrauch machen von den *Gauß*'schen (*Delambre*'schen) *Formeln*[354]; ein Fall, in dem dies zuträfe, wäre die strenge direkte Berechnung der miteinander verknüpften Dreiecke im Zweihöhenproblem (vgl. Nr. **17**).

Eine Gruppe der *Gauß*'schen *Formeln* lautet:

$$\cos\frac{z}{2}\sin\frac{a-p}{2} = \sin\frac{t}{2}\sin\frac{\varphi+\delta}{2},$$

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{a-p}{2} = \cos\frac{t}{2}\cos\frac{\varphi-\delta}{2},$$

$$\sin\frac{z}{2}\sin\frac{a+p}{2} = \sin\frac{t}{2}\cos\frac{\varphi+\delta}{2},$$

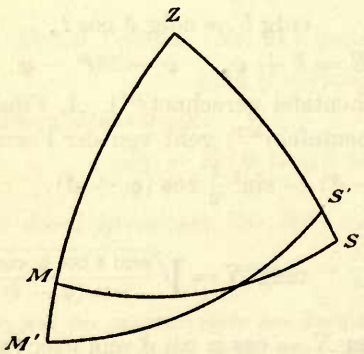
$$\sin\frac{z}{2}\cos\frac{a+p}{2} = \cos\frac{t}{2}\sin\frac{\varphi-\delta}{2}.$$

Die *Neper*'schen *Analogieen* nehmen für unser Dreieck folgende Gestalt an:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{a-p}{2}}{\operatorname{tang}\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\delta}{2}}, \quad \frac{\sin\frac{a-p}{2}}{\sin\frac{a+p}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi+\delta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{z}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{a+p}{2}}{\operatorname{tang}\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{\varphi+\delta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\delta}{2}}, \quad \frac{\cos\frac{a-p}{2}}{\cos\frac{a+p}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{z}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi-\delta}{2}}.$$

6) Unter den zahlreichen für die *Reduktion einer Monddistanz* (Nr. **33**) *auf das Erdzentrum* angegebenen Methoden sei nur die schon im Jahre 1739 von *R. Dunthorne*[206]) aufgestellte mitgeteilt. Sie ist jene, die unmittelbar aus der Betrachtung der sphärischen Dreiecke hervorgeht. Es sei



M wahrer Mondort
M' scheinbarer Mondort
S wahrer Gestirnsort
S' scheinbarer Gestirnsort
Z Zenit

Fig. 3:
Reduktion von Monddistanzen.

354) *J. B. J. Delambre,* Conn. des temps pour 1809 (Paris 1807), p. 445. *K. B. Mollweide,* Monatl. Corr. 18 (1808), p. 400. *C. F. Gauß,* Theoria motus corp. coel., Hamburgi 1809, art. 54 = Werke 7 (1871), p. 60.

H' die scheinbare Höhe des Mondes,

H die wahre Höhe des Mondes (befreit von Refraktion und Parallaxe),

h' die scheinbare Höhe des Gestirns,

h die wahre Höhe des Gestirns,

D' die scheinbare Distanz,

D die wahre Distanz,

so ist die wahre Distanz mit der scheinbaren verbunden durch die Relation

$$\cos D = \cos(H - h) - [\cos(H' - h') - \cos D'] \frac{\cos H \cdot \cos h}{\cos H' \cdot \cos h'}.$$

Zur Erleichterung der Berechnung des letzten Faktors dieser Formel führen ältere nautische Tafeln und Ephemeriden eine Tafel der „logarithmischen Differenz" mit[355]).

Die Abplattung des Erdsphäroids hat hier natürlich keine Berücksichtigung erfahren.

Unter den neueren Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie als Hilfswissenschaft der praktischen Astronomie sind hervorzuheben:

E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1885; 2. Aufl. Stuttgart 1897.

F. Bohnert, Ebene und sphärische Trigonometrie, Leipzig 1900 (Sammlung Schubert Nr. 3).

50. Weitere Literatur.

Einige Schriften, für die weder in der eingangs (p. 82) gegebenen Übersicht, noch im Text und in den Anmerkungen eine Gelegenheit zum Zitat sich fand, mögen hier noch zusammengestellt werden.

I. Allgemeine Lehrbücher.

J. Pasquich, Epitome elementorum astronomiae sphaerico-calculatoriae. Pars prima et secunda, Viennae 1811.

J. J. Littrow, Theoretische und praktische Astronomie. Erster und zweiter Teil, Wien 1821.

G. A. Jahn, Praktische Astronomie. I. Teil, Berlin 1834; II. Teil, Berlin 1835.

A. Steinhauser, Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojektion, Wien 1857; 3. Aufl. 1887.

G. Neumayer, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, Berlin 1875; 2. Aufl. 1888.

---

355) Die „logarithmische Differenz" $\log \frac{\cos H}{\cos H'}$ und deren „Korrektion" $\log \frac{\cos h}{\cos h'}$ tabuliert z. B. *E. Bobrik,* Handbuch der praktischen Seefahrtskunde (3 Bände, Leipzig 1848) im 3. Band (Tafeln), p. 361—369, Tabellen 72—74.

F. Melde, Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung, Tübingen 1876.
B. Peter, Anleitung zur Anstellung geographischer Ortsbestimmungen auf Reisen, Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig, 22. Jahrg. 1880 (Leipzig 1881), p. 55—106.
H. C. E. Martus, Astronomische Geographie. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik, Leipzig 1880; 3. Aufl. (Astronomische Erdkunde), Dresden und Leipzig 1904.
H. A. E. Faye, Cours d'Astronomie de l'École polytechnique, 2 vols., Paris 1881—83.
K. Israel-Holtzwart, Elemente der sphärischen Astronomie, Wiesbaden 1882.
Th. Epstein, Geonomie (mathematische Geographie) gestützt auf Beobachtung und elementare Berechnung, Wien 1888.
K. Geißler, Mathematische Geographie, Leipzig 1900 (Sammlung Göschen).
S. Günther, Astronomische Geographie, Leipzig 1902 (Sammlung Göschen).
P. Güßfeldt, Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen, Braunschweig 1902.
W. Schmidt, Astronomische Erdkunde, Leipzig und Wien 1903.
E. Gelcich, Die astronomische Bestimmung der geographischen Koordinaten, Leipzig und Wien 1904.

NB. Eine umfassende Anwendung der fundamentalen Methoden der Ortsbestimmung bieten die von *A. Auwers* bearbeiteten Beobachtungen zur Ermittelung von Ortszeit und geographischer Lage der Deutschen Venusstationen von 1874 und 1882 in: *A. Auwers,* Die Venusdurchgänge 1874 und 1882, Bericht über die Deutschen Beobachtungen, Bd. VI, Berlin 1896, p. 187.

II. Monographieen.

A. v. Heiligenstein, Dissertatio methodos elevationem poli astronomice determinandi sistens, Mannheim 1829.
G. R. Fockens, Commentatio de methodis, altitudinem poli, tam terra, quam mari, accuratissime definiendi, Leiden 1831.
— Diversae methodi, quibus locorum longitudo in mari definiri possit, Leiden 1831.
F. G. W. Struve, Anwendung des Durchgangsinstruments für die geographische Ortsbestimmung, St. Petersburg 1833.
— Sur l'emploi de l'instrument des passages pour la détermination des positions géographiques, St. Pétersbourg 1838.
C. Th. Albrecht, Über die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hilfe des elektrischen Telegraphen, Diss. Leipzig 1869.
M. Vodušek, Bestimmung der Zeit, des Meridians und der geographischen Breite eines Ortes, Laibach 1878.
C. Koppe, Die Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, Weimar 1889.

III. Tafelwerke.

H. C. Schumacher:
— (1) Hülfstafeln zu Zeit- und Breitenbestimmungen, Copenhagen 1820.
Von 1821 an trennt *Schumacher* die Tafeln von dauernder Gültigkeit (3) von den Ephemeriden (2):
— (2) Astronomische Hülfstafeln für 1821—1829, jährlich, Copenhagen;
— (3) Sammlung von Hülfstafeln, erstes Heft, Copenhagen 1822, neu hrsg. und vermehrt von *G. H. L. Warnstorff*, Altona 1845.
W. Jordan, Mathematische und geodätische Hülfstafeln, Stuttgart 1878; 9. Aufl. Hannover 1895.

IV. Ephemeriden[356]).

Eine Ephemeride erscheint in Bänden, die je nur für ein im Titel genanntes Jahr gelten, bis zu 5 Jahren im voraus. Eine Auswahl unter denen, die heute noch bestehen, sei hier mit Angabe des ersten Geltungsjahres mitgeteilt.

1679: *Connaissance des temps* ou des mouvements célestes, pour le méridien de Paris, pour l'an . . ., Paris.

1767: The *Nautical almanac* and astronomical ephemeris for the year . . , for the meridian of the Royal Observatory at Greenwich, Edinburgh (bis 1902 London).

1776: *Berliner astronomisches Jahrbuch* für . . . mit Angaben über die Oppositionen der Planeten (1) — · · · für . . . Herausgegeben von dem königl. astronomischen Rechen-Institut, Berlin.

1792: *Almanaque náutico* para el año . . ., San Fernando.

1798: *Annuaire* pour l'an . . ., publié par le Bureau des longitudes, Paris.

1852: *Nautisches Jahrbuch* oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr . . ., Berlin.

1855: The *American Ephemeris* and Nautical almanac for the year . . ., Washington.

1862: *W. Ludolph,* Kleines nautisches Jahrbuch für . . ., Bremerhaven.

1869: *Mittlere Örter* von 622 Sternen und scheinbare Örter von 450 Sternen nebst Reduktionstafeln für das Jahr . . . (Sonderabdruck aus dem Berliner astronomischen Jahrbuch), Berlin.

1887: *Astronomisch-nautische Ephemeriden* für das Jahr . . . (deutsche Ausgabe) Triest; *Effemeridi astronomico-nautiche* per l'anno . . ., Trieste.

V. Nautische Astronomie.

a. Lehrbücher und Monographieen.

F. Schaub, Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie, Triest 1853; 3. Aufl. bearb. von *E. Gelcich,* Wien 1878.

W. v. Freeden, Handbuch der Nautik und ihrer Hülfswissenschaften, Oldenburg 1864.

H. Faye, Cours d'astronomie nautique, Paris 1880.

Sir *William Thomson* [Lord *Kelvin*], Popular lectures and addresses, vol. 3: Navigational affairs, London and New York 1891.

W. Doellen, Aufruf zur Umgestaltung der nautischen Astronomie, Dorpat 1893 nebst Anhang 1896 [Festschrift zu *Wilhelm Struve*'s 100. Geburtstag].

J. B. Guilhaumon, Éléments de cosmographie et de navigation précédés de notions de trigonométrie sphérique, 2. éd. Paris-Nancy 1897.

G. Naccari, Astronomia nautica, Milano 1898 (Manuali Hoepli).

L. de Ribera y Uruburu, Tratado de Navigación, Madrid 1903.

b. Tafelwerke.

G. Margetts, Horary tables, London 1790.

J. de Mendoza y Rios, Coleccion de tablas para varios usos de la navigacion, Madrid 1800; Edicion corregida y augmentada por *J. J. Martinez de Espinosa y Tacon,* 2 vols., Madrid 1850. Vgl. Conn. des temps pour 1808, p. 443 ff.

---

356) Über Ephemeriden vgl. p. 67 und p. 69, in historischer und kritischer Hinsicht auch *W. Valentiner,* Handwörterbuch der Astronomie, Breslau 1897—1902, 3^2 (1901), p. 461—464, in bibliographischer *J. C. Houzeau* et *A. Lancaster,* Bibliographie générale de l'Astronomie, Bruxelles 1882—89 (*Houzeau-Lancaster*), 1 (1887), Nr. 14339—15880.

J. W. Norie, A complete set of nautical tables, London 1803; A new and complete epitome of practical navigation, 13th ed. London 1852.

F. Domke, Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln, Berlin 1852; 10. Aufl. neu bearbeitet von *O. Canin,* 1900.

A. Breusing, Nautische Hülfstafeln, Bremen 1860; 7. Aufl. neu herausgegeben von *C. Schilling,* Leipzig 1902.

W. v. Freeden und *T. Köster,* Nautische Hülfstafeln, Oldenburg 1862.

W. Ligowsky, Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer, nautischer und astronomischer Tafeln, Kiel 1873; 4. Aufl. 1900.

Sir *William Thomson* [Lord *Kelvin*], Tables for facilitating *Sumner*'s method at sea, London and Glasgow 1876; übersetzt (Tafeln zur Erleichterung der Anwendung . . .) Berlin 1877.

H. S. Blackburne, A and B Tables for correcting the longitude and facilitating *Sumner*'s method on the chart, to be used also as azimuth tables, London 1883; 3d ed. 1903.

Terry y Rivas, Tablas de azimutes, Madrid 1884.

E. Guyou, Tables de poche donnant le point observé et les droites de hauteur, Paris und Nancy (bei Berger-Levrault) 1884.

C. Decante, Tables d'azimut pour tous les points situés entre les cercles polaires et les astres dont la déclinaison est comprise entre 0° et 48°, 7 vols., Paris 1889—1892.

H. Brunswig, Nautisches Allerlei, Hamburg 1898.

C. Behrmann, Nautische, astronomische, logarithmische und meteorologische Tafeln, 3. Aufl. Elsfleth 1900.

E. Knipping, Seetafeln, Hamburg 1903.

(Abgeschlossen im Oktober 1904.)

VI 2, 4. THEORIE DER UHREN.

Von

C. ED. CASPARI

IN PARIS.

Inhaltsübersicht.

1. Allgemeines.
2. Freies Pendel.
3. Kompensationspendel.
4. Isochronismus der Chronometerspirale.
5. Kompensationsunruhe.
6. Die Hemmung.
7. Störungen des Pendels.
8. Störungen der Chronometer.
9. Räder- und Triebwerk.
10. Zeitübertragung.
11. Gangformeln.
12. Geschwindigkeitsregulatoren.

Literatur.

Collection de mémoires relatifs à la physique, publiés par la Soc. Française de Physique, tome 4 (1889) et 5 (1891): [*C. Wolf*] Mémoires sur le pendule (*Collection*).

F. W. Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels, Berl. Abh. für 1826 (Berlin 1828/29) = *Bessel*, Abhdl. 3 (1876), p. 139 = Ostwalds Klassiker Nr. 7, Leipzig 1889 = Collection 4, p. 124 (*Bessel, Sekundenpendel 1826*).

U. Jürgensen, Mémoires sur l'horlogerie exacte, recueillis par son fils *L. U. Jürgensen*, Paris 1832.

Ed. Phillips, Mémoire sur le Spiral réglant des Chronomètres et des montres, Annales des mines (5) 20, Paris 1861, p. 1—107 (*Phillips, Mémoire 1861*). Abgedruckt in: J. de math. (2) 5 (1860), p. 313 ff. [gekürzt] und in: Paris mém. prés. (3) 18 (1868).

A. J. Yvon-Villarceau, Recherches sur le mouvement et la compensation des chronomètres, Obs. de Paris ann., mém. 7, Paris 1862 (*Villarceau, Recherches 1862*).

M. Immisch, Prize Essay on the Balance Spring and the Isochronal Adjustments, London 1872. Deutsch: Der Isochronismus der Spiralfeder, Weimar 1873, 2. Aufl. 1879.

H. Resal, Traité de Mécanique générale (3 tomes, Paris 1873—76), tome 3 (*Resal, Méc. gén. 3*).

Ed. Caspari, Études sur le mécanisme et la marche des chronomètres, Paris 1877 (deutsch von *E. Gohlke*, Bautzen 1893).

Yvon Villarceau et *A. de Magnac,* Nouvelle Navigation astronomique, Paris 1877 (*Villarceau - de Magnac*).

M. Großmann, Der freie Ankergang für Uhren, 2. Auflage 1896.

E. Gelcich, Skizze einer Geschichte der Chronometer, Berlin 1886.

Congrès international de chronométrie de 1889. Comptes rendus publiés par *Ed. Caspari*, Paris 1890 (*Congrès 1889*).

L. Lossier, Étude sur la théorie du réglage des montres (Journal Suisse d'horlogerie, Genève 1890), Genève 1890.

Ed. Caspari, Les chronomètres de Marine, Paris 1894.

Congrès international de chronométrie de 1900. Comptes rendus publiés par *E. Fichot* et *P. de Vanssay,* Paris 1902 (*Congrès 1900*).

In Bezug auf die technische Seite vgl. ferner:

L. Ambronn, Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde, 2 Bände, Berlin 1899 (*Ambronn*).

C. Stechert, Artikel „Chronometer" in: *Valentiner,* Handwörterbuch 1 (1897), p. 625 (*Stechert*).

E. Gerland, Artikel „Uhr, Pendeluhr" in: *Valentiner*, Handwörterbuch 4 (1902), p. 1—41 (*Gerland*).

Für Literatur über das Pendel vgl. den Artikel IV 7 (*Furtwängler*).

Bezeichnungen.

u	Winkel, um den ein drehbarer Körper zur Zeit t aus der Gleichgewichtslage herausgedreht ist.
u'	Maximum von u oder Schwingungsamplitude.
T	Schwingungsdauer $= \frac{1}{2}$ Periode.
l	Länge des einfachen Pendels.
λ	Länge des Sekundenpendels.
g	Schwerebeschleunigung.
k	Trägheitsradius in Bezug auf den Schwerpunkt.
A	Trägheitsmoment der Chronometerunruhe.
E	Elastizitätsmodul für Zug.
I	Trägheitsmoment des Querschnitts einer Lamelle.
$\mu = E \cdot I$	Biegungsmoment.
L	Länge der Spiralfeder.
ϱ	Krümmungsradius.
θ	Temperatur in Celsiusgraden.
γ	Ausdehnungskoeffizient.

1. Allgemeines. Eine Uhr besteht im allgemeinen aus dem Regulator, der Hemmung, dem Räderwerk und dem Triebwerk. Der *Regulator* ist ein Körper, der eine alternierende Rotationsbewegung ausführt (Pendel; System Unruhe — Spiralfeder). Die Pendel schlagen gewöhnlich die Sekunde, seltener $0^s.5$. Die Marinechronometer geben $0^s.5$, manchmal $0^s.4$ und seltener $\frac{1}{3}^s$.

Wir verstehen unter *Schwingungsdauer* die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen durch die Gleichgewichtslage (den toten Punkt); dieselbe ist in Wirklichkeit nicht immer genau gleich dem Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Elongationen. Die „Schwingungsdauer" ist nicht mit der *„Periode"* zu verwechseln, welche ihr Doppeltes ist.

Bei den Pendeluhren ist das mittlere *Intervall der Schläge* gleich der Schwingungsdauer, bei den Chronometern mit freiem Echappement umfaßt dasselbe eine volle Periode, zwei Schwingungsdauern, Hin- und Hergehen.

Die Periode muß konstant und unabhängig sein von den Einflüssen des umgebenden Mittels und äußerer Kräfte; das versteht man unter *Isochronismus.*

Die *Hemmung* verwandelt die alternierende Bewegung des Regulators in eine kontinuierliche und periodisch gleichförmige, welche sich auf das zählende Räderwerk überträgt, das seinerseits die Zeiger in Bewegung setzt.

Das *Triebwerk* hat den Zweck, die Bewegung in Gang zu halten. Die zum Umdrehen der Zeiger nötige Arbeit ist gegenüber den Reibungswiderständen zu vernachlässigen. Man kann also die Uhren als Maschinen betrachten, deren Nutzeffekt null ist.

Damit eine alternierende Rotationsbewegung isochron sei, genügt es, daß die den Regulator treibende Kraft stets dem Winkel u proportional sei, um den sich dieser aus der Gleichgewichtslage entfernt hat. Diese Bedingung ist hinreichend, aber, wie sich zeigen wird (p. 174), nicht notwendig, indessen ist sie in Praxis bei Pendeln, wie Spiralfedern, immer sehr angenähert erfüllt.

Die störenden Einflüsse sind im allgemeinen klein, und daher knüpft sich das Studium der Bewegung an das einer Gleichung der Form:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u = U, \tag{1}$$

wobei U als eine kleine Größe erster Ordnung zu betrachten ist. Ausgehend von dem bekannten Integral der homogenen Gleichung behandelt man die inhomogene nach den üblichen Approximationsmethoden. Am bequemsten ist die Methode der Variation der Konstanten, die zuerst *Ed. Phillips* auf unser Problem anwandte; ebenso hat man sich mit Erfolg der Methode der Reihenentwicklungen bedient. Insbesondere ist die geometrische Darstellung der geradlinigen Bewegung als Projektion einer gleichförmigen kreisförmigen hervorzuheben, bei welcher Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowohl,

wie die durchlaufenen Räume eine einfache Deutung finden. Wenn U Funktion von u allein und unabhängig von der Geschwindigkeit $\frac{du}{dt}$ ist, besteht das Integral der lebendigen Kraft. Man wird fernerhin sehen, wie *F. W. Bessel* das benutzt hat.

In Rücksicht auf die Kleinheit der Störungen darf man im allgemeinen das Prinzip der Superposition kleiner Bewegungen anwenden. Man behandelt dabei jede Störung so, als ob sie allein vorhanden wäre, und addiert zum Schluß algebraisch die einzeln berechneten Wirkungen. Es heißt dies, die Störungen als von erster Ordnung klein betrachten und Größen höherer Ordnung vernachlässigen.

Man wird im allgemeinen nicht alle Eigentümlichkeiten der Bewegung zu untersuchen haben, sondern sich mit der Bestimmung der Schwingungsdauer oder auch nur der Dauer einer ganzen Periode begnügen können. Es ist in der Tat nicht nötig, daß die Bewegung völlig symmetrisch ist, daß der Ausschlag nach der einen Seite genau so viel Zeit braucht, wie der Ausschlag nach der andern Seite. Letzteres gilt insbesondere für Chronometer.

Die Theorie des Räderwerks ist eine rein kinematische Aufgabe, die des Regulators und der Hemmung ist physikalisch-mechanischer Natur. In den meisten Fällen wird man sich in letzterer Hinsicht der elementaren Behandlung bedienen können; so wird man in der Elastizitätstheorie statt der sogenannten strengen Gleichungen die Prinzipien der Festigkeitslehre verwenden dürfen, um so mehr, als z. B. die Deformationen der Spirale nicht unendlich klein sind, wie es die mathematische Elastizitätstheorie voraussetzt. Man benutzt ferner die bekannten Gesetze der Reibung fester Körper und die üblichen Luftwiderstandsgesetze. Die Theorie wird daher für gewöhnlich nur Formeln liefern können, die durchaus noch der Bestätigung durch das Experiment bedürfen.

2. Das freie Pendel. Das *einfache* Pendel ist ein schwerer Punkt, der sich ohne Reibung auf einem in einer Vertikalebene liegenden Kreis vom Radius l bewegt. Die Gleichung:

$$l\frac{d^2u}{dt^2} + g\sin u = 0, \tag{2}$$

welche diese Bewegung bestimmt, hat zum Integral:

$$\sin\tfrac{1}{2}u = \sin\tfrac{1}{2}u'\,\mathrm{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

die Zeit t vom Durchgang durch die Gleichgewichtslage an gerechnet.

Die zwischen den Maximalelongationen $\pm u'$ liegende Schwingungsdauer ist gegeben durch:

$$(3)\quad T = 2K\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{1}{2}u' + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot2\cdot4\cdot4}\sin^4\frac{1}{2}u' + \cdots\right],$$

wobei K das vollständige elliptische Integral 1. Gattung ist.

Der Isochronismus besteht also nur für unendlich kleine Schwingungen. Eine durch ein Pendel regulierte Uhr wird bei wachsender Amplitude im Tag um die folgende Anzahl von Sekunden nachgehen:

Für	$u' =$	
	0°0	0ˢ00
	0.5	0.42
	1.0	1.66
	1.5	3.72
	2.0	6.60
	2.5	10.32
	3.0	14.88.

Was das Schwingungsgesetz für ein *physisches* („zusammengesetztes") Pendel angeht, das frei im leeren Raum um eine feste Achse schwingt, so genügt es, in der obigen Formel l durch $a + \frac{k^2}{a}$ zu ersetzen (a Abstand des Schwerpunkts von der Achse, k Trägheitsradius in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur Aufhängungsachse). Der Schnittpunkt einer Parallelen zur Aufhängungsachse im Abstand $a + \frac{k^2}{a}$ von der letzteren mit der Medianebene heißt *„Schwingungsmittelpunkt"* (*Huygens*). Bekanntlich sind Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt reziprok zueinander, ein Umstand, auf dem das Reversionspendel beruht.

Es existiert eine äußerst umfangreiche Literatur über die Verwendung des freien Pendels zu *Schweremessungen* (IV 7 (*Furtwängler*), Nr. **11—16**). Diese Arbeiten gehören nicht eigentlich zu unserem Thema, weil sie sich auf ein ohne Hemmung schwingendes Pendel beziehen, dessen Bewegung also nicht automatisch registriert wird, doch haben sie auch manche Resultate für die Theorie der Uhren ergeben.

Aufhängung. Infolge der Reibungswiderstände können die Amplituden weder unendlich klein sein, noch konstant bleiben. Um trotzdem den Isochronismus herbeizuführen, hilft man sich durch geeignete Aufhängungsarten. Die gebräuchlichste und beste besteht darin, das Pendel mit der festen Achse durch eine *Feder* — eine gewöhnlich sehr kurze elastische Lamelle — zu verbinden. Die Theorie dieser Einrichtung ist von *Bessel* entwickelt worden[1]). Die Bewegungs-

1) *F. W. Bessel*, Astr. Nachr. 20 (1843), p. 153 = *Bessel*, Abhdl. 2 (1876), p. 91.

gleichung wird dort nach dem *d'Alembert*'schen Prinzip aufgestellt, die Längen des Pendels und der Feder werden konstant, die elastischen Kräfte proportional der Krümmung der Feder gesetzt, und deren höhere Potenzen werden vernachlässigt. Man findet dabei das Integral der lebendigen Kraft in der allgemeinen Form:

$$c = [1 + 2f'(u)]\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2n^2[\cos u + f(u)], \tag{4}$$

wobei

$$\begin{aligned} f(u) &= \alpha + \alpha' \sin \tfrac{1}{2}u + \alpha'' \sin^2 \tfrac{1}{2}u + \cdots \\ f'(u) &= \beta + \beta' \sin \tfrac{1}{2}u + \beta'' \sin^2 \tfrac{1}{2}u + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

kleine Größen von der Ordnung der Störungen sind, deren höhere Potenzen man vernachlässigen darf. Die Länge des mit dem wirklichen Pendel synchronen Pendels findet sich dann zu:

$$l = \frac{\pi^2\lambda}{n^2}\left\{1 + 2\beta + \frac{\alpha''}{2} + \sin^2\frac{1}{2}u'\left(\beta'' + \frac{3\alpha^{IV}}{4}\right) + \cdots\right\}. \tag{6}$$

In unserem speziellen Falle ergibt sich für l ein ziemlich komplizierter Ausdruck, der von den Dimensionen und der Elastizität der Feder, sowie dem Gewicht des Pendels abhängt und einen dem Quadrat der Amplitude u' proportionalen Term enthält. Experimentell ist derselbe von *Laugier* und *Winnerl*[2]) verifiziert worden. Wir führen hier die Dauer von 2000 Schwingungen in Sekunden Sternzeit für drei Pendel bei Amplituden von 1^0, 3^0 und 5^0 an:

Gewicht der Pendellinse.	Federlänge.	$u' = 1^0$	$u' = 3^0$	$u' = 5^0$
2 kg	1 mm	$1977^s.0$	1975,86	1974,37
4 „	3 „	2024,96	2024,99	2024,99
8 „	3 „	2034,81	2034,92	2034,99

Die zweite Kombination ist merklich isochron.

F. W. Bessel hat auch die *Aufhängung an einem auf einem Zylinder abrollenden Faden* studiert. Vernachlässigt man die Elastizität des Fadens, so ist die Länge des synchronen einfachen Pendels gleich der vertikalen Ordinate des Schwingungsmittelpunktes vom Zylindermittelpunkt an gerechnet. Berücksichtigt man die mehr oder weniger vollkommene Elastizität des Fadens, so muß man Hypothesen machen über die Art, in der er sich dem Zylinder anschmiegt, und die Diskussion wird schwieriger[3]).

Der Einfluß der Hemmung, der Widerstände, der *Aufhängung an einer Schneide* wird unten behandelt (Nr. **6** und **7**).

Der Uhrmacher reguliert das Pendel, indem er die Federlänge

2) *P. A. E. Laugier*, Paris C. R. 21 (1845), p. 117.

3) *Bessel*, Sekundenpendel 1826.

ändert und die Linse verschiebt. Die letzten Gangkorrektionen werden mit Hilfe kleiner Aufsatzgewichte bewirkt oder auch durch Verschiebung einer beweglichen Masse längs der Pendelstange. Die Rechnung zeigt, daß ein *Zusatzgewicht* in gleichem Abstand vom Drehpunkt und Schwingungsmittelpunkt ein Maximum des Einflusses hat.

3. Kompensationspendel. Die Dimensionen eines homogenen Pendels hängen von der Temperatur ab. Dadurch verschiebt sich der Schwerpunkt und das Trägheitsmoment ändert sich, was beides die Länge des synchronen einfachen Pendels ändert. Zur Beseitigung dieser Wirkung setzt man den schwingenden Körper aus Stücken von verschiedenem Ausdehnungskoeffizienten zusammen.

Die üblichsten Anordnungen sind: 1) Das Rostpendel, eine schwere Linse, die an einem Gestänge von Stäben aus verschiedenen Metallen hängt. 2) Das Quecksilberkompensationspendel, Stab aus einem Metall, der ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß trägt. 3) In den letzten Jahren hat man Pendel aus Nickelstahl, sogenanntem „Invar" konstruiert, der einen sehr geringen Ausdehnungskoeffizienten besitzt, welcher durch eine Linse aus Messing oder aus gewöhnlichem Stahl kompensiert wird.

Die Länge des synchronen Pendels:

$$l = a + \frac{k^2}{a} = \frac{M(a^2 + k^2)}{Ma} \tag{7}$$

ist der Quotient aus dem Trägheitsmoment durch das statische Moment. Damit sie konstant bleibt, muß ihre Derivierte nach der Temperatur für alle Werte der letzteren verschwinden. Es genügt also nicht, wie man es lange gemacht hat, a konstant zu halten, da die Konstanz von a noch nicht die von k mit sich zieht. Das Problem besteht in aller Allgemeinheit darin, *a und k* als Funktionen der Temperatur θ auszudrücken und die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von θ zum Verschwinden zu bringen. Das liefert die für die Kompensation erforderlichen Bedingungen zwischen den Dimensionen der Stücke, ihren Ausdehnungskoeffizienten usw. Ein Beispiel hat *E. Anding*[4]) gegeben mit Anwendung auf die Kompensation einer *Riefler*'schen Pendeluhr. Als Unbekannte wählt man die verfügbaren Abmessungen, und die Rechnung reduziert sich auf die Lösung einer Anzahl numerischer Gleichungen. Die Rechnungen sind elementarer Natur, die Koeffizienten setzen sich nur aus Trägheitsmomenten zusammen, die auf bekannte Art zu berechnen sind. In Wirklichkeit greift man aber das Problem nicht in dieser Allgemeinheit an, man gibt vielmehr

4) *E. Anding*, Astr. Nachr. 133 (1893), p. 217.

von vornherein die allgemeine Anordnung des Pendels und die variierbaren Stücke. Auch dann sind die Rechnungen noch lang, besonders wenn man die zweiten Potenzen der Dilatation berücksichtigen will, und die direkte strenge Lösung ist nicht möglich, wie *Faddegon* gezeigt hat[5]).

Ein anderes Beispiel aus einer Arbeit von *Oudemans*[6]) möge den zu befolgenden Gang andeuten. Es handelt sich um ein Pendel mit Quecksilberkompensation, an dem zu gleicher Zeit ein *Krüger*'sches Manometer[7]) zur Beseitigung des Einflusses der Luftdruckschwankungen angebracht war (s. Nr. 7c, p. 179). Auf Grund der gegebenen Abmessungen des Pendels selbst bestimmt eine erste Rechnung, wieviel Quecksilber man zugießen muß, damit das Pendel Sekunden schlägt. Dann führt man das Manometer in die Rechnung ein und fragt, um welchen Betrag das Quecksilbergefäß zu senken ist, um die Schwingungsdauer von 1 Sekunde wiederherzustellen. Mit diesen Elementen berechnet man die Gangänderung des Pendels für 1^0 Temperaturerhöhung. Schließlich stellt man die Bedingungen für das Verschwinden dieser Gangänderung unter Wahrung der Schwingungsdauer auf, wobei man als Unbekannte drei Größen einführt, einen Zusatz an Quecksilber, eine Verschiebung des Manometers und eine des Quecksilberbehälters. Diese Gleichungen werden durch allmähliche Annäherungen gelöst, wobei für gewöhnlich die zweite genügen würde. *Oudemans* ist bis zur vierten gegangen.

Neben der mittleren Temperatur des Raumes, in dem sich das Pendel befindet, kommt noch die Änderung der Temperatur mit der Höhe („Temperaturschichtung") in Frage, wie *B. Wanach*[8]) untersucht hat.

Für Pendel aus „Invar" (Nickelstahl mit sehr geringem Ausdehnungskoeffizienten) verringern sich die Einflüsse und vereinfachen sich die Rechnungen[9]).

Faktisch lassen sich die Temperaturkompensationen in großer Vollkommenheit ausführen und geschickte Künstler erreichen mit Sicherheit eine Gangdifferenz von weniger als $0^s.5$ zwischen den extremsten Temperaturen. Aus einer Zusammenstellung von *J. Hartmann*[10]) erhellt z. B., daß von 27 Pendeluhren nur fünf eine Gang-

5) *J.-M. Faddegon*, Congrès 1900, p. 16.

6) *J. A. C. Oudemans*, Astr. Nachr. 100 (1881), p. 17.

7) *A. Krüger*, Astr. Nachr. 62 (1864), p. 279.

8) *B. Wanach*, Astr. Nachr. 166 (1904), p. 97.

9) Siehe *Ch. Ed. Guillaume*, Congrès 1900, p. 90—112.

10) *J. Hartmann*, Über den Gang einer mit *Riefler*'schem Pendel versehenen Uhr, Leipzig Ber. (math.-phys. Cl.) 49 (1897), p. 664.

änderung größer als $0^s.025$ für 1^0 C. zeigen. Die Proportionalität zwischen den Gangänderungen und der Temperatur besteht innerhalb der Genauigkeitsgrenze astronomischer Zeitbestimmung.

4. Isochronismus der Chronometerspiralen. Die Benutzung der Spiralfeder als Regulator geht auf *Chr. Huygens* zurück. Die ersten zu diesem Zweck verwandten Federn hatten die Form von Archimedischen Spiralen, wie sie sich noch für Taschenuhren erhalten hat. Für Marinechronometer adoptiert man jetzt die Form der regulären Zylinderschraube. Der Querschnitt des Drahtes ist kreisförmig oder öfter rechteckig mit der Breitseite parallel der Schraubenachse.

Schwingungsgleichung der zylindrischen Spirale.

Man betrachtet die Feder als auf die neutrale Linie (Ort der Schwerpunkte der einzelnen Querschnitte) reduziert und nimmt nach der Festigkeitslehre an, daß das Drehmoment der elastischen Kräfte der Änderung der Krümmung für jedes Element proportional ist.

Phillips und *Resal*[11]) haben gezeigt, daß, wenn der ursprüngliche Querschnitt kreisförmig ist und die angreifenden Kräfte sich auf ein Kräftepaar reduzieren, die Theorie der neutralen Linie zu Ergebnissen führt, die mit denen der strengen Elastizitätstheorie übereinstimmen.

Indem wir die schwache Steigung der Spiralen vernachlässigen, werden wir jede von ihnen als einen Kreis, der normal und konzentrisch zur Achse der Unruhe liegt, betrachten. Wir beziehen die Spirale auf drei rechtwinklige Achsen, OZ falle mit der Figurenachse zusammen. Die Feder ist mit ihrem einen Ende an der „Platine" des Chronometers, mit dem andern an der Spiralrolle der Unruhe befestigt. Dreht man daher die Unruhe um den Winkel u aus ihrer Gleichgewichtslage, so wird die totale Variation der Krümmung der Spirale gleich u sein. Die an dem einen Ende der Spirale angreifenden Kräfte zerlegt man in ein Kräftepaar G und in eine Kraft mit den Komponenten X, Y, $(Z = 0)$, welch letztere dem Druck der Unruhe auf ihre Achsenlager gleich ist. Bezeichnet man mit ϱ und ϱ_0 den tatsächlichen und den anfänglichen Krümmungsradius, mit x und y die Koordinaten eines Punktes der Spirale, mit x_1 und y_1 die ihres Schwerpunktes, so genügt das von der Unruhe auf die Spirale ausgeübte Drehmoment G der Gleichung:

$$\mu\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) = G + (Yx - Xy). \tag{8}$$

11) *Phillips,* Mémoire 1861, p. 95. — *Resal,* Méc. gén. 3, p. 456 ff.

Multipliziert man hier mit ds und integriert über die ganze Länge der Spirale, so folgt:

$$\mu u = GL + L(Yx_1 - Xy_1).$$

Vernachlässigt man daher die geringe Masse der Spirale, so wird die Bewegungsgleichung der Unruhe:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{\mu u}{L} + Xy_1 - Yx_1. \tag{9}$$

Isochronismus durch Endkurven. Sätze von Ed. Phillips[12]).

Phillips nimmt sich vor, die Terme $Xy_1 - Yx_1$ zum Verschwinden zu bringen, indem er den beiden Enden der Spirale eine von der Kreisform abweichende Gestalt gibt. Die reduzierte Gleichung:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{\mu u}{L} \tag{10}$$

führt dann zu einer isochronen Bewegung.

Jene Terme verschwinden, wenn X und Y ständig verschwinden. Man hat also auszudrücken, daß bei der Deformation der Spiralen nach dem Gesetz $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{u}{L}$, das heißt, wenn in jedem Punkte der Spirale die Krümmungsänderung dem Ausschlagwinkel proportional bleibt, die Bedingungen für die Lagerung der Enden erfüllt sind. Tut man das, so findet man[12]): 1) Der Schwerpunkt jeder Endkurve muß auf dem Radiusvektor liegen, der senkrecht steht auf dem Radiusvektor des Ansatzpunktes der Endkurve an die Spirale. 2) Die Distanz dieses Schwerpunktes von der Achse der Spirale muß eine dritte Proportionale zwischen der Länge l der Endkurve und dem Radius ϱ_0 der Spirale sein:

$$\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = \frac{\varrho_0^2}{l}.$$

3) Der Schwerpunkt der ganzen Feder im spannungsfreien Zustand muß in die Achse der Unruhe fallen. Er bleibt dann auch während der Bewegung dort in solcher Weise, daß nicht nur X und Y, sondern auch x_1, y_1 zu vernachlässigen sind.

Unter diesen Bedingungen wird die Schwingungsdauer:

$$T = \pi\sqrt{\frac{AL}{\mu}}. \tag{11}$$

Phillips bestimmt seine Kurven graphisch durch methodische Versuche. *Guillaume* hat ein mechanisches Verfahren für ihre Konstruktion angegeben[13]).

12) *Phillips,* Mémoire 1861, p. 24—27. — *Resal,* Méc. gén. 3, p. 460 f.
13) *Ch. Ed. Guillaume,* Congrès 1900, p. 195—197.

Phillips hat die konzentrische Abwicklung seiner Spiralen experimentell bestätigt, er hat ferner mit einer elastischen Wage die Proportionalität zwischen der Kraft und dem Elongationswinkel u' im Gleichgewichtszustand geprüft und schließlich auch die Genauigkeit der Formel (11) festgestellt[14]).

Isochronismus durch Längenabstimmung.

Pierre Leroy und *F. Berthoud* stellten den Isochronismus her, indem sie der Spirale eine geeignete Länge gaben.

Indem ich voraussetzte[15]), daß die Spirale in der Ruhelage eine vollkommene Schraube ist und sich bei der Bewegung, wie das Experiment zeigt, nur wenig von dieser Form entfernt, habe ich die Werte von X, Y, x_1, y_1 berechnen können, die einem gegebenen Winkel u entsprechen. Führt man diese Ausdrücke in die Bewegungsgleichung ein, so wird diese

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\mu u}{AL} = -\frac{2\mu}{AL} u\left[\frac{2 - 2\cos\varphi_0 + u\sin\varphi_0}{p^2}\right]. \tag{12}$$

p bedeutet den ganzen Winkel der Schraube zwischen den beiden Fassungen, in der Ruhelage gezählt und in Bogenmaß gemessen. Es ist also $L = p\varrho_0$. Ferner ist $\varphi_0 = p + u$. Das Glied rechter Hand ist sehr klein, da p nahe gleich 20π ist, d. h. da die Spiralen im allgemeinen 10 Windungen haben. Wendet man daher die Methode der Variation der Konstanten an, so folgt als Korrektion der Schwingungsdauer (11):

$$\delta\tau = -\frac{2T}{p^2}[1 + (u' I^1(u') - I^0(u'))\cos p].$$

I^0 und I^1 sind die *Bessel*'schen Funktionen (s. unten). Diese Gleichung ist genau bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{p^3}$. Man sieht, daß $\delta\tau$ unabhängig von der Amplitude u' wird, wenn $\cos p = 0$ oder $p = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$. Jede Spirale besitzt also unter rechtem Winkel gegen die feste Fassung zwei gegenüberliegende Stellen, welche zum Isochronismus führen.

Man beachte, daß die Gleichung (12) für $p = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ übergeht in:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{\mu u}{AL}\left[1 + \frac{2(2 \pm \sin u \pm u\cos u)}{p^2}\right].$$

Das Drehmoment ist hier nicht proportional u. Diese Bedingung ist

14) *Phillips,* Mémoire 1861, p. 88, 88 ff., 76 ff.

15) *C. Ed. Caspari,* Études sur le Mécanisme et la marche des Chronomètres, in: Recherches sur les Chronomètres et instruments nautiques 11, Paris 1877. Deutsch von *E. Gohlke,* Bautzen 1893.

also, obwohl hinreichend, so doch nicht notwendig für den Isochronismus, wie schon oben (p. 165) erwähnt wurde.

Es sei noch daran erinnert, daß:

$$\pi I^0(u) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(u \sin\varphi)\, d\varphi, \qquad \pi I^1(u) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \sin(u \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Einfluß der Masse der Spirale. Dieser im vorhergehenden noch vernachlässigte Einfluß läßt sich auswerten für Spiralen mit konzentrischer Abwicklung. Nimmt man an, daß die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes der Spirale der Länge des vom festen Ende an gerechneten Bogens proportional ist und fügt den hieraus folgenden Massendruck dem der Unruhe hinzu, so ergibt sich eine Bewegungsgleichung, die auf ein elliptisches Integral führt. Durch Reihenentwicklung erhalte ich folgendes hinreichend genaue Resultat[15]): Bezeichnet δ^2 das Verhältnis des Trägheitsmomentes der Spirale zu dem der Unruhe, so ist die Schwingungsdauer:

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{\mu}} \left[1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{3\delta^2}{4p^2} u'^2\right]. \tag{14}$$

Für eine Stahlspirale der üblichen Form, 10 mm Durchmesser, erhalte ich für einen Rückgang der Amplitude von $\frac{3\pi}{2}$ auf $\frac{\pi}{2}$ eine Beschleunigung von 1^s pro Tag. Die Wirkung wäre 6 Mal größer für eine Goldspirale vom selben Radius. Sie ist übrigens der 4. Potenz des Radius proportional, so daß es sich empfiehlt, den Radius so klein wie möglich zu halten. Meine Experimente haben dieses Resultat qualitativ bestätigt, doch sind sie sehr schwierig.

Andrade hat die Näherung weiter getrieben und gefunden, daß die obige Störung mit $\frac{5}{4}$ multipliziert werden muß.

5. Kompensationsunruhen. Die Temperatur ist die hauptsächlichste Ursache der Änderung des Chronometerganges. Aus der Formel (11) folgt:

$$\frac{2\delta T}{T} = \frac{\delta A}{A} + \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta \mu}{\mu}. \tag{15}$$

Bei einer Unruhe aus Messing und einer Spirale aus Stahl findet man für eine Temperaturerhöhung von 1^0 ein tägliches Nachgehen von 11^s, wovon 2^s auf die beiden ersten Glieder und 9^s auf das letzte entfallen. Man sucht diesen Einfluß zu beseitigen allein mit Hilfe der Unruhe, indem man auf A wirkt. Die *Unruhe* besteht gewöhnlich in einem Rade mit im ganzen zwei diametral entgegengesetzten Speichen, der Umfang des Rades aus zwei verschiedenen, aneinander

gelöteten Metallstreifen, Stahl innen und Messing außen. Eine Stahllamelle bildet die Speichen und dicht neben dieser Lamelle ist der Reif durchschnitten, so daß jeder Halbkreis an seinem Ende von dieser Lamelle getragen wird. Da nun die Ausdehnung des Stahls kleiner ist als die des Messings, so schrumpft die Unruhe bei wachsender Temperatur zusammen, wobei also A abnimmt. Die Uhrmacher richten es so ein, daß sie Ganggleichheit bei den extremen Temperaturen, etwa 0^0 und 30^0 herstellen. Ist aber dies Resultat erreicht, so geht das Chronometer bei einer Temperatur von 15^0 um 2 bis 3 Sekunden täglich vor. Man nennt das den *sekundären* Fehler. Derselbe scheint hauptsächlich von dem zweiten Ausdehnungskoeffizienten der Metalle und der ungleichmäßigen Änderung des Elastizitätsmoduls abzuhängen (siehe unten).

Um δA ausdrücken zu können, muß man die Formänderungen von Reifen aus zwei Metallen berechnen. Das hat *Yvon Villarceau* ausgeführt[16]); er betrachtet zwei unendlich benachbarte Querschnitte eines Stabes und berechnet die Verlängerung eines zwischen ihnen eingeschlossenen Längsfadens. Indem er die Dickenänderung gegenüber der Längenänderung vernachlässigt, berechnet er die Spannungen, die aus dieser Deformation und aus dem Aneinanderhaften der durch Guß verbundenen Metalle hervorgeht, und schreibt die Bedingung dafür an, daß die Summe dieser Spannungen über den Querschnitt hin verschwindet. Er findet als Änderung der Krümmung der Trennungsfläche:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\theta - \theta_0}{h}, \tag{16}$$

wobei

$$h = \frac{2}{3}\,\frac{e' + e''}{\gamma'' - \gamma'}\left[1 + \frac{(E''e'^2 - E'e'^2)^2}{4e^2 E''e''E'e'}\right], \qquad e = e' + e''.$$

Es bedeutet e die Dicke, E den Elastizitätsmodul, γ den Ausdehnungskoeffizienten, und die einfachen Akzente beziehen sich auf das innere weniger ausdehnbare Metall. Die größte Wirkung tritt ein, wenn:

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}},$$

und in diesem Falle gilt

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{3}{2e}(\gamma'' - \gamma')(\theta - \theta_0).$$

Ferner wird der Ausdehnungskoeffizient der Trennungsfläche:

$$\gamma = \frac{e'\gamma'' + e''\gamma'}{e' + e''}.$$

Die Veränderlichkeit des Ausdehnungskoeffizienten mit der Temperatur

16) *Villarceau*, Recherches 1862.

kann man einfach berücksichtigen, indem man γ durch $\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}\theta$ ersetzt.

Ein Kreisring bleibt bei Änderung der Temperatur immer ein Kreisring. Ein gerader Stab krümmt sich zu einem Kreisbogen. In jedem der Teilstäbe gibt es einen spannungslosen Längsfaden.

Die vorstehenden Formeln gestatten die Änderungen der Trägheitsmomente der verschiedenen Teile der Unruhe zu berechnen. Man kann dann für verschiedene Temperaturen die Werte der rechten Seite von (15) aufstellen, und indem man sie der Null gleich setzt, hat man die entsprechende Anzahl Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen der Unruhe und der Spiralfeder. Die Beobachtung des Chronometers bei verschiedenen Temperaturen erlaubt die Werte der Änderungen δA, $\delta \mu$ und die Größe μ selbst zu bestimmen. Jede Temperatur, mit korrespondierendem Gange in (15) eingesetzt, gibt nämlich eine Bedingungsgleichung.

Yvon Villarceau deutet auch ein selbständiges Studium der Reife aus zwei Metallen durch optische Verfahren an[16]).

Phillips[17]) hat sich näher mit dem *sekundären Fehler* (s. oben) beschäftigt und gezeigt, wie man ihn durch geeignete Wahl des Materials der Feder und der Metalle der Unruhe herabmindern kann. Er hat sich auch die Aufgabe gestellt, den Anteil der Unruhe und der Spirale an diesem Fehler abzutrennen. *Cellérier*[18]) hat gezeigt, daß er nicht allein der Unruhe zur Last fällt, sondern auch der Spirale.

Was die Anwendungen betrifft, so sei auf die Berechnung der Unruhe *Winnerl* mit ebenen Lamellen[15]) hingewiesen, auf die Andeutungen von *Rozé*[19]) und auf die erfolgreichen Versuche von *Ch. Ed. Guillaume*[9]) mit Spiralen und Unruhen aus Nickelstahl. Es würde zu weit führen, die sehr mannigfaltigen Hilfskompensationen zur Vermeidung des sekundären Fehlers anzuführen, die man mit verschiedenem Glück versucht hat. Diese *Hilfskompensationen* sind im allgemeinen kleine Anhängsel an die Unruhe, die mit der Temperatur anders variieren als die Unruhe selbst. Bei den alten Chronometern kann die Kompensation innerhalb 2^s zwischen den Temperaturgrenzen von 0^0 und 30^0 verwirklicht werden, die neueren Versuche haben diese Grenze bis unter $0{,}5^s$ heruntergedrückt.

6. Die Hemmung. Die Hemmung stellt die Verbindung zwischen dem Regulator und dem Räderwerk her. Sie reguliert also den Gang

17) *Ed. Phillips,* Paris C. R. 90 (1880), p. 483, 561 et 649.

18) *G. Cellérier,* Étude numérique des Concours de Compensation, Genève Société de physique et d'histoire naturelle, mémoires 29 (Genève 1887), Nr. 6.

19) Congrès 1889.

des letzteren und überträgt auf der andern Seite soviel Arbeit des Triebwerks auf den Regulator, als nötig ist, dessen Bewegung trotz der Reibungswiderstände im Gang zu halten. Bei der *freien Hemmung* mit elastischen Federn berühren sich das Steigrad und der Regulator nur während der außerordentlich kurzen Dauer des Stoßes, das ist deshalb die wahre freie Hemmung. Bei der *Ankerhemmung* dauert die Berührung länger, findet aber auf kleineren Oberflächen statt, was die Reibung sehr vermindert. Sie findet bei jeder Schwingung statt, während bei der Chronometerhemmung die Unruhe den Stoß des Steigrades nur dann erhält, wenn sie wieder mit gleich gerichteter Geschwindigkeit zur gleichen Lage zurückkehrt, also nur einmal in einer vollen Periode. *Villarceau*[16]) betrachtet den Stoß als augenblicklich, das Rad *führt* die Unruhe nicht. Diese Stoßtheorie gilt in Wirklichkeit nur annähernd. Beim Fehlen aller Reibungswiderstände und für einen isochronen Regulator sind die Dauer und Stärke des Stoßes ohne Einfluß auf die Schwingungsdauer und wirken nur auf die Amplitude. Die Sachlage ändert sich, wenn man auf die Dämpfung der Schwingungen durch die Reibungswiderstände Rücksicht nimmt (s. unten). Die Theorie hat hier insbesondere die Trägheitsmomente des Steigrades und der Unruhe zu betrachten. *Resal*[20]) hat die Ankerhemmung unter Vernachlässigung der Reibung studiert und gezeigt, daß die Vermehrung der Winkelgeschwindigkeit des Regulators durch die Stöße des Ankers sehr gering ist, um so geringer, je größer die Schwingungsamplitude ist.

Das Wichtigste ist die Stellung der Unruhe, in welcher der Stoß erfolgt, ein Punkt, auf den wir in Nr. 8 (p. 180) zurückkommen werden.

7. Störungen des Pendels. *Bessel*[3]) hat die Formeln (4) und (6) auf die Untersuchung der verschiedenen Störungen des freien Pendels angewandt.

a) *Aufhängung an einer Schneide.* Anstatt das Pendel auf einer gradlinigen Kante auf der Unterlage aufliegend zu denken, setzt man voraus, daß die Schneide durch einen Zylinder zweiten Grades bestimmt wird. Die Lösung für einen Kreiszylinder führt auf elliptische Integrale. Soweit mir bekannt, ist keine Anwendung auf Uhrenregulatoren gemacht.

b) *Einfluß der Unterlage. Bessel* betrachtet die Schneidenaufhängung und nimmt an, daß es innerhalb der Schneide einen unbeweglichen Punkt gibt, in bezug auf welchen der Berührungspunkt sich verschiebt, mit andern Worten: der Berührungspunkt ist nicht Momentan-

20) *Resal*, Méc. gén. 3, p. 477 f.

zentrum. Die Länge des synchronen Pendels ändert sich dann um eine Größe, die von der Amplitude abhängt. Er glaubte, auch ein Gleiten des Pendels auf der Unterlage zu beobachten, welches im Sinne der Verlängerung des synchronen Pendels wirkt, ebenso wie später *Defforges*[21]). Später hat man Bewegungen der Unterlage selbst nachgewiesen, die der Reaktion des bewegten Pendels entspringen. *C. S. Peirce* und *G. Cellérier* haben diesen Einfluß der Berechnung zugeführt, indem sie die Verrückung der Unterlage proportional der Kraft setzten und die elastischen Schwingungen derselben vernachlässigten. Sie fanden eine Verlängerung des synchronen Pendels vom Betrage:

$$dl = \frac{p\varepsilon a}{l},$$

wobei p das Gewicht des Pendels und ε das Verhältnis der Verrückung zur wirkenden Kraft ist. Für Zwecke der Schweremessung kann man beide Wirkungen der Schneide und der Unterlage dadurch eliminieren, daß man mit zwei Pendeln von gleichem Gewicht aber ungleicher Länge arbeitet[22]). *Defforges*[21]) hat auch vorgeschlagen, die Wirkung der Unterlage zur Regulierung eines Pendels auf der Reise zu benutzen, indem man ihm eine elastische Unterlage von veränderlicher Länge gibt.

c) *Einfluß des umgebenden Mittels.* Es handelt sich hauptsächlich um die Wirkungen der Veränderung des Luftdrucks auf den Gang. Der Verlust an lebendiger Kraft durch die fortwährenden Stöße der Moleküle gegen das Pendel bewirkt eine Verminderung der Amplitude, welche die Schwingungsdauer ebenso wenig ändert, wie die Reibung. Die Wirkung des umgebenden Mittels besteht zunächst in einer Verminderung von g, entsprechend dem Archimedischen Auftrieb, ferner in einem Mitschleifen der benachbarten Flüssigkeitsteilchen. *Bessel* entwickelt die störende Wirkung in eine trigonometrische Reihe und erhält durch Einsetzen in (6) das Resultat, daß eine umgebende Flüssigkeit keine andere Wirkung hat, als die Schwere ein wenig zu vermindern und das Trägheitsmoment des Pendels zu vermehren. *G. G. Stokes* hat 1850 die Frage wieder aufgegriffen[23]) unter Berücksichtigung der inneren Reibung der Flüssigkeit auf Grund der von ihm entsprechend modifizierten hydrodynamischen Gleichungen. Seine Endgleichungen enthalten nur eine, experimentell bestimmbare Konstante (den Reibungskoeffizienten). Er fand diese Theorie vollständig durch *Baily*'s frühere Beobachtungen bestätigt[23]).

21) *Ch. Defforges,* Mémorial du dépôt général de la guerre 15, Paris 1894.
22) *R. Schumann,* Zts. Math. Phys. 44 (1899), p. 102.
23) *G. G. Stokes,* Cambr. Phil. Trans., 9 (1856), Part II (1851), p. [8]ff.

In Praxis bestimmt man das tägliche Nachgehen des Pendels bei 1 mm Luftdrucksteigerung. *Oudemans* gibt $0^s.0133$ für ein Pendel mit Quecksilberkompensation an, *Tisserand* findet $0^s.016$ für die Pariser Hauptuhr. Man korrigiert durch Rechnung, kompensiert durch ein Manometer[7])[6]) oder hält die Uhr in einem luftdichten Verschluß, worin der Luftdruck beträchtlich vermindert wird, wie dies *S. Riefler* tut. Die schon angeführte Arbeit von *J. Hartmann*[10]) gibt die Barometerkoeffizienten für 27 Uhren. In ganz luftleerem Raum oder auch in ganz trockner Luft kommt die Uhr zum Stillstand.

Weitere Ausführungen zu den hier angedeuteten Punkten findet man in dem Artikel IV 7 (*Furtwängler*), Nr. 6 und 7.

8. Störungen der Chronometer. Setzt man zunächst die Spirale an sich als isochron voraus, so wird der Gang des Chronometers durch Fehler des Räderwerks nicht beeinflußt, er hängt nur ab von den Reibungswiderständen, dem Stoß der Hemmung und den Veränderungen der Unruhe, kurz von der Kuppelung der Spirale mit einem andern mechanischen System. Wir setzen daher voraus, daß die Gleichung (10) für die Unruhe und die Spirale erfüllt ist.

Reibungswiderstände. Das Drehmoment der Reibung des Zapfens der Unruhe auf ihrer Unterlage, dem sogenannten Stein, kann in der Form $\pm \frac{\mu f}{L}$ dargestellt werden, wobei f ein kleiner, dem Reibungskoeffizienten proportionaler Winkel ist. Die Einführung dieses Terms in (10) ändert die Form des Integrales nicht, die Reibung ändert ja die Schwingungsdauer nicht, sondern verlegt nur abwechselnd den toten Punkt nach der einen und der andern Seite und reduziert allmählich die Amplitude. Die Wirkung der Zähigkeit des Öls ist analog, aber komplizierter, sie kann ein der Amplitude proportionales Glied einführen. Eine vollständige Untersuchung ist nicht vorhanden und scheint sehr schwierig[19]).

Der *Widerstand der Luft* ist seiner analytischen Form nach nicht erörtert. Indem ich ihn von der Form $\pm a + b\frac{du}{dt} \pm c\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \cdots$ voraussetzte, wo a, b, c sehr kleine Konstanten sind, und diesen Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (10) einführte, zeigte mir die Methode der Variation der Konstanten, daß die Schwingungsdauer nicht geändert wird, wenn man Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, daß aber die Amplitude bei jeder Schwingung verkleinert

= Collection 5, p. 277 ff. = *G. Stokes*, mathematical and physical papers, vol. 3 (Cambridge 1901.) [Anzeige: Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 337 ff.]. Bibliothèque universelle de Genève, Archives des sciences phys. et nat. (4) 21 (1852), p. 15 ff.

wird. *Yvon Villarceau*[16]) behandelt gleichzeitig die Wirkung der Reibung, des Widerstandes der Luft, den er durch einen Zusatz zu u der Form $\pm \frac{AL}{\mu} \eta \left(\frac{du}{dt}\right)^2$ in (10) darstellt, und des Stoßes der Hemmung. Letzteren berücksichtigt er, indem er $u'^2(1+v)^2$ an Stelle von u'^2 in der Gleichung der lebendigen Kraft, die das intermediäre Integral von (10) ist, schreibt.

Betrachtet man f, η und v als kleine Größen erster Ordnung und nennt u_1 den Abstand der Stellung, wo der Stoß stattfindet, vom toten Punkte, so findet man, daß die Dauer der doppelten Schwingung, das ist das Intervall der Schläge, vermindert wird um

$$\delta T = \frac{2T}{\pi \sin \varphi'} \left[2 \frac{u_1 - f}{u' - f} \left(\frac{f}{u' - f} + \frac{1}{3} u' \eta\right)\right], \tag{17}$$

wobei φ' wenig von $\frac{\pi}{2}$ abweicht. Dieser Ausdruck ist von der ersten Ordnung, wenn u_1 nicht sehr klein ist, und unabhängig von v. Wenn also der Stoß in einem gewissen Abstand vom toten Punkte stattfindet, so wird die Schwingungsdauer um einen Betrag geändert, der von der Amplitude, der Lagerreibung und dem Luftwiderstande abhängt. Die Folge ist ein Vorgehen, wenn der Stoß vor dem Durchgang der Unruhe durch die Gleichgewichtslage stattfindet, ein Nachgehen, wenn er später statthat.

Neuerdings haben *P. Ditisheim* und *Ch.-Ed. Guillaume*[24]) Experimente angestellt, woraus erhellt, daß in den Chronometern so gut wie in den Pendeluhren ein Mitschwingen der Luft stattfindet, wodurch das Trägheitsmoment der Unruhe wächst, also ein Nachgehen bei steigendem Luftdruck, analog dem von *Bessel*[3]) und *Stokes*[23]) gefundenen Ergebnis für das Pendel. Eine genaue Theorie für Chronometer fehlt noch zur Zeit.

Wird ein Chronometer frisch in Bewegung gesetzt, so ändert sich die Amplitude bis zu einer gewissen Grenze, wo die Arbeit des Triebwerks der der Widerstände gleich wird und sich ein stabiler Zustand herstellt, bei welchem die Amplitude vor allem von den geometrischen Formen der Hemmungseinrichtung abhängt, während sie von der Elastizität der stoßenden Teile merklich unabhängig ist. Diese Resultate lassen sich wenigstens auch qualitativ durch eine geometrische Betrachtung der Schwingungsbewegung erhalten.

Im vorstehenden ist f klein vorausgesetzt. *Rambal*[25]) hat in der

24) *P. Ditisheim,* Variations des Chron. avec la pression atmosph., Journal Suisse d'horlogerie, Genève 1904.

25) *L. Lossier,* Études sur la théorie du réglage des montres, Journal Suisse d'horlogerie, Genève 1890.

Weise Versuche angestellt, daß er am Zapfen der Unruhe eine starke Zusatzreibung anbrachte, welche die Amplitude der Schwingungen von 440° auf 190° reduzierte. Unter diesen Umständen ergab sich ein Nachgehen von 96^s mit Verlagerung des toten Punktes, aber man überschreitet hier weit die Grenzen der Theorie. Auf der andern Seite habe ich gezeigt, daß bei einer veränderlichen, aber schwachen, seitlichen Reibung im Falle der Spiralen ohne Endkurven, bei welchen X und Y nicht verschwinden, der Einfluß der Schwingungsdauer von der zweiten Ordnung ist. Man hat dann der rechten Seite der Gleichung (12) ein Glied

$$\pm \frac{\mu}{AL^2} fr\left[1 + \frac{u}{p} - \frac{\sin(p+u)}{p}\right] \sin\frac{p+u}{2}$$

hinzuzufügen, und die Variation der Konstanten gibt damit eine Korrektion für T, die aus der Summe zweier aufeinander folgender Schwingungen verschwindet[5])[11]). Es ist also nicht die Reibung, wie man schon geglaubt hat, die bei den Spiralen ohne Endkurven den Isochronismus herbeiführt.

Deformation der Unruhe infolge der Rotation. Die elastische Unruhe deformiert sich bei dem Hin- und Herschwingen. *Phillips*[26]) hat die entstehende Änderung des Trägheitsmomentes berechnet, die proportional zu $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ ist. Er hat zu dem Zweck die Bedingungen des Gleichgewichts der Unruhe unter den auftretenden Massendrucken gebildet. Die Bewegungsgleichung der Unruhe nimmt dann die Form an:

$$\left[A + b\frac{d^2u}{dt^2} + c\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{\mu}{L}u.$$

Da b und c klein sind, kann man in der Klammer die Ableitungen von u durch die Werte ersetzen, die sie in der ungestörten Bewegung haben. Man kann dann durch Variation der Konstanten integrieren und findet:

$$T = \pi\sqrt{\frac{AL}{\mu}}\left(1 + \frac{c}{8A^2}\sqrt{\frac{\mu}{L}}\,u'^2\right), \tag{18}$$

eine Formel, die eine Verlangsamung der großen Schwingungen anzeigt. Die tangentiellen Komponenten der Massendrucke sind ohne Einfluß auf die Schwingungsdauer, wie vorauszusehen war.

Für die gewöhnliche Anordnung ergibt sich die Beschleunigung bei Verminderung der Amplitude von $\frac{3\pi}{2}$ auf $\frac{\pi}{2}$ zu 11 Sekunden pro Tag in Übereinstimmung mit dem Experiment. Für die Unruhe *Winnerl* mit ebenen Lamellen ist sie viermal kleiner.

26) *Ed. Phillips,* Paris C. R. 67 (1868), p. 508.

Geneigte Chronometer. Das Chronometer wird bei horizontaler Stellung des Gehäuses reguliert. Eine Neigung ändert die Widerstände, und wenn Unruhe und Spirale nicht vollkommen zentriert sind, so kommt auch die Schwere ins Spiel. *Phillips*[27]) betrachtet das Chronometer bei vertikaler Stellung des Gehäuses und fügt der Gleichung (10) ein Glied hinzu, welches das Moment des Gewichtes p der Unruhe angibt, wenn sich ihr Schwerpunkt in einem Abstand λ von der Achse befindet. Ist β der Winkel dieses Abstandes mit der Vertikalen in der Gleichgewichtslage, so gibt die Ausführung der Integration:

$$(19)\quad T = \pi \sqrt{\frac{AL}{\mu}} \left[1 - \frac{p\lambda\mu}{L} \cos\beta \frac{I^1(u')}{u'}\right] \quad (I^1 \text{ } \textit{Bessel}\text{'sche Funktion}).$$

Die Gleichung $\frac{I^1}{u'} = 0$ hat eine Wurzel $u' = 219^0 44'$, für welche die Störung ihr Zeichen wechselt. Deren Betrag hängt noch von der Orientierung des Gehäuses in der Vertikalebene, die durch β angegeben wird, ab. Das Experiment hat diese Folgerung vollkommen bestätigt.

Dieselbe Theorie wäre auch noch auf ein horizontal stehendes Chronometer anzuwenden, dessen Unruhe permanenten Magnetismus angenommen hat und dessen Gang mit der Orientierung wechselt.

Anwendung auf die Spirale ohne Endkurven[15]). Diese Spirale ist isochron für $p = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, wenn man von den vorstehenden Störungen absieht. Da letztere alle von der Form mu'^2 sind, wo m eine Konstante ist, so gilt dasselbe von ihrer Summe, und um wirklichen Isochronismus zu erhalten, muß man die Gleichung

$$(20)\qquad mu'^2 - \frac{2}{p^2}\left[u' I^1(u') - I^0(u')\right] \cos p = \text{const.}$$

nach p auflösen. Dieselbe hat nicht für alle Werte von u' Lösungen. Setzt man aber $p = 20\pi \pm 100^0$, so ist das eine hinreichend genäherte Lösung für die Amplituden 158^0 und 229^0 mit einem Nachgehen von höchstens 1 Sekunde bei dazwischen liegenden Amplituden. Dieses Resultat stimmt mit den Erfahrungen der Uhrmacher überein.

Störungen durch äußere Kräfte. Wird eine Unruhe magnetisch, so ergibt sich ein mit der Orientierung der Chronometer veränderlicher Gang. Dieser Einfluß des Erdmagnetismus, analog dem der Schwere, kann, wie gesagt, durch die Formel (19) dargestellt werden, indem das magnetische Moment der Unruhe anstatt des Momentes der Schwere eintritt.

27) *Ed. Phillips,* Paris C. R. 58 (1864), p. 287 und p. 363.

Elektrische Kräfte geben auch Anlaß zu Störungen, die, obwohl qualitativ beobachtet, noch keine quantitative Bestimmung gefunden haben.

Ein Gleiches gilt von den Störungen, die von der Schiffsbewegung (Rollen und Stampfen, Stöße der Schiffsschraube usw.) herrühren. Gemäß den Experimenten, welche auf der Seewarte in Hamburg angestellt wurden, bestehen sie in der Regel in einer Beschleunigung des Ganges.

Die Luftfeuchtigkeit hingegen hat eine verzögernde Wirkung. Näheres hierüber, mit Literaturangaben, findet sich in dem *Handbuch der Navigation*[40]; hier mag dieser bloße Hinweis genügen, zumal diese Erfahrungsresultate keine theoretische Untersuchung veranlaßt haben.

9. Räderwerk und Triebwerk. Die Übertragung der Bewegung des Triebwerks auf die Zeiger und die Hemmung geschieht durch eine Reihe von Zahnrädern, deren Elemente leicht nach wohlbekannten Formeln zu berechnen sind. Das Zahnprofil ist im allgemeinen epizykloidisch mit geraden Seiten. Empfehlenswerter wäre etwa die Form einer Kreisevolvente. S. *Rozé*[19]). Um nicht zu viele Räder nötig zu haben, haben die Triebe nur eine kleine Zahl von Zähnen. Bei den Uhren, die den Gang des Mondes geben, greift man zu epizykloidischen Getrieben (Formel von *Willis*). Doch wird diese Komplizierung bei den Präzisionsuhren vermieden.

Die Reibung in dem Getriebe ist nach den Methoden der allgemeinen Mechanik zu berechnen[28]). Faktisch hat dieselbe nur Einfluß auf die Schwingungsamplitude, und wenn der Regulator isochron ist, so ist die Wirkung auf den Gang theoretisch null. Man darf freilich nicht vergessen, daß infolge der kleinen Anzahl Zähne der Triebe die Reibung außerordentlich veränderlich ist. Es treten Diskontinuitäten in der Winkelbeschleunigung auf, so oft die Berührung zwischen einem Paar von Zähnen aufhört und auf das nächste Paar übergeht. Es zeigt sich, daß die Reibung dem Abstand des Berührungspunktes der Zähne von der die Mitte der Räder verbindenden Geraden proportional ist. *Brillouin*[29]) hat außerdem hervorgehoben, daß die Zapfen einen seitlichen Druck erleiden, welcher die Rotationsachse verlegt und das Verhältnis der Geschwindigkeiten periodisch ändert. Er hat beträchtliche Amplitudenänderungen beobachtet, die aus allen diesen Umständen hervorgehen, und aus zahlreichen Experi-

28) *Resal,* Méc. gén.

29) *M. Brillouin,* Lois des variations d'amplitude du balancier, Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale (5) 4, Paris 1899, p. 689.

menten die Periodizität derselben nachgewiesen. Diese Amplitudenänderungen, die bei einem isochronen Regulator gleichgültig wären, bringen in Wirklichkeit kleine periodische Gangänderungen hervor, die um den täglichen Mittelwert des Gangs herumschwanken [29]).

In Pendeluhren bringen derartige Ursachen eine periodische Änderung der treibenden Kraft und der Amplitude der Schwingungen hervor [10]).

Triebwerk. Besteht die Triebkraft in einem Gewicht, so ist sie merklich konstant. Wird sie durch die Entspannung einer Feder geliefert, so ist sie veränderlich, die Amplituden nehmen von der Zeit des Aufziehens an ab. Das ist gleichgültig bei einer isochronen Spirale, trotzdem wendet man bei den Marinechronometern zur Vorsicht noch die Schnecke an.

Resal [29a]) hat auf die Triebfeder die Festigkeitslehre angewandt. Es handelt sich dabei im wesentlichen um das Problem der elastischen Kurve, für den speziellen Fall der ebenen an beiden Enden eingeklemmten Spirale. Ist der Winkel zwischen den beiden Enden ein Vielfaches von 2π, so wird das Drehmoment angenähert durch die Formel gegeben:

$$M = R(A\psi + B).$$

Dabei ist R der Radius der äußersten Windung, ψ der Winkel, um den die Spirale aufgezogen ist, A und B sind dem Biegungsmodul μ proportionale Konstante. Der Druck auf die Achse des Schneckenrades ist von erster Ordnung klein und verursacht nur eine unbedeutende Reibung. Diese Resultate stimmen mit dem Experiment überein.

Damit das übertragene Drehmoment konstant ist, muß die Horizontalprojektion der von der Kette auf der Schnecke beschriebenen Kurve eine Spirale sein, deren Gleichung die Form hat:

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{A}{B}\psi}}.$$

Um konstanten Anstieg dieser Kurve auf der Schnecke zu erhalten, wird man für den Meridianschnitt der Schnecke die durch die Gleichung

$$y = c\left(\frac{R^2}{x^2} - 1\right) \qquad (c \text{ eine Konstante})$$

bestimmte Form wählen.

29a) *Resal*, Méc. gén. 3, p. 399.

10. Zeitübertragung. Die Zeitübertragung von einer Normaluhr aus geschieht durch den elektrischen Strom; pneumatische Übertragung eignet sich für Präzisionsuhren nicht. Man schlägt dazu mehrere Wege ein:

a) die zweite Uhr hat weder Regulator noch Hemmung, bloß ein Zifferblatt mit Zeigern, welche elektrisch bewegt werden von einem Strom, dessen Perioden die Normaluhr bedingt; oder

die zweite Uhr ist eine vollständige, mit Pendel, Hemmung und eigener Triebkraft; dann kann die elektrische Verbindung beider, entweder

b) in längeren Zeitabständen stattfinden, wobei jedesmal eine einfache Einstellung auf Normalzeit geschieht, ein für wissenschaftliche Zwecke unzulängliches System; oder

c) sie findet bei jeder Schwingung statt. Die Aufgabe besteht darin, das Pendel der zweiten Uhr in genau synchrone Bewegung mit der Hauptuhr zu bringen, vorausgesetzt, daß die natürlichen Schläge beider Uhren schon annähernd gleich sind. Darin besteht das eigentliche *Synchronisieren.*

In allen diesen Fällen ist die erste Bedingung, daß der von der Normaluhr in Tätigkeit gesetzte Stromunterbrecher den Gang derselben nicht beeinflussen darf. Das erreicht z. B. *Riefler*[30]), indem er sein Pendel frei schwingen läßt und den Kraftersatz der Hemmung vermittelst der elastischen Aufhängung erteilt. *C. Wolf*[19]) hat eine auf der Pariser Sternwarte gebrauchte Einrichtung beschrieben, welche an der *Winnerl*'schen Uhr angebracht ist.

L. Foucault[31]) wurde von *H. Faye* veranlaßt, eine Uhr der Gattung a) herzustellen; er gibt dann Andeutungen über die Art und Weise, wie man zwei Elektromagnete, die von der Normaluhr beeinflußt werden, auf beiden Seiten des Pendels einer andern, vollständigen Uhr anbringen kann, so daß dieselben auf ein Stück weichen Eisens wirken, das an diesem Pendel haftet. Es ist dies die erste Andeutung des Verfahrens c); damit die Normaluhr die Oberhand behält, rät er an, die Triebkraft der zweiten Uhr mittels Veränderung der Hemmung derselben herabzudrücken.

R. L. Jones, mit *Ritchie*'s Hilfe[32]) erfand eine Vorrichtung, die von

---

30) *S. Riefler,* Die Präcisions-Uhren mit vollkommen freiem Echappement und Quecksilberpendel, München 1894.

31) Mitgeteilt von *H. Faye,* Paris C. R. 25 (1847), p. 380.

32) *F. J. Ritchie,* Edinburgh Scottish Society of arts Transactions 9, Part I, Edinburgh 1873, p. 61.

G. B. Airy[33]) mit kleinen Abänderungen angenommen ward. Zwei Magnete sind am Pendel der zweiten Uhr befestigt; auf beiden Seiten desselben stehen zwei Spulen, die der synchronisierende Strom durchläuft; die Magnete dringen nacheinander ganz in die bezügliche Spule. *Vérité*[34]) läßt einen Elektromagneten auf ein horizontales Stäbchen aus weichem Eisen wirken, welches am Pendel befestigt ist. *C. Wolf*[35]) hat diese Einrichtung ohne wesentlichen Unterschied auf sämtliche Uhren der Pariser Sternwarte angewendet.

Cornu[36]) hat eine allgemeine Theorie der synchronischen Verbindung zweier schwingenden Systeme entwickelt. Er zieht einen der Geschwindigkeit proportionalen Luftwiderstand in Betracht, und setzt eine kleine Verschiedenheit der freien Schwingungen beider Systeme voraus. Er kommt zu dem Schluß, daß die zu synchronisierende Bewegung *notwendig* gedämpft sein muß, um periodische Störungen der Amplitude und Phase zu vermeiden. Praktisch erreichte er mit einer ganz gewöhnlichen Uhr eine Übereinstimmung auf $^1/_{100}{}^{s}$.[19]) *C. Wolf*, welcher das System von *Vérité ohne* Dämpfung mit Erfolg gebraucht hat, wirft den Vorrichtungen mit Dämpfung vor, daß sie die synchronisierte Uhr zum Stehenbleiben bringen, wenn in der Stromunterbrechung eine Störung eintritt.

Diese entgegengesetzten Meinungen auszugleichen hat sich *Andrade*[37]) beflissen, und dieselben als einigermaßen gleichberechtigt erwiesen. Er geht aus von *Cornu*'s geometrischer Methode, in welcher die gedämpfte Bewegung durch eine logarithmische Spirale mit schiefen Achsen dargestellt wird, zieht aber, was *Cornu* unterließ, gleichzeitig mit der Dämpfung auch die Hemmung der synchronisierten Uhr in Rechnung[38]). Er findet so, daß man auf drei verschiedenen Wegen zum Ziel gelangen kann:

1) Nach *L. Foucault*'s Vorschlag, ohne andere Dämpfung als die natürliche Dämpfung der zweiten Uhr, indem man den Einfluß der Hemmung schwächt;

2) indem man die Amplitude derselben Uhr wachsen läßt;

3) indem man die natürliche Dämpfung durch eine elektrische

33) Vgl. *W. Ellis*, Description of the Greenwich time-signal system, Nature 14, London 1876, p. 51, 110; Wiederabdruck in Greenw. obs. 1879, Appendix, p. 4—5.

34) *Vérité*, Paris C. R. 56 (1863), p. 401 et p. 697.

35) *C. Wolf*, Paris C. R. 105 (1887), p. 1157.

36) *A. Cornu*, Obs. de Paris ann., mém. 13 (1876).

37) *J. Andrade*, Recherches sur la synchronisation des horloges, La France horlogère, Besançon, n° du 15. sept. 1903. Referat in: Bibliothèque Universelle, Archives des sciences psysiques et naturelles, 108 = (4) 6, Genève 1903, p. 611.

38) *J. Andrade*, Paris C. R. 137 (1903), p. 243 und 444.

verstärkt, die durch Induktion einer Spule oder einer Kupferröhre geschieht, die Hemmung und Amplitude aber unverändert beibehält.

11. Gangformeln. Es gibt keine vollkommene Uhr. Außer den Fehlern des Isochronismus, der Kompensation und all den oben aufgeführten Störungen treten noch aus zufälligen Ursachen Gangänderungen auf. Für die Chronometer zur See ist vielleicht die Wirkung des Rollens zu vernachlässigen[39]), aber gewiß nicht die der von der Schraube kommenden Erschütterungen und mancher anderer Ursachen. Diese unbestimmten Einflüsse können nur als zufällige Fehler behandelt werden; andere, wie die der Temperatur, sollen als systematisch betrachtet und der Rechnung zugeführt werden.

Die gebräuchlichen Formeln, die von der Voraussetzung der Kontinuität ausgehen, bestehen alle in der Darstellung des Ganges durch Taylorentwicklungen nach Potenzen der in Tagen gerechneten Zeit t und der Temperatur θ. Bei Pendeln fügt man gewöhnlich noch ein Glied für den Luftdruck hinzu, was unter Umständen auch für Chronometer zweckmäßig sein kann, für welche auch der Feuchtigkeitsgrad in Betracht zu ziehen ist[40]). Die von der Zeit abhängigen Terme enthalten unter anderem die Veränderung der Widerstände durch das Eintrocknen des Öls. Die numerischen Koeffizienten der Formeln werden aus möglichst zahlreichen Beobachtungen bestimmt, die nach den üblichen Verfahren bearbeitet werden (Methode der kleinsten Quadrate, Interpolation nach *Cauchy*, vgl. I D 3 (*Bauschinger*)). *B. Wanach*[41]) zeigt, daß zur Bestimmung des Temperatur- und Barometerkoeffizienten sich die Trennung des Materials in kürzere Epochen empfiehlt. Auch braucht man verschiedene graphische Hilfsmittel[39]). Die zufälligen Störungen offenbaren sich in den übrig bleibenden Fehlern. Bei den Chronometern erhält man dieselben durch Vergleichung mehrerer Uhren untereinander.

Bei den astronomischen Pendeluhren kann man sich im allgemeinen mit den ersten Potenzen der Zeit, der Temperatur und des Barometerstandes begnügen. Bei den Chronometern muß man Glieder zweiten Grades (entsprechend dem „sekundären" Fehler) bei der Temperatur mitnehmen. Die Mannigfaltigkeit der Typen verbietet die Aufstellung eines allgemeinen Gesetzes. Für die kreisförmige Unruhe aus Messing und Stahl mit Stahlspirale ist der Koeffizient von θ^2

39) *C. Ed. Caspari*, Les Chronomètres de Marine, Paris 1894 (mit Literatur).

40) *Hand*buch der Navigation, hrsg. vom *Reichs-Marine-Amt*, 3. Aufl. Berlin 1891. — *Lehr*buch der Navigation, hrsg. vom *Reichs-Marine-Amt*, Berlin 1901, 2, p. 268—269.

41) *B. Wanach*, Astr. Nachr. 167 (1905), p. 65.

ungefähr $0^s.014$. Er ist kleiner für die Palladiumspirale verbunden mit der Unruhe *Winnerl*; man kann sagen, daß gute Chronometer heute auf $0^s.5$ und weniger kompensiert sind.

Es ist schwierig, eine allgemeine Angabe über die Genauigkeit der besten Uhren zu machen. Die Genauigkeit der Uhren kann übrigens auf zwei verschiedene Weisen definiert werden: entweder man nimmt die absoluten Abweichungen des Ganges von einem gegebenen (Mittel-)Werte, oder man stellt den Gang durch eine Formel dar, und beachtet dann einerseits die Größe der Koeffizienten, andererseits, um wieviel die beobachteten Werte des Ganges von den berechneten abweichen. *Hartmann*[10]) hat für eine Anzahl astronomischer Pendeluhren die bezüglichen Koeffizienten zusammengestellt; man findet daselbst auch Hinweise auf die betreffende Literatur. Ferneres Material findet sich in den Jahresberichten des Geodätischen Instituts in Potsdam (Berlin, seit 1887). *C. Wolf*[19]) meint, daß die Fehler einer guten astronomischen Pendeluhr, die merklich unter konstantem Druck und auf konstanter Temperatur gehalten wird, die Fehler der astronomischen Zeitbestimmung aus den Sternen nicht übertreffen. Was die Chronometer angeht, so kann man mit 5 Uhren für Punkte, die um 1—2 Tagereisen voneinander entfernt sind, mit der Genauigkeit der telegraphischen Längenbestimmung konkurrieren[39]). Daß dies selbst für Taschenchronometer mit Ankerhemmung gilt, scheint bewiesen durch *Ditisheim*[42]).

12. Regulatoren für gleichförmige Drehung. Die periodisch gleichförmige Bewegung der Pendeluhren und Chronometer kann man nur vermittelst komplizierter und schwer auszuführender mechanischer Vorrichtungen in eine kontinuierlich gleichförmige umwandeln. Wenn es sich um Herstellung einer solchen handelt, wie das z. B. zur Führung eines äquatoreal aufgestellten Fernrohrs oder eines Registrierapparates erforderlich ist, greift man lieber zu Vorrichtungen analog denen, die in der gewöhnlichen Technik gebräuchlich sind. Hierher gehört der wohlbekannte *Watt*'sche oder Zentrifugalregulator.

Es besteht ein solcher Regulator wesentlich aus einem oder mehreren sphärischen Pendeln, die wir der Einfachheit wegen als aus einem dünnen Faden mit einem schweren Massenpunkt bestehend betrachten wollen. Man nennt allgemein den Regulator *isochron*, wenn bei wechselnder Entfernung von der Umdrehungsachse (wechselndem Rotationsmoment) die Winkelgeschwindigkeit ω konstant bleibt.

42) *P. Ditisheim*, Paris C. R. 138 (1904), p. 1027.

Man betrachte zunächst das einfache sphärische Pendel. Es sei l die Pendellänge, α der Ausschlagswinkel. Dann ist, wenn dasselbe rund schwingt, mit anderen Worten, wenn es einen Rotationskegel mit senkrechter Achse beschreibt, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$; die Dauer des Umlaufs $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$ hängt ab vom Ausschlagswinkel, es ist demnach nicht isochron.

Bereits *Huygens*[43]) suchte den Isochronismus dadurch herzustellen, daß er das Gewicht zwang, auf einem Rotationsparaboloid mit senkrechter Achse sich zu bewegen. Jedoch ist der strenge Isochronismus insofern nachteilig, als jede Geschwindigkeitsänderung zu Schwankungen von längerer Periode Anlaß gibt, weshalb man gemeiniglich darauf verzichtet und nur auf einen angenäherten Isochronismus ausgeht, was vermittelst des Regulators mit *gekreuzten Stangen* geschieht. Meistens ist hier die Einrichtung so getroffen, dass jedes Pendel um eine wagerechte Achse schwingen kann, welche ihrerseits mit der gemeinsamen Achse fest verbunden ist und um dieselbe rotiert. Nennt man s den Abstand der wagerechten von der senkrechten Achse, l die Länge der Pendelstange von der wagerechten Achse bis zum Gewicht und α den Winkel der Pendelstange mit der Vertikalen, so erfordert das Gleichgewicht zwischen Schwere und Zentrifugalkraft:

$$\omega^2 (l \sin \alpha - s) = g \operatorname{tg} \alpha .$$

Es folgt:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = 0 \quad \text{für} \quad \sin^3 \alpha = \frac{s}{l} .$$

Richtet man also das Gewicht des Pendels so ein, daß es bei normaler Triebkraft gerade diesen Ausschlag α erreicht, so ist infolge des Verschwindens des Differentialquotienten $\frac{d\omega}{d\alpha}$ hier die Rotationsgeschwindigkeit in erster Näherung vom Ausschlagswinkel unabhängig, das Pendel isochron.

Foucault hat anfangs[44]) das einfache sphärische Pendel in einer verbesserten *Cardani*'schen Aufhängung als Regulator verwandt, später[45]) hat er an dem *Watt*'schen Regulator ein Gewicht angebracht, welches durch ein Hebelwerk gegen das Mittelstück, das von den rotierenden Kugeln gehoben und gesenkt wird, einen Druck nach

43) *Chr. Huygens*, Horologii oscillatorii (Paris 1673) pars quinta = *Huygens*, Opera mechanica etc., ed. *G. J.'s Gravesande*, Lugd. Bat. 1751, p. 189.

44) *L. Foucault*, Horloge à pendule conique, Paris C. R. 25 (1847), p. 154.

45) *L. Foucault*, Solution de l'isochronisme du pendule conique, Paris C. R. 55 (1862), p. 135.

oben ausübt, so daß auf die Kugeln statt der vollen Schwere g nur eine Kraft $g \cos \alpha$ wirkt. Es tritt dann an Stelle der obigen Formel $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$ der Wert $\omega = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{l \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, es ist also Isochronismus herbeigeführt.

Man kann auch dem sphärischen Pendel eine Federaufhängung geben, wie den Uhrpendeln. *Resal*[28]) studiert eine solche Aufhängung an vier gleichen rechteckigen Stahllamellen, von denen zwei die Durchbiegung in einer bestimmten Richtung, die beiden andern die Durchbiegung in einer dazu senkrechten Richtung gestatten. Er findet, daß, wenn der Ausschlagswinkel sehr klein ist, die Wirkung dieselbe ist, als ob man dem Gewicht des Pendels die Größe $\frac{E \cdot I}{\lambda l \cos \alpha}$ hinzufügte, worin λ die Länge der Federn, I das Trägheitsmoment ihres Querschnittes, E den Elastizitätsmodul bedeutet.

Was nun die Verwendung all dieser mehr oder weniger isochronen Regulatoren angeht, so sei zunächst der Unterschied gegen die Funktion des Uhrpendels hervorgehoben. Die auf das Uhrpendel wirkende Kraft ist, wenn auch ihrer Größe nach wechselnd, so doch stets äußerst gering, da bei der Uhr, wie erwähnt, fast die ganze Triebkraft in der Reibung der Räder verzehrt wird. Schon bei Registrierapparaten und Chronographen ist die auf das letzte Rad wirkende Kraft im allgemeinen viel größer, indessen wird bei diesen Instrumenten nur ein gleichmäßiger Gang für ganz kurze Zeiten verlangt und es genügen für sie in Praxis die verschiedensten theoretisch recht unvollkommenen Pendel- und Windflügelregulatoren[46]). Das eigentliche Problem bildet aber das Triebwerk eines großen Refraktors. Hier geht, wenn die Achsen des Instruments zufällig einmal mit besonders geringer Reibung sich drehen, ein großer Teil der Triebkraft in den Regulator, und von diesem wird verlangt, daß er trotz eines so starken Kraftwechsels den Isochronismus bewahrt.

In der Technik erreicht man den gleichmäßigen Lauf meist, indem man den Regulator auf die Triebkraft selbst wirken läßt, indem man z. B. durch den *Watt*'schen Regulator beim Steigen der Kugeln den Dampfzufluß absperren läßt. Analog hat *R. Thury*[47]) einen Regulator mit gekreuzten Stangen benutzt, um bei Äquatorealen, deren Werk elektrisch angetrieben war, den Strom zu regulieren. Auch mag hier noch eine andere von *R. Thury* erdachte Einrichtung kurz erwähnt werden. Sie be-

46) Vgl. *Ambronn* 2, p. 1038.

47) *H. Cuénod*, Horloge électrique, System *R. Thury*-Genève (sans date), sowie *Ambronn*, 2, p. 1114.

steht[48]) aus zwei geraden und parallelen Lamellen, mit kleinen Supplementgewichten in der Mitte, symmetrisch zur Hauptachse. Am oberen Ende sind dieselben an einem kurzen Arm befestigt, der sich mit der Welle um die Vertikale dreht; am unteren Ende halten sie sich an einem ähnlichen Arm, der eine mit der Achse konzentrische Röhre heben und senken kann. Die Zentrifugalkraft biegt die Lamellen, und die Röhre wird gehoben; ein auf geeignete Weise angepaßter Hebel kommt dann mit derselben in Berührung und gestattet den Abbruch eines elektrischen Stroms. Die Geschwindigkeitswechsel verursachen intermittierende Stromunterbrechungen, wodurch zwar kein gleichmäßiger, aber ein kurzperiodischer Gang mit verschwindend kleinen Änderungen erzielt wird.

Die bei astronomischem Gebrauch bisher übliche Art der Anwendung der Regulatoren ist jedoch eine andere. Es wird der Regulator mit einer Bremse versehen, die die überschüssige Triebkraft verzehrt. So kann man in einfachster Weise die Kugeln des *Watt*schen Regulators bei steigendem Ausschlag an einem über ihnen befindlichen Schleifring anschlagen lassen, wobei sich bald Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment des Triebwerks und dem Reibungswiderstand der Kugeln an der Platte einstellt. Bei der geringen Veränderlichkeit des Ausschlags ist dann auch der Isochronismus genügend gewahrt. Bei den Triebwerken der großen amerikanischen Refraktoren ist meist der Regulator mit gekreuzten Stangen in analoger Weise verwandt in der oben bezeichneten genähert isochronen Stellung.

Foucault[44]) hat das letzte Rad des Uhrwerks senkrecht über die Aufhängungsachse seines sphärischen Pendels gestellt. Das untere freie Ende der Achse dieses Rades trägt einen Zapfen, der auf das obere Ende der Pendelstange drückt, welche zu dem Zwecke passend verlängert ist. Durch die Reibung dieses Zapfens wird die Regulierung besorgt. Bei seinem isochronisierten *Watt*'schen Regulator führt er[45]) eine Bremsung durch Windflügel in einem Gehäuse ein, dessen Luken durch den Regulator mehr oder weniger geöffnet werden.

Schon *Villarceau*[49]) benutzte 3 gleiche, symmetrisch um die Vertikale gestellte sphärische Pendel. An den schwingenden Stangen sind Metallflügel angebracht, deren Ausdehnung mit der Stellung der Stangen wechselt, so daß der Luftwiderstand veränderlich wird. Anstatt der Kugeln

48) Siehe *M. Wilhelm Meyer,* Le système de Saturne, Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève 29, Nr. 1, Genève 1884, p. 19 f.

49) *A. J. F. Yvon Villarceau,* Paris C. R. 74 (1872), p. 1481.

kommen parallelepipedische Gewichte zur Verwendung, deren jedes drei kleinere Massen trägt, die durch Hin- und Herschrauben die letzten Berichtigungen ermöglichen. Der von *Bréguet* genau nach der Theorie justierte Apparat zeigte schon beim ersten Versuch, daß, während das Treibgewicht Werte von 1 bis 5,6 annahm, die relativen Schwankungen der Geschwindigkeit $\frac{1}{300}$ nicht übertrafen; die Regulierung geschah bis auf $0^s.5$ genau. Der nämliche Regulator wurde von *Cornu*[36]) mit bestem Erfolg verwendet, um dem Zylinder des Registrierapparates, der zur Messung der Geschwindigkeit des Lichtes diente, eine gleichmäßige Bewegung mitzuteilen.

Die Art der Annäherung aller dieser Bremsregulatoren an den Gleichgewichtszustand scheint theoretisch nicht untersucht zu sein, es wäre höchstens zu erwähnen, daß bei Luftwiderstand, wenn dieser dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, der Übergang der Winkelgeschwindigkeit von der Ruhe zu dem Endwert γ gemäß der Formel:

$$\omega = \gamma \frac{e^{\frac{2\alpha}{\gamma}t} - 1}{e^{\frac{2\alpha}{\gamma}t} + 1}$$

erfolgt, wo α eine Konstante, t die Zeit ist.

Eine ganz besondere Stellung nimmt das *Repsold'sche Federpendel* ein[50]). Es besteht aus einer fest mit der Grundplatte verbundenen elastischen Stahlstange von kreisförmigem Querschnitt, welche am oberen Ende ein Gewicht trägt, und über demselben mit Hilfe eines Zapfens in dem Schlitz eines auf der Welle des Uhrwerks sitzenden Mitnehmerarmes geführt wird. In der Ruhelage wird das Pendel durch den Mitnehmer nur wenig aus der vertikalen Stellung, in welcher die Achsen von Pendel und Welle in eine Linie fallen, zur Seite gedrückt. Sobald aber das Uhrwerk in Bewegung gesetzt wird, vergrößert sich der Ausschlag, bis Zentrifugal- und Triebkraft mit den Biegungskräften in Gleichgewicht sind. Dieses Pendel vermag infolge der Größe der elastischen Kräfte der Stahlstange und der bedeutenden Masse, die man in Praxis dem Gewicht an ihrer Spitze geben kann, ohne eine weitere Bremsvorrichtung die überschüssige Kraft des Triebwerkes aufzunehmen. Die Theorie dieses Apparates hat *Wilsing*[51]) entwickelt, wobei er sich nicht nur auf den stationären Zustand beschränkt hat. Er findet, daß bei Änderungen der auf das Pendel wirkenden

50) *J. A. Repsold,* Zs. für Instrumentenkunde 19 (1899), p. 306.
51) *J. Wilsing,* Astr. Nachr. 151 (1900), p. 293.

Triebkraft „Amplitude und Phasenunterschied zunächst im gleichen Sinne variieren, sich aber bald konstanten Grenzwerten nähern. Nach Verlauf einer gewissen Anzahl von Schwingungen halten sich daher die Triebkraft und die tangential gerichtete Komponente der Biegung das Gleichgewicht, sodaß nur die radial gerichtete Komponente der Biegung übrig bleibt, welche dem Pendel die konstante Winkelgeschwindigkeit erteilt".

Der Gang dieses rundschwingenden Federpendels ist in der Tat für die weitaus meisten praktischen Zwecke genügend isochron, wie aus folgender Tabelle zu sehen ist, die auf Experimenten in Pulkowa[52]) basiert:

Triebkraft	26	20	16	14	12
Ausschlag	70	61	53	46	40
Dauer von 55 Umgängen	131,927	131,963	131,969	131,961	131,934 Sek.

Man darf dieses Federpendel übrigens nicht mit demjenigen verwechseln, welches *D. E. Hughes*[53]) für seinen „printing telegraph" erfand; *Hughes* läßt das obere Ende des seinigen auch als Bremse wirken, indem es mit mehr oder weniger Reibung an einem Ringe schleift.

Eine unumschränkte Regelmäßigkeit des Ganges, die den Vergleich mit Pendeluhr und Chronometer gestattete, ist bei allen diesen Einrichtungen nicht verfolgt worden. Es liegen meines Wissens keine Versuche vor, den Einfluß der Temperatur, der sich unter anderem durch Ausdehnung der Metalle oder Änderung des Elastizitätsmoduls kundgibt, entweder auszugleichen, oder auch nur in Rechnung zu bringen. Man beschränkt die Forderungen nur auf kurze Zeiträume, etwa eine halbe Stunde. Werden Ansprüche auf höhere Genauigkeit gemacht, so kann man einen der eben besprochenen Regulatoren mit einer guten astronomischen Pendeluhr elektrisch synchronisieren, wie das jetzt für photographische Daueraufnahmen vielfach geschieht.

52) Festschrift zum 50jährigen Bestehen der Nicolai-Hauptsternwarte, St. Petersburg 1889, p. 65.

53) Beschreibung der in der Reichs-Telegraphenverwaltung gebräuchlichen Apparate, Berlin 1888, p. 76—78. Abdruck in: *H. Schellen*, Der elektromagnetische Telegraph, 6. Aufl. Braunschweig 1888, p. 567—572.

(Abgeschlossen im April 1905.)

VI 2, 5. THEORIE DER ASTRONOMISCHEN WINKELMESSINSTRUMENTE, DER BEOBACHTUNGSMETHODEN UND IHRER FEHLER.

VON

FRITZ COHN

IN KÖNIGSBERG.

Inhaltsübersicht.

1. Idee eines Universalinstruments zur astronomischen Ortsbestimmung.
2. Die Durchführung der Idee in der Praxis; Beschreibung des Beobachtungsvorgangs.
3. Die Hilfsinstrumente, ihre Einrichtung und die Auswertung ihrer Skalen.
4. Die eigentlichen Instrumente der exakten astronomischen Ortsbestimmung.
   A. Der Meridiankreis: Prinzip der Rektaszensions- und Deklinationsbestimmung. Verwandte Typen: Passageninstrument, Mauerquadrant, Universaltransit, Zenitteleskop.
   B. Der Refraktor: Prinzip der differentiellen Ortsbestimmung mit ruhendem oder bewegtem Fernrohr, visuell oder photographisch. Doppelbildmikrometer, Heliometer. Équatorial coudé und Astrograph.
5. Die Fehler der Instrumente und ihre Bestimmung.
   Instrumentalfehler geometrischer Natur: A. Am Meridiankreis. B. Am Refraktor, Heliometer usw. — Physikalische Fehlerquellen: in der Atmosphäre, im Objektiv, in der Nachführung des Fernrohrs und im photographischen Prozeß, im Okular und im Auge.
6. Die persönlichen Fehler bei astronomischen Beobachtungen.
7. Die Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen.
8. Die Abgrenzung des Arbeitsfeldes und das Ineinandergreifen der verschiedenen Instrumente und Beobachtungsmethoden.

Literatur.

Technische Ausführung der Instrumente:

Ph. Carl, Die Prinzipien der astronomischen Instrumentenkunde, Leipzig 1863.

L. Ambronn, Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde, 2 Bde., Berlin 1899 (*Ambronn*).

J. A. Repsold, Zur Geschichte der astronomischen Meßwerkzeuge von *Purbach* bis *Reichenbach* 1450—1830, Leipzig 1908.

Methoden der Beobachtung und der Instrumentaluntersuchung:

W. Chauvenet, A manual of spherical and practical astronomy, 2 vols., Philadelphia 1863, 5th ed. Philadelphia 1885, 1893, 1900 (5th ed.: *Chauvenet*).

F. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, 4. Aufl. Berlin 1881 (*Brünnow*).

W. Förster, Astrometrie oder die Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume. 1. Heft: Die Sphärik und die Koordinatensysteme, Berlin 1905.

R. Wolf, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 2 Bde., Zürich 1890—93 (*Wolf, Handb.*).

W. Valentiner, Handwörterbuch der Astronomie, 4 Bde., Breslau resp. Leipzig 1897—1902 (*Valentiner, Handwörterbuch*).

Leistungen der einzelnen Instrumente:

Die Veröffentlichungen der bekannteren Sternwarten [aus älterer Zeit: Greenwich, Dorpat, Königsberg usw.; aus späterer etwa: Pulkowa, Leiden, Paris, Cap, Straßburg, München, Berlin, Bonn, Washington, Mt. Hamilton.][1]).

---

1. Idee eines Universalinstruments zur astronomischen Ortsbestimmung. Die beobachtende Astronomie hat die Aufgabe, die scheinbaren Koordinaten der Himmelskörper, bezogen auf ein den Zwecken der theoretischen Astronomie entsprechendes Koordinatensystem, zu bestimmen, d. h. die sphärischen Koordinaten der Richtung, in der uns ein Gestirn erscheint. Ein diesem Zwecke dienendes Instrument muß daher aus einer die Richtung nach dem Gestirn festlegenden Visierlinie bestehen und mit einer Einrichtung versehen sein, welche diese Visier- oder Absehenslinie bequem auf jedes Objekt einzustellen und die eingestellte Richtung gegen gewisse feste Richtungen numerisch festzulegen gestattet.

Die *Visierlinie* besteht in ihrer einfachsten Form aus zwei in fester Verbindung stehenden Dioptern, dünnen Metallplättchen mit kreisrunder feiner Durchbohrung, welche man in die Richtung vom Auge des Beobachters nach dem Objekte bringt. Ihre Einstellung erfolgt, dem Prinzip der sphärischen Koordinaten entsprechend, durch Drehung um geeignete Achsen, entweder um eine zu ihr senkrechte Achse, die Nebenachse, oder gemeinsam mit ihr um eine zweite, zur ersten senkrechte Achse, die Hauptachse des Systems. Bei diesen Drehungen beschreibt die Absehenslinie an der Himmelskugel die

---

1) Greenw. Obs.; *F. G. W. Struve,* Observationes astronomicae institutae in specula Universitatis Dorpatensis vol. 1—8, Dorpati 1817—1839; Königsb. Beob.; Poulkova obs.; Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ.; Leiden Sternw. Ann.; Obs. de Paris Ann.; Cape astron. results[115]), Cape meridian results.[116]), Cape Obs. Ann.; Straßb. Sternw. Ann.; Neue Annalen der Sternwarte in Bogenhausen bei München, Bd. 1 ff., München 1890 ff. *(München Sternw. Ann.)*; Berlin Sternw. Ergebn.; Bonn Sternw. Veröff.; Wash. obs.; Publications of the *Lick* Observatory [Mount Hamilton] of the University of California, vol. 4 and 6, Sacramento 1900/03 *(R. H. Tucker).*

beiden Arten von Kurven, welche das System der sphärischen Koordinaten charakterisieren. Sie läßt sich dadurch auf jedes Himmelsobjekt einstellen und gibt zugleich durch ihre Drehungswinkel um die betreffenden Achsen die sphärischen Koordinaten selbst. Zur numerischen Fixierung dieser Drehungswinkel ist das Instrument mit geteilten Kreisen versehen, welche gewissermaßen die Abbilder der größten Kreise der Himmelskugel sind.

Ein dieser Idee entsprechendes Instrument gibt in den Ablesungen seiner Kreise die sphärischen Koordinaten des eingestellten Objekts in seinem eigenen System. Soll dieses System mit einem astronomisch bestimmt definierten zusammenfallen, so muß seine Hauptachse auf den Pol dieses Systems gerichtet sein und die Nullpunkte der beiden Kreise müssen mit den Nullpunkten des Koordinatensystems übereinstimmen. In diesem Falle nennen wir das Instrument ein nach dem betreffenden Pol orientiertes *Universalinstrument*.

Für die Praxis kommen nur zwei sphärische Systeme in Frage, deren Pole das Zenit und der Himmelspol sind, das System der Azimute und Höhen und das System der Stundenwinkel und Deklinationen. Je nachdem die Hauptachse des Instruments auf das Zenit oder den Pol des Himmels zeigt, nennt man es dann im speziellen *Universalinstrument (Altazimut)* oder *Äquatoreal*.

2. Die Durchführung der Idee in der Praxis; Beschreibung des Beobachtungsvorgangs. Bei der praktischen Ausführung eines solchen Instruments handelt es sich um die Einrichtung der Visierlinie und ihres mechanischen Drehungsprozesses, die Fixierung der Drehungswinkel und die Aufstellung des Instruments in bestimmt definierter Orientierung. Darüber sei im einzelnen bemerkt:

Schon kurze Zeit nach der Erfindung des Fernrohrs ist man dazu übergegangen, der schärferen Einstellung halber die optische Achse eines Fernrohrs als Visierlinie zu benutzen[1a]). Man verwertet dabei weniger die lichtverstärkende Kraft des Fernrohrobjektivs als vielmehr seine Eigenschaft, in seiner Brennebene ein Bild eines unendlich fernen Objekts zu entwerfen, dessen Richtung parallel der Verbindungslinie des Bildpunktes mit dem „optischen Mittelpunkt" des Objektivs ist[2]). Um diese Richtung geometrisch festzulegen, bedarf

1a) Vgl. dazu *Wolf*, Handb. 2, § 331.

2) Der bequemeren Beobachtung wegen benutzt man häufig ein sogenanntes gebrochenes Fernrohr, bei dem der Lichtstrahl mit Hilfe geeigneter Spiegel oder Prismen eine gebrochene Linie durchläuft und der Okularteil in die Richtung der Nebenachse fällt, z. B. bei Passageninstrumenten, équatorial coudé[77]). Der Vorteil ist der, daß das Auge des Beobachters bei allen Drehungen des

man in dieser Brennebene möglichst nahe der optischen Achse einer punktförmigen Marke, welche man durch Drehung des Fernrohrs mit dem Bilde des Objekts zur Deckung bringt. Die Verbindungslinie der Marke mit dem Mittelpunkt des Objektivs stellt dann die sogenannte *Kollimationslinie (Absehenslinie, Visierlinie)* dar. Als solche Marke dient ein in der Brennebene aufgespanntes Fadenkreuz (meist von Kokonfäden). Das Okular, mit dem das in der gemeinsamen Brennebene entworfene Bild betrachtet wird, dient vorzugsweise zur Vergrößerung und damit zur Erhöhung der Genauigkeit der Einstellung.

Das *Fadenkreuz*[3]) ist auf der sogenannten Fadenplatte aufgespannt, einer in der Bildebene liegenden Metallplatte mit rechteckigem Ausschnitt, welche senkrecht zu ihrer Ebene, d. h. längs der optischen Achse des Fernrohrs, verschoben werden kann, um genau mit der Brennebene des Objektivs zusammenzufallen. Diese Fokussierung der Fäden ist öfters zu kontrollieren, da die Brennweite des Objektivs von äußeren Einflüssen, wie Temperatur, ein wenig abhängig zu sein pflegt.

Um bei den nächtlichen Beobachtungen das Fadenkreuz sichtbar zu machen, bedient man sich der sogenannten *Fadenbeleuchtung.* Dieselbe erhellt entweder von der Objektivseite her das Gesichtsfeld, so daß die Fäden sich schwarz von dem hellen Grunde abheben („helles Feld"), oder, was für die Beobachtung schwächerer Objekte erforderlich ist, durch seitliche Beleuchtung die Fäden selbst, welche dann hell auf dunklem Grunde erscheinen („helle Fäden").

Die exakte Ausführung des Drehungsprozesses bereitet aus dem Grunde besondere Schwierigkeiten, als *Drehungsachsen* im mathematischen Sinne technisch nicht ausführbar sind, sondern nur in mehr oder minder massiver Form hergestellt werden können. Um der mathematischen Idee nach Möglichkeit zu entsprechen, wählt man dazu die einfachsten Rotationskörper, als Zylinder, Kegel, Kugel, und läßt sie sich in festen Lagern drehen; an den Auflagestellen beschränkt man sich auf möglichst punktförmige Berührung.

Die exakte *Einstellung* des Fernrohrs auf das Objekt, d. h. des Fadenkreuzes auf den Bildpunkt, geschieht nach vorherigem Festklemmen des Fernrohrs, resp. der Achsen, mit Hilfe der sogenannten

---

Fernrohrs möglichst in derselben Lage bleibt, sowie die gedrungenere Konstruktion des ganzen Instruments, der Nachteil die durch die Einführung der optischen Zwischensysteme entstehende Verringerung der Stabilität der optischen Achse.

3) In der Praxis tritt an seine Stelle meistens ein ganzes System von geeignet angeordneten Fäden; auch kommen vielfach statt der Fäden dünne Glasplatten mit eingeritzten Strichen zur Anwendung.

Feinbewegung. Das Aufsuchen der hellsten Objekte erfolgt mit bloßem Auge, die schwächeren stellt man an den geteilten Kreisen roh ein; ist ihr Ort zu unsicher bekannt, so muß man sie zunächst in dem sogenannten Sucherfernrohr aufsuchen.

Mit der Einstellung des Fadenkreuzes auf das Bild des Objekts und der Fixierung des zugehörigen Zeitmoments[4]) ist die eigentliche Beobachtung erledigt und es bleibt die weitere Aufgabe, die sphärischen Koordinaten der so fixierten Richtung, d. h. ihre Drehungswinkel um die beiden Achsen des Instruments, an den geteilten, senkrecht zu den Drehungsachsen sitzenden Kreisen abzulesen. Das Ablesungsprinzip besteht darin, daß die Stellung eines an der Drehung des Fernrohrs teilnehmenden *geteilten Kreises* an der unmittelbar benachbarten Teilung eines zweiten, zum ersten konzentrischen, aber feststehenden Kreises abgelesen wird, und seine verschiedenen Ausführungen unterscheiden sich nur durch die Art der beiderseitigen Teilungen, indem der eine der beiden Kreise meist nur durch einige Durchmesser repräsentiert wird. Entweder besteht die Teilung des feststehenden Kreises (Alhidadenkreis) nur aus einigen, symmetrisch über die Peripherie verteilten, festen Ablesemarken[5]), an denen die Feinteilung des beweglichen Kreises abgelesen wird (z. B. Meridiankreis, Vertikalkreis des Universalinstruments). Oder der feststehende Kreis ist fein geteilt und die Ablesemarken befinden sich auf der Peripherie des drehbaren Kreises, an dessen Drehung sie teilnehmen (z. B. Horizontalkreis des Universalinstruments). In ältester Zeit war die die Diopter tragende Visierlinie einfach selbst Alhidade, d. h. ein mit Strichmarken versehener Durchmesser des geteilten Kreises, so daß die Drehung unmittelbar an diesem feststehenden Kreise abgelesen wurde. Diese Ablesemarken wurden später zur Erhöhung der Genauigkeit mit Nonien oder Verniers versehen; an ihre Stelle sind jetzt durchweg *Ablesemikroskope* mit senkrecht zur Kreisteilung gerichteten Achsen getreten, welche die Stellung des Kreises gegen eine bestimmte Nullmarke in der Brennebene des Mikroskopobjektivs mit Hilfe eines durch eine Mikrometerschraube bewegten Fadens zu fixieren gestatten.

---

4) Wegen der schnellen Veränderlichkeit der direkt meßbaren astronomischen Koordinaten; nur die an einem Äquatoreal eingestellten Deklinationen der Fixsterne können für diesen Zweck als zeitlich konstant gelten.

5) Steht der Kreis genau zentrisch zur Umdrehungsachse, so genügt eine solche Marke; zur Beseitigung einer etwaigen Exzentrizität führt man zwei diametral gegenüberstehende Marken ein und erhöht ihre Zahl auf vier, wenn es sich um besondere Genauigkeit handelt.

In einander über gehen beide Arten der Ablesung (fester Kreis, feste Marken) bei einem von *Hansen* für Meridiankreise gemachten Vorschlage[6]). Danach erhält der drehbare Kreis nur eine sehr weite Teilung (von 5° zu 5° etwa), die festen Ablesemarken aber bestehen in vier eng geteilten Hilfsbogen von je 5° Länge, welche durch Ablesemikroskope zu vier Strichen des Hauptkreises in Beziehung gesetzt werden. Der Vorteil besteht dabei in der geringeren Zahl der zur Verwendung gelangenden Teilstriche.

So vollzieht sich eine vollständige Beobachtung in der Einstellung des Fernrohrs auf das Objekt, in der Fixierung des zugehörigen Zeitmoments und in der Ablesung der beiden Kreise. Dazu kommt noch wegen der atmosphärischen Refraktion (s. VI 2, 6 [*Bemporad*]) die Ablesung der meteorologischen Instrumente, da der Einfluß dieses „Abbildungsfehlers" der Atmosphäre auf die Koordinaten der Gestirne von Temperatur und Luftdruck abhängig ist (s. S. 246).

Man erhält so die sphärischen Koordinaten des eingestellten Objekts in dem eigenen System des Instruments. Damit dieses System mit einem „natürlichen" identisch sei, müssen seine Drehungsachsen nach dem Pol dieses Systems richtig orientiert sein. Für die beiden oben besprochenen natürlichen Systeme, denen das Universalinstrument und das Äquatoreal entsprechen, ist, sei es zur eigentlichen Orientierung, sei es zur Überführung der beobachteten Koordinaten (Azimut, Höhe, Stundenwinkel) in äquatoreale Koordinaten (α, δ) neben der Richtung der Schwerkraft die Kenntnis des Meridians, der Polhöhe und der Sternzeit erforderlich. Wie diese Kenntnis durch geeignete Kombination mehrerer Beobachtungen desselben oder mehrerer Gestirne gewonnen werden kann, vgl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), S. 21—25.

Zum richtigen Funktionieren des Instruments gehört also, daß erstens die Visierlinie bei ihren Drehungen die Koordinatenkurven des betreffenden sphärischen Systems beschreibe und ihre Drehungswinkel den Koordinatendifferenzen gleich seien — sie muß dazu starr und die beiden Achsenwinkel genau rechte Winkel sein —, sowie zweitens, daß diese Drehungswinkel durch geeignete Hilfsinstrumente richtig gemessen werden.

Über die technische Ausführung der verschiedenen astronomischen Winkelmeßinstrumente und ihrer Hilfsapparate, die Art ihrer Auf-

---

6) *P. A. Hansen*, Beschreibung der Einrichtungen, welche am Meridiankreise der Seeberger Sternwarte angebracht worden sind, Astr. Nachr. 17 (1840), p. 49—80.

stellung und die Einrichtung der Beobachtungsräume auf festen Sternwarten, vgl. *Ambronn*.

3. Die Hilfsinstrumente, ihre Einrichtung und die Auswertung ihrer Skalen. Die numerische Bestimmung der Drehungswinkel der Visierlinie, sowie die Fixierung der Zeitmomente geschieht durch eine Reihe von Hilfsinstrumenten, wie Mikrometerschrauben, geteilte Maßstäbe (Skalen) oder Kreise, Uhren usw. Ihre meist in einer eigenen Maßeinheit enthaltenen Angaben müssen erst geaicht werden, um die dem eigentlichen Beobachtungsvorgang entsprechenden Daten in der erforderlichen Form zu geben. Bei der exakten Auswertung dieser Angaben setzt man eine gewisse einfache mathematische Beziehung zu den gemessenen Größen als sehr angenähert erfüllt voraus und hat einmal die Konstanten dieses allgemeinen Ansatzes durch besondere Messungen zu bestimmen, dann aber auch die etwaigen Abweichungen von diesem Ansatze zu untersuchen. Denn allgemein gilt seit *F. W. Bessel* als Richtschnur, daß kein Teil eines Instruments, so exakt es die heutige Technik auch herzustellen vermag, als fehlerfrei, d. h. seiner Idee genau entsprechend angesehen werden darf, sondern je nach den Zwecken, denen es dienen soll, mit größerer oder geringerer Schärfe auf seine Fehler hin, d. h. auf die Abweichung des vorliegenden Individuums von der allgemeinen Idee untersucht werden muß.

a) *Die Mikrometerschraube und das Ablesemikroskop.*

Vielfach bezweckt man, das in der Bildebene eines Objektivs entworfene Bild eines äußeren Gegenstandes in ebenen Koordinaten scharf auszumessen oder seine Lage gegen das Fadenkreuz oder sonstige feste Marken in der Bildebene festzulegen. Das erstere tritt z. B. ein bei der Vermessung eines von einem Fernrohrobjektiv entworfenen visuellen oder photographischen Abbildes des Himmels, das letztere bei der mikroskopischen Ablesung einer Kreisteilung, sowie bei vielen Instrumentaluntersuchungen, von denen später die Rede sein wird (Kollimationsfehlerbestimmung am Meridiankreise, Azimutbestimmung durch Miren usw.). Diese Ausmessung geschieht durch Pointierung der einzelnen Bildpunkte mit einem in der Bildebene beweglichen, das ebene Koordinatensystem veranschaulichenden Faden. Eine Mikrometerschraube erteilt diese senkrecht zur optischen Achse gerichtete Bewegung der ganzen, den Faden tragenden, sogenannten beweglichen Fadenplatte, welche der festen Fadenplatte parallel sein und ihr so nahe anliegen muß, daß im Okular sowohl feste, wie bewegliche Fäden scharf erscheinen, ohne doch bei der Parallel-

verschiebung der Platten ein Haken der Fäden hervorzurufen. Indem man den an einer feingeteilten Trommel abgelesenen Drehungswinkel dieser Schraube als Maß der linearen Verschiebung des Fadens ansieht, setzt man völlige Proportionalität von Drehungswinkel und linearer Verschiebung voraus. Zur Prüfung dieser Voraussetzung bedarf es daher einer Untersuchung der sogenannten Fehler der Mikrometerschraube durch Auswertung fester Intervalle an verschiedenen stetig verteilten Stellen der Schraube. In der Praxis zerlegt man gewöhnlich die Schraubenfehler in periodische, sich bei jeder Windung im wesentlichen wiederholende, nur von der Drehungsphase abhängige, und in fortschreitende Fehler, die auf einer Verschiedenheit des Schraubenganges in den verschiedenen Windungen beruhen, und bestimmt sie getrennt[7]). — Bei manchen Messungen ist auch die Kenntnis des „toten Ganges" der Schraube erforderlich, d. h. des meist geringfügigen freien Spielraums zwischen Schraube und Schraubenmutter, dessen Effekt darin besteht, daß bei verschiedenem Drehsinn der Schraube der gleichen Trommelablesung nicht genau die gleiche Fadenstellung entspricht[8]).

Gewöhnlich sind die Mikrometertrommeln in 100 Teile — nur bei Kreisablesungen in 60 — geteilt und lassen die Zehntelteile, d. h. $0^{R}.001$ (R = Revolution, d. h. eine Umdrehung der Mikrometerschraube um 360°) noch genau schätzen; bei einer üblichen Ganghöhe von 0.5 mm entspricht das 0.5 μ[82a]). Der Winkelwert einer Revolution schwankt je nach den verschiedenen Anwendungen etwa von 10″ bis 100″.

Die periodischen Fehler der besseren modernen Mikrometerschrauben können fast stets vernachlässigt werden, da sie, soweit sie überhaupt verbürgt werden können, wenige $0^{R}.001$ nicht überschreiten, und auch die fortschreitenden Fehler sind stets geringfügig, so daß sie oft ganz unberücksichtigt bleiben können[9]). Immerhin erfordern

7) Die Untersuchung der Schraubenfehler entwickelte zuerst *F. W. Bessel* („Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte") in *Bessel*, Astron. Untersuch. 1 (1841), p. 75—90 (= *Bessel*, Abhdl. 2, p. 133—166). Vgl. *Brünnow*, p. 445—449, sowie u. a. auch *G. Müller*, Untersuchungen über Mikrometerschrauben, Astronomische Beobachtungen auf der kgl. Sternwarte zu Berlin, Bd. 5, Berlin 1884, Anhang 2; *W. Zurhellen*, Die Untersuchung von Mikrometerschrauben in der Praxis, Astr. Nachr. 172 (1906), p. 1—20.

8) Vgl. *V. Knorre*, Untersuchungen über Schraubenmikrometer, Astr. Nachr. 125 (1890), p. 321—360.

9) Vgl. z. B. die von *O. Struve* herausgegebene Festschrift: „Zum 50-jährigen Bestehen der Nikolai-Hauptsternwarte. Beschreibung des 30zölligen Refraktors", St. Petersburg 1889, p. 76—80.

die Fehler einer Schraube eine gelegentliche Kontrolle, indem sie durch den Gebrauch abgenutzt wird, auch kann sie durch einen längeren Transport leiden[10]).

Die Messung mit der Mikrometerschraube gibt die in die Richtung der Fadenbewegung fallende Koordinate der eingestellten Objekte ausgedrückt in Schraubenumdrehungen. Die optische Achse des Ablesemikroskops, wie es zur scharfen Ablesung geteilter Maßstäbe und Kreise Verwendung findet, muß senkrecht zur Ebene der Teilung stehen und der bewegliche Faden (oder Doppelfaden) so orientiert sein, daß er den Teilstrichen parallel steht. Der Kenntnis der einer Schraubenumdrehung entsprechenden linearen Verschiebung des Fadens bedarf man im allgemeinen nicht, da es sich um die Dimensionen des betrachteten Objekts, nicht seines Abbildes handelt. Man bestimmt daher den Wert einer Schraubenumdrehung, kurz den Schraubenwert, durch Ausmessung bekannter, meist cölestischer, Objekte oder Vorgänge. Bei der Ablesung von Kreisen oder Maßstäben richtet man den Schraubenwert gewöhnlich so ein, daß eine ganze Zahl von Umdrehungen eine Verschiebung des Fadens um einen Teilstrich bewirkt; beträgt er z. B. 1′, so läßt eine Trommelteilung in 60 Teile die ganzen Bogensekunden ablesen, die Zehntel schätzen; die zugehörige Minute wird einer im Gesichtsfelde des Mikroskops sichtbaren Marke (Rechen) entnommen. Da aber infolge thermischer usw. Einflüsse auf eine völlige Konstanz des Schraubenwertes nicht zu rechnen ist, bestimmt man den sogenannten *Run des Mikroskops* in geeigneten Zeitintervallen durch Ausmessung einer bekannten Strecke, z. B. des Abstandes zweier benachbarter Teilstriche, und hält ihn dauernd unter Kontrolle.

Die Fixierung der Stellung des Kreises oder der Skala geschieht dann dadurch, daß man mit dem beweglichen Faden den Abstand eines Teilstriches[11]) entweder von einer festen, vom Mikroskop unabhängigen Marke mißt — so dient bei der *Hansen*schen Einrichtung der Ablesung des Meridiankreises[6]) das Ablesemikroskop nur zur scharfen Übertragung der Teilung der festen Hilfsbogen auf den beweglichen Kreis — oder aber von der Nullstellung der Mikrometertrommel, die jetzt ihrerseits als feste Marke auftritt. Im letzteren Falle muß diese Nullstellung im Laufe einer Messungsreihe unveränderlich

10) *Th. Albrecht*, Breitendienst, Resultate[163]), 1 (1903), p. 23—26.

11) Man stellt gewöhnlich den Doppelfaden des Mikroskops nacheinander auf zwei benachbarte Teilstriche, zwischen denen sich die Nullstellung des Fadens befindet, ein und erreicht dadurch eine erhöhte Genauigkeit, wie auch ein größeres Material zur Bestimmung des Run.

sein oder in ihren Änderungen verfolgt werden. Bei den Vertikalkreisen der Universalinstrumente erfolgt diese Kontrolle durch ein auf die Mikroskopträger aufgesetztes Niveau; bei dem Meridiankreise vermischt sie sich mit der unten zu betrachtenden Bestimmung des Nullpunkts des Kreises, d. h. der Kreisstellung, bei welcher die Nullstellung des Mikrometerfadens den Nullstrich des Kreises deckt oder das Mittel der 4 Mikroskopablesungen Null gibt.

Die *Genauigkeit der Pointierung* mit dem beweglichen Faden der Mikrometerschraube hängt, abgesehen von dem betreffenden optischen System, z. B. seiner Vergrößerung, wesentlich von der Schärfe und Ruhe des beobachteten Objekts ab. So findet *Großmann*[12]) für den mittleren Fehler (abgekürzt: m. F.) der Pointierung eines Polsterns ($z \leqq 40^0$) bei 120maliger Vergrößerung $\pm$ 0″.16 (bei 1.50 m Brennweite $= \pm$ 1.2 Mikron[62a]), *Küstner*[13]) eines Äquatorsterns ($z = 50^0$) bei 140maliger Vergrößerung $\pm$ 0″.28 (bei 1.95 m Brennweite $= \pm$ 2.6 μ). Die starke Zunahme des Pointierungsfehlers mit der Zenitdistanz zeigen die folgenden Zahlen für den Pulkowaer Vertikalkreis[14]):

z von	z bis	m. F.
10°	30°	$\pm$ 0″.30,
50	60	$\pm$ 0 .35,
70	75	$\pm$ 0 .44,
75	80	$\pm$ 0 .56.

Für den mittleren Fehler einer Nadireinstellung findet *Großmann*[12]) (p. 67) bei Tage $\pm$ 0″.115 ($\pm$ 0.8 μ), bei Nacht $\pm$ 0″.087 ($\pm$ 0.6 μ), *Bauschinger*[15]) $\pm$ 0″.101 ($= \pm$ 1.0 μ); vgl. auch Nr. 7.

Die *Genauigkeit einer* Meridian*kreisablesung mit Mikroskopen* übertrifft die früher übliche mit Nonien, die bei den üblichen Teilungen von je 2′ bis je 5′ kaum die Bogensekunde gaben, um ein bedeutendes. Als mittleren Fehler einer einmaligen einfachen Einstellung eines Kreis-

---

12) *E. Großmann,* Beobachtungen am *Repsold*schen Meridiankreise der *v. Kuffner*schen Sternwarte in Wien-Ottakring, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 27 (1901), Nr. 1, p. 190.

13) *F. Küstner,* Bonn Sternw. Veröff. Nr. 4 (1900), p. 10. Die ungünstigen Luftverhältnisse zwangen zu einer verhältnismäßig geringen Vergrößerung. — Vgl. im folgenden auch *F. Küstner*, Bonn Sternw. Veröff. Nr. 5 (1901) und Nr. 6 (1902).

14) *M. Nyrén,* Observations faites au cercle vertical, Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. 2 (1896), p. (44)—(49).

striches finden *Bauschinger*[15]) (p. 45) bei 25facher Vergrößerung $\pm$ 0″.11 (bei einem Kreisdurchmesser von 65 cm = $\pm$ 0.17 μ), *Großmann*[12]) (p. 24) bei 36facher Vergrößerung $\pm$ 0″.09 (= $\pm$ 0.12 μ). Als mittleren Fehler einer vollständigen Kreisablesung von je 2 Strichen mit 4 Mikroskopen findet *Küstner*[13]) (p. 17) $\pm$ 0″.12 (= $\pm$ 0.19 μ) oder mit Einbeziehung der zufälligen Teilungsfehler $\pm$ 0″.15.

b) *Die Teilungen von Maßstäben (Skalen) und Kreisen.*

Die exakte Ausführung umfangreicher Teilungen bietet besondere Schwierigkeiten, indem die wechselnden äußeren Verhältnisse während des längere Zeit erfordernden Teilungsprozesses die Homogenität der Teilung beeinträchtigen[16]). In früherer Zeit erfolgte die Teilung oft in der Weise, daß zunächst die Hauptstriche (etwa von 1° zu 1°) von einer Originalteilung aus auf den Kreis übertragen, die feinere Teilung (von 2′ zu 2′ etwa) durch geteilte Lamellen (von 1° Länge) zwischen jene Hauptstriche eingefügt wurde. Alle diese letzteren Striche besitzen dann den Fehler der Lamellenteilung[17]). Neuerdings erfolgt die Übertragung der Originalteilung Strich für Strich, so daß bei den Unterbrechungsstellen wie auch am Schluß größere Fehler auftreten können; so findet *Nyren*[16]) als Fehler des Schlußintervalls 0″.72, die größte Abweichung, die überhaupt vorkam.

In älterer Zeit verminderte man den Einfluß der Teilungsfehler der Kreise dadurch, daß man das Fernrohr sowohl ohne, wie mit Kreis um die Achse drehbar machte und dann Vielfache des zu messenden Winkels bestimmte [*Prinzip der Repetition*[17a])]. Später begann man die Teilungsfehler systematisch zu bestimmen. Von den diesbezüg-

---

15) *J. Bauschinger,* Untersuchungen über die atmosphärische Refraktion, München Sternw. Ann.[1]) Bd. 3 (1898), p. 53. Brennweite 1.95 m, Vergrößerung 270.

16) Das Protokoll bei der Neuteilung des Pulkowaer Vertikalkreises [*M. Nyrén,* Untersuchung der *Repsold*schen Teilung des Pulkowaer Vertikalkreises, St. Pét. Mém. (7) 34, 2 (1886)] zeigt, daß die Teilung 17 volle Tage in Anspruch genommen hat, innerhalb deren die Temperaturen zwischen 9°,5 R. und 13°,9 R. schwankten. Bei einigen neueren Meridiankreisen (Wien-Ottakring, Heidelberg) vollzog sich die Teilung in kürzerer Zeit (9 Tage).

17) Vgl. *O. Struve,* Poulkova Obs. 4 (1872), Observations faites au cercle vertical, p. (36) u. (37). Die Beobachtungen zeigten hier, daß die Fehler der 2′-Striche sich in jedem Grade regelmäßig wiederholten und bis auf fast 1″ anstiegen; erst nachher wurde bekannt, daß in der Tat die *Ertel*sche Teilung in der oben angegebenen Art entstanden war. Mit ihrer Berücksichtigung ging der zufällige wahrscheinliche Strichfehler von $\pm$ 0″.368 auf $\pm$ 0″.206 herab.

17a) *T. Mayer,* Nova methodus perficiendi instrumenta, Commentarii Societatis scientiarum Gottingensis 1 (1752), p. 324. — Hierher gehört auch die noch heute bei astronomisch-geodätischen Messungen übliche Art des Beobachtens in „wechselnden Kreisständen".

lichen Methoden sei hier nur angedeutet, daß, ähnlich wie bei der Untersuchung von Mikrometerschrauben, durch *Ausmessung eines festen Intervalls* oder *Winkels an verschiedenen Stellen der Teilung* Relationen zwischen den Fehlern verschiedener Teilstriche erhalten werden. Bei Kreisteilungen schafft man sich durch Hilfsmikroskope gewisse feste Winkel, aliquote Teile der Kreisperipherie, die durch Drehung des Kreises an verschiedenen Stellen der Teilung ausgewertet werden; bei Skalen bestimmt man gleichzeitig die Fehler zweier aneinander gelegter Maßstäbe durch Parallelverschiebung; im Prinzip kommen beide Untersuchungen auf dasselbe hinaus. Die verschiedenen Methoden der Teilungsfehlerbestimmung werden in verschiedener Weise der Anforderung gerecht, bei einem bestimmten Arbeitsaufwand eine möglichst große Genauigkeit der individuellen Fehlerbestimmung zu erzielen. Aus der großen Literatur über Kreisteilungsuntersuchungen[18]) sei die Methode von *H. Bruns* hervorgehoben, welche diese umfangreiche und mühsame Arbeit in besonders rationeller Weise durchzuführen gestattet.

Die erste Untersuchung einer Kreisteilung führte *F. W. Bessel*[18]) im Jahre 1814 und in exakterer Form 1817 am *Carys*chen Kreise aus und wiederholte sie 1821 am *Reichenbach*schen und 1842 am *Repsold*schen Meridiankreise der Königsberger Sternwarte. Indessen begnügte er sich in der Hauptsache damit, die gesetzmäßigen Fehler der Teilung durch eine Interpolationsformel in Form einer *Fourier*schen Reihe darzustellen und die individuellen Fehler nur für einige besonderen Striche, die zur Polhöhenbestimmung oder den Fundamentalsternen gebraucht wurden, zu bestimmen. Auch heute wird diese *Besselsche Methode* noch vielfach angewandt. Später ging man in der

18) Die Untersuchung von Kreisteilungen behandeln:

F. W. Bessel, Königsb. Beob. 1 (1815) und 3 (1817), Einl., worin die später wiederholt angewandte sog. *Besselsche Methode* enthalten ist; *O. Schreiber,* Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 6 (1886); *H. Bruns,* Untersuchung einer *Wanschaff*schen Teilung, Astr. Nachr. 130 (1892), p. 17; vgl. auch Fußn. 14, 19, 20.

Speziell die Untersuchung der Teilungsfehler von Skalen behandeln:

P. A. Hansen, Von der Bestimmung der Teilfehler eines geradlinigen Maßstabes, Leipzig, Ges. Wiss. Abhdl. 10 (1874); *D. Gill,* On the determination of errors of graduation without cumulative error, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889), p. 105; *G. Lorentzen,* Über die Untersuchung der Skalen eines Heliometers, Astr. Nachr. 131 (1892), p. 217 und Astr. Nachr. 135 (1894), p. 353; *K. Schwarzschild,* Zur Bestimmung der Teilfehler von Maßstäben, Astr. Nachr. 143 (1897), p. 1; *P. Harzer,* Über die Bestimmung der Teilfehler von Maßstäben, 1) nach der *Gill-Lorentzen*schen Methode, Astr. Nachr. 161 (1903), p. 161; 2) nach der ersten *Hansen*schen Methode, Astr. Nachr. 161 (1903), p. 381.

Bestimmung individueller Strichfehler weiter, etwa von 1^0 zu 1^0, und interpolierte für die dazwischen liegenden Striche[19]). Eine Bestimmung aller Strichfehler, d. h. des Mittels je 4 diametral gegenüberstehender, ist nur äußerst selten ausgeführt worden[20]). *Nyrén*[16]) (p. 34—35) findet den zufälligen Strichfehler bei der von ihm untersuchten *Repsold*schen Teilung des Pulkowaer Vertikalkreises äußerst gering und schätzt den wahrscheinlichen Fehler eines interpolierten Wertes zwischen den von ihm bestimmten Fehlern der Gradstriche insgesamt auf $\pm 0''.05$. Andere halten die zufälligen Strichfehler für erheblicher[21]), ja sogar für überwiegend[22]). Daß man aber durch Berücksichtigung der systematischen Fehler, auch in Form einer trigonometrischen Reihe, eine wesentlich bessere Darstellung der Beobachtungen erzielt, zeigt *E. Großmann*[12]) (p. 38—43) durch Vergleichung beider Kreislagen. Auch wird das noch deutlicher durch die von ihm[12]) p. 47 gegebene Zusammenstellung, welche zeigt, wie überaus gleichmäßig sich die Fehler der *Repsold*schen Urteilung auf eine Reihe von Meridiankreisen übertragen haben. Im übrigen erreichen die Teilungsfehler bei den besseren Kreisen der Neuzeit, insbesondere den *Repsold*schen, bei Durchmessern von etwa 60 cm bis 100 cm im Mittel aus zwei Durchmessern (4 Strichen) nur selten Beträge, die $0''.5$ überschreiten.

Die Teilungsfehleruntersuchung beim Kreise vereinfacht sich merklich durch den p. 200 zitierten Vorschlag von *Hansen*[6]), der aber außer bei einigen älteren Instrumenten bisher nur bei dem neuen Meridiankreise der Kieler Sternwarte zur Durchführung gelangt ist[23]). Sie beschränkt sich dann auf die weiten (in Kiel 72) Striche des Hauptkreises und die engen, aber im ganzen auf 20^0 beschränkten (in Kiel 300) Striche der Hilfsbogen.

19) *C. A. F. Peters*, Untersuchung der Teilungsfehler des *Ertel*schen Vertikalkreises der Pulkowaer Sternwarte, Recueil de mémoires présentés à l'académie des sciences par les astronomes de Poulkova [vol. 1, publié par *W. Struve*, St. Pétersbourg 1853; vol. 2, publié par *O. Struve*, St. Pétersbourg 1859 (*Recueil Poulkova*)], vol. 1, p. 181. Ebenso *M. Nyrén*[14]).

20) Z. B. von *F. Kaiser* für die 5′-Teilung des *Pistor-* und *Martins*schen Meridiankreises der Sternwarte zu Leiden, Leiden Sternw. Ann. 2 (1870), sowie für begrenzte Zonen, z. B. bei den Zonenkatalogen der Astr. Gesellschaft.

21) *E. Großmann*[12]), § 6, p. 30—48: „Zur Erlangung der weitestgehenden Genauigkeit bei Fundamentalbeobachtungen ist die Teilungsfehlerbestimmung auf alle Striche auszudehnen."

22) *J. Bauschinger*[15]), p. 15 meint, daß die Teilungsfehler entweder für jeden Strich zu bestimmen oder ganz zu vernachlässigen sind.

23) *P. Harzer*, Beschreibung der neuen Meridiankreisanlage, Astronomische Beobachtungen zu Kiel 1, Leipzig 1905.

Die Bestimmung der Teilungsfehler von Skalen ist besonders bei den Distanzmessungen an neueren Heliometern (s. p. 230) erforderlich. So hat *D. Gill* am Heliometer der Cap-Sternwarte die Teilung der beiden Skalen — je 180 Intervalle von 0.5 mm Länge — untersucht[24]) und ihre Fehler mit wahrscheinlichen Fehlern von $\pm$ 0″.009 = $\frac{1}{8}\,\mu$[62a]) durch ca. 50000 Einzeleinstellungen festgelegt; sie steigen im Maximum auf 0″.2. Ähnlich hat *de Ball*[25]) die je 210 Intervalle am Wien-Ottakringer Heliometer vermessen, und zwar in den beiden, um 180° verschiedenen horizontalen Lagen, zwischen denen sich geringfügige, aber wohl reelle Unterschiede ergaben; die Teilfehler steigen bei einem mittleren Fehler der Bestimmung von $\pm$ 0″.009 = $\frac{1}{8}\,\mu$ auf etwa 6 μ an, beeinflussen aber eine vollständige Distanzmessung im Maximum nur um $3\frac{1}{2}\,\mu$ = 0″.25. Vgl. auch die entsprechende Bestimmung am Leipziger Heliometer durch *B. Peter* (je 340 Intervalle von 0.2 mm Länge)[26]).

c) *Die Uhr und der Chronograph.*

Über die Uhren im allgemeinen vgl. VI 2, 4 (*Caspari*).

In der praktischen Astronomie dient die Uhr sowohl zur Fixierung des Zeitmoments bei den Beobachtungen der Wandelsterne als auch als Winkelmeßinstrument, insbesondere bei der Bestimmung von Rektaszensionsdifferenzen durch die Beobachtung der Meridiandurchgangszeiten (vgl. VI 2, 2 *F. Cohn*). Wie man die dazu erforderliche Kenntnis des Uhrstandes und Uhrganges durch Zeitbestimmungen erlangt, vgl. ebenda. Damit man nicht zu häufig einer Zeitbestimmung bedarf, muß die Uhr einen möglichst *gleichmäßigen Gang* besitzen, der eine einfache Interpolation der Uhrkorrektion zwischen zwei Zeitbestimmungen zuläßt. Insbesondere zur Ableitung unabhängiger Rektaszensionen muß der Uhrgang frei sein von täglicher Periode, wie sie Temperaturschwankungen entspringen kann. Man stellt daher die Normaluhr der Sternwarte trotz der Temperaturkompensation in gleichmäßig temperierten Kellerräumen auf und versieht sie, um sie auch von den Schwankungen des Luftdrucks unabhängig zu machen, mit einer Luftdruckkompensation oder luftdichtem Verschluß (s. VI 2, 4 (*Caspari*)). Andernfalls müssen Temperatur- und

24) *D. Gill*[18]) und *D. Gill*, Cape Obs. Ann. 7 (1896), p. 42.

25) *L. de Ball*, Untersuchungen über die Teilungsfehler der Heliometerskalen, Publikationen der *v. Kuffner*schen Sternwarte in Wien-Ottakring 5, Wien 1900; vgl. auch *L. de Ball*, Astr. Nachr. 148 (1899), p. 233.

26) *B. Peter*, Beobachtungen am sechszölligen *Repsold*schen Heliometer der Leipziger Sternwarte, 2. Abhandlung, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 24, Nr. 3 (1898), p. 281—312.

Luftdruck-Faktor abgeleitet werden. Die Güte der modernen astronomischen Pendeluhren gestattet im allgemeinen mit einem täglichen Uhrgange zu rechnen, da er sich längere Zeit auf wenige $0^s.01$ genau hält. Bei differentiellen Beobachtungen hält man den Uhrgang durch Beobachtung zahlreicher Zeitsterne auch während einer Abendreihe unter Kontrolle.

Bei den Rektaszensionsbeobachtungen bedient man sich heutzutage nicht unmittelbar der Uhr als des Zeitmessers, sondern eines sog. *Chronographen*, durch den die Sekundenschläge der Uhr auf elektrischem Wege in Zeichen auf einem in gleichförmiger Bewegung begriffenen Papierstreifen (oder einer Walze) umgewandelt werden. Die von einer zweiten Feder auf demselben Streifen benachbart aufgezeichneten Beobachtungssignale werden später in aller Ruhe mit diesen Uhrsignalen, welche die Sekundenschläge der Uhr völlig ersetzen, durch Ablesung verglichen. Die Stetigkeit des Uhrganges setzt daher auch eine Unveränderlichkeit des Chronographen, d. h. eine konstante Differenz „Chronograph minus Uhr" voraus. Im Laufe einer Beobachtungsreihe ist daher auf die Gleichförmigkeit des elektrischen Stroms und die unveränderte Stellung der Schreibfedern (oder Stifte) gegeneinander acht zu geben. Auch ein Eingreifen in die mechanischen Teile des Chronographen, z. B. ein schärferes Anspannen der Spiralfedern der Elektromagnete, wie es sich zuweilen behufs Erzielung deutlicherer Schrift als erforderlich herausstellt, kann einen scheinbaren Sprung der Uhrkorrektion und damit einen sprunghaften Fehler der beobachteten Rektaszensionen bewirken.

Das Ablesen des Chronographenstreifen erfolgt entweder durch einfache Schätzung der Sekundenzehntel (resp. Zweisekunden-Zwanzigstel) — eine Zeitsekunde hat auf dem Streifen etwa eine Länge von 1 cm bis 2 cm — oder durch scharfe Ablesung auf $0^s.01$ mittels einer Glasskala oder eines anderen Meßapparates[27]).

d) *Die meteorologischen Instrumente.*

Zur Berechnung des Refraktionseffekts bedarf man der Kenntnis der meteorologischen Elemente, wobei die Fehler der Instrumente (Thermometer und Barometer) bekannt sein müssen. Insbesondere geht der Fehler des Thermometers bei größeren Zenitdistanzen mit einem verhältnismäßig hohen Betrage in die Deklinationen ein; bei einer

27) Über die Einrichtung der Kontakte in den Uhren und der Chronographen, sowie der Ablesevorrichtungen vgl. *Ambronn* 1, p. 265 ff. und 2, p. 1038 ff. Um Störungen im Gange der Hauptuhr zu vermeiden, verwendet man zur Auslösung dieser Kontakte eine andere Uhr als Arbeitsuhr und muß sie nur hinreichend oft mit der Hauptuhr vergleichen.

Temperatur von + 10° C. etwa bewirkt ein Fehler von 0°.1 C. bei einer Zenitdistanz $z = 60°, 70°, 80°, 85°$ einen Fehler von 0″.04, 0″.06, 0″.12, 0″.23, vgl. VI 2, 6 (*Bemporad*), Nr. 1.

4. Die eigentlichen Instrumente der exakten astronomischen Ortsbestimmung (Meridiankreis, Refraktor). Für mancherlei Zwecke, der geographischen Ortsbestimmung, der niederen Geodäsie usw., kurz für Beobachtungen im Felde, muß die Genauigkeit, mit welcher man in der Praxis die mathematische Idee des astronomischen Universalinstruments verwirklichen kann, hinreichen. Für die eigentliche astronomische Ortsbestimmung — die Messung von Sternörtern — erweist sich das Universalinstrument angesichts der Schwierigkeiten, welche sich einer angenäherten und dauerhaften Verwirklichung dieser Idee selbst bei fest auf Sternwarten aufgestellten Instrumenten entgegenstellen, in dieser Allgemeinheit als ungeeignet. Nur das Altazimut kommt gelegentlich auch wohl zur exakten Ortsbestimmung, aber in möglichst differentieller Anordnung, zur Anwendung. Im übrigen löst man die Aufgabe der astronomischen Ortsbestimmung durch besondere Beobachtungsmethoden, welche an die exakte Ausführung des Beobachtungsinstruments nicht derartige schwer zu befriedigende Anforderungen stellen. Daß die *allgemeine* Aufgabe der Ortsbestimmung durch *besondere* Instrumente lösbar ist, beruht vor allem darauf, daß die eine äquatoreale Koordinate, der Stundenwinkel oder die Rektaszension, durch die Zeit gemessen werden kann, deren die Erde zur Umdrehung um den Betrag dieses Winkels bedarf. Indem dadurch die Uhr zur direkten Koordinatenmessung verwertbar wird, erhält man als die beiden Haupttypen von Instrumenten der eigentlichen astronomischen Ortsbestimmung den *Meridiankreis* und den *Refraktor*. Wir erörtern zunächst ihr Beobachtungsprinzip.

A. Der Meridiankreis.

Schon in VI 2, 2 (*F. Cohn*) sahen wir, daß die grundlegenden Ortsbestimmungen der praktischen Astronomie dem Meridianinstrumente zufallen, welches ein gemeinsamer Spezialfall der beiden nach Zenit oder Pol orientierten Arten des Universalinstrumentes ist. Das Visierfernrohr ist bei ihm nur um *eine* Achse drehbar, während die eigentliche Hauptachse fortfällt. Liegt die Drehungsachse horizontal von Ost nach West gerichtet, so beschreibt die Visierlinie bei ihrer Drehung die Meridianebene, ein eingestelltes Objekt befindet sich stets im Meridian. Die technische Ausführung geschieht derart, daß die Drehungsachse in zwei zylindrischen Zapfen endigt und sich in

Lagern dreht, die an zwei Pfeilern (Ost- und Westpfeiler) in horizontaler und vertikaler Richtung ein wenig verschiebbar befestigt sind. Das Instrument gestattet daher die Beobachtung eines Gestirns nur zur Zeit seines Meridiandurchgangs und liefert seine äquatorealen Koordinaten Rektaszension und Deklination (α, δ) aus der nach einer Sternzeituhr (Uhrkorrektion ΔU) beobachteten Kulminationszeit T und Kulminationshöhe h (gerechnet vom Südpunkt des Horizonts) nach den Formeln (s. VI 2, 2 (*F. Cohn*), p. 21):

$$\Delta U + T = \alpha,$$

$$\varphi + h = 90^0 + \delta \text{ für obere, } 270^0 - \delta \text{ für untere Kulmination.}$$

Die Beobachtung besteht also nicht eigentlich in der Einstellung der Visierlinie auf das Objekt, sondern in dem Abwarten des Zeitmoments, in welchem das Gestirn den Meridian passiert, und in dem alleinigen Einstellen der Visierlinie in Höhe. Die dazu erforderliche Veranschaulichung des Meridians im Gesichtsfeld des Fernrohrs setzt eine genaue Orientierung des in der Brennebene des Objektivs befindlichen Fadenkreuzes voraus. Die Fäden müssen zueinander senkrecht und bei horizontaler Fernrohrstellung horizontal und vertikal stehen. Der sog. Vertikalfaden bleibt dann bei allen Drehungen des Fernrohrs in der Meridianebene, und die Durchgangszeit eines Gestirns durch den Vertikalfaden ist gleich seiner Kulminationszeit T. Die Einstellung des Sterns auf den Horizontalfaden bei seinem Meridiandurchgange liefert in dem Winkel der Visierlinie gegen den Horizont seine Meridianhöhe. Die Ablesung des auf der Drehungsachse senkrecht aufsitzenden und an der Drehung teilnehmenden Kreises, der die Meridianebene sichtbar veranschaulicht, erfolgt gewöhnlich durch 4 bis 6 fest mit den Pfeilern des Instruments verbundene Mikroskope. Zur Bestimmung von Deklinationsdifferenzen, d. h. beim Anschluß der beobachteten Objekte an Sterne bekannter Deklination, ist die Nullpunktsstellung des Kreises gleichgültig. Andernfalls muß sein Nullpunkt zu einem Fixpunkte des Koordinatensystems (Horizont, Äquator, Zenit, Pol) in Beziehung gesetzt werden.

Dieses Prinzip einer Ortsbestimmung mit dem Meridiankreise wird in der Praxis im einzelnen folgendermaßen durchgeführt:

Die Bestimmung der Rektaszension.

Schon alsbald nachdem die Einführung des Fernrohrs mit Fadenkreuz und der Uhr die Ausbildung dieser Beobachtungsmethode ermöglicht hatte, begnügte man sich nicht mit der Beobachtung der Durchgangszeit an dem einen Meridianfaden, sondern fügte eine *Reihe*

von Parallelfäden einigermaßen symmetrisch zum Meridian hinzu[28]). Um aus den Durchgangszeiten durch diese seitlichen Fäden die Meridiandurchgangszeit abzuleiten, bedarf man der Kenntnis des Abstands F des Seitenfadens vom Mittelfaden (sog. *Fadendistanz*). Damit erhält man für diese Reduktion t, d. h. für den Stundenwinkel des Seitenfadens,

$$\sin t = \sin F \cdot \sec \delta$$

oder sehr genähert

$$t = F \cdot \sec \delta,$$

wo dann t und F in Zeit auszudrücken sind. Zur Bestimmung von F benutzt man am besten wieder rückwärts das Zeitintervall, welches geeignete Sterne zum Passieren der Fadenintervalle gebrauchen, nach Umkehrung der obigen Formeln. Da sich die Fadendistanzen lange unverändert halten, kann man sie im Mittel vieler Durchgänge mit hoher Genauigkeit bestimmen und sie dann verwerten, um die Genauigkeit der Durchgangsbeobachtung des einzelnen Sterns durch Mittelbildung aller an den verschiedenen Fäden erhaltenen, auf den Meridian reduzierten Durchgangszeiten zu erhöhen[29]). Am Anfange des 19. Jahrhunderts beschränkte man sich auf etwa 5 bis 7 Vertikalfäden, steigerte später ihre Zahl auf 20 und mehr; doch kam man schließlich wieder von derartigen Zahlen ab oder beobachtete wenigstens die einzelnen Sterne nicht an dem ganzen Fadensystem, sondern an geeigneten Gruppen.

Um die durch nicht genaues Zusammenfallen der Fäden mit der Brennebene bei schräger Betrachtung entstehende scheinbare Verschiebung des Sterns gegen das Fadennetz (sog. *Parallaxe*) zu vermeiden, wird das senkrecht zur optischen Achse verschiebbare *Okular* bei den Beobachtungen *mitgeführt*, derart, daß jeder Fadendurchgang nahe der Mitte des Gesichtsfeldes des Okulars beobachtet wird.

Bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts fixierte man die Durchgangszeit eines Gestirns durch einen Faden nach der sog. *Auge- und Ohr-Methode*. Man zählte die ganzen Sekunden nach den Schlägen einer im Meridiansaale aufgestellten Uhr, verglich damit die Stellung des in horizontaler Richtung das vertikale Fadensystem durchwandernden Sterns und schätzte noch Bruchteile der Sekunde, früher auf

---

28) Nach *Wolf*, Handb. 2, p. 99 hat schon *O. Römer* 1704 in seiner „Rota meridiana" 5 Vertikalfäden benutzt.

29) Über eine andere, terrestrische Methode zur Bestimmung der Fadendistanzen s. *C. F. Gauß*, Neue Methode die gegenseitigen Abstände der Fäden in Meridian-Fernröhren zu bestimmen, Astr. Nachr. 2 (1823), p. 371 = Werke 6 (1874), p. 445.

Viertel-, später auf Zehntelsekunden, was bei einiger Übung keine Schwierigkeiten macht. Im Mittel mehrerer Fäden wird dann rechnungsmäßig die $0^s.01$ angegeben. Die Genauigkeit einer solchen Beobachtung eines Fadendurchgangs hängt neben der Übung wesentlich von der angewandten Vergrößerung v ab, die eine 150- bis 250-fache zu sein pflegt. Einen ungefähren Anhalt gewährt eine von *Th. Albrecht*[30]) aus zahlreichen Beobachtungsreihen für den mittleren Fehler ε der beobachteten Zeit eines Fadendurchgangs *(mittleren Fadenantrittsfehler) nach der Auge- und Ohr-Methode* abgeleitete Formel:

$$\varepsilon = \sqrt{(0^s.07)^2 + \frac{(3^s.18)^2}{v^2} \sec^2 \delta}.$$

Seit der Mitte des 19. Jahrhunderts ist die Auge- und Ohr-Methode durch die *elektrische Registrier-* oder *chronographische Methode* fast völlig verdrängt worden[31]). Man schließt in dem Moment, in welchem der Stern einen Faden passiert, mit einem Handtaster einen elektrischen Strom, vermittelst dessen eine Feder auf einem ablaufenden Chronographen (vgl. p. 209) ein Signal und damit die Beziehung zu den Sekundenzeichen der Beobachtungsuhr herstellt. Der Vorteil der neuen Methode besteht in der größeren Bequemlichkeit und erhöhten Genauigkeit der Beobachtung. Einmal fällt das Notieren der geschätzten Zeitmomente im Dunkeln fort; dann aber hat man bei der Registriermethode sein Augenmerk nur auf den einen Moment der Bisektion des Sternbildes durch den Faden zu richten, während bei der Auge- und Ohr-Methode der Gesichts- und Gehörssinn das Laufen des Sterns durch die Fäden mit den Sekundenschlägen der Uhr in Verbindung bringen müssen. Die dadurch erzielte Steigerung der Genauigkeit spricht sich sowohl in dem *mittleren Fadenantrittsfehler bei der chronographischen Methode*[30]):

$$\varepsilon = \sqrt{(0^s.05)^2 + \left(\frac{3^s.18}{v}\right)^2 \cdot \sec^2 \delta},$$

wie in den später (Nr. 7) zu besprechenden mittleren Fehlern der abgeleiteten Sternörter aus.

---

30) *Th. Albrecht*, Über die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hilfe des elektrischen Telegraphen, Leipzig 1869, p. 9.

31) Die Einführung der Registriermethode in die astronomische Ortsbestimmung durch die Herstellung eines Chronographen geht auf *S. C. Walker* und *W. C. Bond* (1848) zurück, vgl. *W. C. Bond*, Harvard Obs. Ann. 1, part 1 (1856), p. XXIII ff. Der erste, der sie zu Massenbeobachtungen (Zonen) verwertete, war *J. Lamont*, vgl. Beschreibung der an der Münchener Sternwarte zu den Beobachtungen verwendeten neuen Instrumente und Apparate, München Abh. 6 (1851), p. 381.

In einem Punkte freilich hat sich die Registriermethode von den Mängeln der älteren Beobachtungsart nicht in dem Maße frei gezeigt, wie man wohl ursprünglich annahm, indem sich beide Methoden als sehr merklichen persönlichen Auffassungsunterschieden ausgesetzt erwiesen. Neben den p. 251 zu besprechenden Versuchen, diese sog. *persönliche Gleichung* des Beobachters durch geeignete instrumentelle Vorkehrungen zu bestimmen, hat man daher wiederholt versucht, die Rektaszensionsbeobachtungen von diesen individuellen Einflüssen physiologischen Ursprungs ganz zu befreien, sie unabhängig von der Beobachtung eines Durchgangsvorgangs durch Pointieren mit einem beweglichen Faden zu erhalten. In fast vollkommener Weise ist dies in neuester Zeit durch die *Einführung des Repsoldschen selbstregistrierenden Mikrometers* gelungen, bei welchem der Beobachter das Bild des Sterns bei seinem Meridiandurchgang dauernd mit dem beweglichen Faden bisseziert. Um die jeweilige Stellung des Fadens, resp. die sie ersetzende der Mikrometerschraube, die den Ort des Objekts veranschaulicht, zu den Uhrsignalen in Beziehung zu setzen, trägt die Achse der Mikrometerschraube außer der Zähltrommel noch eine andere aus isolierender Substanz (Hartgummi, Glas usw.) verfertigte, aber mit einzelnen metallischen Einlagen versehene Kontakttrommel, welche jedesmal beim Passieren eines Schleifkontakts ein Signal auf dem Chronographen erzeugen. Die den einzelnen Kontakten entsprechende Fadenstellung ist auf den Meridian zu beziehen, um aus den Ablesungen der Kontaktsignale nach der Uhr die Durchgangszeit des Gestirns durch den Meridian zu erhalten. Bei äquidistanten Kontakten geschieht dies durch die Bestimmung des Schraubenwertes — in ähnlicher Art wie die Bestimmung der Fadendistanzen aus den Beobachtungen selbst — und durch die Beziehung der einem bestimmten Nullkontakt entsprechenden Fadenstellung zum Meridian (siehe die Bestimmung des Kollimationsfehlers, p. 235).

Durch die Einführung des *Repsold*schen Mikrometers ist die Genauigkeit in der Bestimmung der Meridiandurchgangszeit und damit der Rektaszensionen wesentlich gesteigert worden (s. Nr. 7). Es wird das weniger durch eine wesentliche Verminderung in dem mittleren Fehler des einzelnen Kontakts bewirkt[32]), als vielmehr durch die weit

32) Nachdem *E. Becker* (Über einige Versuche von Durchgangsbeobachtungen nach dem neuen *Repsold*schen Verfahren, Astr. Nachr. 127 (1891), p. 185) und *A. Kowalski* (Über das neue selbstregistrierende Mikrometer von *Repsold*, St. Pét. Bull. 6 (1897), Nr. 5) für jenen mittleren Fehler nahezu dieselben Werte wie für einen Fadendurchgang bei der üblichen Registriermethode gefunden hatten, konstatierte *Th. Albrecht* (Die Beobachtungsmethode mittelst des *Repsold*-

größere Zahl der in gleicher Zeit zu erhaltenden Kontakte und vor allem durch die fast völlige Unabhängigkeit der Auffassung der Sternbisektion vom Beobachter (s. Nr. 6). Noch erhöht worden sind die hervorragenden Leistungen des *Repsold*schen Mikrometers durch die Anwendung eines Uhrwerks, welches den größten Teil der Bewegung der Mikrometerschraube selbst ausführt und der Hand des Beobachters nur geringfügige Korrektionen behufs Erzielung scharfer Bisektion des Sternbildes überläßt[36]) (s. Nr. 7).

Der erste Vorschlag, die Durchgangsbeobachtung durch Pointierung mit einem selbstregistrierenden Mikrometer zu ersetzen, stammt von *Braun*[33]) und scheiterte wohl an dem komplizierten Uhrwerk. *J. Repsold* schlug zunächst[34]) eine sich selbst registrierende Bewegung des Instruments im Stundenwinkel vor, bei der der Beobachter nur den feststehenden Stern zu pointieren hatte. Später[35]) übertrug er die Selbstregistrierung auf den Mikrometerfaden, den nun der Beobachter stets auf dem laufenden Stern halten mußte. Die Vereinfachung des den Faden bewegenden Uhrwerks (durch *H. Struve* und *J. Rahts*) ermöglichte die praktische Durchführung der *Braun*schen Idee; die verschiedene Geschwindigkeit, die zur Beobachtung der Sterne verschiedener Deklination erforderlich ist, erhält der Faden hier dadurch, daß eine auf der Schraubenachse senkrecht sitzende, aber auf ihr verschiebbare Scheibe von einem gleichmäßig rotierenden Kegel durch Reibung in eine je nach der Stelle des Kegelmantels, an der sie anliegt, verschieden schnelle Rotation versetzt wird[36]).

Betreffs der *photographischen Aufzeichnung von Meridiandurchgängen* vgl. Fußnote 165.

Die Bestimmung der Deklination.

Zur Beobachtung der Deklinationen hat man das Objekt bei seinem Meridiandurchgang auf den Horizontalfaden, resp. schwächere

---

schen Registriermikrometers in ihrer Anwendung auf Längenbestimmungen, Astr. Nachr. 155 (1901), p. 33) auch darin eine merkliche Besserung.

33) *C. Braun*, Das Passagen-Mikrometer, Leipzig 1865; näher ausgeführt von *C. Braun*, Berichte von dem *Haynald*schen Observatorium zu Kalocza, Münster i. W. 1886.

34) *J. Repsold*, Durchgangsinstrument mit Uhrbewegung, Astr. Nachr. 118 (1888), p. 305.

35) *J. Repsold*, Neuer Vorschlag zur Vermeidung des persönlichen Zeitfehlers bei Durchgangsbeobachtungen, Astr. Nachr. 123 (1889), p. 177.

36) *H. Struve*, Über die Verbindung eines Uhrwerks mit dem „unpersönlichen" Mikrometer von *Repsold*, Astr. Nachr. 155 (1901), p. 353.

Objekte in die Mitte zwischen zwei enge Horizontalfäden, mit Achsenklemme und Feinbewegung einzustellen. Geschieht das nicht im Meridian, sondern an einem Seitenfaden vom Stundenwinkel t, so ist eine Reduktion auf die Meridianhöhe (wegen „Krümmung des Parallels"),

$$dz = -\left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot \sin 2\delta$$

anzubringen; außerdem ist eine eventuelle Fadenneigung zu berücksichtigen, die auf die Rektaszensionen, wenn man die Sterne möglichst zwischen die Horizontalfäden stellt, ohne Einfluß ist. Die ungefähre Orientierung des Fadensystems erkennt man daran, daß ein Stern bei seinem Meridiandurchgang auf dem Horizontalfaden läuft, und bestimmt sie strenge durch mehrmalige Pointierung des Sterns zu beiden Seiten des Meridians.

Auch bei der Deklinationsbeobachtung vervielfältigt man öfters die Zahl der Einstellungen durch Einführung eines beweglichen Deklinationsfadens; doch ist man sich über den dadurch erzielten Erfolg nicht einig[39]). In jedem Falle sind die Vorteile eines solchen Deklinationsmikrometers[40]) geringfügiger, da die Hauptunsicherheit der Deklinationen in den Teilungsfehlern[41]) und der Refraktion[42]) liegt.

Die an einem fehlerfreien Meridianinstrument in der beschriebenen Weise erhaltenen, von Refraktion befreiten Koordinaten sind scheinbare. Über ihre Überführung in mittlere Örter, sowie die stufenweise Anlage der Arbeiten am Meridiankreise vgl. VI 2, 2 (*F. Cohn*).

Historisches zum Meridiankreise. Die Vereinigung der Beobachtung beider Koordinaten an einem Instrument, dem Meridiankreise, ist verhältnismäßig neueren Datums. Bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts beobachtete man, mit vereinzelten Ausnahmen[28]), beide Koordinaten getrennt, die Rektaszensionen am *Passageninstrument*, einem Meridianinstrument ohne feingeteilten Kreis und Ablesemikroskope — zur Einstellung der Objekte dient ein roh geteilter Kreis —, die Deklinationen am *Mauerquadranten* oder *Mauerkreise*. Erst *Reichenbach*[43]) vereinigte beide Instrumente zu einem einzigen, dem Meridiankreise. Man erreichte dadurch den Vorteil, die vollständige Ortsbe-

39) Vergl. z. B. *E. Großmann*[12]), p. 190.

40) *J. Repsold*, Neue Mikrometer von *A. Repsold u. Söhne*, Astr. Nachr. 141 (1896), p. 279. 41) S. p. 205 ff. 42) S. p. 245 ff.

43) *J. G. Repsold* hatte schon 1804 einen Meridiankreis für seinen Privatgebrauch gebaut, der später an die Göttinger Sternwarte kam. Doch ist der erste größere Meridiankreis, der zur ausgedehnten praktischen Verwendung gelangte, der von *Reichenbach* 1819 für die Sternwarte zu Königsberg erbaute.

stimmung eines Gestirns mit nur einem Instrument und nur einem Beobachter ausführen zu können. Seitdem ist der Meridiankreis das fundamentale Beobachtungsinstrument der Astronomie geworden und für jede gut ausgerüstete Sternwarte unentbehrlich.

Entsprechend dieser fundamentalen Bedeutung des Meridianinstruments sind die Anforderungen an seine Leistungen die höchsten. Insbesondere muß trotz der demnächst zu besprechenden Methoden der Instrumentalfehlerbestimmung die Konstanz seiner Aufstellung, d. h. die Unveränderlichkeit der Richtung der Drehungsachse und der Mikroskopträger, die Starrheit aller seiner Teile, d. h. die Vermeidung unregelmäßiger Biegungen usw. nach Möglichkeit gewährleistet sein. Daher ist sowohl auf die Konstruktion des Meridianinstruments, wie seiner Pfeiler, sowie die Befestigung der Mikroskope die größte Sorgfalt zu verwenden[44]). Auch die Einrichtung des ganzen Meridiansaals beeinflußt die Leistungsfähigkeit des Instruments. Stärkere, schnell eintretende Temperaturschwankungen sind für die Konstanz seiner Aufstellung in allen seinen Teilen schädlich und werden neuerdings durch einen den Ausgleich der Innen- und Außentemperatur möglichst gewährleistenden Bau des Saals mit doppelten Wellblechwänden und breiten Beobachtungsspalten zu beseitigen gesucht, während Temperaturschichtungen im besonderen den Weg des Lichtstrahls beeinflussen und so den beobachteten Ort verfälschen. So hat man bei dem modernsten Meridiankreise, dem der Sternwarte zu Kiel, der Umdachung des Meridiansaals die Form einer Zylinderfläche gegeben, deren Achse mit der Drehachse des Meridiankreises zusammenfällt, vergl. *Harzer*[23]).

Infolge der großen Anforderungen an die Konstanz der Aufstellung und der ganzen Einrichtung des Meridiankreises und der technischen Schwierigkeiten, welche sich bei größeren Dimensionen ihrer Verwirklichung entgegenstellen würden, stellt man Meridiankreise nur in mäßigen Dimensionen her. Die älteren Meridiankreise aus der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts (von *Reichenbach* und *A. Repsold*) besaßen meist nur eine Objektivöffnung von 4 Zoll und gestatteten damit die Beobachtung von Sternen bis zur 9., höchstens $9^1/_2$ten Größe. Der 1819 erbaute *Reichenbach*sche Meridiankreis der Königsberger Sternwarte besitzt eine Öffnung von 4 Zoll, eine Fernrohrlänge von 162 cm, eine Achsenlänge von 87 cm; der Kreis von 97,5 cm Durchmesser ist von 3′ zu 3′ geteilt und wird durch 4 an einem Alhidaden-

44) Näheres über die Konstruktion der Meridiankreise, den Bau der Pfeiler usw. s. bei *Ambronn* 2.

kreise befestigte Nonien etwa auf 2″ abgelesen[46]); etwaige Veränderungen in der Lage des Alhidadenkreises gegen den Horizont werden durch eine Wasserwage kontrolliert. Die *Repsold*schen Meridiankreise von Hamburg (1836), Pulkowa (1840), Königsberg (1841) haben Mikroskopablesung; die Mikroskope sind an einem Rahmen befestigt, der an den Pfeilern fest angeschraubt ist. Der Pulkowaer Kreis besitzt fast 6 Zoll (157 mm) Objektivöffnung, $2^1/_4$ m Brennweite und zwei von 2′ zu 2′ geteilte Kreise von $1^1/_4$ m Durchmesser[47]). In neuerer Zeit hat die entwickeltere Technik auch größere Meridiankreise ohne Beeinträchtigung ihrer Leistungsfähigkeit hergestellt, welche bis zu 8 Zoll Öffnung und mehr besitzen. Einerseits wird dadurch der Bereich der sichtbaren Gestirne infolge der vermehrten Lichtstärke ein größerer, insbesondere wächst die Zahl der am hellen Tage beobachtbaren Sterne erheblich, was für viele Untersuchungen von größter Bedeutung ist; andererseits nimmt infolge der stärkeren Vergrößerungen auch die Genauigkeit der Beobachtungen zu. Von solchen größeren Instrumenten nennen wir die *Pistor-* und *Martins*schen Kreise von Washington (1865, $8^1/_2$ Zoll) und Berlin (1869, 8 Zoll), sowie den *Repsold*schen Meridiankreis von Kiel (um 1903, 8 Zoll). Erwähnt sei die wesentlich veränderte Befestigung der Lager und Mikroskope, wie sie die neueren *Repsold*schen Meridiankreise (von Straßburg, Bonn, Wien-Ottakring, München, Mt. Hamilton, Heidelberg, Kiel usw.) gegenüber den älteren Konstruktionen aufweisen, indem Lager und Mikroskope, in einem Eisenaufbau von Trommelform vereinigt, auf die niedriger gehaltenen Pfeilerköpfe aufgesetzt werden. Die zugleich eingetretene Verringerung der Kreisdurchmesser auf 65 cm hat nicht durchweg Anerkennung gefunden[48]).

Passageninstrument und Vertikalkreis. Da sowohl die eigentliche Beobachtung am Meridiankreise, wie auch ihre Befreiung von den später zu erörternden Instrumentalfehlern und die diesbezüglichen Instrumentaluntersuchungen für beide Koordinaten fast ganz voneinander unabhängig sind, ist es auch heute noch behufs Erzielung der höchsten Genauigkeit oft vorzuziehen, beide Koordinaten getrennt zu beobachten, selbst wenn man über einen Meridiankreis verfügt. Man kann in derselben Zeit für *eine* Koordinate ein weit größeres Material zur

46) Vergl. *F. W. Bessel*, Königsb. Beob. 6 (1821).

47) Vergl. *W. Struve*, Description de l'Observatoire astronomique central de Poulcova, St. Pétersbourg 1845.

48) Vergl. die Diskussion zwischen *J. Repsold* und *M. Nyrén*: Astr. Ges. Vjs. 35 (1900), p. 212 und Astr. Nachr. 154 (1901), p. 187, p. 305, p. 435; Astr. Nachr. 155 (1901), p. 203.

scharfen Untersuchung des Instruments und seiner Fehlerquellen beschaffen, wie auch den Anschluß an ein Fundamentalsystem (s. VI 2, 2 (*F. Cohn*), p. 25, und später) weit inniger gestalten, wodurch vor allem die Genauigkeit und Verwendbarkeit der abgeleiteten Örter bedingt ist. So hat man, ähnlich wie in der früheren Zeit vor Einführung des Meridiankreises, z. B. in Pulkowa (seit seiner Begründung um 1840) die fundamentalen Ortsbestimmungen an zwei Instrumenten getrennt ausgeführt, einem *Ertel*schen *Passageninstrument* und einem *Ertel*schen *Vertikalkreis*[47]). Der letztere ist an die Stelle der früheren Mauerkreise getreten, er ist der Konstruktion und Bewegungsart nach ein Universalinstrument mit einem fein geteilten Höhenkreise[49]). Seine Anwendung beschränkt sich aber, trotz seiner Drehbarkeit um eine vertikale Achse, auf den Meridian oder ganz kleine Stundenwinkel, und diese Drehungsmöglichkeit wird im übrigen nur zum Durchschlagen des Instruments (s. p. 234) und dadurch zur Elimination des Nullpunkts des Kreises verwertet. Die Reduktion x der in kleinen Stundenwinkeln beobachteten Höhen auf den Meridian erfolgt nach der Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}x = + \frac{\cos\delta \cdot \cos\varphi \cdot (\sin \tfrac{1}{2}t)^2}{\sin(\varphi - \delta + \tfrac{1}{2}x)},$$

oder in hinreichender Näherung

$$x = + 2\frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}(\sin \tfrac{1}{2}t)^2 - 2\left(\frac{\cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}\right)^2 \operatorname{cotg}(\varphi - \delta)(\sin \tfrac{1}{2}t)^4.$$

Ist bei dieser Benutzung des Vertikalkreises die Umlegbarkeit des Instruments mittelst Durchschlagens und damit die Drehungsmöglichkeit um zwei Achsen wesentliche Vorbedingung, so gilt ähnliches auch für das Passageninstrument, welches auch außerhalb des Meridians zu Durchgangsbeobachtungen durch ein besonderes Azimut mannigfache Anwendung findet. Besondere Erwähnung verdient die Anwendung der *Durchgangsbeobachtung im ersten Vertikal* (Vertikalkreis durch Ost- und Westpunkt des Horizonts) sowohl zur exakten Bestimmung der Sternörter, wie auch der Polhöhen[50]). Der Unter-

---

49) Das Pulkowaer Instrument hat 6 Zoll Öffnung, der Kreis einen Durchmesser von 43 Zoll und eine Teilung von 2′ zu 2′. Im Jahre 1876 erhielt der Kreis eine Neuteilung von *Repsold*.

50) Über die von *O. Römer* zuerst angegebene Methode, mit dem Passageninstrument Durchgänge durch den ersten Vertikal zu beobachten, vgl. *F. W. Bessel*, Astr. Nachr. 3 (1824), p. 9, sowie Astr. Nachr. 6 (1828), p. 221 = *Bessel*, Abhdl. 1, p. 317 sowie 2, p. 45. — *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 6 (1827), p. 101, p. 421, p. 437 und p. 453. — *J. F. Encke*, Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West, Berl. astr. Jahrb. für 1843, p. 300 ff. — Von den

schied der Durchgangszeiten eines Gestirns durch den Ost- und Westvertikal gibt durch einfache Rechnung die Zenitdistanz im Meridian und damit eine Beziehung zwischen Polhöhe und Deklination, die unabhängig von jeder Kreisablesung und dem störenden Einfluß der Refraktion ist. Ihre besondere Bedeutung hat die Methode dadurch erlangt, daß ihre hohe Genauigkeit es gestattete, die zeitlichen Änderungen dieser Zenitdistanzen, wie sie sowohl durch Schwankungen der Polhöhe entstehen können, als auch durch Veränderungen in den scheinbaren Örtern der Sterne, mit großer Schärfe zu bestimmen. Indem diese letzteren Änderungen wiederum ausser durch die eigentliche, der Zeit proportionale Eigenbewegung durch die Erscheinungen der Aberration, Nutation, Präzession, Parallaxe usw. verursacht werden, vermag man unabhängig von der Kenntnis des absoluten Betrages der Zenitdistanz, die charakteristischen Konstanten jener Erscheinungen und den Verlauf der Polhöhenschwankung abzuleiten (s. auch VI 2, 3 (*Wirtz*)).

In dieser Richtung noch weiter gehend behandelt besonders eingehend *W. Förster* die mannigfachen Möglichkeiten, welche ein Durchgangsinstrument für die unabhängige Bestimmung der Sternörter und ihrer Änderungen bietet, mit dem man sowohl Durchgänge durch ein festes Azimut, wie auch durch eine feste Höhe beobachten kann[51]). Dieses Instrument — *Universaltransit* genannt — muß um beide Achsen drehbar sein, besitzt also den Typus des Universalinstruments, aber ohne geteilte Kreise, und vermeidet somit völlig den Einfluß der Teilungsfehler wie auch der Hauptglieder der Refraktion, verlangt aber sehr sorgfältig funktionierende Niveaus (s. VI 2, 3 (*Wirtz*)). Einen besonderen Fall bildet die sog. *Horrebow-Talcott-Methode* zur Polhöhenbestimmung[52]). Mit Hilfe eines mit einem Deklinationsmikrometer versehenen, im Meridian aufgestellten, umlegbaren Instruments — kurz als *Zenitteleskop* bezeichnet — wird die Differenz der sehr nahe gleichen Meridianzenitdistanzen zweier Sterne (eines Nord- und eines

Anwendungen seien erwähnt: *W. Struve*, Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes, St. Pét. Mém. (6) 3 (1843), und zahlreiche weitere Abhandlungen der Pulkowaer Astronomen; die Beschreibung des Pulkowaer großen *Repsold*schen Passageninstruments im ersten Vertikal siehe bei *W. Struve*[47]).

51) *W. Förster*, Zur Theorie des Durchgangsinstruments, Berl. astr. Jahrb. für 1880 und 1882 Anhang, und *W. Förster*, Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen Ortsbestimmungen am Himmel, Astronomische Abhandlungen, als Ergänzungshefte zu den Astr. Nachr. hrsg. von *H. Kreutz*, Nr. 5, Kiel 1904.

52) *Pet. Horrebow*, Opera mathematico-physica 3, Havniae 1740—42; *A. Talcott* im „Report of the superintendent of the U. S. coast survey for 1857, Washington 1858", p. 324—334. Vgl. übrigens VI 2, 3 (*Wirtz*), Nr. 20.

Südsterns) durch Umlegen (s. p. 234) mikrometrisch gemessen, wobei die unveränderte Richtung der Visierlinie gegen die Vertikale durch ein Niveau kontrolliert wird, und dadurch die Lage des Zenits auf das Mittel jener beiden Sterne scharf bezogen. Durch systematisch über ein Jahr fortgesetzte Beobachtungen zahlreicher Sternpaare wird man, ausser wenn man die Polhöhe selbst bestimmen will, von den Deklinationen selbst so gut wie unabhängig; praktisch erfolgt die Elimination in der Form sogenannter Gruppenanschlüsse. So dient sie denselben Zwecken wie die Durchgangsbeobachtung im ersten Vertikal und findet gegenwärtig ihrer bequemen Handhabung halber die ausgedehnteste Anwendung[53]).

Auch die Vereinigung beider Instrumente in der Form eines Meridiankreises kommt außerhalb des Meridians zur Anwendung zu gleichzeitiger Durchgangs- und Höhenbeobachtung in einem festen Azimut; es entspricht dann völlig einem Universalinstrument ohne fein geteilten Azimutalkreis[54]). Das eigentliche Universalinstrument wird, wie erwähnt, nur vereinzelt zur exakten astronomischen Ortsbestimmung (Mond) angewandt[55]).

Trotz seiner fundamentalen Bedeutung für die astronomische Koordinatenbestimmung vermag der Meridiankreis nicht allen ihren Anforderungen zu genügen, nicht allein alle auftretenden Aufgaben zu erledigen. Die relative Kleinheit seiner Dimensionen, die Beschrän-

---

53) Bei der internationalen Unternehmung der Überwachung der Breitenschwankungen, dem sog. „internationalen Breitendienst", gelangt sie allein zur Anwendung. Vgl. *F. Küstner*, Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationskonstante, Berlin 1888, sowie *F. Küstner*, Zur Bestimmung der Aberrationskonstante aus Meridianzenitdistanzen unabhängig von den Schwankungen der Polhöhe, Astr. Nachr. 126 (1891), p. 233; *Th. Albrecht*, Anleitung zum Gebrauch des Zenitteleskops auf den internationalen Breitenstationen, 1. Aufl., Berlin 1899, 2. Aufl. 1902. Über *photographische* Polhöhenbestimmungen nach der *Horrebow-Talcott-Methode* vgl. Fußnote 165.

54) Im ersten Vertikal speziell zur Ausführung gelangt für die *v. Kuffner*-sche Sternwarte von Wien-Ottakring; vergl. *N. Herz*, Theorie eines mit einem Vertikalkreise versehenen Passageninstrumentes im ersten Vertikale, Publikationen der *v. Kuffner*-Sternw. in Wien 2, Wien 1892. — Ein allgemeineres Beispiel bietet das neue Greenwicher Altazimut, Greenw. Obs. 1900.

55) Vgl. die Beschreibung des alten Greenwicher Altazimuts in Greenw. Obs. 1847 and 1852, sowie des Straßburger Altazimuts in *L. Courvoisier*, Untersuchungen über die absolute Polhöhe von Straßburg, Diss. Heidelberg 1901 und *W. Schur*, Untersuchungen und Beobachtungen am Altazimut der Straßburger Sternwarte, Astr. Nachr. 120 (1888), p. 1.

kung seiner Anwendung auf den kurzen, nur einmal täglich eintretenden Moment des Meridiandurchgangs eines Gestirns, lassen das Bedürfnis nach einem Instrument entstehen, bei dem diese Beschränkungen wegfallen. Für alle Beobachtungen fundamentaler Natur, der Örter der Sonne, der Fundamentalsterne und der Menge der helleren Fixsterne (bis zur 9. Größe etwa) kommt der Meridiankreis allein in Frage. Alle schwächeren Objekte, insbesondere die kleinen Planeten und Kometen, alle Objekte, deren relativer Ort gegen ein Nachbargestirn allein von Interesse ist, wie Doppelsterne und Satelliten, alle Objekte, bei denen man sich nicht auf die täglich nur einmalige Beobachtung im Meridian allein angewiesen sehen will, legt man durch differentiell-mikrometrischen Anschluß am *Refraktor* fest.

B. Der Refraktor.

Der übliche Name „Refraktor" (ursprünglich im Gegensatz zu „Reflektor" gebraucht) bezeichnet ein nach dem Himmelspol orientiertes oder, wie man sagt, *parallaktisch montiertes* Universalinstrument oder Äquatoreal, welches nach dem Früheren in Verbindung mit zwei geteilten Kreisen und einer Uhr absolute äquatoreale Koordinaten liefern könnte und früher gelegentlich geliefert hat. Die Unmöglichkeit, den Refraktor in größeren Dimensionen diesen Zwecken entsprechend herstellen zu können, führte dazu, ihn nur zur Bestimmung der relativen Koordinaten benachbarter Gestirne mittels geeigneter, „Mikrometer" genannter Meßapparate zu verwerten. Der fundamentale Unterschied der relativen Beobachtungen am Meridiankreise und am Refraktor ist der, daß bei ersterem selbst bei der differentiellsten Art, den sog. Zonenbeobachtungen, die Visierlinie auf jedes Objekt einzeln eingestellt und ihre Richtung im eigenen System des Instruments selbständig durch Benutzung des mechanischen Drehungsprozesses festgelegt und nur dieses Instrumentalsystem durch Beobachtung bekannter Sterne an das äquatoreale System angeschlossen wird; bei der eigentlichen Refraktorbeobachtung wird das Fernrohr hingegen mehr als bildentwerfend verwertet und dieses Bild mikrometrisch vermessen, wie es am deutlichsten bei der Ausmessung einer photographischen Himmelsaufnahme der Fall ist. Zwar muß das Fernrohr, d. h. die Verbindung von Objektiv und Okular, eine gewisse Starrheit besitzen, um überhaupt wenigstens für die kurze Zeit einer Beobachtung eine Richtung festlegen zu können. Diese Richtung selbst aber wird nicht durch die Drehungswinkel um die Instrumentalachsen bestimmt und diese Drehungsmöglichkeit beim Messen gar nicht weiter verwertet.

Die Vorteile dieser Beobachtungsart am Refraktor sind einleuchtend: Da es sich nur um meist geringfügige Koordinatendifferenzen handelt, braucht das Koordinatensystem des Instruments nicht in gleicher Schärfe mit dem mathematischen übereinzustimmen wie beim Meridiankreis. Der Refraktor kann demnach um beide Achsen drehbar und in weit größeren Dimensionen gebaut werden, sonach auch zur Beobachtung weit schwächerer Objekte dienen. Er erlaubt die Beobachtung des Objekts in jedem beliebigen Stundenwinkel, sobald es nur eine genügende Höhe über dem Horizont besitzt, und eine beliebig häufige Wiederholung der Messung durch Nachfolgen mit dem Fernrohr. Endlich gibt die mikrometrische Meßmethode naturgemäß eine größere Genauigkeit als die Methode der Meridianbeobachtung, insbesondere ist sie unabhängig von jeder Kreisablesung und den damit verbundenen Teilungsfehlern. Zur Ableitung der absoluten Koordinaten aber bleibt man auf die Mitwirkung des Meridiankreises, dem die Bestimmung der Örter der Vergleichsterne zufällt, angewiesen. Eine scharfe Trennung der beiderseitigen Aufgaben ist nicht möglich und hängt von den verfügbaren Hilfsmitteln und dem subjektiven Empfinden ab (s. später Nr. 8).

Die verschiedenen Formen der mikrometrischen Messung[56]). Über die verschiedenen Formen, in denen sich eine solche relative Ortsbestimmung abspielen kann, ist das Folgende zu bemerken.

Beobachtung bei ruhendem Fernrohr. Zunächst kann man, ähnlich wie bei der Meridianbeobachtung, die tägliche Bewegung unter Voraussetzung ihrer Gleichförmigkeit zur Messung verwerten, indem man aus den nacheinander beobachteten Durchgangszeiten beider Objekte durch fest in der Brennebene aufgespannte und nach bestimmten Richtungen orientierte Kurvensysteme ihre Koordinatendifferenzen berechnet. Dabei kommt sowohl die Auge- und Ohr-, wie auch die elektrische Registriermethode zur Anwendung. Von den älteren Formen solcher sog. *„Mikrometer"* erwähnen wir das Kreis- oder Ringmikrometer, das Lamellen-, das feste Fadenmikrometer usw. Neben einigen Vorteilen — manche bedürfen z. B. keiner Feldbeleuchtung und gestatten daher die Beobachtung der schwächsten noch sichtbaren Objekte, das Ringmikrometer bedarf keiner besonderen Orientierung — sind sie den großen Nachteilen aller Durchgangsbeobachtungen, ihren großen persönlichen Auffassungsunterschieden, ausgesetzt, die sich hier sogar auf beide Koordinaten werfen. Allein die AR.-Differenz wird durch

56) Vgl. hierzu insbesondere, neben *Ambronn* 2, den Artikel von *E. Becker* über „Mikrometer" in *Valentiner, Handwörterbuch*, 3^1, p. 64ff.

Durchgangsbeobachtungen bestimmt bei einem festen, senkrecht zur täglichen Bewegung orientierten Fadensystem. Die δ-Differenz wird dann mit einem, der täglichen Bewegung parallelen beweglichen Faden gemessen, indem beide Objekte nacheinander bei ihrem Durchgang durch das Gesichtsfeld pointiert werden; event. das erste mit einem festen, das zweite mit einem parallelen beweglichen Faden, deren Koinzidenz man gesondert bestimmt. Die Kenntnis des Schraubenwerts erlangt man am besten durch Messung eines bekannten Deklinationsunterschieds; event. kann man auch nach Drehung des ganzen Fadensystems um 90° Durchgänge dazu verwenden. Zu berücksichtigen ist die meist geringfügige Abhängigkeit des Schraubenwerts von der Temperatur und der Okularstellung.

Ganz unabhängig von der Beobachtung von Durchgangszeiten wird man entweder durch die Einführung des *Repsold*schen selbstregistrierenden Mikrometers, das indessen trotz seiner großen Vorzüge am Refraktor noch keine Anwendung gefunden hat, oder dadurch, daß man die tägliche Bewegung ganz ausschaltet.

Beobachtung bei bewegtem Fernrohr. Man erreicht das dadurch, daß man dem Fernrohr durch ein Uhrwerk[57]) eine der täglichen Umdrehung der Erde gerade entgegengesetzte Bewegung gibt und es dadurch eine feste Richtung im Raume unveränderlich beibehalten läßt, und mißt die dann zum Fernrohr feststehenden Bilder mikrometrisch aus, entweder durch visuelle Beobachtung mit dem Fadenmikrometer oder bei photographischen Aufnahmen mit dem Ablesemikroskop.

a) *Die differentielle Ortsbestimmung mit dem visuellen Fadenmikrometer.* Das *Faden-* oder *Positionsmikrometer* besteht in einer Vereinigung von fester und beweglicher Fadenplatte, welche, neben der zur Fokussierung dienenden Verschiebbarkeit des ganzen Okularkopfes in der Richtung der optischen Achse, auch in der Brennebene senkrecht zur optischen Achse, sowohl gemeinsam, wie auch einzeln, durch Mikrometerschrauben verschoben und um die optische Achse (mit Feinbewegung) gedreht werden kann. Ihren Positionswinkel, d. h. den Richtungswinkel des Mikrometerfadens gegen den nach dem Nordpol zeigenden Stundenkreis, liest man an dem fest, d. h. unabhängig von dem die Fadenplatten tragenden Okularkasten, am Fernrohr sitzenden Positionskreis ab, dessen Nullpunkt zum äquatorealen Koordinatensystem

57) Näheres über die verschiedenen Arten der Uhrwerke und ihre Einrichtung s. bei *Ambronn* in dem Abschnitt „Parallaktisch aufgestellte Refraktoren", 2, p. 1066 ff. Die ersten Uhrwerke brachte *Fraunhofer* im zweiten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts an seinen Refraktoren (Neapel 1811, Dorpat 1824) an.

in Beziehung gebracht werden muß. Diese Nullpunktsbestimmung erfolgt, indem man den ganzen Okularkasten so dreht, daß ein Stern bei ruhendem Fernrohr infolge der täglichen Bewegung auf dem Faden entlang läuft. Die Stellung des aus je zwei zueinander senkrechten Gruppen bestehenden Fadensystems zu den fundamentalen Richtungen des äquatorealen Systems bleibt bei allen Drehungen des parallaktisch montierten Fernrohrs die gleiche; insbesondere veranschaulichen die Fäden bei entsprechender Stellung zum Positionskreise die Stunden- und Parallelkreise.

Das Fadenmikrometer gestattet somit durch geeignete Kombination der festen und beweglichen Fäden rechtwinklige oder polare ebene Koordinaten in beliebigen Positionswinkeln in der Bildebene zu messen, und zwar pointiert man entweder beide Objekte nacheinander mit dem beweglichen Faden, oder man stellt einen festen Faden auf das eine Objekt (durch Verschiebung des ganzen Okularkastens), den beweglichen auf das andere und wiederholt die Messung in umgekehrter Reihenfolge unter Durchschrauben des beweglichen Fadens, wodurch man von etwaigen Fehlern des Uhrwerks unabhängiger wird. In der Praxis mißt man entweder äquatoreale rechtwinklige Koordinaten x, y, indem man den beweglichen Faden parallel und senkrecht zur scheinbaren täglichen Bewegung stellt[58]), oder gelegentlich (bei sehr engen Objekten wie Doppelsternen) Polarkoordinaten s und p. In diesem Falle gibt die Parallelstellung der einen Fadengruppe zur Verbindungslinie beider Objekte den Positionswinkel, in dieser Richtung mißt man mit der anderen Fadengruppe den Abstand beider Objekte[59]). Bei den kleinen Koordinatendifferenzen, um die es sich hierbei stets handelt (selten mehr als 5′), genügen zur Umsetzung in sphärische Koordinaten die Näherungsformeln:

$$\Delta\alpha \cos\delta = x = s \sin p,$$
$$\Delta\delta = y = s \cos p.$$

b) *Die differentielle Ortsbestimmung mit Hilfe der Photographie.* Eine fehlerfreie Aufnahme auf der ebenen photographischen Platte[60]) gibt ein Abbild der Sphäre, welches ihrer zentralen Projektion

58) Besitzt das Mikrometer zwei zueinander senkrecht wirkende Schrauben, so bedarf es dazu keiner Drehung im Positionswinkel.

59) Dreht man den Positionswinkel um 90°, so kann man beide Messungen mit ein und demselben beweglichen Faden ausführen.

60) Über die Herstellung astrophotographischer Aufnahmen vergl. z. B. in *Valentiners Handwörterbuch* 1 den Artikel „Astrophotographie", sowie das Lehrbuch *J. Scheiner*, Die Photographie der Gestirne. Leipzig 1897.

auf eine Tangentialebene ähnlich ist. Die Festlegung der abgebildeten Sternörter erfolgt in der Regel durch mikrometrische Messung der ebenen rechtwinkligen (seltener polaren) Plattenkoordinaten, bezogen auf einen beliebig gewählten, aber nahe zentral gelegenen Nullpunkt und nahezu äquatoreale Koordinatenrichtungen[61]). Diese Messung kann entweder geschehen durch mikrometrische Verschiebung des Ablesemikroskops oder der Platte längs gewisser, zu einander senkrechter, event. noch im Positionswinkel drehbarer Führungen, oder an einer von dem Mikroskop unabhängigen Skale. Von den bei der großen Ausdehnung photographischer Platten (bis zu 2^0 Seitenlänge) zu befürchtenden Fehlern des Meßapparates, vor allem aber einer etwaigen Verziehung der Gelatineschicht, sucht man sich dadurch unabhängig zu machen und auch die Arbeit der Ausmessung wesentlich zu vereinfachen, daß man vor der Aufnahme gewisse *netzartige Gitter* von genau bestimmten Dimensionen auf die Platte *aufkopiert* und die einzelnen Objekte an die nächstgelegenen Gitterstriche anschließt. Dazu bedarf es, ebenso wie bei kleinen Koordinatendifferenzen, nur einer kurzen Mikrometerschraube, ohne daß die Bewegung längs der Führungen zur Messung benutzt wird; von dieser wird nur eine unveränderliche Richtung verlangt, damit die Mikrometerfäden den Gitterstrichen parallel bleiben und nicht von neuem orientiert zu werden brauchen[62]). Solche Gitter werden bei einer Strichbreite von wenigen 0,01 mm und einer Strichdistanz von 5 mm von *P. Gautier* in Paris in großer Schärfe hergestellt. Die beiden Strichsysteme stehen bis auf wenige Sekunden aufeinander senkrecht, und die Fehler der gegenseitigen Abstände erreichen kaum 1 Mikron[62a]). Ihre Prüfung, sowie die der Kopien, kann in der erwähnten Weise durch Skale oder große Mikrometerschraube erfolgen[62b]). Doch muß

61) Eine direkte Bestimmung der *sphärischen* Koordinaten aus photographischen Himmelsaufnahmen kann mit einem parallaktisch aufgestellten *Ablesefernrohr* erfolgen, dessen Objektivmittelpunkt von der Platte um die Brennweite des photographischen Objektives absteht, derart, daß im Ablesefernrohr die Richtungen nach den Bildern auf der Platte dieselben sind wie im visuellen Fernrohr die Richtungen nach den Sternen; vergl. hierüber *J. C. Kapteyn*, Exposé de la méthode parallactique de mesure, Reduction des clichés, Bulletin du Comité international permanent pour l'exécution photographique de la carte du ciel [*Comité carte du ciel bull.*] 1, Paris 1888, p. 94, sowie *Scheiner*[60]).

62) Die Beschreibung eines solchen, von *Repsold* hergestellten photographischen Meßapparates s. z. B. bei *Scheiner*[61b]) oder *D. Gill*, On a new instrument for measuring astrophotographic plates, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 59 (1898), p. 61.

62a) 1 *Mikron* $= 1\,\mu = 0.001\,mm$.

62b) Vergl. z. B. *J. Scheiner* in den „Publikationen des Astrophysikalischen

man beim Aufkopieren der Gitter die größte Sorgfalt beobachten, da sich vielfach merkliche Abweichungen der aufkopierten Gitter von den Originalen bis auf mehrere Mikron[62a]) ergeben haben, die man auf Projektionsfehler bei der Aufkopierung — Lichtbrechung in dem nicht völlig planparallelen und homogenen Originalgitter, prismatische Gestalt der Gitterfurchen — zurückführt[63]).

Die Umrechnung der ebenen äquatorealen Plattenkoordinaten x, y in sphärische α, δ erfolgt nach den Formeln

$$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{x}{\cos\delta_0 - y\sin\delta_0}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\delta_0 + y\cos\delta_0}{\cos\delta_0 - y\sin\delta_0}\cos(\alpha - \alpha_0),$$

worin α_0, δ_0 die Koordinaten des Plattenzentrums bezeichnen[64]). Dabei ist man, da die photographische Platte sich nicht in der Schärfe wie das Fadensystem bei der visuellen Beobachtung nach den Richtungen des äquatorealen Systems orientieren läßt, sowohl bezüglich der Orientierung der Platte (d. h. der x, y), wie des Plattenzentrums (α_0, δ_0), wie auch des Skalenwerts auf die Kenntnis der Örter einer hinreichenden Zahl von gut über die Platte verteilten Vergleichsternen angewiesen, welche nur durch Beobachtungen am Meridiankreise erlangt werden kann. Dieser Einschränkung der Anwendbarkeit[65]) steht allerdings ein Vorteil gegenüber. Während die visuelle Beobachtung am Meridiankreis, wie am Refraktor, nur scheinbare, d. h. auf den momentanen Zustand des äquatorealen Koordinatensystems bezogene Koordinaten ergeben kann, zieht man in die Re-

Observatoriums zu Potsdam, Photographische Himmelskarte", Bd. 1, Potsdam 1899, p. XII; *F. Küstner*, Über eine große praktisch fehlerfreie Mikrometerschraube von *M. Wolz* in Bonn zur Untersuchung photographischer Gitter, Astr. Nachr. 161 (1903), p. 97.

63) *K. Bohlin*, Sur l'emploi du réseau pour la mesure des clichés photographiques, Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 321, sowie *K. Bohlin*, Jahresbericht der Sternwarte zu Stockholm, Astr. Ges. Vjs. 36 (1901), p. 145; *H. Ludendorff*, Über Fehler, die beim Aufkopieren von Normalgittern auf photographische Platten entstehen können, Astr. Nachr. 157 (1901), p. 17; sowie *H. Ludendorff*, Untersuchungen über die Kopien des Gitters *Gautier* Nr. 47, Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 15, Nr. 49, Potsdam 1903; *C. Mönnichmeyer*, Untersuchungen über die 5 mm Gitter von *P. Gautier*, Astr. Nachr. 162 (1903), p. 65.

64) Vergl. *W. Zurhellen*, Darlegung und Kritik der zur Reduktion photographischer Himmelsaufnahmen aufgestellten Formeln und Methoden, Diss. Bonn 1904.

65) Für jede Platte ist die Bestimmung von vier Konstanten — event. sechs, wenn die Neigung der Platte gegen die Kollimationslinie merklich ist und nicht durch direkte Messung bestimmt werden kann — erforderlich, die nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt.

duktion photographischer Sternörter sogleich Aberration, Präzession und Nutation hinein, da sie nur die Orientierung der Platte und den Skalenwert beeinflussen, und erhält sie somit bezogen auf *ein beliebiges Äquinoktium*, auf welches man die Örter der Anhaltsterne nur ebenfalls zu beziehen hat; doch darf das gewählte Äquinoktium wegen der meist nicht hinreichend genauen Kenntnis der Eigenbewegungen der Anhaltsterne nicht zu weit von der Beobachtungsepoche abliegen.

Bei den Beobachtungen am ruhenden Fernrohr verläßt man sich auf die völlige zeitliche Unveränderlichkeit der Richtung des Fernrohrs zum Erdkörper im Verlauf der Messungsreihe; um Störungen durch Wind, Erschütterungen usw. möglichst zu vermeiden, wird man die AR.-Differenz der beiden Objekte nicht zu groß werden lassen und auf wenige Zeitminuten beschränken. Die Anwendung des Uhrwerks setzt bei der visuellen Beobachtung die genaue Mitführung des Fernrohrs während der Messung voraus, derart, daß seine optische Achse in der Zeit zwischen den Pointierungen auf die beiden Objekte unveränderlich auf denselben Punkt des Himmels gerichtet bleibt, das Uhrwerk wird gewissermaßen anstelle der täglichen Bewegung zur Messung mitbenutzt. Tatsächlich läßt sich das Uhrwerk heutzutage in großer technischer Vollkommenheit herstellen[66]), wie sie für die nur kurze Zeit (kaum mehr als etwa 20 Sekunden) erfordernde visuelle Beobachtung stets ausreicht. Auch läßt sich der Einfluß der Fehler des Uhrwerks durch Vermehrung und symmetrische Anlage der Messungen völlig beseitigen. Da andererseits die persönlichen Unterschiede bei Durchgangsbeobachtungen durch Häufung der Messungen nicht vermindert werden, so kommt für kleine Koordinatendifferenzen (selten mehr als 5′, höchstens 10′) die Methode des bewegten Fernrohrs wohl allein in Frage. Bei relativ großen AR.-Differenzen, zu denen man oft gezwungen ist, wenn in der Nähe des zu beobachtenden kleinen Planeten oder Kometen kein passender, d. h. durch eine Meridianbeobachtung schon festgelegter Vergleichstern vorhanden ist, — in δ ist man durch den begrenzten Wirkungsbereich der Mikrometerschrauben meistens an engere Differenzen (bis etwa 10′) gebunden —, muß man hingegen am ruhenden Fernrohr beobachten. Bei der zunehmenden Zahl der Sterne, deren Örter an Meridiankreisen beobachtet sind oder durch die in Ausführung begriffene photo-

---

66) Vgl. *H. Struve* in *O. Struve*'s Festschrift[9]), p. 64—65, sowie *F. Hayn*, Selenographische Koordinaten, 2. Abhandlung, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 29, Nr. 1 (1904), p. 33—35.

graphische Himmelskarte zugänglich werden, wird man in naher Zukunft meistens über genügend sicher bestimmte Örter nahestehender Vergleichsterne verfügen und auf die Durchgangsbeobachtungen am ruhenden Fernrohr immer seltener zurückzugehen brauchen.

Bei den photographischen Aufnahmen bedarf man eines gut funktionierenden Uhrwerks nicht eigentlich zur Messung, als vielmehr zur Herstellung scharfer Bilder; es stellt dies bei der oft langen Dauer photographischer Expositionen[67]) an die Leistungsfähigkeit des Uhrwerks die höchsten, kaum erfüllbaren Anforderungen, zumal noch der störende Einfluß der mit der Zenitdistanz veränderlichen Refraktion hinzukommt. Man verläßt sich daher nicht darauf, sondern hält das Fernrohr, das dann nur abbildend auftritt, durch visuelle Beobachtung eines Himmelsobjektes im Leitfernrohr mittelst der Feinbewegung, event. des Uhrwerks selbst in unveränderlicher Lage im Raume fest[68]). Für sehr große Teleskope, bei denen auch das Leitfernrohr nicht völlige Zuverlässigkeit bietet, hat man durch mikrometrische Einstellung der photographischen Platte selbst anstelle der Bewegung des ganzen Fernrohrs gute Erfolge erzielt[69]). Den störenden Einfluß schnell periodischer Ungleichförmigkeiten im Gange des Uhrwerks wies *J. Hartmann* nach und gab zugleich Mittel zur Beseitigung an[70]).

Die Vorteile der Methode der photographischen Ortsbestimmung gegenüber der visuellen sind vor allem die Kürze der Beobachtungszeit am Fernrohr und die Fülle des Materials, das sie in dieser Zeit für die eigentliche, unter bequemeren äußeren Verhältnissen vorzunehmende Ausmessung beschafft; sie kommt daher vor allem zur Massenbeobachtung zur Anwendung.

---

67) Die Expositionsdauer, die beim Monde einige Sekunden beträgt, steigt bei Fixsternen auf mehrere Minuten bis zu einer Stunde und noch weiter an und erreicht bei Nebelaufnahmen zuweilen sogar über 24 Stunden.

68) Da das Sucherfernrohr seiner nicht genügend festen Verbindung mit dem Hauptfernrohr wegen nicht ausreicht, konstruiert man eigene Leitfernrohre, die nach dem Vorgange der Gebrüder *Henry* (Paris) mit dem photographischen Fernrohr in ein gemeinsames Rohr einbezogen werden, vgl. *Ambronn, Scheiner*[60]).

69) Vgl. *A. A. Common,* Note on an apparatus for correcting the driving of the motor clocks of large equatorials for long photographic exposures, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889), p. 297; *G. W. Ritchey,* Celestial photography with the 40-inch visual telescope of the Yerkes Observatory, The Astrophysical Journal 12, Chicago 1900, p. 352ff. Durch Anwendung einer isochromatischen Platte und eines gelben Farbenfilters wird das Instrument für photographische Beobachtungen verwendbar gemacht, während gleichzeitig die Bilder für das visuelle Halten scharf bleiben.

70) *J. Hartmann,* Über die Korrektion eines periodischen Fehlers in der Bewegung des Potsdamer 80 cm-Refraktors, Astr. Nachr. 158 (1902), p. 1.

Über die gebräuchlichen Dimensionen der photographischen Refraktoren vgl. p. 232.

Doppelbildmikrometer, Heliometer[56]). Eine besondere Art mikrometrischer Meßinstrumente bilden die Doppelbildmikrometer, bei denen die Bilder der beiden zu beobachtenden Objekte nicht getrennt pointiert, sondern die vier durch die Verdoppelung entstehenden Bilder in geeignete Stellungen zueinander gebracht werden. Ihr Hauptvertreter ist das *Heliometer*, welches zugleich den bisher besprochenen Okularmikrometern gegenüber als Objektivmikrometer auftritt. Bei ihm sind die Objektivlinsen durch einen Schnitt längs eines Durchmessers in zwei halbkreisförmige Stücke zerlegt; diese beiden Halbkreisobjektive lassen sich durch Mikrometerschrauben längs ihrer gemeinsamen ebenen Schnittfläche gegeneinander verschieben[81]) und bewirken dadurch eine Verdoppelung des in der Brennebene erzeugten Bildes. Durch Drehung des ganzen Objektivkopfes — resp. bei den neueren Konstruktionen durch Drehung des ganzen Fernrohrs — um die optische Achse des Fernrohrs wird die Schnittfläche parallel der Verbindungslinie der beiden zu beobachtenden Objekte gestellt (Einstellung in Positionswinkel) und durch Auseinanderschrauben der Objektivhälften dann die beiden inneren der entstehenden vier Bilder zur Deckung gebracht (Einstellung der Distanz). Dabei wird nicht direkt das zu unscharf aufzufassende Zusammenfallen zweier Bilder, sondern bei großen Distanzen durch kleine Drehungen im Positionswinkel oder Veränderungen der Distanz ihr Durcheinanderschwingen beobachtet. Bei kleineren Distanzen stellt man der zu großen Krümmung des Schwingungsbogens wegen die vier Bilder zu einer geeigneten Konfiguration, etwa einem flachen Rhombus, zusammen, und bei Doppelsternen schätzt man die Gleichheit der drei Abstände. Man erhält so die relativen sphärischen Polarkoordinaten beider Objekte, die Größe der Verschiebung gibt ein Maß für die Distanz der Objekte, resp. wenn durch Durchschrauben der Hälften die Messung symmetrisch wiederholt wird, ihre doppelte Distanz, die an einem Positionskreise abzulesende Richtung der Verschiebung den Positionswinkel[71]).

Das Heliometer gestattet, im Gegensatz zum Fadenmikrometer,

71) Über die Reduktion der Heliometermessungen vgl. insbesondere *F. W. Bessel*, Theorie eines mit einem Heliometer versehenen Äquatoreals, sowie: Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte, beides erschienen in *Bessel*, Astron. Untersuch. 1, p. 1—152 = *Bessel*, Abhdl. 2, p. 109 und p. 133; *P. A. Hansen*, Ausführliche Methode mit dem *Fraunhofer*schen Heliometer Beobachtungen anzustellen, Gotha 1827; *H. Seeliger*, Theorie des Heliometers, Leipzig 1877.

die Messung sehr großer Koordinatendifferenzen — bei den neuen *Repsold*schen Heliometern bis zu 2^0 — und gibt auch dann noch eine sehr große Genauigkeit. Wird dadurch die Zahl der verwendbaren Vergleichsterne wesentlich erhöht, so kann es andererseits der schwierigen technischen Ausführung halber nur in mäßigen Dimensionen[72]) hergestellt werden. Seine Anwendung beschränkt sich daher auf gewisse besondere Aufgaben der astronomischen Ortsbestimmung, bei denen es sich um eine hervorragende Genauigkeit und zugleich um hellere Objekte, nicht unter 9. Größe, handelt.

Historisches zum Refraktor. Die Entwicklung der Refraktoren, deren Geschichte in das 18. Jahrhundert zurückgeht, trat in ein neues Stadium mit dem von *J. Fraunhofer* für die Sternwarte zu Dorpat erbauten, 1824 aufgestellten, neunzölligen Refraktor, der in den Händen *W. Struves* zu besonderer Berühmtheit gelangt ist[73]). Zum ersten Male war ein gut funktionierendes Uhrwerk angebracht und dadurch die Möglichkeit zu Beobachtungen mit dem Positionsfadenmikrometer geboten, die besonders zu umfassenden Beobachtungen von Doppelsternen Anwendung fand[74]). Einen weiteren Fortschritt bedeutete die 1839 erfolgte Herstellung des Pulkowaer Refraktors durch *Merz* und *Mahler*[47]), der bei einer Öffnung von 14 Zoll und einer Brennweite von 270 Zoll eine mehr als tausendfache Vergrößerung zuließ und in den Händen *O. Struves* ebenfalls seine wesentliche Anwendung auf Doppelsternmessungen fand. Namhaft gemacht sei fernerhin der *Clark*sche 26-Zöller des U. S. Naval Observatory in Washington. Die heutige Leistungsfähigkeit charakterisieren etwa der 30-zöllige *Repsold*sche Refraktor der Sternwarte zu Pulkowa, sowie die von *Warner* und *Swasey* hergestellten großen Refraktoren der Lick- und Yerkes-Sternwarte von 36 und 40 Zoll Öffnung[76]). Daneben besitzen die meisten Sternwarten Refraktoren von mittlerer Größe, von etwa 10 bis 15 Zoll Öffnung, mit denen Kometen, kleine Planeten, Doppelsterne usw. beobachtet werden.

Über die Aufstellung der Refraktoren („englische", „deutsche" Aufstellung), den Kuppelbau usw. vgl. *Ambronn* 2.

---

72) Das größte der neueren *Repsold*schen Heliometer (Sternwarte in Wien-Ottakring) besitzt eine Öffnung von 217 mm.

73) *W. Struve*, Beschreibung des auf der Sternwarte zu Dorpat befindlichen großen Refraktors von *J. Fraunhofer*, Dorpat 1825.

74) Vgl. *W. Struve*, Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae, Petropoli 1837.

76) Vgl. *Ambronn* 2. Eine eingehende Beschreibung des Pulkowaer großen Refraktors enthält die in Fußn. 9 zitierte Festschrift.

Einen besonderen Typus bildet das nach *M. Loewys* Ideen nach dem Prinzip der gebrochenen Fernrohre[2]) konstruierte *équatorial coudé*, welches sich besonders als photographisches Fernrohr durch vorzügliche Mondaufnahmen bewährt hat[77]).

Eine eigene Klasse von Refraktoren bilden dann die in den letzten Jahrzehnten hinzugekommenen *photographischen Refraktoren* oder *Astrographen*, als deren bekannteste Repräsentanten wir den nach den Angaben der Gebrüder *Henry* konstruierten Pariser photographischen Refraktor (Öffnung des photographischen Objektivs 34 cm, des visuellen 23 cm, Brennweite 3.4 m), der für die zur Herstellung der photographischen Himmelskarte dienenden Instrumente vorbildlich geworden ist[78]), und den großen *Repsold*schen Refraktor des Potsdamer astrophysikalischen Observatoriums (Öffnung des photographischen Objektivs 80 cm, des visuellen 50 cm, Brennweite 12 m) besonders namhaft machen[79]).

Das *Heliometer* wurde um die Mitte des 18. Jahrhunderts von *John Dollond*[80]) konstruiert zum Zwecke der Bestimmung des Sonnendurchmessers und trägt daher seine Bezeichnung. Eine neue Epoche begann für das Heliometer mit der Fertigstellung des großen sechszölligen *Fraunhofer*schen Heliometers der Sternwarte zu Königsberg (1829) und seiner Anwendung durch *F. W. Bessel*[71]). Dem Hauptnachteile dieser älteren Heliometer, daß die Objektivhälften sich auf ebenen Schiebern bewegten und demnach die Bilder nur weit außerhalb der optischen Achse und nicht im Brennpunkt beobachtet werden konnten[103]), begegnete *A. Repsold*, indem er bei seinen neueren Heliometern[81]) die Objektivschieber auf Zylinderflächen, deren Achse senkrecht zur optischen Achse durch den Brennpunkt geht, sich bewegen läßt; die Beobachtung erfolgt nun stets bei scharfen Bildern in nächster Nähe

---

77) Beschreibung des „*équatorial coudé*“ bei *M. Loewy*, Paris C. R. 96 (1883) und *M. Loewy*, Paris Bull. astr. 1 (1884), p. 265, p. 370 und p. 421; sowie *Ambronn* 2.

78) Über diese Instrumente vgl., neben *Ambronn* 2, *Scheiner*[60]) und *Scheiner*[61b]), die Einleitungen zu den Katalogen der photographischen Himmelskarte.

79) Die beiden photographischen Refraktoren des Potsdamer Instituts beschreibt *H. C. Vogel*, Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 15, 1ᵗᵉˢ Stück [Nr. 45], Potsdam 1907.

80) *J. Dollond*, Description of a contrivance for measuring small angles, Lond. Phil. Trans. 1753.

81) Zylinderführung zuerst 1849 bei dem Heliometer der Sternwarte zu Oxford; *J. Fraunhofer* hatte den entsprechenden Wunsch *F. W. Bessels* der technischen Schwierigkeiten wegen nicht ausgeführt.

der optischen Achse. Die Messung der Verschiebung der Objektivhälften, welche bei den älteren Heliometern mit Hilfe der sie bewirkenden Mikrometerschrauben erfolgte, geschieht jetzt an zwei (zylindrisch gekrümmten) Skalen, welche in die Objektivschieber fest eingelassen sind und mit ihren Teilungen aneinander liegen.

5. Die Fehler der Instrumente und ihre Bestimmung. Geometrische Fehlerquellen.

Die Anforderungen an die Einrichtung und Wirkungsweise der im vorigen skizzierten Instrumente und Methoden zur exakten astronomischen Ortsbestimmung lassen sich in der Praxis nicht in aller Strenge verwirklichen, und ihre gelegentliche Verwirklichung würde infolge störender thermischer und Schwereeinflüsse nicht von Dauer sein können. Weder wird die Absehenslinie dauernd die Koordinatenkurven eines sphärischen Systems beschreiben, noch, wenn dies selbst durchführbar wäre, das sphärische System des Instruments mit dem astronomischen dauernd in aller Strenge übereinstimmen. Die Praxis muß sich damit begnügen, die mathematische Idee des Instruments angenähert zu verwirklichen, indem sie die sogenannten Instrumentalfehler gewisse kleine Beträge nicht überschreiten läßt. Auch in dieser Beschränkung erfordert ein jedes Instrument die vollkommenste technische Ausführung und muß mit Korrektionseinrichtungen versehen sein, welche die Instrumentalfehler in jenen engen Grenzen zu halten gestatten.

Danach können die in der besprochenen Weise erhaltenen Koordinaten nicht in Strenge den äquatorealen entsprechen. Die Untersuchung und Theorie eines Instruments hat vielmehr zu zeigen, wie man aus den fehlerhaften Angaben des Instruments fehlerfreie, d. h. seiner Idee entsprechende Daten ableiten, wie man die Beobachtungen von den Instrumentalfehlern befreien kann. Dazu hat sie die damit im engsten Zusammenhang stehende Aufgabe zu lösen, diese *Instrumentalfehler durch geeignete Kombination der Beobachtungen selbst zu bestimmen*, wofür die Art, in welcher die Instrumentalfehler die beobachteten Koordinaten verfälschen, stets Methoden an die Hand gibt. In früherer Zeit benutzte man diese Bestimmung der Instrumentalfehler, auch bei fest auf Sternwarten aufgestellten Instrumenten, dazu, sie durch die erwähnten Korrektionsvorrichtungen möglichst zu beseitigen. Seit etwa einem Jahrhundert aber, vor allem seit *F. W. Bessel* — auch schon *Tobias Mayer* berücksichtigte rechnerisch die Instrumentalfehler, — zieht man es vor, sie nur ganz selten, sobald sie jene engen Grenzen zu überschreiten beginnen, zu

korrigieren; man legt die Beobachtungen, wenn möglich, so an, daß sie es gestatten, gleichzeitig die Instrumentalfehler zu bestimmen und sie durch geeignete Kombination der Beobachtungen aus ihnen ganz zu eliminieren. Ein wichtiges Hilfsmittel bietet z. B. die Möglichkeit, dasselbe Objekt in *zweierlei Lagen des Instruments* beobachten zu können; man erreicht dies bei dem Universalinstrument (Refraktor) durch sogenanntes *„Durchschlagen"* des Fernrohrs, d. h. Drehung um die Nebenachse über den Pol hinweg um die doppelte Poldistanz, unter gleichzeitiger Drehung um die Hauptachse um 180°, beim Meridiankreis (oder Passageninstrument) durch *„Umlegen"*, d. h. indem man das Instrument nach Herausheben aus seinen Lagern um eine vertikale Achse um 180° dreht und dadurch die beiden Lagerenden vertauscht. Die Bestimmung der Instrumentalfehler hat dann oft mehr ein instrumentelles Interesse und ist zur Beurteilung der Zuverlässigkeit des Instruments wertvoll, als daß sie zur Reduktion der Beobachtungen erforderlich wäre; aber gerade dieses instrumentelle Interesse kann nur durch eine fortlaufende Reihe von Bestimmungen befriedigt werden, während deren kein Eingriff in das Instrument vorgenommen ist.

Bei der Erörterung der Fehler selbst und ihrer Bestimmung beschränken wir uns auf die beiden Haupttypen von Präzisionsinstrumenten, indem wir die Beobachtung der absoluten Koordinaten am Meridiankreis und der relativen am Refraktor getrennt behandeln, und verweisen im übrigen auf die Literatur.

A. Instrumentalfehler des Meridiankreises.

Die Instrumentalfehler des Meridiankreises sind von zweierlei Art. Ist das eigentliche Instrument in allen seinen Teilen fehlerfrei, so gibt es sphärische Koordinaten, aber in seinem eigenen, durch Richtung der Umdrehungsachse und Nullpunkt des Kreises festgelegten System. Es handelt sich also einmal um die Fehler des eigentlichen Instruments (der Visierlinie und der Drehungsachse), infolge deren es keine sphärischen Koordinaten gibt, und die sogenannten Aufstellungsfehler, infolge deren selbst das in sich völlig berichtigte Instrument sphärische Koordinaten in einem anderen System liefert als es seiner Idee entspricht. Bei der praktischen Bestimmung der Fehler vermischen sich allerdings beide Fehlerarten zuweilen miteinander. Diese Fehlerbestimmung kann zum Teil nur durch irdische Beobachtungen erfolgen, zum Teil nur durch Beobachtung cölestischer Objekte. Der größeren Bequemlichkeit der ersteren Bestimmungsart

gegenüber bietet die letztere dadurch große Vorzüge, daß bei ihr die Gleichartigkeit der näheren Umstände mit denen der eigentlichen Beobachtungen weit mehr gewährleistet werden kann.

Die Abweichung der Richtung der Drehungsachse von der horizontalen Ost-Westrichtung hat, sobald man sich auf Größen erster Ordnung in den Fehlern beschränken kann, nur Einfluß auf die Rektaszensionen, der Nullpunkt des Kreises betrifft nur die Deklinationen. Die *Richtung der Umdrehungsachse* — im Sinne von Ost nach West — fixiert man durch ihre horizontalen oder äquatorealen Koordinaten (Azimut $= 90^0 - k$, Höhe oder Neigung $= i$, Stundenwinkel $= 90^0 - m$, Deklination $= n$). Dazu kommen nun die inneren Fehler des Instruments hinzu. Die *Abweichung* des Winkels *der Kollimationslinie* (p. 198), d. h. der durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs und den Meridianfaden oder eine bestimmte Nullstellung des beweglichen Fadens fixierten Richtung, gegen die Umdrehungsachse von einem rechten Winkel bewirkt, daß die Absehenslinie einen kleinen Kugelkreis am Himmel beschreibt. Kompliziert werden die Verhältnisse dadurch, daß bei der massiven Form der Zapfen, wenn sie nicht genau kreiszylindrisch und koaxial sind, von einer Umdrehungsachse im mathematischen Sinne nicht gesprochen werden kann. Die *Zapfenfehler*, d. h. die Abweichung des Zapfenquerschnittes von der Kreisform, bewirken vielmehr eine weitere Abweichung der Absehenslinie vom Meridian; endlich kommt noch eine laterale Ablenkung der Gesichtslinie durch eine unsymmetrische *Durchbiegung der Drehungsachse* in Frage. Da es kaum möglich wäre, die wahre Form der Kurve, welche die Absehenslinie bei der Drehung des Fernrohrs am Himmel beschreibt, resp. ihren Stundenwinkel in den verschiedenen Deklinationen zu bestimmen, so begnügt man sich in der Praxis damit, in erster Näherung die Form der Zapfen als kreiszylindrisch, ihre Achsen als starr und zusammenfallend und die Kollimationslinie bei allen Drehungen des Fernrohrs als starr mit dieser gemeinsamen Achse verbunden anzusehen. Hat ihr Winkel gegen diese Umdrehungsachse des Fernrohrs den Wert $90^0 + c$, so bezeichnet man c als den *Kollimationsfehler* und bestimmt ihn durch Pointieren einer irdischen Marke (Kollimator, Mire) oder eines Polsterns[81a]) in den beiden Lagen des Instruments — wobei man von den Zapfenfehlern allein eine durch Achsennivellement in beiden Lagen bestimmbare Ungleichheit der Zapfendicken zu berücksichtigen

81a) „Polsterne" resp. „Hohe Polsterne" nennt man die dem sichtbaren Himmelspol nahe resp. sehr nahe stehenden Sterne.

pflegt — oder durch mikrometrische Messung des Abstandes des Meridianfadens von seinem im Quecksilberhorizont[82]) entworfenen Spiegelbild, resp. der Koinzidenzstellung des beweglichen Fadens und seines Spiegelbildes. Im letzteren Falle vermeidet man das Umlegen des Instruments, muß aber die Neigung der Umdrehungsachse kennen. Diese Neigung bestimmt man im allgemeinen durch die Wasserwage, wobei ebenfalls für die beiden verschiedenen Lagen des Fernrohrs eventuell die ungleiche Zapfendicke zu berücksichtigen ist. Das Azimut k des Fernrohrs, d. h. der Meridian selbst, läßt sich unabhängig nur durch cölestische Beobachtungen festlegen (s. VI 2, 2 [*F. Cohn*], p. 23) durch Beobachtung der Durchgangszeiten von Zirkumpolarsternen in oberer und unterer Kulmination. Damit ergibt sich dann als Korrektion der beobachteten Durchgangszeit T durch den Meridianfaden:

$$\Delta T = [i \cos(\varphi - \delta) + k \sin(\varphi - \delta) + c] \sec \delta,$$

die sogenannte *Tobias Mayer*sche Formel[83]), und als Rektaszension des beobachteten Gestirns

$$\alpha = T + \Delta T + \Delta U.$$

Über die ineinandergreifende Bestimmung der Uhrkorrektion und der Rektaszensionen, sowie den Übergang von den AR.-Differenzen zu den absoluten Rektaszensionen vgl. ebenfalls VI 2, 2 (*F. Cohn*), p. 21—30.

Für die praktische Rechnung bequemer ist die *Bessel*sche Formel[84]) für ΔT:

$$\Delta T = m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta,$$

in welcher man n wie oben bestimmt, während man m und damit die Neigung, wenn sie während einer Beobachtungsreihe konstant ist und es sich nicht um die absolute Zeit handelt, garnicht zu kennen braucht. Andernfalls bestimmt sich m aus der Formel

$$m = i \sec \varphi - n \operatorname{tg} \varphi.$$

Eine andere Anordnung der Formel siehe z. B. bei *P. A. Hansen*[85]).

In der Praxis verfügt man über die genauen Rektaszensionen hinreichend vieler Sterne, insbesondere Polsterne[81a]), um nicht auf die unabhängige Bestimmung des Meridians angewiesen zu sein. Indem

---

82) Eingeführt von *G. C. Bohnenberger*, Astr. Nachr. 4 (1826), p. 327.

83) *Tob. Mayer*, Observationes astronomicae quadrante murali habitae in observatorio Gottingensi (Opera inedita 1, Gottingae 1775, p. 19).

84) *F. W. Bessel*, Königsb. Beob. 2 (1816), Einleit.

85) *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 6 (1828), p. 421—458.

man die Uhrkorrektion

$$\Delta U = \alpha - T - \Delta T$$

aus zwei Sternen von möglichst verschiedenen Deklinationen δ_1 und δ_2 bestimmt, erhält man eine Beziehung, aus der sich k oder n ableiten läßt:

$$n = \frac{\alpha_1 - T_1 - (\alpha_2 - T_2) + c\,(\sec\delta_2 - \sec\delta_1)}{\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta_2}.$$

Auch kann die Festlegung des Meridians durch Beobachtung entfernter irdischer Marken (Meridianzeichen, Miren) erfolgen, deren Azimut nur ebenfalls durch cölestische Beobachtungen unter Kontrolle gehalten werden muß.

Über die Beobachtung reflektierter Sternbilder, sowie andere Methoden zur Neigungs- und Kollimationsfehlerbestimmung vgl. z. B. *Brünnow*, p. 487 ff., sowie *P. Harzer*[23]).

Seltener nur wird der Zapfenform — abgesehen von der erwähnten Zapfenungleichheit — Rechnung getragen; man kann sie einmal durch Nivellement oder Fühlhebeluntersuchung bei verschiedenen Fernrohrstellungen prüfen. Eine besonders eingehende Untersuchung gestatten die Methoden, bei denen auf der Stirnseite der Zapfen einzelne Punkte durch Marken kenntlich gemacht und ihre Ortsveränderung bei der Drehung des Fernrohrs mikrometrisch, z. B. mit Hilfe eines in der Richtung der durchbohrten Achse aufgestellten Fernrohrs, eines sogenannten *Achsenkollimators*, gemessen wird[86]).

Die Berücksichtigung dieser Abhängigkeit der im Achsenkörper festen, d. h. durch ein festes c charakterisierten Richtung (m, n) von

86) Über die verschiedenen Formen der Methode vgl. *G. B. Airy*, Examination of the form of the pivots of the altitude and azimuth instrument, Greenw. Obs. 1847, p. xx; *J. Challis*, A method of correcting the errors due to the forms of the pivots of a transit instrument, Lond. Astr. Soc. Mem. 19 (1851), p. 103; *Y. Villarceau*, Étude sur le mouvement de rotation de la lunette méridienne, Obs. de Paris Ann., Mém. 7 (1863), p. 307; *M. Loewy* et *Périgaud*, Étude des flexions du grand cercle méridien, flexion en distance polaire, flexion latérale et de la forme des tourillons, à l'aide de l'appareil imaginé par *M. Loewy*, Obs. de Paris Ann., Mém. 16 (1882); *M. Hamy*, Controle des tourillons d'un instrument méridien par la methode interférentielle de *M. Fizeau*, Paris Bull. astr. 12 (1895), p. 49; *A. A. Rambaut*, On a very sensitive method of determining the irregularities of a pivot, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 65 (1904), p. 56; *B. Wanach*, Über die Bestimmung der Form der Zapfen eines Durchgangsinstruments mittels eines Achsenkollimators, Straßb. Sternw. Ann. 2 (1899), Annex B. Diese letztere Arbeit zeigt zugleich, wie gering die Zapfenfehler der modernen *Repsold*schen Meridiankreise sind ($< 0^s.01$), während allerdings manche andere Instrumente (vgl. die zitierte Arbeit von *A. A. Rambaut*[86])) wesentlich größere Fehler besitzen.

der Rotationsphase des Fernrohrs geschieht in der Praxis in Verbindung mit dem als veränderlich angesehenen Kollimationsfehler derart, daß die Richtung der Visierlinie auf eine bei der Drehung des Fernrohrs im Raume unveränderliche, durch die Lagerstellen charakterisierte Richtung bezogen wird, deren Koordinaten selbst in der oben besprochenen Art zu bestimmen sind.

Über eine etwaige *laterale Biegung der Achse* kann man durch Kollimationsfehlerbestimmung in verschiedenen Zenitdistanzen Aufschluß erhalten. Einen Anhalt für diese instrumentalen Unregelmäßigkeiten gibt die Vergleichung der Beobachtungen in den beiden Lagen des Instruments.

Bei den Deklinationen handelt es sich zunächst um die Übereinstimmung des Drehungswinkels der Visierlinie und des Unterschieds der Mikroskopablesungen, welche durch eine dem Einfluß der Schwere, sowie auch strahlender Wärme entspringende und somit von der Zenitdistanz abhängende *Biegung sowohl des Fernrohrs wie des Kreises* und außerdem durch die Teilungsfehler des Kreises in Frage gestellt wird[87]). Eine Biegung der optischen Achse allein kann durch eine unsymmetrische Biegung der beiden Rohrhälften, durch ein Schlottern des Objektivs oder Okulars, eine Durchbiegung des horizontalen Fadens usw. verursacht und oft durch Vertauschung von Objektiv- und Okularhälfte eliminiert werden. Durch direkte Instrumentaluntersuchung läßt sich die Biegung im Horizont mit Hilfe sogenannter Kollimatoren bestimmen, welche die horizontale Lage des Fernrohres bei Objektiv Süd und Objektiv Nord zu bestimmen und zu vergleichen

87) Die Biegung und die verschiedenen Methoden, sie zu untersuchen, behandelt ausführlich *W. Valentiner* in seinem *Handwörterbuch* 1, p. 575—592. Die *Reichenbach*sche Methode, durch Hebelvorrichtung die Rohrbiegung zu beseitigen, wurde bald aufgegeben. Die erste Biegungsbestimmung (durch reflektierte Sternbilder) führte *F. W. Bessel* aus, vgl. Königsb. Beob. 7 (1822), Einl., die Methode der Kollimatoren entwickelte er Astr. Nachr. 3 (1824), p. 209 = *Bessel*, Abhdl. 2, p. 43, vgl. auch Königsb. Beob. 10 (1825), Einl. Die Vertauschung von Objektiv und Okular schlug zuerst wohl *J. G. Repsold* (1823 oder 1824) vor, vgl. *Hansen*[6]), p. 66. Sie wurde zwar beim Pulkowaer Meridiankreise[47]) durchgeführt, beim Königsberger aber auf *A. Repsolds* Rat mancher Bedenken wegen aufgegeben. Neuerdings wird sie wieder angewandt. Von neueren Arbeiten vgl. *J. Bauschinger*, Neue Annalen der Sternwarte in Bogenhausen bei München 2 (1891), 4. Teil, wo u. a. auch der Einfluß der Temperatur auf die Rohrbiegung erörtert wird. Theoretisch behandeln den Einfluß der Schwere auf den Kreis *F. W. Bessel*, Astr. Nachr. 25 (1846), p. 1—42 = *Bessel*, Abhdl. 2, p. 182, und *P. Harzer*, Astr. Nachr. 141 (1896), p. 321. Vgl. ferner *P. Harzer*[25]) Über die Priorität des Fernrohrbiegungsapparates nach den Vorschlägen von *P. A. Hansen*, *K. F. Pape*, *E. Kayser*, *A. Marth* und *M. Loewy*.

gestatten. Setzt man den gesamten Biegungseffekt in Form einer trigonometrischen, nach den Vielfachen der Zenitdistanz fortschreitenden Reihe an, so kann man alle Glieder bis auf die von den geraden Vielfachen von z abhängenden Sinusglieder durch Kombination von Beobachtungen in beiden Lagen des Fernrohrs, durch Vertauschung von Objektiv und Okular, sowie auch durch Beobachtungen direkter und reflektierter Bilder von Sternen beseitigen resp. bestimmen. Doch fallen diese letzteren Bestimmungen infolge lokaler Saalrefraktion meist unsicherer aus[87a]). Im übrigen ist der Einfluß der gesamten Biegung bei den modernen Meridianinstrumenten stets sehr gering[88]).

Der Übergang zu den absoluten Deklinationen erfordert die Bestimmung der Lage des Kreisnullpunkts zu einem der Fixpunkte des Koordinatensystems, resp. die Festlegung dieser Fixpunkte auf dem Kreise. Den *Nadirpunkt*[88a]) des Kreises bestimmt man durch Beobachtung der Koinzidenz des Horizontalfadens mit seinem vom Quecksilberhorizont reflektierten Spiegelbilde und geht durch Vermittlung der Polhöhe zu Deklinationen über. In früherer Zeit bestimmte man direkt den *Polpunkt*[88a]) des Kreises durch Beobachtungen des Polarsterns in oberer und unterer Kulmination, indem man sich auf die Unveränderlichkeit des Polpunktes in der Zwischenzeit verließ.

Ganz analog ist die Behandlung der Beobachtungen am Passageninstrument und Vertikalkreis, nur werden hier gewöhnlich die Be-

---

87a) Über diese sogenannte *R-D* difference (reflektiert minus direkt), die *J. Pond* an den Instrumenten der Greenwicher Sternwarte entdeckte, vgl. *G. B. Airy*, On the discordance between the results for zenith distances obtained by direct observation and those obtained by observation by reflexion from the surface of quicksilver, Lond. Astr. Soc. Mem. 32 (1863), p. 9; *W. H. M. Christie*, On the systematic errors of the Greenwich north polar distances, Lond. Astr. Soc. Mem. 45 (1880), p. 151, sowie die Jahresbände der Greenw. Obs. Vgl. auch die Introduction zum „Cape Catalogue for 1885" [Catalogue of 1713 stars, for the equinox 1885.0, from observations made at the R. Observatory, Cape of Good Hope, London 1894] und *J. R. Eastman*, Astron. Journ. 19 (1899), p. 173 und 21 (1900), p. 1.

88) Die Koeffizienten der Hauptglieder erreichen selten mehr als $\frac{1}{4}''$; (vgl. z. B. *E. Großmann*[12]) und *L. Courvoisier*[90]). Die Biegung des Pulkowaer Vertikalkreises bestimmte *C. A. F. Peters*, Poulkova Obs. 14 (1888), p. (38) zu $-0''.385 \sin z$. *J. Bauschinger*[15]), p. 52 findet die horizontale Biegung des Münchener Meridiankreises im Mittel aus 9 gut übereinstimmenden Reihen ganz verschwindend.

88a) *„Nadirpunkt"* und *„Polpunkt"* des Meridiankreises bedeuten die Kreisablesungen bei denjenigen Stellungen des Fernrohrs, bei denen die Absehenslinie nach dem Nadir bzw. nach dem sichtbaren Himmelspol zeigt.

obachtungen eines jeden Objekts bei einem Meridiandurchgang nacheinander in beiden Lagen des Instruments angestellt, wodurch im ersteren Falle die Bestimmung des Kollimationsfehlers, im zweiten die des Zenitpunktes überflüssig wird, indem die Lage der Mikroskopträger gegen den Horizont durch ein Niveau kontrolliert wird.

Die Leistungen eines Meridiankreises hängen aufs wesentlichste von der Genauigkeit der Instrumentaluntersuchung ab. Die steigende Exaktheit der technischen Ausführung und die zunehmende Erkenntnis der Fehlerquellen lassen heutzutage diese Kritik des Instruments in unvergleichlich eingehenderer Weise vornehmen als noch vor wenig Jahrzehnten, andererseits kann und muß man an die Schärfe der fundamentalen Ortsbestimmungen weit strengere Anforderungen stellen als früher. Indem sonach nichts, was aus der technischen Werkstatt des Künstlers kommt, ohne Prüfung als fehlerfrei angesehen wird, erfordert die kritische Untersuchung z. B. eines neuen *Repsold*schen Meridiankreises trotz oder gerade wegen seiner vorzüglichen Ausführung, wenn man sich nicht auf differentielle Beobachtungen beschränken will, eine Unsumme von Arbeit. In dieser Hinsicht muß auf die Publikationen zahlreicher Sternwarten, unter denen die von Pulkowa besonders namhaft gemacht seien[1]), verwiesen werden. Besondere Spezialarbeiten betreffen die Untersuchung der Teilungsfehler der Kreise, der Biegung usw., und umfassende Beobachtungsreihen gelten dem besonderen Studium der atmosphärischen Refraktion [vgl. VI 2, 6 (*Bemporad*)] und ihres Einflusses auf die gemessenen Zenitdistanzen. Indem bezüglich der erzielten Gesamtgenauigkeit auf Nr. 7 verwiesen wird, mögen hier noch einige Angaben über die in der Untersuchung der einzelnen Fehlerquellen angestrebte Schärfe, über den für die Häufigkeit der Nachprüfung maßgebenden Grad von zeitlicher Konstanz dieser Fehlerquellen usw. folgen.

Während ein Teil der Instrumentaluntersuchung, z. B. die Untersuchung der Hilfsapparate, der Zapfenform, der Biegung, der Refraktion, nur einmal angestellt und nur nach einem längeren Zeitraum gelegentlich geprüft zu werden braucht, damit man gegen etwaige Veränderungen durch Abnutzung gesichert sei, muß ein anderer Teil der Instrumentalfehler dauernd unter Kontrolle gehalten werden. Dazu gehören z. B. der Run der Mikroskope, der Schraubenwert der Mikrometerschrauben, der Kollimationsfehler, vor allem aber die eigentlichen Aufstellungsfehler: Azimut und Neigung, sowie Zenitpunkt. Auch diese halten sich freilich bei den bestgelungenen Instrumenten lange Zeit nahezu konstant. Die heutige Schärfe der eigentlichen Beobachtung läßt es aber nicht mehr zu, wie es früher, z. B. noch von

F. W. Bessel geschah, für Azimut und Neigung, Nullpunkt des Kreises usw. wochenlang einen konstanten Wert anzunehmen. Schon die unzweifelhaft auftretenden, wiederholt bei den besten Instrumenten nachgewiesenen, wenn auch geringfügigen, täglich-periodischen, von der Temperatur abhängigen Schwankungen der Aufstellung erfordern eine Berücksichtigung, wenn die höchsten Leistungen verlangt werden. Beispiele solcher täglich-periodischen Schwankungen an Instrumenten von sonst sehr konstanter Aufstellung finden sich in Straßburg[89]), wo die Neigung im Durchschnitt von fast zwei Jahren um 6 a.m. ihren größten, um 6 p.m. ihren kleinsten Wert bei einer Amplitude von 0^s.026 erreicht und das Azimut sich ähnlich verhält; ferner in Bonn[18]), wo der Zenitpunkt im Laufe eines Abends sich um 0″.44 pro 1° Temperaturzunahme ändert. In Heidelberg[90]) ändert sich, bei vorzüglicher Konstanz während eines Abends, der Zenitpunkt in längeren Zeiträumen um + 0″.14 (Kreis Ost), — 0″.11 (Kreis West) pro 1° Temperaturschwankung[90a]). Zuerst wohl in Pulkowa (begründet 1839) hat man eine weit häufigere und schärfere Bestimmung der Instrumentalkonstanten zur Regel gemacht und bestimmt dort an dem großen Passageninstrument täglich mehrere Male Neigung und Azimut durch Wasserwage und Mire, welche letztere durch systematische Polsternbeobachtungen unter Kontrolle gehalten wird, während beim Vertikalkreis der Zenitpunkt durch Beobachtung in beiden Lagen direkt eliminiert wird. An anderen Sternwarten, bei denen die Konstanz der Aufstellung entweder hinreichend sicher nachgewiesen oder infolge differentieller Anlage der Beobachtungen nicht so erforderlich ist, begnügt man sich auch jetzt noch mit einer täglich ein- bis zweimaligen Bestimmung der Aufstellungsfehler. In jedem Falle muß man suchen, die Genauigkeit in der Bestimmung der Instrumentalfehler, in der eigentlichen Beobachtung und in den zur weiteren Reduktion der Beobachtungen zur Verfügung stehenden Daten in Einklang zu bringen. Die Möglichkeit zu einer solchen häufigeren und schärferen Bestimmung beruht einmal in der systematischeren Einführung der Miren, Kollimatoren, des Quecksilberhorizonts usw., dann in der weit größeren Zahl und Genauigkeit der Örter der Fundamentalsterne, die für die Bestimmung der Uhrkorrektion und des

89) *E. Becker*, Straßb. Sternw. Ann. 1 (1896), p. XXIX.

90) *L. Courvoisier*, Untersuchungen über die astronomische Refraktion, Veröffentlichungen der Sternwarte zu Heidelberg, Astrometrisches Institut 3, Karlsruhe 1904, p. 27/28.

90^a) Vgl. auch *G. W. Hough*, Determination of the cause for variation of level and azimuth in fixed meridian instruments, Astr. Nachr. 163 (1903), p. 209.

Azimuts, wie für die differentielle Anlage der Beobachtungen wesentlich ist. Entsprechend einer heute erstrebten und unter den günstigsten Verhältnissen auch erreichbaren Genauigkeit der Ortsbestimmung von $0^s.01$ und $0''.1$ sucht man daher die Instrumentalkonstanten mit entsprechender, d. h. auf wenige $0^s.001$ und $0''.01$ zu schätzender Genauigkeit zu bestimmen. In wieweit dies gelingt, mögen einige numerische Angaben für neue *Repsold*sche Meridiankreise zeigen. *F. Küstner*[13]) findet am Bonner Meridiankreise den mittleren Fehler eines Nivellements der Achse — bestimmt aus 191 Doppelnivellements bei horizontaler Fernrohrlage mit Objektiv Süd und Objektiv Nord und aus der Vergleichung ihres Unterschieds —

$$\varepsilon_i = \pm 0^s.007;$$

es entspricht das, bei einer Achsenlänge von 1 Meter, einer relativen Hebung des einen Zapfens gegen den andern um $\pm 0.5\ \mu^{62a}$). Die durchschnittliche Differenz zweier im Mittel um etwa 3 Stunden abstehenden Doppelnivellierungen ergibt sich aus 46 Abenden zu $\pm 0^s.012$, so daß sich die Neigung sehr konstant gehalten hat. — Der Kollimationsfehler wurde durch Einstellung der Kollimatoren unter zweimaligem Umlegen des Fernrohrs bestimmt; die Vergleichung der 67 aus Süd- und Nordkollimator erhaltenen Werte ergibt den mittleren Fehler einer solchen Doppelbestimmung

$$\varepsilon_c = \pm 0^s.003$$

und eine derartige Konstanz (in $5\frac{1}{2}$ Jahren schwankte er nur zwischen $0^s.00$ und $-0^s.07$), daß eine monatlich einmalige Bestimmung genügte. Für die Bestimmung von n, d. h. der Deklination des Westendes der Achse, aus Polsternen ergaben 164 mehrmalige, durchschnittlich um $2^h.9$ abstehende Bestimmungen eines Abends einen mittleren Fehler

$$\varepsilon_n = \pm 0^s.030,$$

worin aber neben dem reinen Beobachtungsfehler auch noch die reelle Lagenänderung der Achse in der Zwischenzeit und die AR-Fehler der Polsterne eingehen. Für die Zwecke der Zonenbeobachtungen reichte auch diese Genauigkeit völlig aus.

Ferner ergaben sich für den mittleren Fehler einer Nullpunktsbestimmung des *Repsold*schen Kreises der Sternwarte Heidelberg[90]) mit dem Quecksilberhorizont folgende Werte: Der mittlere Fehler einer Nadireinstellung mit dem Mikrometerfaden zu $\pm 0''.20$, der mittlere Fehler einer Kreisablesung zu $\pm 0''.055$, der mittlere Fehler einer Bestimmung des Nadirpunkts am Kreise aus 10 bis 12 Ein-

stellungen und einer Kreisablesung zu $\pm$ 0″.09. Hingegen findet sich aus 382 Doppelbestimmungen, die durchschnittlich je 2 Stunden auseinander lagen, der letztere Wert $= \pm$ 0″.13, worin die Änderung in der Zwischenzeit einbegriffen ist, eine vorzügliche Konstanz, wie sie nur selten vorkommt.

Ferner sei noch die wesentliche Steigerung in der Genauigkeit der Instrumentalfehlerbestimmung erwähnt, die *Th. Albrecht* an den zur geographischen Längenbestimmung dienenden Passageninstrumenten des Potsdamer geodätischen Instituts nach Einführung des *Repsold*schen Registriermikrometers konstatiert[32]). Der mittlere Fehler einer Neigungsbestimmung geht, da nunmehr das Niveau nicht mehr umgehängt zu werden braucht, von $\pm$ 0ˢ.025 auf $\pm$ 0ˢ.010, der eines Azimuts von $\pm$ 0ˢ.047 auf $\pm$ 0ˢ.040 herab.

Die heute erzielbare *Konstanz der Mirenaufstellung* beleuchtet die Tatsache, daß es gelang, die durch die Bewegung des Erdpols erzeugte Änderung des Meridians und damit des Azimuts der Miren in den Beobachtungen des letzteren nachzuweisen, trotzdem es sich nur um wenige 0″.1 handelt[90b]).

B. Instrumentalfehler des Refraktors.

Die Instrumentalfehler des Äquatoreals (allgemeiner: des Universalinstruments) bestehen ebenfalls in *inneren Fehlern* — Abweichung des Winkels der Visierlinie zur Nebenachse, der Nebenachse zur Hauptachse von 90°, Durchbiegung des Fernrohrs und der Nebenachse, Torsion des Fernrohrs um die optische Achse in seinen verschiedenen Lagen — und *eigentlichen Aufstellungsfehlern*, bestehend in der Abweichung des Instrumentpols vom Himmelspol und der Kreisnullpunkte von den Nullpunkten des äquatorealen Systems.

Sobald es sich nur um die differentiell-mikrometrische Messung am Refraktor handelt, ist die Kenntnis dieser Instrumentalfehler, die sich bei den modernen Refraktoren in engen Grenzen (selten mehr als eine Bogenminute) halten, nur angenähert erforderlich; ihre Bestimmung braucht daher nur in größeren Zeitintervallen zu geschehen und erfolgt durch geeignete Kombination von Beobachtungen bekannter Sterne in beiden Lagen des Fernrohrs („Achse vor“[90c]) und „Achse folgt“) unter Ablesung beider Kreise und der Uhr[91]).

90b) *A. Socoloff*, Bestimmung der periodischen Bewegung der Erdpole mittels der Miren des Pulkowaer großen Passageninstruments, Astr. Nachr. 132 (1893), p. 359 und Astr. Nachr. 134 (1894), p. 233. Vgl. auch *E. Becker*[89]), p. LVI.

90c) *„Achse vor“* bedeutet, daß das den Deklinationskreis tragende Ende

Während das *Ringmikrometer*, wie erwähnt, keiner besonderen Orientierung bedarf, erfordert die Messung mit dem *Fadenmikrometer* die Kenntnis der Fadenstellung zu den Hauptrichtungen des äquatorealen Systems. Begnügt man sich damit, was in vielen Fällen ratsam ist, die Richtung der täglichen Bewegung, den sog. scheinbaren, d. h. durch Refraktion verfälschten Parallel, *in situ*[91a]) zu bestimmen, so ist jede Aufstellungsbestimmung überflüssig. Dasselbe gilt für kürzere photographische Aufnahmen, bei denen so wie so die gemessenen Plattenkoordinaten durch Anschluß an bekannte Anhaltsterne zum äquatorealen System in Beziehung gesetzt werden müssen, nur wird zuweilen die Neigung der Platte gegen die optische Achse direkt bestimmt und berücksichtigt, vgl. *W. Zurhellen*[64]). Bei Dauerexpositionen werden bei fehlerhafter Aufstellung die Bilder trotz scharfer Führung verzerrt[92]). Hält man dagegen den Nullpunkt des Positionskreises, am bequemsten durch zahlreiche Bestimmungen des Parallels im Meridian, wo wahrer und scheinbarer Parallel zusammenfallen, unter Kontrolle, so muß man in anderen Stundenwinkeln den Einfluß der Instrumentalfehler auf ihn berücksichtigen[93]).

Das *Heliometer* stellt, sobald es sich um eine vollständige Ortsbestimmung handelt, entsprechend den weit größeren Koordinatendifferenzen, die mit ihm vermessen werden, an die Untersuchung des Instruments, sowie seiner Aufstellung weit größere Anforderungen. Aus diesem Grunde beschränkt man sich bei den meisten fundamentalen Anwendungen des Heliometers auf Distanzmessungen, die von jeder Orientierung unabhängig sind. Es handelt sich dann allein um die Untersuchung der Skalen, sowie die Bestimmung des Skalenwerts.

(„*Kreisende*") der Deklinationsachse einen um 90° *größeren* Stundenwinkel hat als das eingestellte Gestirn. Siehe *Bessel*, Abhdl. 2, p. 111; *Brünnow*, p. 461.

91) Vgl. *Bessel*[71]), *W. Struve*[47]), *H. Struve* in *O. Struve*'s Festschrift[9]), sowie *Brünnow*, p. 461 ff. Vgl. auch *M. Loewy* et *P. H. Puiseux*, Théories nouvelles de l'équatorial coudé et des équatoriaux en général, Paris 1888, ein Sammelabdruck von 7 in Paris C. R. 106 (1888) erschienenen Abhandlungen.

91a) *In situ* bedeutet: in der momentanen Stellung (und Lage) des Fernrohrs.

92) *J. Wilsing*, Untersuchungen über die Wirkung der Aufstellungsfehler bei photographischen Refraktoren auf die Beschaffenheit der Bilder, Astr. Nachr. 145 (1897), p. 97.

93) Vgl. z. B. *H. Struve* in *O. Struve's* Festschrift[9]), p. 62. — Für die Torsion des Fernrohrs, die besonders bei heliometrischen, auf große Distanzen bezüglichen Positionswinkelmessungen berücksichtigt werden muß, fand *F. W. Bessel* bei Untersuchung des Nullpunkts des Positionskreises des Königsberger Heliometers[71]), p. 72, indem er sie in der Form $\mu \cos z$ ansetzte: $\mu = 1''.9$, *H. Struve* in *O. Struves* Festschrift[9]), p. 61/64 fand $\mu = 3''.4$.

Diese letztere bedarf allerdings einer weit größeren Schärfe als am Refraktor; insbesondere muß seine Abhängigkeit von Temperatur und Okularstellung untersucht werden, wobei die Bestimmung der bei der Reduktion anzuwendenden Temperatur manche Schwierigkeiten bereitet und der Einfluß der Okularstellung und des davon abhängigen Aussehens der Bilder in das Gebiet der persönlichen Fehler hinüberspielt. Man schränkt diese recht umfangreichen Untersuchungen[94]) bedeutend ein, wenn man die Bestimmung absoluter Distanzen aufgibt, indem man den individuellen Skalenwert bei jeder Messungsreihe durch Messung einer bekannten Normaldistanz selbst bestimmt und dadurch alle Messungen auf einen festen Wert der Normaldistanz als Einheit bezieht[95]). Am weitesten ausgebildet ist dieses Prinzip bei der üblichen heliometrischen Methode der Bestimmung von Fixsternparallaxen (s. p. 283). Auch die Positionswinkelbestimmung wird auf diese Weise sehr vereinfacht und mit Erfolg ausführbar[95]).

Physikalische Fehlerquellen.

Neben den rein geometrischen Abweichungen eines Instruments von seiner mathematischen Idee kommen als Fehlerquellen noch gewisse mehr physikalische Abbildungsfehler in Betracht, welche eine völlige Übereinstimmung des Himmelsbildes und seines der Messung unterliegenden Abbildes in der Brennebene des Fernrohrobjektivs vereiteln. Es handelt sich einmal um die Verzerrung des Himmelsanblicks durch die *atmosphärische Refraktion* und zweitens um die unvermeidlichen *Abbildungsfehler des Objektivs* selbst. Dazu kommen (p. 249) Fehlerquellen, welche dem *photographischen Prozeß*, resp. der *Unvollkommenheit des Okulars und des Auges* entspringen.

Über die allgemeine Theorie der *Refraktion* vgl. VI 2, 6 (*Bemporad*). Die Refraktion beeinflußt nur die Zenitdistanzen, ihr Betrag hängt außer von der Zenitdistanz selbst von den *meteorologischen Verhältnissen* ab. Da die Kenntnis der letzteren *längs des Weges des Lichtstrahls* nicht empirisch erlangt werden kann, so begnügt man sich in der Praxis mit einem auf plausibeln Voraussetzungen beruhenden, durch die Erfahrung geprüften mathematischen Ansatz, dessen Konstanten bei fundamentalen Bestimmungen für jedes Instrument individuell ab-

94) Vgl. z. B. *B. Peter*, Beobachtungen am sechszölligen *Repsold*schen Heliometer der Leipziger Sternwarte, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 22, 4 (1895).

95) Systematisch durchgeführt in *D. Gill*, A determination of the solar parallax and mass of the moon from heliometer observations of the minor planets Iris, Victoria and Sappho, 2 vols, with the cooperation of *A. Auwers* and *W. L. Elkin*, Cape Obs. Ann. 6 (1897) and 7 (1896).

geleitet werden müssen, da sie von der Einrichtung des ganzen Beobachtungsraums und seiner Umgebung merklich abhängen[97]). Damit wird der Refraktionseffekt als Funktion der *meteorologischen Elemente des Beobachtungsraums* dargestellt. Nach *F. W. Bessels* Refraktionstafeln[97]) wächst zum Beispiel in 60° und 85° Zenitdistanz die Refraktion bei 1° Temperaturabnahme um 0″.4 und 2″.3, bei 10 mm Luftdruckzunahme um 1″.3 und 7″.9[98]).

Die zahlenmäßige Berechnung dieses *meteorologischen Korrektionsgliedes der Refraktion* wird besonders dadurch erschwert, daß die ungleichen Temperaturverhältnisse in der Nähe des Fernrohrs (infolge des Einflusses des Beobachtungsraums, des Beobachters, der Beleuchtung usw.) einer scharfen Feststellung der zur Reduktion anzuwendenden Temperatur hinderlich sind, indem der Betrag merklich durch lokale Anomalien, insbesondere der Luftmassen innerhalb des Beobachtungsraums und ihrer unregelmäßigen Schichtung beeinflußt wird[99]). Schon auf die Rektaszensionen gewinnt die Refraktion durch *laterale Refraktionsanomalien* einen Einfluß, der aber mehr zufälliger Natur sein wird. Weit größer ist der Effekt bei den Deklinationen, und die Refraktion ist somit das wesentlichste Hindernis für die Herstellung eines fehlerfreien Deklinationssystems, indem auf ihre lokalen Anomalien (neben Biegung und Teilungsfehlern) die Unterschiede der verschiedenen instrumentellen Deklinationssysteme zurückzuführen sind. Aus diesem Grunde muß auf den Bau und die *Konstruktion des Meridiansaals* so besonderes Gewicht gelegt werden, um einer unregelmäßigen Schichtenbildung der Luftmassen keinen Vorschub zu leisten[23]). Ganz unabhängig könnte man von der *Saalrefraktion* nur werden, wenn man das Instrument völlig im Freien aufstellt, wo jede anhaltende Schichtenbildung so gut wie ausgeschlossen ist[100]).

97) Vgl. *J. Bauschinger*[15]) und *L. Courvoisier*[90]), ferner die ausführlichen Diskussionen der fundamentalen Beobachtungen der Hauptsternwarten, insbesondere für den Pulkowaer Vertikalkreis bei *H. Gyldén*, Poulkova Obs. 5 (1873) und *M. Nyrén*[14]). — Die erste scharfe Ableitung der verschiedenen Konstanten gab *Bessel*, Fund., Sectio IV, p. 26/44 und verbesserte sie in *F. W. Bessel*, Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae, Regiomonti Prussorum 1830, p. LIX; hierauf beruhen seine bis auf die Neuzeit angewandten Refraktionstafeln (p. 322). Daneben sind aus neuerer Zeit zu erwähnen: Tabulae refractionum in usum speculae Pulcovensis congestae, ed. *O. Struve*, Petropoli 1870 [hierzu *H. Gyldén*, Poulkova Obs. 5 (1873)]; 2. Aufl. 1905.

98) Vgl. die Tabelle auf p. 293.

99) *M. Nyrén*, Über die Refraktion im Beobachtungsraume, Astr. Nachr. 131 (1893), p. 291 und die Fußn. 97 zitierten Schriften.

100) Vgl. allerdings über Schichtenbildung im Freien *L. Courvoisier*[90]), p. 219ff.

Bei differentiellen Beobachtungen fallen diese Schwierigkeiten in der scharfen Berechnung des Refraktionseffekts seiner Geringfügigkeit wegen — außer vielleicht für das Heliometer — weg; er besteht hier neben der Veränderung der Sternörter in einer Verzerrung der Stunden- und Parallelkreise, die, wenn man nicht den scheinbaren Parallel *in situ*[91a]) bestimmt, bei der Nullpunktsbestimmung des Positionskreises berücksichtigt werden muß. Daneben aber kann bei den erhöhten Anforderungen an die Genauigkeit der differentiellen Messungen noch die *Färbung und Helligkeit des Sterns* in Frage kommen. Die Berechnung des Refraktionseffekts geht nämlich zwar von einer für visuelle und photographische Beobachtungen verschiedenen Refraktionskonstanten — letztere $\frac{1}{65}$ größer als erstere[101]) — aus, entsprechend den verschiedenen Brechungsexponenten der optisch und der photographisch wirksamen Strahlen; innerhalb beider Klassen wird hingegen die Refraktionskonstante in der Praxis als konstant angenommen. Streng genommen werden sowohl verschieden gefärbte, wie auch helle und schwache Sterne in verschiedenen Stundenwinkeln anders beeinflußt, indem das Bild der hellen Sterne durch die *atmosphärische Dispersion* in ein Spektrum auseinandergezogen wird. Es würde also eine *mit dem Stundenwinkel veränderliche reelle Helligkeitsgleichung* (vgl. p. 257 ff. die „persönliche Helligkeitsgleichung") der Sternbilder entstehen, deren Effekt wesentlich von der Beobachtungsart des Objekts abhängen müßte, indem er für visuelle und photographische Beobachtungen verschieden ausfallen und im ersteren Falle außerdem noch von dem Beobachter und der Beobachtungsmethode abhängen kann. Verschiedene Untersuchungen am Heliometer haben zwar gezeigt, daß wenigstens für diese Art der Beobachtung ein meßbarer Einfluß der Sternfarbe nicht existiert. Andererseits ist man neuerdings geneigt, verschiedene Erscheinungen bei der Ausmessung photographischer Aufnahmen diesem Stundenwinkeleffekt der atmosphärischen Dispersion zuzuschreiben[102]).

101) *J. Wilsing*, Bestimmung der atmosphärischen Refraktion für die photographisch wirksamen Strahlen, Astr. Nachr. 145 (1898), p. 273. Der Unterschied ist bei differentiellen Messungen relativ gering und beträgt bei $z = 65°$ und 1° Distanz im Maximum nicht ganz 0″.1. Vgl. p. 292, Fußn. 1.

102) Die ersten Hinweise auf den möglichen *Einfluß der atmosphärischen Dispersion auf Sternörter* erwähnt *A. A. Rambaut*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 55 (1895), p. 123. *G. B. Airy* wies gelegentlich der Venusdurchgänge von 1874 und 1882 darauf hin, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 29 (1869), p. 42 unten, ausführlicher im gleichen Bande, p. 333. Ernstlicher beleuchtet *D. Gill* Lond. Astr. Soc. Mem. 46 (1880—81), p. 121 u. 161 sowie Cape Obs. Ann. 6 (1897), part. 6, p. 7 die Gefahren, die aus der atmosphärischen Dispersion für die

Die unvermeidlichen *Fehler der Abbildung*, welche das Fernrohrobjektiv in der Brennebene entwirft, werden erst bei weiten Abständen von der optischen Achse merkbar. So traten sie bei den älteren Heliometern mit ebener Schieberführung auf[103]), auch bewirken sie bei der großen Ausdehnung photographischer Aufnahmen eine stärkere Verwaschenheit der Bilder gegen die Grenzen der Platte hin. Außerdem können individuelle Fehler des photographischen Objektivs eine Unsymmetrie des Aussehens der Sternbilder bewirken und dadurch zur Entstehung einer *Helligkeitsgleichung* Anlaß geben[104]). Denselben Effekt hat ein nicht exaktes Funktionieren des Uhrwerks, resp. fehlerhaftes Halten des Fernrohrs, *J. C. Kapteyns guiding error*[102]). Solche Helligkeitsgleichungen photographischer Aufnahmen haben sich ganz neuerdings bei verschiedenen Messungsreihen in merklichem Betrage nachweisen lassen; über ihre Entstehung im einzelnen herrscht noch manche Meinungsverschiedenheit[105]).

Bestimmung der Sonnenparallaxe entstehen können. — Der Einfluß auf Fixsterne, und zwar speziell auf ihre Parallaxenbestimmung, wird erörtert von *A. A. Rambaut*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 55 (1895), p. 123 und in einer längeren Diskussion zwischen ihm und *D. Gill*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 58 und 59 (1897—99); vgl. besonders *D. Gill*, On the effect of the chromatic dispersion of the atmosphere on the parallax of α Centauri and β Orionis, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 58 (1897), p. 53. Vgl. auch *H. Seeliger*, Über den Einfluß der Dispersion der Luft auf die Bestimmung kleiner Fixsternparallaxen, Astr. Nachr. 159 (1902), p. 33 und *G. C. Comstock*, Stellar color and its effect upon determination of parallax, Astr. Nachr. 160 (1902), p. 69. — Über den verschwindenden Einfluß der atmosphärischen Dispersion auf Heliometermessungen vgl. noch *B. Peter*, Astr. Nachr. 155 (1901), p. 289; *F. L. Chase*, *M. F. Smith* and *W. L. Elkin*, Parallax investigations, Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University 2, part 1, New Haven 1906. — Den Einfluß der atmosphärischen Dispersion auf photographische Sternörter betonen besonders *J. C. Kapteyn*, The parallax of 248 stars, Groningen Labor. Publ. 1 (1900) und *Ö. Bergstrand*, Untersuchungen über das Doppelsternsystem 61 Cygni, Nova acta societatis scientiarum upsaliensis (4) 1, Nr. 3, Uppsala 1905.

103) Vgl. die rechnungsmäßige „Optische Verbesserung" von *F. W. Bessel*[71]), p. 124, die, der dritten Potenz des Abstands von der optischen Achse proportional, bei 1° Abstand auf über 1″ steigt.

104) Vgl. *H. H. Turner*, Note on a possible source of error in measures of star places due to defective centring of the object glass, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 65 (1905), p. 54 und p. 228—29. Bei Meßmikroskopen kommt auch Verzeichnung in Betracht; vgl. *H. C. Plummer*, Note on a optical distortion of the microscope of one of the Oxford machines for measuring astronomical photographs, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 64 (1904), p. 640, und *H. Ludendorff*, Über optische Distorsion in Meßmikroskopen, Astr. Nachr. 166 (1904), p. 161.

105) Außer den in Fußn. 102 zitierten Arbeiten über Sternparallaxen vgl. *F. Cohn*, Die Helligkeitsgleichung bei visuellen und photographischen Be-

Dazu kommen bei den photographischen Aufnahmen noch die *Eigentümlichkeiten der Platte* selbst, die kein scharfes Abbild der Sphäre, sondern infolge der *sich ausbreitenden chemischen Wirkung* auf das Silberkorn der Platte mehr oder minder große Sternscheibchen[105a]) gibt und dadurch systematische Fehler in der Hauptsache individueller Natur veranlaßt[105b]) (s. p. 263).

Hierher gehört endlich noch das gelegentliche Auftreten merklicher *Schichtverziehungen* auf der photographischen Platte, deren Einfluß auch durch Aufkopieren eines Gitters nicht völlig beseitigt werden kann. *H. Ludendorff*[106]) fand Fälle, in denen sich Verzerrungen systematisch über beträchtliche Teile der Platten erstreckten und die gemessenen Sternörter um erhebliche Beträge (bis $5\mu = 0''.3$) verfälschten.

Die Einflüsse *optischer Fehler des Okulars und des Auges* hat *H. Seeliger* betont und speziell die Wirkung des Astigmatismus des Auges verfolgt[106a]).

6. Die persönlichen Fehler bei astronomischen Beobachtungen. Außer von dem eigentlichen Beobachtungsinstrument und seiner Aufstellung, den beiderseitigen Fehlern, den Einflüssen des Beobachtungs-

---

obachtungen, Astr. Nachr. 172 (1906), p. 225 und Astr. Nachr. 174 (1907), p. 233 und *A. R. Hinks*, Solar parallax papers No. 5, Examination of the photographic places of stars published in the Paris Eros circulars, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 67 (1906), p. 70.

105a) Die Scheibchen hellerer Sterne erreichen bei den üblichen Aufnahmen (z. B. der photographischen Himmelskarte) bis $30'' = 0.5$ mm.

105b) Über die Art und Weise, durch Anlage der Aufnahmen und der Ausmessung die systematischen Fehler zu beseitigen und die Genauigkeit der Messungen zu erhöhen, vgl., neben Nr. 7 d), noch die Diskussion, die zwischen *Loewy* einerseits und *Plummer* und *Hinks* andererseits geführt ist: *M. Loewy*, Conférence astrophotographique internationale de juillet 1900 (*Conf. astrophot. 1900*), circulaires No. 8 et 9, Paris 1901 et 1902; *M. Loewy*, Paris C. R. 134 (1902), p. 381 und *M. Loewy*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1902), p. 2; *H. C. Plummer*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 61 (1901), p. 618; 62 (1902), p. 506; 63 (1902), p. 14; *A. R. Hinks*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 62 (1902), p. 132.

106) *H. Ludendorff*, Über Schichtverziehungen auf Bromsilbergelatineplatten, Astr. Nachr. 162 (1903), p. 343; vgl. auch *H. Ludendorff*[65]).

106a) *H. Seeliger*, Über den Einfluß dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat astronomischer Messungen, München Abh. 15 (1886), p. 665. Vgl. ferner *Graefe-Saemisch*, Handbuch der gesamten Augenheilkunde, hrsg. von *Th. Saemisch*, 2. Aufl., 8. Band, 2. Abteilung: *C. Hess*, Die Anomalien der Refraktion und Akkommodation des Auges, mit einleitender Darstellung der Dioptrik des Auges, Leipzig 1903. *A. Gullstrands* Messungen der *normalen* menschlichen Hornhaut siehe daselbst p. 49.

raums sowohl auf das Instrument wie den Weg des Lichtstrahls, der Uhr und allen Hilfsinstrumenten hängt das Ergebnis einer astronomischen Beobachtung in der wesentlichsten Weise von dem Beobachter selbst ab, indem bei einem jeden Beobachtungsvorgang *individuelle Auffassungsunterschiede* auftreten. Sie zeigen sich bei der Beobachtung des Moments, in dem ein Stern einen Faden passiert, sei es nach der Auge- und Ohr-, sei es nach der Registriermethode, sie beeinflussen die Bisektion eines Sternscheibchens durch einen Faden, das Durchschwingen zweier Sternbilder nach der heliometrischen Meßmethode usw. Ihr eigentliches Studium gehört in das Gebiet der Physiologie[106b]). Für die Astronomie ist es von Wichtigkeit, ihre numerischen Beträge zu ermitteln und in Rechnung zu ziehen oder sie durch geeignete Anordnung der Messungen zu *eliminieren*. So gelingt das zuweilen durch Einführung eines Reversionsprismas[143]), welches die Richtungen im Gesichtsfelde vertauscht. Auch dient oft die Änderung des Messungsvorgangs zu ihrer wesentlichen Verminderung, wie zum Beispiel die Beobachtung der Rektaszensionen mit dem *Repsold*schen Mikrometer an Stelle der Durchgangsbeobachtung. Eine gänzliche Ausschaltung des Beobachters und eine rein automatische Ausführung der Beobachtung ist naturgemäß meistens ausgeschlossen. Selbst die photographische Platte bedarf zu ihrer Ausmessung eines Beobachters; auch führt jeder automatische Vorgang eigene, meist schwer zu diskutierende Fehlerquellen mit sich.

In den letzten Jahrzehnten ist man dem *Studium der persönlichen Fehler* näher getreten, und zwar sowohl der absoluten Fehler, die man durch geeignete Beobachtungen meist an künstlichen Sternen zu bestimmen sucht, wie der relativen Fehler verschiedener Beobachter, die man bei der gemeinsamen Verarbeitung ihrer Beobachtungen in Rechnung ziehen muß.

Wir erwähnen nur kurz die persönlichen Unterschiede bei der *Schätzung von Unterabteilungen*, seien sie räumlicher oder zeitlicher Natur, z. B. der Zehntel der Trommelteile einer Mikrometerschraube und der Sekundenzehntel auf dem Chronographenstreifen oder nach der Auge- und Ohr-Methode. Zu dem reinen Schätzungsfehler, der auf die individuell verschiedene Auffassung der mitwirkenden Sinne zurückgeht, kommt hier meist eine Vorliebe für gewisse Zehntel hinzu[107]).

106b) Vergl. *N. Herz*, „Persönliche Gleichung" in *Valentiner*, *Handwörterbuch* 3, Abteilung 1 (1899), p. 368.

107) Diese Erscheinung, „personal scale" oder „équation décimale" genannt, erwähnen schon *J. Hartmann*[119]), p. 142 und *B. Peirce*, Amer. Ac. Proc. 4 (1859), p. 197. Vergl. *F. Gonnessiat*, Recherches sur l'équation personelle, Travaux

Im allgemeinen gehen diese Schätzungsfehler nur als zufällige Fehler in die Messungen ein und sind meist ungefährlich. Etwas näher besprechen wir die beiden *Hauptformen der persönlichen Fehler*, die von wesentlichem Einfluß auf die astronomische Koordinatenbestimmung sind.

a) Fehler in der Auffassung des Zeitmoments einer Erscheinung. In der Form der *„persönlichen Gleichung"* bei Durchgangsbeobachtungen haben sich die individuellen Auffassungsunterschiede zuerst — schon vor mehr als 100 Jahren[108]) — bemerkbar gemacht, indem sie merkliche Unterschiede in den beobachteten Durchgangszeiten hervorriefen, welche die Ungenauigkeit der eigentlichen Beobachtung um ein Vielfaches übertrafen. Besonders groß fiel gerade die erste Bestimmung der **relativen persönlichen Gleichung** zwischen zwei Beobachtern durch *Bessel*[109]) aus, indem manche Unterschiede auf über 1ˢ anstiegen, z. B. 1820: *Bessel-Walbeck* $= -1.^s04$; 1823 *Bessel-Argelander* $= -1.^s22$; und Auffassungsunterschiede von $0.^s3$ bis $0.^s5$ sind keineswegs selten[110]).

Seit dieser Zeit gehört eine kritische Untersuchung der pers. Gl. zu den unbedingten Erfordernissen einer sorgfältigen Beobachtung. Ihre Berücksichtigung ist aus dem Grunde so schwierig, als sie keineswegs als eine unveränderliche Konstante des Beobachters (und des Instruments) angesehen werden kann. Bei der Auge- und Ohr-Methode hat das Auge den die Fäden passierenden Stern in seiner Bewegung zu verfolgen und den Punkt seiner Bahn, in dem er sich in dem Moment des durch das Gehör vermittelten Sekundenschlags der Uhr befand, zu den Fäden in Beziehung zu setzen. Bei der Registriermethode tritt neben dem Gesichtssinn der Gefühlssinn in Tätigkeit, der im Moment der Bisektion des Sterns durch den Faden

---

de l'Observatoire de Lyon, publiés par *Ch. André* 2, Lyon et Paris 1892, chap. V, sowie aus der großen neueren Literatur *E. Großmann*, Über Schätzungen nach Augenmaß, Astr. Nachr. 170 (1906), p. 149; *O. Meißner*, Über systematische Fehler bei Zeit- und Raumgrößenschätzungen, Astr. Nachr. 172 (1906), p. 137.

108) Die historische Entwicklung der Erkenntnis und des Studiums der persönlichen Gleichung behandeln ausführlich: *J. L. E. Dreyer*, On personal errors in transit observations, Proceedings of the Irish Academy (2) 2, Dublin 1877, Nr. 6, p. 484—528 [Astr. Ges. Vjs. 12, p. 246] und *F. Gonnessiat*[107]).

109) Über diese erste Bestimmung vergl. *F. W. Bessel*, Königsb. Beob. 8 (1823), Einleit.

110) Ein sehr umfangreiches Material für das Studium der persönlichen Gleichung enthalten die Jahresbände der Greenw. Obs., der Cape meridian results[129]) in the years 1861 ff., erschienen London oder Edinburgh 1893 ff., sowie die zahlreichen modernen geographischen Längenbestimmungen.

den elektrischen Strom zu schließen hat. Die persönliche Auffassung so komplizierter Vorgänge hängt naturgemäß von vielerlei veränderlichen Umständen ab, und zwar sowohl was den Beobachter als die beobachteten Objekte und Vorgänge betrifft.

Die Auffassung selbst durchaus gleichartiger Vorgänge seitens eines Beobachters bleibt im Laufe der Zeit keineswegs dieselbe, sie unterliegt *im Laufe langer Beobachtungsreihen merklichen Änderungen* und bedarf daher einer dauernden Überwachung. Das in Fußn. 110 zitierte Material gibt dafür zahlreiche Belege. Nach *Dreyer*[108]), p. 496—97 betrug die persönliche Differenz der Greenwicher Beobachter

M und *R*	*WE* und *R*
1840—41: — 0.″04,	
1843—46: + 0.″21,	
1847—49: + 0.″37,	1846—49: — 0.″07,
1850—51: + 0.″46,	1850—51: + 0.″40,
1852—53: + 0.″66;	1852—53: + 0.″53,

so daß die Änderung wesentlich an *R* gelegen haben dürfte. Ähnlich findet *Wislicenus*[122]) durch Beobachtung künstlicher Sterne (s. p. 255) für seine absolute persönliche Gleichung: 1866 Dez. 13—22: — 0.″18; 1887 Mai 23—27: — 0.″10; 1888 März 17: + 0.″15. Aus diesem Grunde wurde in Greenwich beständig die relative persönliche Gleichung der Beobachter aus den Beobachtungen jedes Jahres bestimmt und angebracht. Aber auch die momentane Disposition des Beobachters spielt eine wesentliche Rolle und beeinflußt infolge eintretender Abspannung schon im Laufe längerer Abendreihen, wie auch während kürzerer Erholungspausen die Auffassung der Durchgangszeiten. So fand *Küstner*[13]) einen „Gang des Beobachters", der für 100 Minuten im ersten Jahre für gute Luft: + 0.″039 (im Mittel aus 55 Reihen), für schlechte Luft + 0.″079 (15 Reihen) betrug, im zweiten Jahre auf etwa $^3/_4$ dieser Beträge herabging.

Besonders kompliziert wird aber das Studium der pers. Gl. durch die *Verschiedenartigkeit der beobachteten Objekte* nach Aussehen, Bewegungsart, Luftzustand, Bildschärfe usw. Es handelt sich dabei einmal um den Unterschied in der Auffassung von Lichtscheiben, wie sie Sonne, Mond und die großen Planeten darbieten, bei denen die Durchgangszeiten der einzelnen Ränder beobachtet werden, und der mehr punktförmig erscheinenden Fixsterne. Auch für die verschiedene Auffassung der Sonne relativ zu demselben Sternsystem bieten die „Greenwich Obs." umfangreiches Material; die systematische

Abweichung beträgt für manche Beobachter 0.^{s}1 bis 0.^{s}2. Wie sehr aber auch für *einen* Beobachter diese Auffassung von der *Schärfe* des Sonnenbildes abhängig ist, beweist z. B. der Fall von *Wagner*[111]), der zwar den zweiten Sonnenrand ziemlich unabhängig vom Bildzustand der Sonne beobachtete, den ersten Rand aber je nach der Bildschärfe um 0.^{s}2 bis 0.^{s}3 verschieden auffaßte. Die Vernachlässigung dieses Auffassungsunterschiedes würde eine merkliche Abhängigkeit der abgeleiteten Ephemeridenkorrektion von der Bildschärfe hervorgerufen haben.

Bei den Fixsternen wiederum ist die *verschiedene Richtung und Geschwindigkeit*, mit der sie das Gesichtsfeld passieren, sowie ihre *verschiedene Helligkeit* von Einfluß. Bei den oberen und unteren Kulminationen der Zirkumpolarsterne, sowie bei dem durch die Kulmination von Sternen nördlich und südlich vom Zenit bedingten Wechsel in der Stellung des Beobachters („Füße Nord", „Füße Süd") treten Unterschiede auf, die bis 0.^{s}1 ansteigen[112]). Die pers. Gl. ist für *Sterne verschiedener Deklination* verschieden und natürlich für Polsterne eine ganz andere wie für Äquatorsterne[113]). Auch die *Helligkeit des Himmelshintergrundes* spricht mit und kann einen Unterschied von Tag- und Nachtbeobachtungen erzeugen[114]). Erwähnung verdienen hier auch die bedeutenden Auffassungsunterschiede der oft verwaschenen und kernlosen *Lichtflecke der Kometen*, sowohl bei Durchgangsbeobachtungen wie bei Bisektionen[114a]).

---

111) *A. Wagner*, Poulkova Obs. 12 (1887), p. (92). — Sehr ähnliche Folgerungen zieht *A. Sokolow*, Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. 3 (1905), p. [53] u. ff. für die drei Beobachter *A. Wagner, P. Harzer* und *Th. Wittram*, deren Auffassung der Sonne je nach der Bildschärfe sich um 0.^{s}1 bis 0.^{s}2 verschieden ergibt.

112) Vergl. z. B. Cape Catalogue for 1885[87a]) Introduction, p. XI, sowie in geringerem Betrage bei *H. Battermann*, Berlin Sternw. Ergebn. 8 (1899), p. 7.

113) Bei hohen Polsternen[81a]) steigt der Auffassungsunterschied auf mehrere Zeitsekunden, vergl. z. B. Straßb. Sternw. Ann. 1 (1896), p. XLV; und besonders einen Fall in den Results of astronomical observations made at the R. Observatory, Cape of Good Hope *(Cape astron. results)* during the years 1871—73, Cape Town 1876, p. IX, wo die Bestimmung des Azimuts aus Polsternen seitens eines geübten Beobachters um 0.^{s}16 von dem der anderen Beobachter abweicht, was für die Sterne B, σ, o Octantis ($\delta = -89°\,26'$, $-89°\,17'$, $-89°\,4'$) eine Zeitdifferenz von 13.^{s}6, 10.^{s}0, 7.^{s}4 bedeutet.

114) Vergl. *F. Cohn*, Über einige allgemeinere Ergebnisse einer Neureduktion der ältesten *Besselschen* Meridianbeobachtungen, Astr. Ges. Vjs. 33 (1898), p. 291 und *F. Cohn*, Königsb. Beob. 39 (1899).

114a) Über die Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung dieser persönlichen Auffassungsunterschiede vgl. z. B. *H. J. Zwiers*, Recherches sur l'orbite de la

Eine vollständige Elimination des Beobachters würde somit die genaue Kenntnis der Abhängigkeit der absoluten pers. Gl. von allen diesen Einflüssen voraussetzen[115]), eine Kenntnis, die zu erlangen angesichts der Vielseitigkeit der Einflüsse die verfügbare Arbeitskraft weit übersteigen würde, in mancher Hinsicht sogar aussichtslos wäre. In der Praxis beschränkt man sich daher darauf, sie nach einzelnen Richtungen hin zu untersuchen, entweder durch eigens konstruierte Apparate mit künstlichen Sternen oder durch geeignete Vorrichtungen, die ihre Prüfung bei der eigentlichen astronomischen Beobachtung selbst ermöglichen (z. B. Helligkeitsgleichung) oder man ermittelt, im Falle an einer größeren Beobachtungsreihe mehrere Beobachter beteiligt sind, ihre *relative* pers. Gl. und bezieht damit alles auf die Auffassung eines Durchschnittsbeobachters. Diese letztere Bestimmung ist unbedingt erforderlich zur Ableitung eines gleichmäßigen Uhrganges, wenn, wie es an manchen größeren Sternwarten der Fall ist, *verschiedene Beobachter* am Meridiankreise im Laufe eines Tages *abwechseln;* sie erfolgt dann unmittelbar aus den abgeleiteten Uhrkorrektionen selbst[116]). Eine direkte Bestimmung der relativen pers. Gl. kann nach *Bessels* Vorgange einfach dadurch geschehen, daß zwei Beobachter an demselben Instrument Sterndurchgänge beobachten, indem sie entweder während eines Sterns oder von Tag zu Tag mit den Sternen abwechseln; in jedem Falle müssen durch entsprechenden Beobachterwechsel die Fadendistanzen oder die Sternörter eliminiert werden. Diese Methode ist bei geographischen Längenbestimmungen zur Kontrolle vielfach üblich. Bei entsprechender Auswahl der Sterne kann auch die Abhängigkeit der relativen pers. Gl. von der Deklination, Helligkeit usw. geprüft werden[117]). Von der zweiten Methode der von jedem Beobachter vollständig, aber von Tag zu Tag wechselnd durchbeobachteten Sterne gelangt man schließlich, wenn das

---

comète périodique de *Holmes* et sur les perturbations de son mouvement elliptique, 1er mémoire, Verhandelingen der K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1te sectie, deel 3, Nr. 5, Amsterdam 1895, p. 97, und besonders 2ième mémoire, Leyde 1902, p. 2—3 und 6—7.

115) Die Kenntnis der absoluten pers. Gl. selbst ist nur für absolute Zeitbestimmungen erforderlich, z. B. bei geographischen Längenbestimmungen, bei denen die aus Durchgangsbeobachtungen bestimmten Ortszeiten zweier Erdorte im gleichen Moment mit einander verglichen werden sollen. Man eliminiert sie bei der Gleichartigkeit der beobachteten Objekte fast völlig durch Wechsel beider Beobachter und Instrumente.

116) Auf diesem Wege sind die in Fußn. 110 zitierten Werte der persönlichen Gleichung für die Beobachter in Greenwich und am Kap erhalten worden.

117) Vergl. Cape Catalogue for 1885[87a]), Introduction, p. XI—XIII.

Beobachtungsmaterial ausreicht, dazu, die aus den Beobachtungen eines jeden Beobachters abgeleiteten fertigen Sternörter nach den verschiedenen Gesichtspunkten zu vergleichen, eine Methode, wie sie stets bei der zur Vereinigung mehrerer Beobachtungsreihen erforderlichen Befreiung von ihren systematischen Unterschieden angewendet wird (s. Nr. 7)[118]). Eine Kontrolle erhält man durch die Vergleichung beider Ergebnisse[117]).

Zur empirischen Bestimmung der absoluten pers. Gl. bei Durchgangsbeobachtungen und ihrer Variationen hat man verschiedene Methoden vorgeschlagen und entsprechende Apparate konstruiert. Als ihr Grundprinzip kann man bezeichnen, daß das Bild eines *künstlichen*, in regulierbarer Geschwindigkeit die Fäden passierenden *Sterns* in gewöhnlicher Art beobachtet wird, während sich gleichzeitig der genaue Moment der Bisektion des Bildes durch den Faden selbsttätig registriert. Der die Bewegung des künstlichen Sterns erzeugende Mechanismus ist zu dem Zweck mit einer Reihe von Kontakten versehen, die seine Bewegungsphase fixieren, indem im Ruhezustand die ihnen entsprechende Stellung des Sternbilds durch mikrometrische Messung zu den Fäden in Beziehung gesetzt wird. Von diesbezüglichen Apparaten[119]), die mit Erfolg zur Anwendung gelangten, seien erwähnt der von *F. Kaiser* in Leiden konstruierte „Zeitkollimator“[120]), der von *H. G. van de Sande Bakhuyzen* angegebene[121]), welcher auf die Gleichartigkeit der Beobachtung mit der sonstigen Meridianbeobachtung Wert legt, und der in dieser Hinsicht noch weiter gehende Apparat von *W. F. Wislicenus*[122]).

---

118) *A. Sokolow*[111]) vergleicht die von den drei Beobachtern erhaltenen Sternörter nach der Deklination usw.

119) Über die ersten Vorschläge zur Bestimmung der absoluten pers. Gl. [von *J. Hartmann*, Einige Beobachtungen und Bemerkungen über Personaldifferenz, Auszug aus *Grunerts* Archiv 1858, p. 31, Astr. Nachr. 65 (1865), p. 129; *É. Plantamour* et *A. Hirsch*, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre Genève et Neuchâtel, Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève 17, Genève 1864, p. 289—436; *M. C. Wolf*, Recherches sur l'équation personnelle, Obs. de Paris Ann., mém. 8 (1866)] vergl. neben *J. L. E. Dreyer*[108]) und *F. Gonnessiat*[107]) das ausführliche Referat von *W. Förster* in Astr. Ges. Vjs. 1 (1866), p. 236.

120) *F. Kaiser*, Beschreibung der Zeitkollimatoren der Sternwarte zu Leiden, Leiden Sternw. Ann. 2 (1870), p. 19 u. ff.; vergl. auch *A. Wagner*[111]), p. (55) ff.

121) *H. G. van de Sande Bakhuyzen*, Beschreibung eines Apparats zur Bestimmung des absoluten persönlichen Fehlers bei Durchgangsbeobachtungen, Leiden Sternw. Ann. 7 (1897), p. 75.

122) *W. F. Wislicenus*, Untersuchungen über den absoluten persönlichen Fehler bei Durchgangsbeobachtungen, Leipzig 1888.

Zweifellos enthalten diese Untersuchungen eine Fülle interessanter Tatsachen, insbesondere über die physiologischen Einflüsse, denen die persönliche Gleichung unterliegt. Bedenkt man indessen, daß diese terrestrischen Beobachtungen immerhin unter merklich anderen Verhältnissen zu erfolgen pflegen als die eigentlichen Beobachtungen am Himmel — vor allem wird die Reaktionszeit des Beobachters durch die bewußte Absicht, seinen persönlichen Fehler zu bestimmen, merklich beeinflußt —, so wird es nicht Wunder nehmen, daß man auf einem dieser Wege zwar allenfalls einen brauchbaren Durchschnittswert der absoluten pers. Gl. und einen ungefähren Überblick über ihre Schwankungen erhalten kann, daß hingegen eine praktische Anwendung der so erhaltenen Werte auf die eigentlichen astronomischen Beobachtungen kaum jemals stattgefunden hat.

Man begnügte sich daher z. B. bei dem Anschluß der Sterne an die Sonne, wie er zur Ableitung absoluter Rektaszensionen erforderlich ist, bisher stets damit, anzunehmen, daß sich diese Fehler im Mittel zahlreicher Beobachter vernichten oder wenigstens im Laufe der Zeiten (Jahrzehnte und Jahrhunderte) dieselben bleiben werden. Allenfalls könnte man diese Annahme gelten lassen, so lange die Beobachtungsmethode die gleiche bleibt, wenngleich die größeren Dimensionen und Vergrößerungen der neueren Instrumente auch diesen Durchschnittswert beeinflussen müssen; jede Änderung der Beobachtungsmethode (z. B. Übergang von der Auge- und Ohr- zur Registriermethode) wirft diese Annahme über den Haufen und verfälscht die Bestimmung der Bewegung des Frühlingspunkts, d. h. die Präzessionskonstante[123]). Ähnliches gilt für den Mond und in geringerem Maße für die großen Planeten.

Die Untersuchung des Einflusses der Eigenart der Fixsterne (Helligkeit, Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung) auf die Auffassung der Durchgangszeiten, dessen Kenntnis für ein fehlerfreies System von Fixsternörtern erforderlich ist, kann in mancher Richtung durch die Beobachtung der Himmelsobjekte selbst erfolgen. Der Einfluß der verschiedenen Bewegungsrichtung läßt sich durch Benutzung eines *Reversionsprismas* beseitigen[117]). Da die scheinbare Geschwindigkeit hingegen allein von der Deklination abhängt, so vermischen sich hier persönliche Auffassung und instrumentelle Fehler (von der Form $\Delta\alpha_\delta$[123a]) und lassen sich nur schwer voneinander trennen.

---

123) Den Einfluß der Beobachter auf die Ephemeridenkorrektion der Sonne zeigt z. B. die Zusammenstellung bei *Newcomb*, Fund. Const., p. 22—24.

123a) Unter Fehlern von der Form $\Delta\alpha_\delta$ versteht man Fehler, die sich auf

Zu erörtern bleibt die in neuerer Zeit mehr in den Vordergrund getretene sog. **Helligkeitsgleichung** der Fixsternbeobachtungen, der Einfluß der Sterngröße auf die Auffassung der Durchgangszeiten. Nach einigen mehr gelegentlichen Hinweisen *Argelanders*[124]) auf die Wahrscheinlichkeit, daß gewisse Eigentümlichkeiten von Beobachtungsreihen auf eine Helligkeitsgleichung zurückzuführen sein möchten — zu einem strengen Nachweise reichte das Material nicht aus —, führte *Gill* den ersten positiven Nachweis für ihr Auftreten[125]) und gab zugleich ein seitdem durchweg angewandtes Verfahren an, sie zu untersuchen[126]). Indem man nämlich die Helligkeit eines Sterns durch ein auf das Objektiv aufgesetztes *engmaschiges Gitter* abschwächt, kann man die Beobachtung des Durchgangs des unge-

---

den beobachteten Wert der AR. werfen, und deren Betrag abhängt von der Deklination des beobachteten Gestirns. Analog definiert man $\Delta\alpha_\alpha$, $\Delta\delta_\alpha$, $\Delta\delta_\delta$.

124) Schon *F. W. Bessel* führt gewisse Unterschiede zwischen seinen Beobachtungen und denen von *C. T. Anger* auf eine „Verschiedenheit der Antrittszeiten heller und dunkler Sterne" zurück, Briefwechsel zwischen *W. Olbers* und *F. W. Bessel*, hrsg. von *A. Erman* 2, Leipzig 1852, p. 358 (Brief vom 13. April 1831). — Weiter behandelt diese Möglichkeit *F. G. W. Struve*, Stellarum fixarum imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae pro epocha 1830.0, Petropoli 1852, p. LXIV ff. — *F. W. A. Argelander*, Astr. Nachr. 74 (1869), p. 263, macht auf einen $0^s.66$ betragenden Unterschied von fünf Bonner und sechs Leidener Meridianbeobachtungen des kleinen Planeten Egeria ($9^m.2$) aufmerksam. Eine Prüfung seiner Ortsbestimmungen von veränderlichen Sternen in den verschiedenen Phasen ihrer Helligkeit führte ihn zu keinem entscheidenden Ergebnis. Vergl. auch *F. W. A. Argelanders* Referat, Astr. Ges. Vjs. 7 (1872), p. 13 ff.

125) *D. Gill*, Account of a determination of the solar parallax, Lond. Astr. Soc. Mem. 46 (1880—81), chapter IX, p. 56 ff., sowie *D. Gill*, On the results of meridian observations of the Mars comparison stars, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 39 (1878), p. 98 fand durch Vergleichung heliometrisch festgelegter Sternörter mit den Ergebnissen der an zwölf Sternwarten erhaltenen Meridianbeobachtungen einen starken, etwa $0.^s018$ pro Größenklasse betragenden Gang der AR.-Unterschiede nach der Helligkeit, der nur den Meridianbeobachtungen zur Last fallen konnte, wie Versuche auch bestätigten. Vergl. auch *H. G. van de Sande Bakhuyzen*, Die Rektaszensionen von *Gills* Mars-Sternen und die Änderung des persönlichen Fehlers bei der Beobachtung von Sternen verschiedener Helligkeit, Astr. Nachr. 95 (1879), p. 81, sowie *H. G. van de Sande-Bakhuyzen*, Astr. Ges. Vjs. 14 (1879), p. 408.

126) Die von *Argelander*[124]) vorgeschlagene Methode der Beobachtung veränderlicher Sterne in verschiedenen Phasen ihrer Helligkeit läßt nur eine beschränkte Anwendung zu und würde eine genaue Schätzung der Helligkeiten selbst mit verlangen. Die Anwendung von Diaphragmen kann infolge von Unregelmäßigkeiten des Objektivs eine Verschiebung des beobachteten Lichtschwerpunkts erzeugen; vergl. *W. F. Wislicenus*, Über den Einfluß von Ring- und Scheibenblenden auf Mikrometermessungen, Astr. Nachr. 128 (1891), p. 345.

schwächten und des abgeblendeten Sterns miteinander vergleichen und den Unterschied zu der in Größenklassen ausgewerteten Bildschwächung in Beziehung setzen[127]). Nach dieser Methode angestellte Beobachtungsreihen ergaben, daß die H.-Gl. bei allen Beobachtern[128]) in dem Sinne wirksam ist, daß schwache Sterne später beobachtet werden als helle, und daß sie im allgemeinen für die helleren Sterne eine etwas geringere Steigung besitzt als für Sterne mittlerer Helligkeit, für sehr schwache Sterne aber merklich schneller ansteigt. So erhält man im Mittel von sechs Beobachtern am Kap[129]) als Helligkeitskorrektion für Sterne 0ter, 2ter usw. bis 10ter Größe:

0^m	$+ 0.^s016$	6^m	$- 0.^s012$
2^m	$+ 0.008$	8^m	$- 0.030$
4^m	0.000	10^m	$- 0.053.$

Ähnliche Beträge findet *F. Cohn*[130]) durch Vergleichung von Registrierbeobachtungen mit Beobachtungen am *Repsold*schen Mikrometer, die zugleich eine Unabhängigkeit der H.-Gl. von der Deklination, sofern sie sich in mäßigen Grenzen hält, ergeben:

---

127) Diesbezügliche Beobachtungen von künstlichen Sternen stellte *H. G. van de Sande Bakhuyzen* an, L'influence de l'éclat de l'étoile sur le temps de perception et sur l'équation personnelle, Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles (2) 6, La Haye 1901, p. 727. „Gewebe von Metallfäden" schlug schon *F. W. Bessel*[71]), Astron. Untersuch. 1, p. 125 = *Bessel*, Abhdl. 2, p. 157 vor, um die Helligkeiten der beiden heliometrisch mit einander zu verbindenden Objekte auszugleichen.

128) Eine Ausnahme bilden nur die *F. Küstner*schen Beobachtungen der Zone 0^0 bis $+ 18^0$ in Bonn mit einer H.-Gl. von $- 0.^s007$ pro Größenklasse, während seine früheren Berliner und späteren Bonner Beobachtungen wieder eine normale H.-Gl. von etwa $+ 0.^s004$ pro Größenklasse aufweisen. Vergl. *F. Küstner*[13]).

129) Vgl. die „Results of meridian observations of stars, made at the R. Observatory, Cape of Good Hope" (*Cape meridian results*) in the years 1900 to 1904, Edinburgh 1906, p. XIII—XVII und „Catalogues of stars for the equinox 1900.0, from observations made at the R. Observatory, Cape of Good Hope, during 1900—04, Edinburgh 1906" *(Cape Catalogue for 1900)*, p. VIII. Zwei Beobachter (*P., R C.*) wurden dabei, da sie einen besonders stark ausgesprochenen Gang zeigten, ausgeschlossen.

130) *F. Cohn,* Die Helligkeitsgleichung bei visuellen und photographischen Beobachtungen, Astr. Nachr 172 (1906), p. 225, sowie *F. Cohn*, Beiträge zur Kenntnis der Helligkeitsgleichung bei Durchgangsbeobachtungen, Astr. Nachr. 165 (1904), p. 245. Vergl. auch *A. Auwers*, Ergebnisse aus Vergleichungen der Zonenkataloge der Astronomischen Gesellschaft untereinander und mit dem *Rombergs*chen Katalog für 1875, Astr. Nachr. 161 (1903), Nr. 3842—44, insbesondere d. 71—72. Vgl. auch Fußnote 132*).

	I.	II.
$4^m.5$	+ 0.^{s}001	+ 0.^{s}003
5 .5	— 0.007	— 0.006
6 .5	— 0.017	— 0.016
7 .5	— 0.029	— 0.029
8 .5	— 0.043	— 0.046
9 .5	— 0.061	— 0.070

Kolumne I ($38^0 < \delta < 55^0$) enthält das Mittel von 11, Kolumne II ($11^0 < \delta < 38^0$) von 12 verschiedenen Beobachtungsreihen.

Da aber in den meisten Fällen das Beobachtungsmaterial zur Ableitung ihres genauen Verlaufs nicht ausreicht, begnügt man sich, die H.-Gl. in erster Näherung als lineare Funktion der in Größenklassen ausgedrückten Sternhelligkeit darzustellen und zur Beziehung aller Beobachtungen auf eine gleiche Sterngröße anzuwenden. Für die Auge- und Ohr-, sowie die Registriermethode finden sich im Mittel zahlreicher Beobachter nahe gleiche Werte. So erhält *S. Newcomb*[131]) als **Helligkeitsgleichung pro Größenklasse**

für die Auge- und Ohr-Methode (aus 5 Bestimmungen): + 0.^{s}0091,
für die Registrier-Methode (aus 6 Bestimmungen): + 0.^{s}0085,

und *Boss*[132]) durch eine ausgedehntere Diskussion als durchschnittliche H.-Gl. für hellere Sterne (bis etwa $6.^m5$) aus 11 resp. 19 Reihen die Werte + 0.^{s}0074, resp. + 0.^{s}0080, im Mittel: + 0.^{s}0077. Dieselbe H.-Gl. eines Durchschnittsbeobachters (für hellere Sterne) leitet *Küstner*[132a]) dadurch ab, daß er aus seinen nach der Gittermethode von H.-Gl. befreiten Beobachtungen die Korrektionen der Sterne des *Auwers*schen Fundamentalkatalogs ableitet und nach der Helligkeit anordnet. Er findet + 0.^{s}0052 pro Größenklasse.

Eine *Bestätigung* der auf diesem Wege gefundenen Helligkeitskorrektionen, die wegen mancher gegen die Gittermethode geäußerten Bedenken[133]) erwünscht war, erlangte man durch anders geartete Beobachtungen, bei denen der Natur der Messungen nach eine H.-Gl.

131) *Newcomb*, Fund. (Catal. vgl. p. 30, Fußn. 32), p. 184.

132) *L. Boss*, Determination of absolute magnitude-equation for the catalogue of 627 standard stars, Astron. Journ. 23 (1903), p. 83.

132a) *F. Küstner*, Beobachtete Korrektionen des Fundamentalkataloges von *Auwers* und Ermittelung seiner Helligkeitsgleichungen, Astr. Nachr. 158 (1902), p. 129.

133) *H. H. Turner*, On the variation of personal equation with stellar magnitude, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 60 (1899), p. 3, sowie 62 (1901), p. 3.

der Rektaszensionen ausgeschlossen war, z. B. durch eine *heliometrische Triangulation* des beobachteten Sternkomplexes nach der Distanzmethode, also auf demselben Wege, auf dem sie *Gill* zuerst nachgewiesen hatte (s. Fußn. 125). Es ist das gelegentlich der großen Kooperation zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen der Planeten Iris, Victoria und Sappho (1888—89) mit vollem Erfolge geschehen[134]). Immerhin kann eine derartige Bestimmung der H.-Gl. nur gelegentlich stattfinden. Der Anwendung der bequemeren Methode, sie durch *Vermessung* desselben Sternkomplexes *auf photographischen Aufnahmen* zu bestimmen[133]), steht die Schwierigkeit entgegen, daß sich die photographischen Aufnahmen selbst als merklichen Helligkeitsgleichungen ausgesetzt erwiesen haben (s. Fußn. 105).

Die *Schädlichkeit* der H.-Gl. gegenüber anderen systematischen Fehlerquellen der Durchgangsbeobachtungen liegt nach dem Obigen nicht so sehr in ihrer Größe als in der Gleichartigkeit, mit der sie bei allen Beobachtern auftritt. Während die eigentlichen Instrumentalfehler durch eingehende Kritik sowohl, wie vermehrte Zahl von mitwirkenden Instrumenten usw. verringert werden können und in diesem Sinne mehr den Charakter zufälliger Fehler besitzen, bleibt die H.-Gl. im Mittel verschiedener Beobachter immer noch in gleicher Größe bestehen und *verfälscht die Beobachtungen systematisch.* Es ist das besonders wichtig, wenn man diese Örter als Anhaltspunkte für differentielle Arbeiten, z. B. Ausmessung photographischer Aufnahmen, verwerten will, und darum ist eine Bestimmung seiner H.-Gl. für jeden Beobachter heutzutage dringend erforderlich. Denn die Genauigkeit der Meridianörter kann durch keine Häufung des Beobachtungsmaterials erhöht werden, so lange die H.-Gl. unberücksichtigt bleibt.

Noch empfehlenswerter freilich, als den durchschnittlichen Betrag der H.-Gl. mehr gelegentlich zu bestimmen und bei der Reduktion anzuwenden, ist die von *Küstner* in Bonn zuerst systematisch angewandte Eliminationsmethode, bei der alle Sterne durch *Vorsetzen geeigneter Gitter* möglichst auf die gleiche Helligkeit abgeblendet werden, da die H.-Gl. wesentlich von Luftunruhe und Bildschärfe abhängt.

Allen Versuchen gegenüber, eine Fehlerquelle, welche die Messung einer gewissen Größe beeinflußt, zu bestimmen oder zu eliminieren, wird aber stets eine Methode überlegen sein, welche jene Messung *auf einem von dieser Fehlerquelle ganz unabhängigen Wege* erlangt. So bilden alle Methoden, die persönliche Gleichung bei Durchgangs-

134) Vergl. neben Fußn. 95 noch besonders *D. Gill*, Catalogue of 2798 Zodiacal stars, London 1899, p. 4—6; sowie *D. Gill*, On the definitive place of the stars used for comparison etc., Astr. Nachr. 130 (1892), p. 161.

beobachtungen zu bestimmen uud zu eliminieren — soweit sie überhaupt dieses Ziel erreichen — nur einen Notbehelf gegenüber einem Verfahren, welches die Bestimmung der Rektaszensionen von jeder Durchgangsbeobachtung unabhängig macht und auf die Pointierung des Sternbildes mit einem Faden zurückführt. Dieses leistet mit hinreichender Schärfe das *Repsoldsche selbstregistrierende Mikrometer*, zu dem in gewisser Weise die oben erwähnten Methoden zur Bestimmung der absoluten persönlichen Gleichung hinüberleiten. Während dort die jeweilige Stellung des den künstlichen Stern bewegenden Mechanismus zu den Fäden automatisch registriert und dadurch zu den Signalen einer Uhr in Beziehung gesetzt wird, geschieht dies hier in gleicher Weise für die Stellung des beweglichen Fadens, der mit dem Sterne mitgeführt und in dauernder Bisektion gehalten wird. Schon die ersten Versuche mit dem *Repsold*schen Mikrometer ergaben eine Verringerung der persönlichen Gleichung auf etwa den zehnten Teil[135]). Des weiteren erwies sie sich von weit größerer Konstanz, sowohl im Lauf einer Abendreihe, wie an den verschiedenen Abenden, und damit von der Disposition des Beobachters so gut wie unabhängig[136]). Von einer H.-Gl. bei Fixsternen traten kaum noch Spuren auf, und es ist mit Sicherheit zu erwarten, daß bei Anwendung des *Repsold*schen Mikrometers auch der Einfluß der Geschwindigkeit des Sterndurchgangs verschwinden und der Auffassungsunterschied zwischen Sonnen- und Fixsternbeobachtungen auf ein Minimum reduziert werden wird. Da sowohl infolge dieser Vorzüge, wie auch des ganzen Beobachtungsvorgangs die Genauigkeit der AR.-Beobachtungen erheblich größer ist, als bei der gewöhnlichen Registriermethode[137]), so bedeutet seine Einführung einen wesentlichen Fortschritt in der Beseitigung systematischer Fehler, dem kaum irgendwie nennenswerte Schattenseiten gegenüberstehen.

Außer bei den Durchgangsbeobachtungen macht sich der persönliche „Zeitfehler“ auch bei der Beobachtung eines momentan eintretenden *Aufleuchtens oder Verlöschens einer Lichtquelle*[137a]) geltend,

---

135) Vergl. *E. Becker*[32]) und besonders *Th. Albrecht*[32]).

136) *F. Cohn*, Ergebnisse von Beobachtungen am *Repsold*schen Registrier-Mikrometer bei Anwendung eines Uhrwerks, Astr. Nachr. 157 (1902), p. 357.

137) Vergl. sowohl *F. Cohn*[136]), wie *Th. Albrecht*[32]). Im letzteren Falle ging der mittlere Fehler einer Längenbestimmung aus einem Abend von $\pm 0.^s050$ (Durchschnitt von 7 Jahren) auf $\pm 0.^s022$ (3 Jahre) herab.

137a) Die persönliche Gleichung bei der Beobachtung von Lichtblitzen erwähnt schon *C. L. Gerling*, Die Längenunterschiede zwischen Göttingen usw. durch Signale bestimmt, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 261.

insbesondere der Sternbedeckungen durch den Mond [vgl. VI 2, 3 *(Wirtz)*, Nr. **26. 27. 28. 34. 35.**]. Der Moment des Verschwindens eines Sterns hinter der Mondscheibe oder seines Auftauchens wird individuell verschieden geschätzt. Diesen Fehler kann man verhältnismäßig einfach durch Beobachtung *künstlicher Sternbedeckungen* ziemlich zuverlässig, insbesondere soweit es sich um den dunkeln Mondrand handelt, ermitteln, indem man durch einen Stromschluß eine feststehende Lichtquelle aufleuchten, resp. verlöschen und gleichzeitig ein Signal auf dem Chronographen erzeugen läßt, das mit der Auffassung des Moments durch den Beobachter verglichen werden kann [138]).

b) **Fehler beim Pointieren eines Objekts mit einem Faden** (oder allgemeiner in der Auffassung rein geometrischer Erscheinungen). Eine Hauptklasse der hier zu nennenden Vorgänge läßt sich auf Auffassungsunterschiede in der Schätzung der *Halbierung von Strecken* zurückführen, sei es, daß man ein Stern- oder Mirenbild mit einem Faden biseziert, sei es, daß man einen Stern oder einen Kreisstrich in die Mitte zwischen zwei enge Fäden einstellt usw. Hierher gehören die AR.-Beobachtungen mit dem *Repsold*schen Mikrometer, die δ-Einstellungen am Meridian- oder Vertikalkreise und die mikroskopische Ablesung seiner Kreise, die Refraktorbeobachtungen mit dem Fadenmikrometer, die Ausmessungen der photographischen Platte mit dem Ablesemikroskop usw. Sie alle unterliegen persönlichen Auffassungsunterschieden, die aber weit geringer sind, als die Fehler der Durchgangsbeobachtungen. So fanden *F. Cohn* und *A. Postelmann* [136]) beim *Repsold*schen Mikrometer eine konstante Differenz von 0.″020, verschiedene Beobachter am Straßburger Meridiankreise [138a]) merkliche Unterschiede in der Nadireinstellung, je nachdem sie von Nord oder von Süd aus erfolgte. Im allgemeinen werden sie von dem Aussehen des Objekts und seinen Dimensionen im Verhältnis zur ganzen Strecke abhängen und somit die Form einer *Helligkeitsgleichung* annehmen.

---

138) Vergl. *F. Renz*, Versuch einer Bestimmung der persönlichen Gleichung bei der Beobachtung von Sternbedeckungen, Astr. Nachr. 119 (1888), p. 145. Hierher gehört auch die Helligkeitsgleichung bei sog. *okkultierenden Mikrometern*, bei denen auch das Verschwinden und Aufleuchten eines Objekts zur Zeitfixierung dient. Vgl. *O. A. L. Pihl*, On occulting micrometers and their value as applied to exact astronomical measurements, Christiania 1893, und *O. A. L. Pihl*, Über okkultierende Mikrometer, Astr. Nachr. 134 (1894), p. 313, sowie *L. Grabowski*, Beobachtungen von kleinen Planeten, Astr. Nachr. 146 (1898), p. 433 und Astr. Nachr. 174 (1907), p. 81.

138a) *E. Becker*, Straßb. Sternw. Ann. 1 (1896), p. LXXXIII ff.; bei *W. Schur* betrug der Unterschied fast 1″ und war veränderlich.

Eine solche fand *Küstner*[138]) für seine δ-Beobachtungen am Bonner Meridiankreise — die Sterne wurden in die Mitte der Horizontalfäden gestellt —, nämlich für Sterne m^{ter} Größe

$$+ 0''.08\,(m - 8.5) + 0''.05\,(m - 8.5)^2$$

(Mittel aus drei Zonen, gültig für Sterne von $7^m.0$ bis $9^m.8$); *Scheiner*[139]) für photographische Messungen, deren Effekt in den relativen Koordinaten heller und schwacher Sterne bei horizontaler wie vertikaler Richtung auf $0''.4$ (7μ) stieg; beim Pulkowaer Vertikalkreise[140]) variierten die Unterschiede der Beobachter merklich für Fixsterne und die Sonne und hingen für letztere wieder von der Bildqualität ab. Eine von der Länge der Strecke abhängende Formel für den systematischen Fehler beim Schätzen ihres Halbierungspunktes stellt *Hartmann*[140a]) auf. Durch Anwendung eines *Reversionsprismas*[143]) oder im Falle photographischer Aufnahmen durch Drehung der Platte um 180^0 lassen sich diese Auffassungsunterschiede größtenteils beseitigen (vgl. auch Fußn. 105[b]).

Sehr bemerkbar macht sich der Einfluß des Beobachters bei *Positionswinkel- und Distanzmessungen am Refraktor*, indem hier gleichzeitig zwei Objekte mit zwei Fäden (Distanz) oder einem Faden (Positionswinkel) pointiert werden. Die Diskussion dieser Fehler ist besonders bei *Doppelsternmessungen* sehr schwierig, da sowohl Helligkeit, wie Abstand (von $0''.5$ bis zu $20''$ und mehr) der beiden Komponenten, Neigung ihrer Verbindungslinie gegen die Vertikale, Kopfhaltung des Beobachters usw. mitsprechen und nur zum Teil durch ein Reversionsprisma, das übrigens bei diesen Messungen bisher nur selten verwertet ist[140b]), ausgeglichen werden können. Die Untersuchung dieser Fehler, die wegen der sonstigen Schärfe der Messungen (s. Nr. 7) behufs Ableitung der Bahnbewegung durchaus erforderlich ist, ist bisher in größerem Umfange nur von *O. Struve*[141]) durch Beobachtung

---

139) *J. Scheiner*, Der große Sternhaufen im Hercules Messier 13 nach Aufnahmen am Potsdamer photographischen Refraktor, Berl. Abh. aus dem J. 1892, Berlin 1892.

140) *M. Nyrén*, Poulkova Obs. 14 (1888), p. (50) ff.

140[a]) *J. Hartmann*, Über die Ausmessung und Reduktion der photographischen Aufnahmen von Sternspektren, Astr. Nachr. 155 (1901), p. 96.

140[b]) Die Bedeutung des *Reversionsprismas*[143]) für die fadenmikrometrische Messung von Trabantendurchmessern (insbesondere zur Bestimmung ihrer Abplattung) betont *H. Seeliger*, Über die Gestalt des Planeten Uranus, München Ber. 1884, p. 267.

141) Vergl. *O. Struve*, Mesures micrométriques des étoiles doubles, Poulkova Obs. 9 (1878), §§ 4—8. — Die ersten Untersuchungen an künstlichen Sternen stellte schon *W. Struve*[74]), p. CXLII ff., in Dorpat an.

künstlicher Doppelsterne durchgeführt worden. Die Fehler sind recht bedeutend und übersteigen wesentlich den Fehler der einzelnen Messung; auch sind sie im Laufe der Jahre merklich veränderlich. Im allgemeinen begnügt man sich aber, die Messungen verschiedener Beobachter auf ein möglichst homogenes System nach Art systematischer Fehleruntersuchung zu beziehen. Auch bei größeren Koordinatendifferenzen treten diese Fehler auf. So fand sich zwischen den von *H. Struve* und *F. Renz* ausgeführten Anschlüssen der Saturnstrabanten Thetys und Rhea am Pulkowaer 30-Zöller[142]) ein konstanter Unterschied: $ds(R - S) = + 0''.22$. Zur Ermittlung seines eigenen, als konstant angenommenen Distanzfehlers bediente sich *H. Struve* der Ausmessung eines von mehreren, nahezu in gleichen Abständen befindlichen Sternen gebildeten Bogens im ganzen und in seinen einzelnen Unterabteilungen und fand dafür[142]), p. 8 aus 2 Reihen

$$\Delta S = - 0''.088 \pm 0''.012 \quad (35 \text{ Abende}),$$
$$= - 0''.126 \pm 0''.035 \quad (11 \text{ Abende}).$$

Die bei den *Heliometermessungen*, insbesondere dem durch kleine Drehungen im Positionswinkel erzeugten Durchschwingen zweier Sternbilder bei der Distanzmessung, auftretenden persönlichen Auffassungsunterschiede lassen sich, soweit sie von der Helligkeit der Objekte und der Schwingungsrichtung abhängen, durch Benutzung von Gitterblenden und Reversionsprisma[143]) beseitigen. Doch bleibt stets noch ein systematischer Messungsfehler individueller Natur meist in Abhängigkeit von der gemessenen Distanz selbst — wohl infolge der verschiedenen Krümmung des Schwingungsbogens — bestehen, dessen Studium direkt, wie oben, durch Messung eines Sternbogens und seiner Unterabteilungen erfolgen kann[144]). Im allgemeinen zieht

142) *H. Struve*, Beobachtungen der Saturnstrabanten, Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. 11 (1898), p. 64—65.

143) Ein solches Reversionsprisma beschreibt zuerst *D. Gill*, Lond. Astr. Soc. Mem. 46 (1881), p. 12—13 und betont seine Wichtigkeit für heliometrische Anschlüsse der Marsscheibe an Sterne. Später erwies sich die Notwendigkeit, Reversionsprisma, wie Gitterblende auch bei Sternanschlüssen anzuwenden (*D. Gill* and *W. Elkin*, Heliometer-determinations of stellar parallax in the southern hemisphere, Lond. Astr. Soc. Mem. 48 (1884), p. 190).

144) Vergl. über diese systematischen Fehler der Distanzmessungen an neueren Heliometern neben *D. Gill*[95]) besonders *W. Schur*, Astr. Nachr. 134 (1893), p. 65 und Astr. Nachr. 142 (1897), p. 225; *F. Cohn*, Astr. Nachr. 142 (1897), p. 193 und Astr. Nachr. 143 (1897), p. 45; *L. Ambronn*, Astr. Nachr. 145 (1897), p. 49; *B. Peter*, Astr. Nachr. 148 (1898), p. 81, wo solche Sternbogenmessungen diskutiert werden.

man es aber vor, die systematischen Distanzfehler im ganzen, ohne Rücksicht auf ihre individuelle oder instrumentelle Entstehung, durch Vergleichung mit entsprechenden Meridianbeobachtungen zu diskutieren, was dann ins Gebiet der systematischen Fehlervergleichung hineingehört; vgl. Nr. 7.

7. Die Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen. Die Genauigkeit der astronomischen Ortsbestimmung eines Gestirns hängt einmal ab von der Leistungsfähigkeit des Instruments, der Konstanz seiner Aufstellung, den Verhältnissen der äußeren Umgebung, kurz von den gesamten geometrischen und physikalisch-meteorologischen Beobachtungsbedingungen, sowie von der Schärfe unserer Sinne. Sie kann aber wesentlich gesteigert werden durch eine eingehende Kritik der allen diesen zusammenwirkenden Umständen anhaftenden Fehlerquellen; die Zuverlässigkeit der aus den Beobachtungen zu ziehenden Folgerungen wird vor allem durch die Vollständigkeit bedingt, mit der es gelingt, den Einfluß dieser Fehlerquellen auf die Resultate herabzumindern oder ganz zu eliminieren. Die diesbezüglichen Prinzipien gehören in die allgemeine *Theorie der Beobachtungsfehler* hinein, welche gerade im Bereich der astronomischen Messungen eine weit entwickelte Anwendung findet. Wir deuten hier nur die maßgebenden Gesichtspunkte an.

Zufällige und systematische Fehler. Bei allen empirischen Messungen ist der Einfluß der wirksamen Fehlerquellen auf das Resultat *zum Teil* mehr *zufälliger Natur;* er verfälscht dasselbe bald in diesem, bald in jenem Sinne und läßt sich durch Häufung der Beobachtungen merklich herabdrücken, wofür die Ausgleichungsrechnung in der *Methode der kleinsten Quadrate* eine zweckentsprechende Handhabe bietet. Weit gefährlicher sind diejenigen Fehlerquellen, welche das Resultat *systematisch,* d. h. stets in einer gewissen gesetzmäßigen Art verfälschen. Eine scharfe Grenze zwischen beiden Fehlerarten ist nicht vorhanden, indem manche Fehlerquelle je nach ihrem Einfluß auf die zu ziehenden Folgerungen bald als zufälliger, bald als systematischer Natur gelten kann, und es ist gerade die Hauptaufgabe eines geschickten Beobachters, *die eine Fehlerart in die andere überzuführen.* Oft gelingt es durch entsprechende *Anordnung der Beobachtungen,* den Einfluß einer systematischen Fehlerquelle auf das Ergebnis in einen zufälligen umzuwandeln. Eine fehlerhafte Bestimmung des *Kollimationsfehlers* bringt bei nicht umlegbaren Instrumenten einen systematischen Gang der beobachteten Rektaszensionen nach δ ($\Delta\alpha_\delta$) hervor[123a]), bei umlegbaren fällt sie im Mittel beider Lagen heraus. Bei unabhängigen (*fundamentalen*) *Ortsbestimmungen,* bei denen auf ein

möglichst fehlerfreies System der erhaltenen Sternörter der Hauptwert zu legen ist, wird daher eine möglichst weitgehende Variierung der Beobachtungsumstände geboten sein; bei *Anschlußbeobachtungen* wird man auf eine bis ins einzelne gehende differentielle Gestaltung dieses Anschlusses an ein gegebenes System Wert legen. So kann man sich bei Meridianbeobachtungen, da man gegenwärtig über hinreichend zuverlässige Fundamentalsysteme verfügt, durch Anlage in Form von sogenannten *Zonenbeobachtungen* oft einen großen Teil der Instrumentaluntersuchungen ersparen. Handelt es sich vorzugsweise um die Untersuchung *periodischer Ortsveränderungen*, reeller oder scheinbarer, wie z. B. bei der Bestimmung von Sternparallaxen, astronomischen Konstanten, der Polhöhenschwankung usw., so wird eine möglichst weitgehende *Gleichartigkeit* der Beobachtungsumstände in den verschiedenen Phasen der Ortsveränderung zu erstreben sein. Während dies hinsichtlich der mehr inneren, instrumentellen Einflüsse meist leicht durchzuführen ist, ist man bei den äußeren geometrisch-physikalischen Beobachtungsbedingungen an gegebene Verhältnisse gebunden, z. B. an einen bestimmten Stundenwinkel oder eine bestimmte Tageszeit oder an nicht zu beeinflussende meteorologische Zustände. Hier kann meistens nur eine *nachträgliche Diskussion* der Beobachtungen über das Auftreten systematischer Fehler Klarheit schaffen. Diese *Kritik der Beobachtungen* erweist sich stets, auch bei den einfachsten Ortsbestimmungen, als erforderlich. Trotz aller Sorgfalt des Beobachters bleibt neben den zufälligen Fehlern der Sternörter stets noch ein Rest übrig, der in ihnen einen Gang nach dieser oder jener Richtung hervorruft. Bei jeder Vergleichung zweier an verschiedenen Instrumenten oder von verschiedenen Beobachtern oder nach verschiedenen Methoden angestellten Reihen treten solche *gesetzmäßigen Unterschiede* hervor. Handelt es sich nur darum, eine Anzahl solcher gleichartiger Beobachtungsreihen zu einer möglichst homogenen Gesamtreihe zu vereinigen, so hat man nur die systematischen Unterschiede der Teilreihen in eine gesetzmäßige Form zu bringen und alle Reihen auf ein gewisses *mittleres System* zu beziehen, dessen eigene Fehler unbestimmt bleiben. Wählen wir die *Meridianbeobachtungen* als Beispiel einer solchen Untersuchung, so handelt es sich da um die Vereinigung einer Reihe von Sternkatalogen zu einem *Normalkatalog*. Den Anfang bildet die Ableitung ihrer systematischen Unterschiede, wobei man, da diese Ableitung durch erhebliche zufällige Fehler sehr erschwert werden würde, eine möglichst zuverlässige und homogene Reihe als *Bezugssystem* zugrunde legt. Die Unterschiede werden nach den Koordinaten und der Helligkeit an-

geordnet und in mehrfacher Näherung zur Interpolation geeignete Formeln für $\Delta\alpha_\alpha$, $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\alpha$, $\Delta\delta_\delta$[144a]) und die Helligkeitskorrektion abgeleitet. Die nach Anbringung dieser Korrektionen verbleibenden Unterschiede sind als zufällige Fehler aufzufassen, aus ihnen — wiederum in mehrfacher Näherung, sobald man nicht über eine wesentlich überwiegende Reihe verfügt — das Gewicht einer jeden Reihe abzuleiten und die korrigierten Werte nach Maßgabe dieser Gewichte in einen Mittelwert zusammenzuziehen. Die Festlegung des Bezugssystems selbst — sofern es überhaupt eine Rolle spielt — erfolgt dann dadurch, daß man aus den systematischen Abweichungen der stimmfähigen Einzelsysteme vom Bezugssystem ein *Normalsystem* ableitet, auf welches schließlich jene Mittelwerte bezogen werden. In dieser Weise sind z. B. die *Auwers*schen *Reduktions- und Gewichtstafeln für Sternkataloge* und schließlich sein neuer Fundamentalkatalog entstanden[145]).

Weit schwieriger und wesentlicher ist die Diskussion der systematischen Fehler, wenn der Zweck einer Untersuchung nur aus der Vergleichung zweier Messungsreihen und der Diskussion ihrer Unterschiede, die sonach vorher von allen Fehlerquellen befreit sein müssen, erreicht werden kann, wie z. B. wenn man aus der *parallaktischen Ortsverschiebung eines uns nahen Gestirns*, von zwei entfernten Erdorten aus gesehen, seine Entfernung ableiten will. In diesem Falle kompliziert sich die Untersuchung noch besonders dadurch, daß infolge der schnellen Ortsveränderung des Gestirns die ganze Theorie seiner Bewegung in Form zuverlässiger Ephemeriden bekannt sein oder ebenfalls aus den Beobachtungen noch abgeleitet werden muß. Ein hervor-

144a) Vgl. Fußn. 123a). Die Anordnung der Unterschiede, die an sich Funktionen beider Argumente α, δ sind und daher eigentlich in einer *Tafel mit doppeltem Eingang* erfolgen müßte, in dieser einfacheren Form ist ein Notbehelf, dessen Berechtigung nicht immer ohne weiteres angenommen werden darf, sondern wenigstens bei Fundamentalkatalogen erst nachgewiesen werden müßte. Siehe *H. Seeliger*, München Sternw. Ann.[1]) 1 (1890), p. XXVIII.

145) *A. Auwers*, Tafeln zur Reduktion von Sternkatalogen auf das System des Fundamentalkatalogs der A. G., Astr. Nachr. 134 (1893), p. 33; Astr. Nachr. 143 (1897), p. 65; Astr. Nachr. 145 (1897), p. 101; Astr. Nachr. 162 (1903), p. 357; *A. Auwers*, Tafeln zur Reduktion von Sternkatalogen auf das System des Fundamentalkatalogs des Berliner Jahrbuchs, Astronomische Abhandlungen, als Ergänzungshefte zu den Astr. Nachr. hrsg. von *H. Kreutz*, Nr. 7, Kiel 1904; *A. Auwers*, Gewichtstafeln für Sternkataloge, Astr. Nachr. 151 (1900), p. 225 und Astr. Nachr. 162 (1903), p. 357; *A. Auwers*, Ergebnisse der Beobachtungen 1750—1900 für die Verbesserung des Fundamentalkatalogs des Berliner Jahrbuchs, Astr. Nachr. 164 (1904), p. 225; vgl. auch *F. Cohn*, Definitive Bearbeitung der Rektaszensionen der Eros-Vergleichssterne (1900—01), Astr. Nachr. 170 (1905), p. 33.

ragendes Beispiel einer planmäßig durchgeführten Bearbeitung eines solchen umfangreichen Materials bietet die Diskussion der anläßlich der Opposition der Planeten Iris, Viktoria und Sappho (1888—89) zur *Bestimmung der Sonnenparallaxe* angestellten Beobachtungen[95]) (s. a. Nr. 8). Insbesondere ermöglichte es hier das Zusammenwirken verschiedener Instrumente (Heliometer, Meridiankreis), durch Vergleichung der beiderseitig für einen bestimmten Sternkomplex erhaltenen Örter sowohl die Helligkeitsgleichung der Meridianbeobachtungen wie die von der Größe der gemessenen Distanz abhängigen Fehler der Heliometermessungen abzuleiten. Am wichtigsten aber ist eine eingehende Kritik bei den p. 266 erwähnten Beobachtungen *periodischer Ortsveränderungen*, wo zahlreiche Fehlerquellen täglicher und jährlicher Periode die Ergebnisse zu verfälschen geeignet sind. So gehört die kritische Diskussion der Beobachtungen und ihre Befreiung von den ihnen anhaftenden Fehlerquellen zu den schwierigsten Kapiteln der Fehlertheorie.

Die Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen. Will man einen Maßstab für die Genauigkeit der astronomischen Ortsbestimmung gewinnen, so muß man nach dem Obigen wesentlich unterscheiden zwischen der *inneren Übereinstimmung*, welche durch die mehr zufälligen Beobachtungsfehler gestört wird, und die tatsächlich erzielte, gewissermaßen *absolute Genauigkeit*, die im wesentlichen von der Vollständigkeit abhängt, mit der die Elimination der systematischen Fehler im einzelnen gelungen ist. Die innere Übereinstimmung wird im allgemeinen nur ein unsicheres Bild der tatsächlich erzielten Genauigkeit geben und ein entscheidendes Kriterium nur durch *Vergleichung* mehrerer *ganz unabhängiger Beobachtungsreihen* und ihrer Ergebnisse erlangt werden können.

Die Leistungen der astronomischen Instrumente bewegen sich seit den Zeiten, da das Fernrohr in ihren Dienst gestellt wurde, besonders aber im letzten Jahrhundert, in schnell aufsteigender Linie. Waren noch zu den Zeiten *J. Flamsteeds* die ganzen Sekunden lediglich Rechnungsgrößen, so erlangte durch *J. Bradley* und *T. Mayer* die Bogensekunde volles Bürgerrecht, und heutzutage sind wir berechtigt, bei den feinsten Untersuchungen die $0^s.001$ und $0''.01$ mitzunehmen. Diese *Steigerung der Genauigkeit*, die sich ganz besonders bei den Meridianbeobachtungen zeigt, beruht sowohl auf der größeren Leistungsfähigkeit der Instrumente, wie auf der gerade dadurch ermöglichten schärferen Untersuchung ihrer Fehler. Ferner spielt die bessere Kenntnis der zur Reduktion erforderlichen astronomischen Konstanten — sowohl der eigentlichen Konstanten, wie auch z. B. der Örter einer

größeren Zahl von Fundamentalsternen — eine wichtige Rolle[146]). Nicht zum wenigsten sind auch die strengeren Anforderungen, welche die fortschreitende Theorie der Bewegungen der Himmelskörper an die Praxis stellt, hierbei zu nennen. Denn erst die Möglichkeit, die erhöhte Genauigkeit in der Beobachtung eines Vorganges auch verwertet zu sehen, bietet einen Antrieb, sie aufs höchste zu steigern.

Ein wesentliches und zugleich unübersteigliches Hindernis für eine weitere Vervollkommnung der astronomischen Beobachtungsergebnisse verursacht die *irdische Atmosphäre*, sowohl durch die Verwaschenheit, als vor allem durch die *Unruhe der Bilder*, deren Einfluß sich bei der steigenden Exaktheit der Instrumente mehr und mehr geltend macht. Oft ist eine scharfe Pointierung der Sternbilder ganz unmöglich, da sie bald Sprünge von 10″ und mehr ausführen, bald langsamen aber darum noch gefährlicheren Wallungen unterliegen, bald auseinanderfließen oder zerspringen usw. So muß man die Genauigkeit aller feineren astronomischen Beobachtungen in ihrer *Abhängigkeit vom Luftzustande* untersuchen.

Die **Leistungen der astronomischen Instrumente** mögen durch einige Zahlenangaben veranschaulicht werden, zu deren Ergänzung die früher für die Schärfe einzelner Messungsvorgänge an Hilfsinstrumenten usw. gegebenen Zahlen dienen können.

a) **Meridianbeobachtungen.**

Für einige der namhaftesten Sternkataloge aus der Zeit seit 1750 sei hier der **zufällige mittlere Fehler ε_1 der einzelnen Beobachtung**, wie er **aus der inneren Übereinstimmung** gefolgert ist (*„innere Genauigkeit"*), zusammengestellt, und schon dadurch die Steigerung der Leistungen veranschaulicht. Zugleich ist in einigen Fällen auf einige für die Genauigkeit wesentliche Einflüsse hingewiesen.

Greenwich, Passageninstrument und Mauerquadrant von *Bird*, Epoche 1755, Beobachter *Bradley*, red. von *A. Auwers*[146]), meist nur ein Faden und Teilstrich):

$$\varepsilon_1(\alpha) = \pm\sqrt{(0^s.160)^2 + (0^s.083 \sec\delta)^2},$$

$$\varepsilon_1(\delta) = \pm\sqrt{1.36 + 0.085\,\mathrm{tg}^2 z''}$$ der reine zufällige Beobachtungsfehler;

$$= \pm\sqrt{1.92 + 0.085\,\mathrm{tg}^2 z''}$$ inkl. Teilungsfehler.

---

146) Aus diesem Grunde werden jetzt nachträglich zahlreiche ältere Beobachtungsreihen einer Neureduktion unterzogen. So berechnet *A. Auwers* das Gewichtsverhältnis seiner „Neuen Reduktion der *Bradley*schen Beobachtungen" 3, St. Petersburg 1888, p. 19—21 zu den „Fundamenta astronomiae" *Bessels* (*Bessel*, Fund.) in α wie 1.75 : 1, in δ wie 1.4 : 1, und in anderen Fällen wird die Gewichtszunahme noch größer sein.

Dorpat, *Reichenbach*scher Meridiankreis[147]), Epoche 1830, 3 Beobachter *S* (*W. Struve*), *P* (*Preuß*), *D* (*Döllen*):

δ von	bis	$\varepsilon_1(\alpha)$ *S*	*P*	*D*	δ von	bis	$\varepsilon_1(\delta)$ *S*	*P*	*D*
−15°	+45°	±0ˢ.08	±ˢ.10	±ˢ.12	−15°	0°	±1″.1	±1″.4	±1″.8
+45	60	.10	.15	.15	0	+20	1 .0	1 .2	1 .6
60	65	.12	.17	.14	+20	40	0 .9	1 .1	1 .6
65	70	.14	.16	.19	40	60	0 .8	1 .1	1 .5
70	75	.19	.22	.26	60	90	0 .9	1 .0	1 .3
75	80	.24	.29	.17					
80	85	.39	.63	.45					

Pulkowa, Großes Passageninstrument von *Ertel*[148]):

δ von	bis	$\varepsilon_1(\alpha)$, Pulkowa 1845 Auge und Ohr	$\varepsilon_1(\alpha)$, Pulkowa 1865 Auge und Ohr	Registriert
0°	+30°	±0ˢ.063	±0ˢ.061	±0ˢ.038
+60	70	±0 .093	±0 .091	±0 .059

Sehr ähnliche Zahlen gibt der Katalog für 1885, p. [68].

Berlin, Großer Meridiankreis von *Pistor* und *Martins*[149]) (8 Zoll):

Beobachter	Epoche	δ von	bis	Sterngröße von	bis	$\varepsilon_1(\alpha)$	$\varepsilon_1(\delta)$
Becker.....	1875	+20°	+25°	6ᵐ.0	9ᵐ.2	±0ˢ.030	±0″.43
Küstner.....	1885	0	25	4 .5	9 .5	±0 .033	±0 .40
Battermann .	1895	10	25	5 .0	9 .2	±0 .024 sec δ	±0 .30
				9 .3	9 .9	±0 .037 sec δ	±0 .38

Bonn, *Repsold*scher Meridiankreis (6 Zoll), Epoche 1900, Beobachter *Küstner*[15]):

δ von	bis	$\varepsilon_1(\alpha)$	$\varepsilon_1(\delta)$
0°	+18°	±0ˢ.036	±0″.49
+18	36	±0 .032	±0 .41
36	51	±0 .037	±0 .39

147) *F. G. W. Struve*, Stellarum fixarum positiones mediae, Petropoli 1852, p. LXXIII etc.

148) Die drei Pulkowaer Fundamentalkataloge, sowie die im Text gegebenen Werte von $\varepsilon_1(\alpha)$ siehe Poulkova Obs. 3 (1870), p. (69). (70) [Äquinox 1845.0]; Poulkova Obs. 12 (1887), p. (43) [Äquinox 1865.0] und Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. 3 (1905), p. [68] [Äquinox 1885.0].

149) *E. Becker*, Catalog der Astronomischen Gesellschaft, 1. Abteilung, zehntes Stück, Berliner Zone, Leipzig 1895, p. 9; *F. Küstner*, Berlin Sternw. Ergebn. Heft 2 (1887); *H. Battermann*, Berlin Sternw. Ergebn. Heft 8 (1899).

Den durch **Einführung des Repsoldschen Mikrometers** erzielten Fortschritt veranschaulichen die folgenden Zahlen:

München, neuer *Repsold*scher Meridiankreis (6 Zoll); Beobachter *Oertel*[150]), ohne Uhrwerk, nur helle Sterne:

$$\varepsilon_1(\alpha) = \pm\, 0^s.024 \sec \delta,$$

Königsberg, alter *Repsold*scher Meridiankreis (4 Zoll); Beobachter *F. Cohn*[151]), mit Uhrwerk:

Sterngröße von	bis	$\varepsilon_1(\alpha)$
$5^m.0$	$8^m.5$	$\pm\, 0^s.017 \sec \delta$
$8^m.6$	$9^m.0$	$\pm\, 0^s.019 \sec \delta$

Die Abnahme der inneren Genauigkeit von Deklinationsbeobachtungen mit der wachsenden Zenitdistanz (z), infolge der zunehmenden Luftunruhe (σ) und Refraktionsanomalien (ϱ), spricht sich in den folgenden Zahlen für den Pulkowaer Vertikalkreis[152]) aus:

Pulkowa 1845		Pulkowa 1865		Pulkowa 1885			
z	$\varepsilon(\delta)$	z	$\varepsilon(\delta)$	z	$\varepsilon(\delta)$	σ	ϱ
10^0	$\pm 0''.36$	$7\frac{1}{2}^0$	$\pm 0''.33$	$7\frac{1}{2}^0$			
20	± 0 .38	15	± 0 .32	15	$\pm 0''.26$	$\pm 0''.30$	$\pm 0''.05$
30	± 0 .39	25	± 0 .32	25	± 0 .28		
40	± 0 .44	35	± 0 .38	35	± 0 .29	± 0 .30	± 0 .10
50	± 0 .50	45	± 0 .40	45	± 0 .33	± 0 .33	± 0 .14
60	± 0 .63	55	± 0 .44	55	± 0 .39	± 0 .35	± 0 .20
70	± 0 .86	65	± 0 .65	65	± 0 .49	± 0 .35	± 0 .27
75	± 1 .07	$72\frac{1}{2}$	± 0 .94	$72\frac{1}{2}$	± 0 .59	± 0 .45	± 0 .38
		$77\frac{1}{2}$	± 0 .85	$77\frac{1}{2}$	± 0 .83	± 0 .56	± 0 .62

$\varepsilon(\delta)$ ist hier der m. F. einer auf *je zwei* Einzeleinstellungen in beiden Lagen beruhenden Deklination, σ der reine Einstellungsfehler, ϱ der Refraktionsfehler, wozu als konstanter Rest $\gamma = \pm\, 0''.15$ noch die zufälligen Teilungsfehler usw. hinzukommen.

150) *K. Oertel*, Über das *Repsold*sche unpersönliche Registriermikrometer, Astr. Nachr. 165 (1904), p. 81.

151) *F. Cohn*, Die Rektaszensionen der Eros-Vergleichssterne, Königsb. Beob. 41 (1903), p. 112.

152) Enthalten in Poulkova Obs. 5 (1873), Poulkova Obs. 14 (1888) und Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. 2 (1896).

Analog findet *Bauschinger*[15]) bis $z = 85^0$:

$$\varepsilon_1 = \pm\sqrt{(0''.32)^2 + (0''.23 \operatorname{tg} z)^2},$$

über $z = 85^0$ steigt der letzte Koeffizient auf 0″.28. Hinzu kommt noch der Effekt der nicht angebrachten Teilungsfehler mit $\pm$ 0″.23.

Die **tatsächlich erzielte Genauigkeit** der genannten und einiger anderer Kataloge veranschaulicht **nach *Auwers'* Gewichtstafeln**[145]), die allerdings eigentlich nur für die helleren Sterne maßgebend sind — für die schwächeren dürften die Fehler etwas größer sein —, die nebenstehende Zusammenstellung.

Diese Zusammenstellung zeigt die rasche Zunahme der Genauigkeit während der letzten $1^1/_2$ Jahrhunderte. Besonders in α tritt um 1860 bei Greenwich und Pulkowa ein Sprung durch den Übergang zur Registriermethode ein, wozu bei Greenwich noch die Anwendung eines neuen Meridiankreises seit 1850 hinzukommt. Die drei Berliner Reihen sind angestellt von *Becker*, *Küstner* und *Battermann*, bei der mittleren bezieht sich a auf Anhalt-, b auf Anschlußsterne. München 1900 ist die erste Reihe mit

Zusammenstellung der mittleren Fehler $\varepsilon(\alpha) \cdot \cos\delta$ und $\varepsilon(\delta)$ einer auf n Beobachtungen beruhenden Position:

	n	*Bradley*	*T. Mayer*	Dorpat	Åbo	Greenwich				Pulkowa			Berlin				Lick	Bonn	München	Königsberg
		1755	1755	1830	1830	1830	1840/45	1860/64	1880/90	1845	1865	1885	1875	1889 a	1889 b	1905	1895	1900	1900	1900
1	20	0″.16	0″.22	0″.086	0″.060	0″.14	0″.12	0″.070	0″.054	0″.060	0″.041	0″.037	0″.031	0″.026	0″.033	0″.031	0″.049	0″.034	0″.049	0″.019
2	10	.12	.19	.070	.046	.12	.09	.049	.037	.043	.029	—	.024	.019	.026	.023	.037	.025	.036	.014
5	5	.07	.14	.046	.032	.07	.05	.032	.025	.029	.021	—	.016	.014	.019	.016	.024	.017	.023	.010
10	2	.05	.13	.034	.026	.06	.04	.024	.019	.022	.016	—	—	.012	.016	.012	.017	.013	.017	—
20	1	.04	.13	.028	.022	.05	.03	.019	.015	.017	.013	.011	—	.011	—	.010	.013	.011	.013	—
1	20	1″.3	2″.0	0″.89	0″.89	1″.5	1″.25	0″.89	0″.72	0″.41	0″.45	0″.41	0″.48	0″.30	0″.39	0″.39	0″.48	0″.39	0″.56	—
2	10	0.9	1.5	.72	.72	—	0.89	.63	.56	.32	.33	.32	.35	.23	.31	.30	.35	.31	.39	—
5	5	0.7	1.3	.51	.48	—	.51	.39	.36	.23	.23	.22	.24	.19	.23	.21	.23	.23	.31	—
10	2	0.6	0.9	.39	.36	0.48	.39	.31	.28	.20	.19	.18	—	.17	.19	.17	.19	.19	.26	—
20	1	0.5	—	.34	.30	0.36	.31	.26	.23	.16	.16	.15	—	.16	—	.15	.16	.17	.23	—

*Repsold*schem Mikrometer[150]). Königsberg 1900 ist die Uhrwerk-Mikrometerreihe von *F. Cohn*[152a]).

Die **Genauigkeit, mit der wir einen Sternort für eine bestimmte Zeit berechnen können,** hängt, da es sich zugleich um die Kenntnis der als linear angesehenen Eigenbewegung handelt, von der Anzahl und dem Gewicht der vorhandenen Beobachtungen, sowie von ihrer Verteilung über einen möglichst weiten Zeitraum ab. Für die bestbestimmten, die Fundamentalsterne, wird man gegenwärtig ihren Ort (innerhalb des Systems) mit einem mittleren Fehler von höchstens $\pm$ 0″.1 angeben können. Ferner wird man nach dem Obigen von einer guten Meridianbeobachtung verlangen müssen, daß ihr mittlerer Fehler innerhalb ihres Systems $\pm$ 0″.5 nicht erheblich überschreite.

b) **Visuelle Refraktorbeobachtungen.**

Für die üblichen mikrometrischen Anschlüsse am Refraktor fehlt es an zuverlässigen Genauigkeitsangaben, da die Beobachtungen der Kometen und kleinen Planeten, teils wegen der unsicheren Auffassung und der nicht hinreichend zu eliminierenden Bewegung des Objekts, teils wegen der Ungenauigkeit in den Örtern der Anhaltsterne ein zu ungünstiges Bild geben würden. Die tatsächliche **Leistungsfähigkeit bei scharf beobachtbaren, nicht zu schwachen Objekten** ist wesentlich höher. Am 30zölligen Refraktor der Pulkowaer Sternwarte erhielt *H. Struve*[152b]) bei 515facher Vergrößerung für den **mittleren inneren Fehler eines auf je 8 Einzeleinstellungen** (je zwei vor und nach Durchschrauben und geänderter Koinzidenz) **beruhenden mikrometrischen Anschlusses** in relativen Polar- resp. rechtwinkligen Koordinaten (s, p oder x, y) *aus der inneren Übereinstimmung* der beiden Einzelsätze:

Tethys-Rhea	1888	$\varepsilon_s = \pm 0^s.063$	$s \cdot \varepsilon_p = \pm 0''.062$
Enceladus-Tethys	1888	± 0 .071	± 0 .066
Mimas	1890	± 0 .093	± 0 .096
Hyperion-Titan	1888—89	± 0 .126	± 0 .134
Hyperion-Saturn	1889	± 0 .225	± 0 .185
Rhea-Saturn	1890	$\varepsilon_x = \pm 0$ .090	$\varepsilon_y = \pm 0$ .074

Er bemerkt dazu, daß die geringere Güte der Beobachtungen von Hyperion hauptsächlich auf die Anwendung heller Fäden zurückzuführen sei, sowie daß die mittleren Fehler seiner besten früheren Beobachtungen am 15-Zöller doppelt so groß gewesen seien.

Die **tatsächlich erzielte Genauigkeit** kann man nur vermischt mit

152a) *F. Cohn*, Astr. Nachr. 170 (1905), p. 43—44.
152b) *H. Struve*[142]), p. 18.

den nach der Ausgleichung verbliebenen, allerdings wohl geringfügigen Fehlern der Bahnbestimmung aus der folgenden Darstellung[152c]) ersehen:

Mittlerer Fehler einer vollständigen Messung einer Koordinatendifferenz:

H. Struve Pulkowa	Tethys-Rhea ε	Enceladus-Tethys ε	Dione-Rhea ε
1886	$\pm$ 0″.084	$\pm$ 0″.077	—
1887	0 .089	0 .093	—
1888	0 .089	0 .096	$\pm$ 0″.099
1889	0 .096	0 .101	$\pm$ 0 .117
1890	0 .104	0 .122	$\pm$ 0 .105
1891	0 .104	0 .107	$\pm$ 0 .107
1892	0 .099	0 .116	$\pm$ 0 .086

Die Abnahme der Genauigkeit mit den Jahren geht auf den niedrigeren Stand des Saturn, sowie auf die allmähliche Zusammenziehung des Ringes zurück, welche die Messungen erschwerte. Unter günstigen Verhältnissen beträgt also der mittlere Fehler einer vollständigen Messung nur $\pm$ 0″.09.

Bei den Erosbeobachtungen am 13zölligen Königsberger Refraktor erhielt *H. Struve*[153]) als mittleren Fehler ε einer vollständigen, auf 8 Einzeleinstellungen beruhenden Koordinatenmessung bei 200facher Vergrößerung und dunkeln Fäden $\varepsilon = \pm$ 0″.132, bei hellen Fäden $\varepsilon = \pm$ 0″.171.

Für die Doppelsternmessungen stellen wir die Genauigkeitsangaben, welche *W. Struve* am Dorpater 9zölligen, *O. Struve* am Pulkowaer 15zölligen und *H. Struve* am 30zölligen Refraktor aus ihren Beobachtungen ableiten, zusammen[154]):

Abstand	*W. Struve*		*O. Struve*		*H. Struve*	
	ε_s	$s \cdot \varepsilon_p$	ε_s	$s \cdot \varepsilon_p$	ε_s	$s \cdot \varepsilon_p$
$<$ 1″	$\pm$ 0″.12	$\pm$ 0″.05	$\pm$ 0″.07	$\pm$ 0″.05	$\pm$ 0″.08	$\pm$ 0″.02
1″—2″	.15	.08	.12	.08	.11	.05
2—4	.17	.12	.13	.12	.11	.07
4—8	.22	.18	.14	.18	.10	.08
8—12	.27	.20	.20	.26	.11	.08
12—16	.28	.22	.20	.26		
16—24	.29	.23	.19	.21	.13	.11
24—32	.30	.30	.18	.24		

152c) *H. Struve*[142]), p. 65.

153) *H. Struve*, Mikrometermessungen von Eros, Königsb. Beob. 41 (1903), p. 12.

154) Für die ersten beiden nach *O. Struve*[141]), p. 152, für die letzten nach *H. Struve*, Mikrometermessungen von Doppelsternen, Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. 12 (1901), p. 3.

W. Struves Werte beruhen auf 2 *s*- und 2 *p*-Messungen, *O. Struves* auf 4 *s*- und 3 *p*-, *H. Struves* auf je 4 Messungen in beiden Koordinaten.

c) Die **Leistungsfähigkeit des Heliometers** bei der Messung von Distanzen läßt sich am besten veranschaulichen durch die Vergleichung der Ergebnisse der heliometrischen Triangulation der Victoria-Vergleichsterne mit den Meridianbeobachtungen[95]). Jede Distanzmessung beruhte auf dem Mittel von 4 Einstellungen und war in strengem Anschluß an eine Normaldistanz zweier „Standard stars" abgeleitet; die mittleren Fehler enthalten also auch den Fehler der Normaldistanzmessung in sich, sind dafür aber von der Unsicherheit des anzuwendenden Skalenwerts unabhängig. Die Zusammenstellung gibt den *zufälligen* **mittleren Fehler** ε_1 (*aus der inneren Übereinstimmung*), den *tatsächlichen mittleren Fehler* ε und den *systematischen* c (aus der Vergleichung mit den Meridianbeobachtungen)[154a]) **einer Distanzmessung:**

Cape (190^{mm} Öffnung)

Distanz	*Gill*				*Finlay*		
	ε_1		ε	c	ε_1	ε	c
	m m 6.8—7.8	m m 7.9—8.5					
1000″	± 0″.10	± 0″.11	± 0″.13	+ 0″.03	± 0″.13	± 0″.15	+ 0″.07
2000″	.12	.14	.16	+ .01	.16	.18	.00
3000″	.14	.17	.19	+ .01	.18	.22	— .04
4000″	.17	.20	.22	+ .01	.20	.25	.00
5000″	.18	.22	.24	— .06	.23	.28	— .05
6000″	.20	.24	.26	— .04	.25	.31	— .13
7000″	.21	.26	.28	.00	.28	.34	— .12

Yale (151^{mm} Öffnung)

Distanz	*Chase*				*Jacoby*		
	ε_1		ε	c	ε_1	ε	c
	m m 6.8—8.2	m m 8.3—8.5					
1000″	± 0″.22	± 0″.32	± 0″.31	+ 0″.14	—	± 0″.24	+ 0″.18
2000″	.25	.35	.32	+ .08	—	.27	+ .13
3000″	.28	.39	.34	+ .08	—	.32	+ .13
4000″	.30	.42	.36	— .01	—	.38	.00
5000″	.33	.44	.38	— .10	—	.45	— .15
6000″	.35	.45	.41	— .18	—	.51	— .21
7000″	.36	.47	.44	— .08	—	.54	— .12

154a) Siehe *D. Gill* etc.[95]), Cape Obs. Ann. 6 (1897), p. 113 und p. 230 bis 231.

Göttingen (162^{mm} Öffnung)

Distanz	*Schur*			*Ambronn*		
	ε_1	ε	c	ε_1	ε_1	c
1000″	± 0.18″	± 0″.19	+ 0″.20	wie *Schur*	± 0″.21	+ 0″.14
2000″	.22	.23	+ .03		.25	+ .02
3000″	.25	.28	+ .09		.30	— .11
4000″	.29	.32	— .08		.34	— .11
5000″	.31	.39	— .01		.38	— .15
6000″	.33	.42	— .12		.42	— .22
7000″	.35	.44	— .07		.44	— .21

Durchschnittlich wird man den mittleren Fehler einer solchen Distanzmessung an den größeren Heliometern bei mittleren Distanzen zu ± 0″.25 veranschlagen können. Vgl. auch Nr. 8.

Eine wesentlich größere Genauigkeit liefert das Heliometer bei der Messung von Distanzdifferenzen, wie sie zur Bestimmung von Sternparallaxen ihre klassische Anwendung gefunden haben. So betrug der

Mittlere Fehler ε einer Distanzdifferenz:

Beobachter	Heliometer	Öffnung	ε
Gill[155])	Cape, altes	4 Zoll	± 0″.19
Gill	Cape, neues	8 „	± 0 .11
Peter[26])	Leipzig	6 „	± 0 .14

d) **Photographische Beobachtungen.**

Zur Charakterisierung der Genauigkeit der photographischen Ortsbestimmung gibt *Thiele*[156]) für den *mittleren Fehler einer Distanzmessung*, aufgenommen am Pariser photographischen Refraktor, folgende Daten an: Der allein von den zufälligen Messungsfehlern herrührende Teil ε_e beträgt in Bogensekunden:

$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{s}{n \cdot 1000''}\,(0.0216 + 0.0019\,(d - 5''.5))},$$

worin s die Distanz, d den Sternscheibchendurchmesser in Bogensekunden, n die Zahl der Einstellungen bedeutet. Für $s = 1000''$, $d = 5''.5$, $n = 3$ wird $\varepsilon_e = \pm\ 0''.086$. Als konstanten, von der

155) *D. Gill*, Researches on stellar parallax made with the Cape heliometer, Cape Obs. Ann. 8, part 2 (1900), p. 138B.

156) *T. N. Thiele*, Note sur l'application de la photographie aux mesures micrométriques des étoiles, Comité carte du ciel bull.[61]) 1, Paris 1887, p. 51.

Deformation der Sternscheibchen herrührenden Betrag ε_c findet er: $\varepsilon_c = \pm 0''.092$, und von der Schichtverziehung herrührend: $\varepsilon_s = \pm 0''.098$, so daß ein *Gesamtfehler von* $\pm 0''.15$ resultiert, der durch keine Vermehrung der Messungen auf ein und derselben Platte erniedrigt werden kann. Ganz ähnliche Zahlen findet *Wilsing*[157]): $\pm 0''.098$, $\pm 0''.102$, $\pm 0''.105$, *insgesamt* $\pm 0''.18$.

Größer sind die Fehler bei den rechtwinkligen Koordinaten der Aufnahmen der photographischen Himmelskarte. So findet *Scheiner*[158]) im Durchschnitt zweier Beobachter für den mittleren Fehler einer zweimaligen Pointierung auf die Sternbilder $\pm 0''.091$[159]), der Gitterstriche $\pm 0''.042$, woraus als mittlerer Fehler einer Koordinate $\pm 0''.10$ folgt. Die Vergleichung beider Beobachter liefert hingegen hierfür den Wert $\pm 0''.15$, welcher durch die verschiedene Auffassung der Sternscheibchen und Gitterstriche zu erklären ist. Mit Einrechnung des konstanten Plattenfehlers folgt als *mittlerer Fehler der* auf die Plattenmitte bezogenen *rechtwinkligen Koordinaten* $\pm 0''.19$. Hingegen ergibt die Vergleichung derselben Sternörter aus zwei verschiedenen Platten $\pm 0''.24$. Genau denselben Wert findet *M. Loewy* für die Örter der Pariser Zone der photographischen Himmelskarte[160]). Diese starke Steigerung beruht zweifellos auf systematischen Fehlerquellen, deren Studium daher auch für die photographischen Aufnahmen dringend notwendig ist (vgl. p. 247—250). Vorderhand wird sich über die Zuverlässigkeit der photographischen Festlegung der Sternörter und damit ihre Verwertbarkeit für die astronomische Koordinatenbestimmung kaum ein abschließendes Urteil fällen lassen. Die durch die obigen Zahlen dargestellte Genauigkeit steht hinter guten Fadenmikrometermessungen weit zurück und übertrifft auch die an Meridiankreisen erzielte Genauigkeit nicht sehr erheblich. Doch ist zu erwarten, daß sie unter günstigen Verhältnissen und bei strenger Kritik der Fehlerquellen noch ganz bedeutend gesteigert werden kann. Eine Aussicht darauf eröffnet die weit größere Genauigkeit, die in der relativen Koordinatenfestlegung — ähnlich wie beim Heliometer — z. B. durch

---

157) *J. Wilsing*, Über die Genauigkeit photographischer Messungen, Astr. Nachr. 141 (1896), p. 89.

158) *J. Scheiner*, Photographische Himmelskarte[62b]), p. XX—XXIII.

159) Für die achtmalige Pointierung eines einzelnen Sternbildes findet *J. C. Kapteyn*, The parallax of 248 stars, Groningen Labor. Publ., Heft Nr. 1, Groningen 1900, p. 33, einen mittleren Fehler von $\pm 0''.120$.

160) Observatoire de Paris, Catalogue photographique du ciel, coordonnées rectilignes 1, Paris 1902, p. [7]; vgl. auch Conf. astrophot 1900[105b]) Circulaires 8 et 9, Paris 1901 et 1902.

Anschluß eines Sterns an günstig ausgewählte Vergleichssterne und möglichste Gleichartigkeit der Beobachtungsumstände bei der Parallaxenbestimmung (s. auch Nr. 8) erzielt worden ist. So findet *F. Schlesinger*[161]) als *mittleren Fehler* einer solchen Ortsbestimmung am 40-Zöller der Yerkes-Sternwarte $\varepsilon = \pm 0''.045$ und *A. R. Hinks* und *H. N. Russell*[162]) erhalten aus 10 Sternen, die auf Parallaxe untersucht und an 6—9 Vergleichsterne auf 5—8 Platten angeschlossen sind, im Mittel $\varepsilon = \pm 0''.065$.

Ähnliche Erfolge erzielt *J. C. Kapteyn*[159]) bei seiner Methode, Parallaxen und Eigenbewegungen aus ganz geringen Koordinatendifferenzen abzuleiten (s. Nr. 8).

---

e) Erwähnt sei endlich noch die hervorragende Genauigkeit, welche bei den Beobachtungen nach der **Talcott-Horrebow-Methode** (vgl. p. 105 und p. 220) mit verhältnismäßig kleinen Instrumenten — vier der Zenitteleskope der internationalen Breitenstationen haben eine Öffnung von 108 mm, eins von 81 mm, eins nur von 68 mm, die Vergrößerung ist rund 100fach — erzielt wird. Von den Ergebnissen, bezüglich deren im einzelnen auf die umfangreichen Publikationen des „Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung“[163]) verwiesen werden muß, sei hier nur erwähnt, daß sich der *zufällige mittlere Fehler eines Sternpaares* im Mittel der 6 Stationen zu $\pm 0''.16$ ($= \pm 0.9\,\mu$) ergeben hat; dazu kommt allerdings noch ein systematischer Stationsfehler hinzu, der individueller[163a]) oder instrumenteller Natur sein, vor allem aber von Refraktionsanomalien herrühren kann. Die zahlreichen Beobachtungen haben die *momentane Polhöhe* mit einem mittleren Fehler von *wenigen* $0''.01$ an jedem der 6 Orte bestimmen lassen, so daß

---

161) *F. Schlesinger*, On the stellar parallax plates taken with the Yerkes telescope, The Astrophysical Journal 20, Chicago 1904, p. 123 ff.

162) *H. N. Russell*, Stellar parallax papers, Lond. Astr. Soc. Monthly Not., 65 (1905), p. 787 und 67 (1907), p. 132.

163) Centr.-Bur. Erdm. Veröff., insbesondere die „Resultate des internationalen Breitendienstes“ I von *Th. Albrecht*, II von *Th. Albrecht* und *B. Wanach*, Centr.-Bur. Erdm. Veröff., N. F. Nr. 8 und 13, Berlin 1903 und 1906 (*Albrecht*, Breitendienst, Resultate). Vgl. auch *Th. Albrecht*, Bericht über den derzeitigen Stand der Erforschung der Breitenvariation im Dezember 1897, am Schlusse des Jahres 1898, am Schlusse des Jahres 1899, gleichfalls Centr.-Bur. Erdm. Veröff., Berlin 1898, 1899, 1900 (*Albrecht*, Breitenvariation, Berichte).

163a) So fand sich auf der Station Gaithersburg eine systematische Differenz zweier Beobachter von $0''.10$; vgl. *Albrecht*, Breitendienst, Resultate [166]), I (1903), p. 157.

im Mittel die *Bewegung des Pols mit einer* $\pm$ *0″.01 kaum übersteigenden Unsicherheit* festgelegt erscheint. Über die Deutung mancher durch diese Schärfe der Beobachtungen zutage getretenen systematischen Erscheinungen herrschen noch Meinungsverschiedenheiten[164]).

8. Die Abgrenzung des Arbeitsfeldes und das Ineinandergreifen der verschiedenen Instrumente und Beobachtungsmethoden. Eine Verteilung der Aufgaben, welche die astronomische Ortsbestimmung bietet, auf die verschiedenen Instrumente kann naturgemäß nicht mit absoluter Bestimmtheit gegeben werden. Die Entscheidung hängt oft einmal von den verfügbaren Hilfsmitteln, dann von dem subjektiven Empfinden ab und ändert sich bei jeder wesentlichen Vervollkommnung eines Instruments oder Messungsverfahrens; sie könnte also in jedem Falle nur für einen bestimmten Zeitraum gültig sein. Doch lassen sich einige allgemeine Gesichtspunkte für sie aufstellen, zunächst für die *absolute Ortsbestimmung*, die entweder direkt am Meridiankreise oder indirekt durch mikrometrischen Anschluß an Anhaltsterne am Refraktor erfolgen kann. Die Ortsbestimmung am Meridiankreise ist im allgemeinen bequemer, da sie ein fertiges Resultat gibt; die mikrometrische, visuelle oder photographische Messung am Refraktor ist an sich genauer, setzt aber günstig gelegene und sicher bestimmte Vergleichsterne voraus. Die stets wachsende Zahl der letzteren verschiebt einerseits die Sachlage zu gunsten des Refraktors, andererseits hat gerade die Genauigkeit der Meridianbeobachtungen in dem letzten Jahrhundert eine außerordentliche Steigerung erfahren. In neuerer Zeit ist hinzugekommen der Gegensatz der visuellen und der photographischen Beobachtungsmethode, der sich indessen wesentlich auf den Refraktor beschränkt[165]).

---

164) Vgl. *H. Kimura,* On the existence of a new annual term in the variation of the latitude, Astr. Nachr. 158 (1902), p. 233, ferner *Th. Albrecht*[163]) und *R. Schumann,* Numerische Untersuchungen über Polhöhenschwankung und Aberrationskonstante, Astronomische Abhandlungen, als Ergänzungshefte zu den Astr. Nachr. hrsg. von *H. Kreutz,* Nr. 11, Kiel 1906 und Astr. Nachr. 173 (1906), p. 209; sowie das Referat von *E. Großmann* über *Schumanns* Arbeiten in Astr. Ges. Vjs. 42 (1907), p. 265—287.

165) Betreffs *photographischer Methoden* der geographischen und astronomischen Ortsbestimmung vgl. VI 2 3 (*Wirtz*), Nr. 25; außerdem in bezug auf die Anwendung der Photographie bei Meridianbeobachtungen z. B. *(J. G. Hagen),* The Photochronograph and its application to star transits; sowie *(J. G. Hagen),* Photographic transits of 161 stars [beide Arbeiten sind Publications of the Georgetown College Observatory (Washington)], Washington 1891, 1896; in bezug auf photographische Polhöhenbestimmungen nach der *Horrebow-Talcott*-Me-

Abgesehen von den fortlaufenden Beobachtungen der *Sonne*, der *Fundamentalsterne* und der großen Zahl *hellerer Sterne* überhaupt, die unzweifelhaft dauernd die Domäne des Meridiankreises resp. des Passageninstruments und des Vertikalkreises bilden werden, hat man bisher auch stets den *Mond*, *die großen und die hellsten kleinen Planeten* am Meridiankreise beobachtet. Neuerdings macht sich das Bestreben geltend, die Ortsbestimmung dieser Himmelskörper zur Erhöhung ihrer individuellen Genauigkeit der differentiellen Meßmethode zu überweisen, und zwar speziell dem Heliometer[166]). Ob die neuerliche Einführung des *Repsold*schen Mikrometers mit seinen schwerwiegenden Vorteilen gerade bei Beobachtung von Sternscheiben nicht wieder einen Rückschlag zu gunsten der Meridianbeobachtung bewirken wird, läßt sich noch nicht übersehen. Nur für den *Mond*, dessen schnelle Bewegung eine möglichst häufige, schärfste Festlegung seines Orts wünschenswert macht, wird man wohl allmählich zur Anschlußbeobachtung übergehen. Die ersten Anfänge dazu liegen in der üblichen Beobachtung der Bedeckung zahlreicher Sterne bereits vor, deren Örter nachträglich am Meridiankreise bestimmt werden. Wie weit man die *Helligkeitsgrenze* der am Meridiankreise zu beobachtenden Fixsterne hinausschieben will, während man die Gesamtmasse der schwächeren der Photographie überläßt, ist noch unentschieden. In jedem Falle muß der Meridiankreis die zur Reduktion der Platte erforderlichen *Anhaltsterne* liefern und hat damit, da z. B. bei der photographischen Himmelskarte alle Sterne bis zur 9ten Größe etwa als Anhaltsterne benutzt zu werden pflegen, immer noch ein sehr großes Arbeitsfeld. Denn es handelt sich nicht nur um die einmalige Fixierung der Örter dieser über eine Viertelmillion betragenden Sterne, sondern um die Kenntnis ihrer Eigenbewegungen, die nur durch einen längeren Zeitraum überspannende Beobachtungen erlangt werden kann. Über diese Verarbeitung der Meridianbeobachtungen vgl. VI 2, 2 (*F. Cohn*), p. 66—70.

Bezüglich der Verteilung der *Anschlußbeobachtungen*, sowie aller

---

thode vgl. z. B. *A. Marcuse*, Bemerkungen über die photographische Polhöhenmethode, Astr. Nachr. 150 (1899), p. 101, für andere Methoden der Polhöhenbestimmung *K. Schwarzschild*, Astr. Nachr. 164 (1903), p. 1 und (1904), p. 177. Hier verdient auch die „stereoskopische Methode" der Parallaxenbestimmung Erwähnung; vgl. *C. Pulfrich*, Kritische Bemerkungen über neuere Methoden der Entfernungsbestimmung der Fixsterne, Astr. Nachr. 168 (1905), p. 67.

166) *S. Newcomb*, Considerations on the best method of determining positions of the planets by observation, Astron. Journ. 13 (1894), p. 191. Vgl. auch *D. Gill*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 54 (1894), p. 351.

Objekte, deren relative Örter allein von Interesse sind (Doppelsterne, Sternhaufen, Satelliten), auf die verschiedenen differentiellen Methoden ist allgemein zu sagen, daß gegenwärtig alle individuellen Aufgaben (Einzelbeobachtung von Kometen, kleinen Planeten, Doppelsternen, Satelliten) der visuellen Fadenmikrometermessung, hingegen jede Massenarbeit (Durchmusterung, Sternhaufen), sowie alle Beobachtungen eines einzelnen Objekts, bei denen es sich um schnelle Beschaffung eines großen Materials handelt (vgl. unten die Erosopposition 1900—01), der Photographie zufallen. Für manche Spezialaufgaben, in denen eine besondere Genauigkeit erstrebt wird, wendet man vorzugsweise und mit Erfolg das Heliometer an (z. B. bei der Festlegung eines Netzes von Fixpunkten für die photographische Vermessung von Sternhaufen).

An zwei Beispielen mag das Ineinandergreifen oder Zusammenwirken der verschiedenen Beobachtungsmethoden veranschaulicht werden.

a) *Die Kooperation zur* **Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen kleiner Planeten:** die Iris-, Victoria- und Sapphoopposition (1888—89) und die Erosopposition (1900—01).

Das Prinzip dieser Methode zur Bestimmung der Sonnenparallaxe ist, die parallaktische Ortsverschiebung eines uns besonders nahe kommenden kleinen Planeten von den Endpunkten einer möglichst großen Basis bekannter Länge aus durch differentiell-mikrometrischen Anschluß an geeignete Fixsterne zu messen und aus seiner so erhaltenen linearen Entfernung die der Sonne nach dem dritten Keplerschen Gesetz zu berechnen. Die Endpunkte der Basis bilden entweder zwei Erdorte oder die verschiedenen Orte, die ein Erdort infolge der Umdrehung der Erde zu verschiedenen Tageszeiten im Raume einnimmt („tägliche Methode"). Die Idee der Methode entwickelte *J. G. Galle* und wandte sie 1873 zuerst an[167]); doch waren die Ergebnisse der Refraktorbeobachtungen nicht völlig befriedigend, und eine analoge Unternehmung im Jahre 1882 scheiterte völlig[168]). Die erste Anwendung des Heliometers geht auf *Gill* zurück, der schon im Jahre 1874, aber unter ungünstigen Verhältnissen, auf den Planeten Juno in Mauritius die „tägliche Methode" anwandte[169]). Die nächste

167) *J. G. Galle*, Über die Anwendung der kleinen Planeten zur Ermittelung des Wertes der Sonnenparallaxe, Astr. Nachr. 80 (1873), p. 1; und: *J. G. Galle*, Über eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus korrespondierenden Beobachtungen des Planeten Flora, Breslau 1875.

168) Vgl. *D. Gill*[65]), Cape Obs. Ann. 6 (1897), p. XVIII.

169) *J. L. Lindsay* and *D. Gill*, Mauritius expedition 1874, division 1:

günstige Gelegenheit bot die *Opposition der Planeten Iris* (1888), *Victoria und Sappho* (1889)[95]). Bei ihrer hinreichenden Helligkeit konnte die eigentliche Beobachtungsreihe dem *Heliometer* — in Aussicht genommene photographische Messungen kamen nicht zur Ausführung — überwiesen werden. Die Planeten wurden an den Heliometern von Cape, Newhaven, Oxford, Leipzig, Bamberg und Göttingen durch Distanzmessung — auch einige Positionswinkel wurden gemessen — an ein System von Vergleichsternen angeschlossen, welches im nahen Anschluß an die Planetenbahnen im voraus ausgewählt war. Diese Auswahl war so erfolgt, daß, wenn möglich, der Planet zwischen zwei diametral in gleichen Abständen gegenüberstehende Sterne eingehängt wurde, um von allen Instrumentalfehlern unabhängig zu werden; die Richtung der Sterne war so gewählt, daß entweder in Distanz oder im Positionswinkel ein möglichst großer parallaktischer Faktor erzielt wurde. Im Falle nicht zu vermeidender einseitiger Anschlüsse war gleichzeitige Messung von Normalsternen (standard stars) vorgeschrieben. Die Örter dieser Sterne wurden an zahlreichen Meridiankreisen beobachtet, zugleich aber — wenigstens im Falle der Victoria — durch eine heliometrische Triangulation in sich festgelegt. Bei dieser letzteren kamen nur Distanzmessungen zur Anwendung, die in geeigneter Weise auf die an jedem Abend mehrmals gemessene Normaldistanz gewisser „standard stars" bezogen wurden. Durch Vergleichung der beiden Ortsbestimmungen konnten die systematischen Fehler beider Beobachtungsarten, die Helligkeitsgleichung der Meridianbeobachtungen und die von der Größe der Distanz abhängigen Fehler der Heliometermessungen ermittelt werden. Die so erzielte Elimination aller instrumentellen und persönlichen Fehlerquellen war eine so vollständige, daß der Ort des Planeten mit einer bis dahin unerreichten Sicherheit festgelegt wurde. Um diese Genauigkeit ausnutzen zu können, d. h. die Unterschiede zwischen Theorie und Beobachtung rechnerisch auf 0″.01 scharf zu erhalten, war eine achtstellige logarithmische Ephemeridenrechnung erforderlich. Wie die entsprechenden Heliometermessungen des Mars anläßlich seiner Opposition von 1877 *D. Gill* zur Auffindung eines Fehlers kurzperiodischer Natur von 0″.376, Periode 13.6 Tage[166]), in der Ephemeridenrechnung geführt hatten, so ergab hier die Vergleichung ein Glied von monatlicher Periode und dem Betrage 0″.25, das sich unzweifelhaft auf eine fehlerhafte Annahme der in die monatliche

---

Determination of the solar parallax by observations of the minor planet Juno, Dun Echt Observatory Publications 2, Dun Echt bei Aberdeen 1877.

Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt Erde—Mond eingehenden Mondmasse zurückführen ließ. Es gelang, die *Mondmasse* mit einer ungewöhnlichen Sicherheit abzuleiten:

$$\text{Mondmasse} = \frac{\text{Erdmasse}}{81.702 \pm 0.141},$$

und damit diese Methode als eine für diesen Zweck besonders geeignete zu erweisen. In der Bestimmung der *Sonnenparallaxe* π wurde ein ebensolcher Erfolg erzielt. Erstens gaben die drei Planeten einzeln

Iris	$\pi =$	$8''.812 \pm 0''.014$,
Victoria		$8''.801 \pm 0''.009$,
Sappho		$8''.798 \pm 0''.017$,

und zweitens gab die „tägliche Methode", auf die Beobachtungen der Victoria am Kap allein angewandt, genau den gleichen Wert: $8''.801$, jedenfalls als besten Beweis der gelungenen Elimination der Fehler.

Der *Planet Eros* war bei seiner *Opposition von 1900—01*, in der er der Erde noch weit näher kam als die genannten drei Planeten, für die meisten Heliometer zu schwach, seine Beobachtung fiel daher der *Refraktor*beobachtung, und zwar der visuellen mit dem Fadenmikrometer oder der photographischen zu. Auf das durch zahlreiche Meridianbeobachtungen festgelegte System der fast 700 Anhaltsterne (*étoiles de repère*) wurde ein weit engeres Netz von eigentlichen Vergleichsternen (*étoiles de comparaison*) in enger Nachbarschaft der Planetenbahn photographisch bezogen. Erst an diese Vergleichsterne wurde der Ort des Planeten an zahlreichen Sternwarten auf eine der beiden obigen Arten mikrometrisch angeschlossen, in Stundenwinkeln und Koordinatenrichtungen, die einen möglichst großen parallaktischen Effekt hervorbrachten. Eine Entscheidung über die Vorzüge der einen oder der anderen Methode liegt zur Zeit noch nicht vor[170]). Dem unbestreitbaren Vorteile der photographischen Methode, der schnellen Beschaffung eines umfangreichen Materials, das später nach mancherlei Gesichtspunkten auf systematische Fehler hin diskutiert werden kann und allerdings auch muß, steht der Nachteil gegenüber, daß das Bild des bewegten Planeten auf der Platte als Strich erscheint, dessen Pointierung systematischen Fehlern unterliegen kann.

b) **Bestimmung der Fixsternparallaxen.** Abweichend von der im allgemeinen erforderlichen Kenntnis der absoluten Koordinaten

170) Vgl. Conf. astrophot. 1900[105b]), circulaires 1—12, Paris 1900—07.

eines Gestirns oder seiner relativen gegen ein anderes handelt es sich bei manchen Aufgaben, die in das Gebiet der astronomischen Ortsbestimmung fallen, nur um die Veränderungen, welche diese relativen Koordinaten im Laufe der Zeit, sei es durch die eigene, sei es durch die Bewegung der Erde, erleiden. Vor allem ist dies bei der Bestimmung relativer Fixsternparallaxen der Fall. Die heutige Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen gestattet es noch immer nicht, die Dimensionen der kleinen *parallaktischen Ellipse*, welche alle Fixsterne infolge des jährlichen Umlaufs der Erde um die Sonne beschreiben, durch absolute Beobachtungen mit hinreichender Schärfe festzulegen, da sie nur in vereinzelten Fällen 0″.2 überschreiten. Man muß sich daher damit begnügen, die Parallaxen der Sterne, von denen man vermutet, daß sie uns besonders nahe seien, — der helleren, schnellbewegten, der Doppelsterne von schneller Umlaufsbewegung bei weiter Bahnöffnung — durch *Anschluß an* andersartige — schwächere, schwach bewegte und demnach vermutlich weiter entfernte — *Nachbarsterne* als *relative* zu bestimmen. Dazu ist nur eine möglichst scharfe Bestimmung der Änderung, welche diese Koordinatendifferenz im Laufe eines Jahres erleidet, erforderlich; die fortschreitende Änderung entspringt der relativen Eigenbewegung, die periodische der relativen Parallaxe beider Sterne. Aber auch diesen differentiellen Messungen bereiten systematische Fehler erhebliche Schwierigkeiten. Einmal ist der Verlauf der *meteorologischen Elemente* ebenfalls jährlich periodischer Natur. Dann aber sind die Beobachtungen an eine begrenzte Tageszeit und damit an wechselnde Stundenwinkel gebunden. So vermischt sich der sog. *Stundenwinkeleffekt* mit der parallaktischen Verschiebung, besonders wenn man, wie meist üblich, nur zu den Zeiten der parallaktischen Extreme beobachtet. Früher glaubte man allein schon durch symmetrische Auswahl von Vergleichsternen zu beiden Seiten des Parallaxensterns die systematischen Fehler ganz zu beseitigen, indem die Parallaxe aus dem geringfügigen Unterschiede von Koordinatendifferenzen und seinen zeitlichen Änderungen abgeleitet wird. Für die hierzu erforderliche Auswahl passender Vergleichsterne bot das Heliometer die besten Bedingungen, und so hat es sich schon seit lange bei Parallaxenbestimmungen aufs beste bewährt, indessen doch erst, seitdem der persönliche Stundenwinkeleffekt durch systematische Anwendung von Reversionsprisma, Gitterblende und möglichst kleine Winkel beim Durchschwingen sorgfältig eliminiert wird[148]). Auch die Durchgangsbeobachtungen am Meridiankreise, bei denen man allerdings auf die Beobachtung beider parallaktischer Extreme verzichten muß, erwiesen

sich als brauchbar zur Parallaxenbestimmung[171]), da sie von jenem Stundenwinkelfehler völlig frei sind, und werden sich bei Einführung des *Repsold*schen Mikrometers noch mehr dazu eignen. Die visuelle Beobachtung am Refraktor hat in der ersten Zeit noch nicht völlig befriedigendes geleistet, jedenfalls wegen des persönlichen oder instrumentellen Stundenwinkeleffektes, und ist seitdem kaum wieder zur Anwendung gelangt. Und auch die photographische Methode hat erst in der neuesten Zeit begonnen, den anderen Methoden Gleichwertiges zu leisten[172]). Es scheint bei ihr der Stundenwinkeleffekt noch kompliziertere Formen anzunehmen, teils infolge der atmosphärischen Dispersion (s. p. 247), teils infolge instrumenteller Einflüsse (s. p. 248), die ebenfalls eine vom Stundenwinkel abhängige Helligkeitsgleichung erzeugten. Man könnte, wie man es wiederholt beim Heliometer getan hat, diesen Einfluß bestimmen, indem man auch zu den Zeiten der parallaktischen Indifferenz, und dann in möglichst verschiedenen Stundenwinkeln, beobachtet. Noch besser ist es, die Parallaxenbestimmung von ihm ganz unabhängig zu gestalten. Aus diesem Grunde hat *J. C. Kapteyn*[159]) die strikte Forderung erhoben, unter Verzicht auf die größtmöglichen parallaktischen Faktoren ausschließlich im *Meridian* oder eventuell einem anderen *festen Stundenwinkel* zu beobachten. Er tut dies in Verbindung mit seiner ganz eigenartigen Methode zur *Bestimmung von Parallaxen und Eigenbewegungen en masse*. Ihr Prinzip läßt sich so darstellen. Auf *einer* Platte werden zu verschiedenen Zeiten t_1, t_2, t_3 unter kleiner Verschiebung, z. B. in α, drei Aufnahmen nebeneinander gemacht — die Platten bleiben inzwischen unentwickelt — und für jeden Stern der x-Abstand je zweier Nachbarbilder gemessen. Die Differenz $x_{2,3} - x_{1,2}$ setzt sich zusammen aus einer den Aufnahmen eigentümlichen, gleichgültigen Konstante, aus einem von der Eigenbewegung $\mu = \mu_\alpha \cos \delta$ herrührenden, der Differenz der Zwischenzeiten proportionalen und einem der Parallaxe π proportionalen, von den parallaktischen Phasen der Aufnahmen abhängigen Term. Bei gleichen Zwischenzeiten fällt die Eigenbewegung heraus, und wenn die Aufnahmezeiten drei aufeinanderfolgenden parallaktischen Extremen entsprechen, erhält π seinen Maximalfaktor (nahezu 4). Bestimmt man die Konstante so, daß die Summe der Parallaxen aller Plattensterne verschwindet, so erhält man die individuellen relativen Parallaxen der Plattensterne,

171) *J. C. Kapteyn*, Bestimmung von Parallaxen durch Registrierbeobachtungen am Meridiankreise, Leiden Sternw. Ann. 7 (1897), p. 117.

172) Vgl. z. B. *F. Schlesinger*[161]) und *H. N. Russell*[162]).

bezogen aufs Mittel aller. Ähnlich kann man aus zwei Aufnahmen zu gleicher parallaktischer Phase — oder im obigen Beispiel aus $x_{2,3} + x_{1,2}$ — die relativen Eigenbewegungen aller Plattensterne ermitteln. Diese Methode ist von *J. C. Kapteyn* auf beide Probleme angewendet und zur Grundlage eines weitausschauenden Plans zur umfassenden Bestimmung beider für kosmologische Fragen der Stellarastronomie so wichtigen Größen gewählt worden, dessen Verwirklichung er von einem Zusammenwirken zahlreicher, dazu befähigter Sternwarten in der nächsten Zukunft erhofft[173]).

173) *J. C. Kapteyn*, Plan of selected areas, brochure, published by the Astronomical Laboratory at Groningen, Groningen 1906.

(Abgeschlossen im Sommer 1907.)

VI 2, 6. BESONDERE BEHANDLUNG DES EINFLUSSES DER ATMOSPHÄRE (REFRAKTION UND EXTINKTION).

Von

A. BEMPORAD

in Catania.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Allgemeines über die Wirkungen der atmosphärischen Luft auf die Lichtstrahlen und über ihre mathematische Darstellung.

I. Physikalische Erfahrungstatsachen.

2. Abhängigkeit des Brechungsindex, bzw. der Absorptionskonstante von der Luftdichtigkeit.
3. Beziehungen zwischen Dichtigkeit, Temperatur, Luftdruck und Höhe über dem Meeresniveau.
4. Temperaturänderung mit der Höhe. Beobachtungsresultate.

II. Physikalische Hypothesen.

5. Kritische Besprechung der wichtigsten Hypothesen über die Konstitution der Atmosphäre (*Cassini, Mayer, Newton, Laplace, Kramp, Bessel, Ivory, Schmidt, Bauernfeind, Gyldén, Kowalski, v. Oppolzer, Mendeléef-Pizzetti*).
6. Schlußbetrachtung über die Leistungen der bis jetzt aufgestellten Hypothesen. *Brunss*ches Verfahren.

III. Theorie der Refraktion.

7. Aufstellung des Refraktionsintegrals.
8. Refraktionsformeln nach den Hypothesen von *Cassini* und von *Mayer*. *Bradley*sche und *Simpson*sche Formel.
9. *Orianis* (*Laplaces*) Satz.
10. Entwicklung des Refraktionsintegrals für die *Bessel*sche Theorie.
11. Entwicklung des Refraktionsintegrals für die *Schmidt*sche Theorie.
12. Vergleichstabelle der aus den wichtigsten Theorien berechneten Werte der Refraktion.

IV. Theorie der Extinktion.

13. Aufstellung des Extinktionsintegrals.
14. Entwicklung des Extinktionsintegrals bei der Annahme konstanter Dichtigkeit oder konstanter Temperatur. *Lambert-* und *Bouguer*sche Formel.
15. *Laplace*sche Extinktionsformel.
16. Strengere Behandlung der Extinktionstheorie unter Annahme einer gleichförmigen Temperaturabnahme mit der Höhe.
17. Vergleichstabelle der verschiedenen Extinktionstheorien.
18. Die terrestrische Extinktion.
19. Die selektive Absorption.

Literatur.

Bibliographie: *J. C. Houzeau - A. Lancaster,* Bibliographie générale de l'Astronomie, tome 2, Bruxelles 1882, p. 370—387 (Refraktion) et p. 862—868 (Extinktion).

I. Refraktion.

Für die Literatur bis 1860 vgl. *C. Bruhns,* Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung, Leipzig 1861 (*Bruhns, hist. Entw.*). Das Folgende gibt eine Ergänzung und Weiterführung dieser Liste.

a) Spezialarbeiten.

G. A. A. (Jean) Plana, Mémoire sur la connexion existante entre la hauteur de l'atmosphère et la loi du décroissement de sa température, Memorie dell' Accademia delle scienze di Torino, serie II^a, tomo 15, Torino 1855, p. 1 (*Plana 1855*).

C. M. v. Bauernfeind, Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre, Astr. Nachr. 62 (1864), p. 209—252 und Astr. Nachr. 67 (1866), p. 33—88 (*v. Bauernfeind 1864/66*).

H. Gyldén, Untersuchungen über die Konstitution der Atmosphäre und die astronomische Strahlenbrechung in derselben, St. Pét. Mém. (7) 10 (1866) und 12 (1868) (*Gyldén, Refr.*).

M. Kowalski, Recherches sur la réfraction astronomique, Kasan 1878 (*Kowalski 1878*).

R. Radau, Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques, Obs. de Paris Ann., mém. 16 (1882) (*Radau 1882*).

P. Harzer, Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre, Astr. Nachr. 104 (1883), p. 65; Astr. Nachr. 107 (1884), p. 145; Astr. Nachr. 146 (1898), p. 377 (*Harzer 1883 ff.*).

Th. v. Oppolzer, Über die astronomische Refraktion, Wien Denkschr. 53 (1887), 1. Abteilung, p. 1 (*Oppolzer 1887*).

R. Radau, Essai sur les réfractions astronomiques, Obs. de Paris ann., mém. 19 (1889) (*Radau 1889*).

H. Bruns, Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung, Leipzig Ber. 43 (1891), p. 164 (*Bruns 1891*).

F. Hausdorff, Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung, Leipzig Ber. 43 (1891), p. 481 (*Hausdorff, Refr., 1891*) sowie Leipzig Ber. 45 (1893), p. 758.

J. v. Hepperger, Zur Theorie der astronomischen Refraktion, Wien Ber. 102 (1893), p. 321 (*Hepperger 1893*).

P. Pizzetti, La rifrazione astronomica calcolata in base all'ipotesi di *Mendeléef,* Atti della R. Accademia delle scienze di Torino 33, Torino 1897, p. 213 (*Pizzetti 1897*).

J. Bauschinger, Untersuchungen über die astronomische Refraktion, Neue Annalen der k. Sternwarte in München 3, München 1898, p. 41 (*Bauschinger 1898*).

E. Großmann, Beobachtungen am *Repsold*schen Meridiankreise der *von Kuffner*schen Sternwarte in Wien-Ottakring 1896—1898, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 27 (1901), p. 1 (*Großmann 1901*).

L. Courvoisier, Untersuchungen über die astronomische Refraktion, Veröffentlichungen der großherzoglichen Sternwarte zu Heidelberg, astrometrisches Institut 3, Karlsruhe 1904 (*Courvoisier 1904*).

H. Andoyer, Sur la théorie de la réfraction, Paris Bull. astr. 22 (1905), p. 404 (*Andoyer 1905*).

A. Bemporad, Sulla teoria della refrazione astronomica, Memorie della Società degli spettroscopisti italiani 34, Catania 1905, p. 191, 217, 233 (*Bemporad, Spettrosc. 1905*).

L. de Ball, Die *Radau*sche Theorie der Refraktion, Wien Ber. 115 (1906), p. 1363 (*De Ball 1906*).

P. Pizzetti, Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell' aria coll' altezza, Atti della R. Accademia dei Lincei, anno 303 (1906), 5. serie, Rendiconti, Classe di scienze fisiche etc. 15, 1. semestre, Roma 1906, p. 73 (*Pizzetti 1906*).

L. de Ball, Le coefficient de dilatation de l'air et l'influence de l'humidité sur les réfractions astronomiques, Paris Bull. astr. 24 (1907), p. 209 (*De Ball 1907*).

H. G. van de Sande-Bakhuyzen, On the astronomical refractions corresponding to a distribution of the temperature in the atmosphere derived from balloon ascents, Proceedings of the section of sciences, Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 9 (2nd part, 1907), Amsterdam 1907, p. 578 (*Bakhuyzen 1907*).

b) Kompendien.

Darstellungen der Refraktionstheorie finden sich unter anderem in den folgenden Handbüchern:

F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie [2 Bände, Leipzig 1880/84] (*Helmert, Geodäsie*) 2, p. 553ffg.

F. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, 4. Aufl. Berlin 1881, p. 155

W. Chauvenet, A manual of sperical and practical astronomy, 5th ed. (2 vols., Philadelphia 1885, 1893, 1900), vol. 1, p. 127.

Wolf, Handb. 2 (1892), p. 259—278.

E. von Oppolzer, Artikel „Strahlenbrechung" in *Valentiner,* Handwörterbuch, 3², Breslau 1901, p. 548.

A. Bemporad, Artikel „Strahlenbrechung" in *A. Winkelmann,* Handbuch der Physik, 2. Aufl., Band 6 (Optik), Leipzig 1906 (*Winkelmann, Handb. 6*), p. 503.

S. Newcomb, A compendium of spherical astronomy, Newyork 1906, chapter 8: „astronomical refraction", p. 173—224.

c) Refraktionstafeln.

Giov. Dom. Cassini, Ephemerides novissimae motuum coelestium 1661—1666, additis ephemeridibus solis et tabulis refractionum, Mutinae 1662, p. 173. Abdruck bei *J. Cassini (le fils),* Tables astronomiques du soleil, de la lune, des planètes, des étoiles fixes et des satellites de Jupiter et de Saturne, Paris 1740, table 74, p. 152, sowie bei *Bruhns,* Hist. Entw. (1861), p. 39.

J. Newton, Tabula refractionum siderum ad altitudines apparentes, Lond. Phil. Trans. 31 (1721), p. 169 [abr. 6, p. 519], Abdruck in *J. Newton,* Opera quae exstant omnia, ed. *Sam. Horsley,* tomus 4, Londini 1782, p. 408, auch bei *J. B. Biot*[32]), p. 748.

Tob. Mayer (1770), vgl. Fußnote 44.

J. Bradley, Greenw. Obs. 1, London 1776, Einleitung, p. [15], erläutert p. V. Abdruck in *Bruhns,* Hist. Entw., p. 56.

J. Ivory, Lond. Phil. Trans. 1823, p. 491ff. und 1838, p. 227ff.

F. W. Bessel, Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum 1750—1850 computatae, Regiomonti Prussorum 1830, p. LIX et pag. 538—542.

O. Struve, Tabulae refractionum in usum speculae Pulcovensis congestae, Petropoli 1870 [hierzu *H. Gyldén,* Poulkova Obs. 5 (1873)]; 2. Aufl. 1905.

Th. Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, 1. Aufl. Leipzig 1873, 3. Aufl. Leipzig 1894. Refraktionstafel 34 der 3. Auflage ist ein erweiterter Abdruck der *Bessel*schen Tafeln.

M. Kowalski, Tables des réfractions, Kasan 1878.

R. Radau, Obs. de Paris Ann., mém. 19 (1889), p. G61—G80.

L. de Ball, Refraktionstafeln, Leipzig 1906.

II. Extinktion.

a) Spezialarbeiten.

P. Bouguer, Essai d'optique, sur la gradation de la lumière, Paris 1729 (*Bouguer, Essai 1729*).

— Traité d'optique sur la gradation de la lumière, Ouvrage postume, publié par l'abbé *de Lacaille,* Paris 1760 (*Bouguer, Traité 1760*).

J. H. Lambert, Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae, Augustae Vindelicorum 1760. Deutsch herausgegeben mit Anmerkungen von *E. Anding* in 3 Heften, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 31—33, Leipzig 1892 (*Lambert, Photometria 1760*).

P. S. de Laplace, Traité de mécanique céleste 4, Paris 1805, seconde partie, livre 10, chapitre 3: De l'extinction de la lumière des astres dans l'atmosphère terrestre, et de l'atmosphère du soleil = Oeuvres 4, Paris 1880, p. 283 (*Laplace 1805*).

J. D. Forbes, On the transparency of the atmosphere and the law of extinction of the solar rays in passing through it, Lond. Phil. Trans. 1842, p. 225 (*Forbes 1842*).

L. Seidel, Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Größe, über die Extinktion des Lichtes in der Atmosphäre, über die Helligkeit der Sonne usw., München Abh. 6 (1852), p. 541.

—, Resultate photometrischer Messungen an 208 Fixsternen, Münch. Abh. 9 (1861—63), p. 419.

J. Maurer, Die Extinktion des Fixsternlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraktion, Diss. Zürich 1882 (*Maurer, Diss. 1882*).

G. Müller, Photometrische Untersuchungen, 2. Abschnitt: Untersuchungen über die Extinktion des Lichtes in der Atmosphäre, Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 3, Potsdam 1883, Abhdl. Nr. 12, p. 227 (*Müller 1883*.)

S. P. Langley, On the amount of the atmospheric absorption, American Journal of Science (3) 28, New Haven 1884, p. 163 (*Langley, Amer. Journ. 1884*).

— Researches on solar heat and its absorption by the earth's atmosphere, a report of the Mount Whitney expedition, Professional papers of the Signal Service, United States War Department, Nr. 15, Washington 1884 (*Langley, Sign. Serv. 1884*).

G. Müller, Photometrische und spektroskopische Beobachtungen, angestellt auf dem Gipfel des Säntis, Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 8, Potsdam 1893, Abhdl. Nr. 27 (1891), p. 1 (*Müller 1891*).

H. Seeliger, Über die Extinktion des Lichtes in der Atmosphäre, Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. zu München, math.-physik. Klasse, 21 (1891), p. 247 (*Seeliger 1891*).

F. Hausdorff, Über die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre, Leipzig Ber. 47 (1895), p. 401 (*Hausdorff, Extinkt., 1895*).

G. Müller und *P. Kempf,* Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichts in der Erdatmosphäre, angestellt auf dem Ätna und in Catania, Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 11, Potsdam 1898, Abhdl. Nr. 38, p. 209 (*Müller-Kempf 1898*).

E. Oddone, Sul coefficiente medio di trasparenza dell' aria per grandi visuali terrestri, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere (2) 34 (1901), Milano 1901, p. 511 [mit weiteren Literaturnachweisen] (*Oddone 1901*).

A. Bemporad, Sulla teoria d' estinzione di *Bouguer,* Memorie della Società degli spettroscopisti italiani 30, Catania 1901, p. 217 (*Bemporad 1901*).

— Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre, Mitteilungen der Großherzogl. Sternwarte zu Heidelberg, Astrometr. Institut, Heft 4, Karlsruhe 1904 (*Bemporad, Extinkt., Heidelb. Mitt. 4, 1904*).

— L'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri, Atti della R. Accademia dei Lincei, anno 301 (1904), 5. serie, Memorie della classe di scienze fisiche e naturali 5, Roma 1904/05, p. 233 (*Bemporad, Lincei 1905*).

V. Cerulli, Sull' integrale dell' estinzione, Memorie della Società degli spettroscopisti italiani 35, Catania 1906, p. 39 (*Cerulli 1906*).

A. Bemporad, Sopra un nuovo sviluppo singolarmente convergente per l' integrale della estinzione secondo la teoria di *Bouguer,* Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, anno 83 (1906), serie 4ª, 19, Catania 1906 (*Bemporad 1906*).

— e *L. Mendola,* L'assorbimento selettivo delle radiazioni calorifiche, Memorie della Società degli spettroscopisti italiani 36, Catania 1907, p. 165 (*Bemporad-Mendola 1907*).

— Nuova riduzione delle osservazioni pireliometriche di *K. Ångström* all' isola di Teneriffa, Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania, anno 85 (1908), serie 5ª, 1, Catania 1908, p. II, 1 (*Bemporad 1908*).

b) Kompendien.

G. Müller, Die Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897, p. 110 (1. Abschnitt, Kap. 3): Die Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre (*Müller, Photometrie*).

A. Bemporad, Artikel „Extinktion" in *A. Winkelmann,* Handbuch der Physik, 2. Aufl., Band 6 (Optik), Leipzig 1906 (*Winkelmann, Handb. 6*), p. 538.

c) Extinktionstafeln.

L. Seidel, Münch. Abh. 6 (1852), p. 581 und p. 599.

— Münch. Abh. 9 (1861/63), p. 503 („Korrigierte Tafel").

G. Müller, Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam, 3, Potsdam 1883, 12. Stück, p. 268—269 nebst Tafel 39 (*Müller, Ext.-Tafel 1883*).

— Die Photometrie der Gestirne 1897 (siehe unter b), p. 515—516.

Einleitung.

1. Allgemeines über die Wirkungen der atmosphärischen Luft auf die Lichtstrahlen und ihre mathematische Darstellung. Die Strahlen der Gestirne werden auf ihrem Wege durch die Erdatmosphäre in mannigfältiger Beziehung beeinflußt. Sie werden zunächst von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt (*Refraktion*); ihre ursprüngliche Leuchtkraft wird abgeschwächt (*Extinktion*); ihre Färbung wird eine andere (*selektive Absorption*); ferner werden sie auch je nach ihrer Farbe verschieden gebrochen (*atmosphärische Dispersion*[1]) und in allen Richtungen reflektiert (*Diffusion*); die rasch hintereinander folgenden Änderungen dieser Wirkungen geben uns endlich das Phänomen der *Szintillation*[2]).

Nachfolgende Tabelle soll den Gang der Refraktion, Dispersion und Extinktion mit wachsender Zenitdistanz veranschaulichen. Sie ent-

1) Über Messungen der *atmosphärischen Dispersion* vgl. *P. Henry,* Paris C. R. 112 (1891), p. 377; *H. Seeliger,* München Ber. 21 (1891), p. 245/246; *H. Kayser* und *C. Runge,* Die Dispersion der atmosphärischen Luft (zitiert in Fußn. 9), sowie Annalen der Physik (3) 50, Leipzig 1893, p. 293—315. *H. Kayser,* Handbuch der Spektroskopie 1, Leipzig 1900, p. 360.

Über Messungen der *photographischen Refraktion* und den *Einfluß der atmosphärischen Dispersion auf Sternörter* vgl. p. 247, Fußnote 101 und 102.

2) Über *Szintillation* vgl. *K. Exner* im „Repertorium der Physik", hrsg. v. *Ph. Carl* und *F. Exner,* 23, München/Leipzig 1887, p. 371 und 426, gesondert erschienen Wien 1891; *E. v. Oppolzer,* Wien Ber. 110 (1901), p. 1239; *K. Exner* und *W. Villiger,* Wien Ber. 111 (1902), p. 1265, und Wien Ber. 113 (1904), p. 1019, sowie den Artikel „*Szintillation*" von *K. Exner* in *Winkelmann,* Handb. 6 (Optik), Leipzig 1906, p. 567.

hält zugleich die Änderungen dR der Refraktion mit Luftdruck und Lufttemperatur. Die *Extinktion* gibt den in Größenklassen ausgedrückten *Unterschied gegen die zenitale Helligkeit.*

Refraktion, Dispersion und Extinktion.

Scheinbare Zenitdistanz	Mittlere Refraktion	Dispersion von 0,56 μ bis 0,40 μ	dR pro 1° C.	dR pro 10 mm Luftdruck	Mittlere Potsdamer visuelle Extinktion
0°	0″	0″	— 0″.0	+ 0″.0	0m.00
3°	3″	0″	— 0″.0	+ 0″.0	0m.00
15°	16″	0″	— 0″.1	+ 0″.2	0m.00
50°	1′ 9″	1″	— 0″.2	+ 0″.9	0m.12
75°	3′ 32″	4″	— 0″.8	+ 2″.8	0m.66
85°	9′ 47″	11″	— 2″.3	+ 7″.9	1m.77
89°	24′ 25″	26″			
90°	34′ 54″	38″			

Die empirische Bestimmung der Refraktion erfolgt durch Beobachtungen der Meridianhöhen von Zirkumpolarsternen in beiden Kulminationen[1]).

Die Dispersion, d. h. der Unterschied der Refraktionen für die Wellenlängen 0,56 μ und 0,40 μ, ist nach *Kayser* und *Runge*[1]) gleich $^1/_{56}$ der Refraktion gesetzt. Die photographische Extinktion ist erfahrungsgemäß[3]) ungefähr gleich dem Doppelten der visuellen Extinktion.

Die *theoretische Untersuchung* aller dieser Erscheinungen hängt in erster Linie von den optischen Eigenschaften der Luft (Nr. 2) und von der Konstitution der Atmosphäre (Nr. 3, 4) ab. Je nach der Art, wie die bezüglichen erfahrungsmäßigen Resultate mathematisch dargestellt werden, unterscheiden sich die verschiedenen Theorien voneinander. Während z. B. einige bei der Behandlung der Refraktionstheorie einen einfachen Ausdruck für die Dichtigkeit der Luft als Funktion der Höhe annehmen, wählen andere einen solchen für die Beziehung zwischen Temperatur und Höhe, andere wieder für die Beziehung zwischen Dichtigkeit und Temperatur oder zwischen Druck und Temperatur usw. (Nr. 5). Den *wesentlichen* Unterschieden zwischen den Theorien, welche mit der zu Grunde liegenden Hypothese verknüpft sind, treten andere mehr *formeller* Natur, wie die Art und

3) Betreffs Messungen der *photographischen Extinktion* vgl. *J. M. Schaeberle.* Contributions from the Lick Observatory Nr. 3, Sacramento 1893. *C. W. Wirtz,* Astr. Nachr. 154 (1901), p. 349.

Weise der analytischen Entwicklung, zur Seite. Für uns ist die Schilderung der Entwicklungsmethoden bei weitem nicht so wichtig wie die *Besprechung der verschiedenen Hypothesen*; es gibt nämlich eine Methode (die mechanische Quadratur[4]), welche bei allen Hypothesen gleich schnell zum Ziele, d. h. zur Kenntnis der theoretischen Refraktion führt. Wichtig ist jedoch zu untersuchen, inwieweit die analytischen Entwicklungen vollkommen und konsequent durchgeführt sind, da man nur bei einer *strengen Behandlung* die verschiedenen *Hypothesen* auf Grund der Refraktionsbeobachtungen selbst *prüfen* kann.

I. Physikalische Erfahrungstatsachen.

2. Abhängigkeit des Brechungsindex, bzw. der Absorptionskonstante von der Luftdichtigkeit. Die Größen, welche den Einfluß der Atmosphäre auf die Fortpflanzung des Lichts durch dieselbe bestimmen, sind der *Brechungsindex* μ und der *Absorptionskoeffizient* k der Luft. Beide Größen hängen von der Dichte der Luft ab. Die *Luftdichte* δ ist aber eine Funktion der Höhe, daher ändert sich auch die brechende bzw. absorbierende Wirkung der Atmosphäre längs der Trajektorie der Lichtstrahlen. Um diese Änderung zu verfolgen, hat also jede Refraktions- oder Extinktionstheorie sich vor allem mit dem *Zusammenhang zwischen* μ, *bzw.* k *und* δ zu beschäftigen.

a) Beziehung zwischen μ und δ.

Man hat für die Beziehung zwischen dem Brechungsindex μ und der Dichte δ folgende drei Formeln vorgeschlagen:

$$(1) \qquad \mu^2 - 1 = 2c\delta, \qquad \mu - 1 = c'\delta, \qquad \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = c''\delta,$$

worin c, bzw. c', c'' eine spezifische Konstante für jeden Körper bedeutet und die Bezeichnung „spezifische Refraktion“ (*Brühl*) erhalten hat. Die erste schon von *Newton* aufgestellte, von *Laplace* auf Grund der Emissionstheorie des Lichtes theoretisch abgeleitete Formel ist in der Refraktionstheorie fast ausschließlich gebraucht worden[5]). Die zweite Formel entbehrt einer strengen theoretischen Grundlage, wurde aber bei einer großen Anzahl von Flüssigkeiten durch *Dale* und *Gladstone*, *Landolt*, *Wüllner* u. a., auch bei den Gasen durch *Beer*, *Lang*, *Mascart* u. a. geprüft und sehr genau gefunden. Die dritte

4) Vgl. I D 2 (*Bauschinger*), Nr. 8.

5) *H. Bruns* (1891) und *F. Hausdorff* (1891) bei ihren Untersuchungen über die astronomische Refraktion, *J. Maurer* (1882) und *F. Hausdorff* (1895) bei ihren Extinktionstheorien machen von der zweiten Formel (1) Gebrauch.

von *L. Lorenz* und *H. A. Lorentz*[6]) abgeleitete Formel ist zwar theoretisch und praktisch die beste, doch würde sie bei den Theorien der astronomischen Refraktion und der Extinktion zu äußerst komplizierten Entwicklungen führen. Nun ist aber für die Luft (im allgemeinen für die Gase) $\mu - 1$ so klein, daß die drei oben aufgeführten Formeln praktisch mit der einzigen

$$\mu - 1 = c'\delta \tag{2}$$

zusammenfallen. Man wird also bei den Theorien der Refraktion und der Extinktion die analytisch vorteilhaftere Formel wählen dürfen, und dann fällt die Entscheidung bei der gewöhnlichen Behandlungsart zugunsten der ersten Formel. Der numerische Wert von c kann hierbei *physikalisch* oder *astronomisch* bestimmt werden. Hier folgen einige wichtigere Bestimmungen (Einheit für δ die normale Dichtigkeit der Luft bei 0^0 und 760 mm):

Biot und *Arago* (physikalisch)	$2c = 0{,}0005888$
Bessel (aus eigenen und *Argelanders* Beobachtungen)	$2c = 5864$
Bauschinger (aus eigenen Beobachtungen, München 1891—1893)	$2c = 5830$
Courvoisier (aus eigenen Beobachtungen, Heidelberg 1900—1903)	$2c = 5836$

b) Beziehung zwischen k und δ.

Was den Absorptionskoeffizienten k angeht, so wird er definiert durch die Beziehung: durchgelassene Lichtmenge J steht zur einfallenden J^* in dem Verhältnis:

$$J = e^{-k\sigma} J^*, \tag{3}$$

worin σ die durchlaufene Wegstrecke (in einem homogenen Mittel) bedeutet.

Zur Ableitung einer Beziehung zwischen Absorptionskonstante k und Dichtigkeit δ wurden zunächst von *Beer* Versuche an Lösungen von verschiedener Konzentration, später von anderen an Gasen unter verschiedenen Drucken angestellt. Die seit *Beer* gebräuchlichste Beziehung, nach welcher die Absorptionskonstante einfach der Dichte, bzw. der Konzentration, proportional sein sollte, das sogenannte **Beersche Gesetz**

$$\kappa = C\delta \tag{4}$$

6) *H. A. Lorentz*, Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 9, Leipzig 1880, p. 641; *L. Lorenz*, Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 11, Leipzig 1880, p. 70. Vgl. den Artikel V 14 (*Lorentz*), Nr. 47.

(C = spezifische Absorption) ist nach *Kayser*[7]) „außerordentlich häufig geprüft und ebenso oft als richtig wie als falsch gefunden". Das liegt daran, daß das *Beer*sche Gesetz Unveränderlichkeit der absorbierenden Molekeln voraussetzt, welche aber sehr oft bei veränderter Konzentration (Dichte) nicht vorhanden ist. Dieser Einwand dürfte für die Atmosphäre wegen ihrer geringen Dichte nicht in Betracht kommen. Doch ist zu beachten, daß das Gesetz nur für monochromatisches Licht streng gelten kann, da die spezifische Absorption für verschiedene Wellenlängen im allgemeinen sehr verschiedene Werte hat[8]). *Die Extinktionstheorie ist daher zunächst immer für ein bestimmtes monochromatisches Licht zu entwickeln.*

Auch die spezifische Refraktion c der atmosphärischen Luft hängt, obwohl in viel geringerem Maßstabe als die spezifische Absorption C, von der Wellenlänge ab. Nach *Kayser* und *Runge*[9]) gehen die Werte von μ für den sichtbaren Teil des Spektrums von 1,000290 bis 1,000300. Dies hat zur Folge, daß die Bilder der Gestirne in der Nähe des Horizonts keine scharfen Punkte oder Kreise, sondern unreine Spektra einer gewissen Länge sind (die atmosphärische *Dispersion*[1]), vgl. die Tabelle auf p. 293). Streng genommen muß also *auch bei der Refraktionstheorie ein bestimmtes monochromatisches Licht* vorausgesetzt werden. Man wählt hierfür zweckmäßig die Strahlung der hellsten Gegend des Spektrums ($\lambda = 570\ \mu\mu$ bei visuellen, 430 $\mu\mu$ bei photographischen Beobachtungen).

Man könnte vermuten, daß auch die *Temperatur* an und für sich die spezifische Refraktion und Absorption der Luft beeinflußte, wie dies sicherlich bei manchem Körper stattfindet[10]). Doch ist ein solcher Einfluß der Temperatur auf die spezifische Refraktion der Gase sehr unwahrscheinlich[11]). Es fehlen aber diesbezügliche Experimente.

---

7) Vgl. *Winkelmann*, Handb. 6, p. 741.

8) Während rote Strahlen beim Durchgang durch die ganze Atmosphäre nur wenige Prozent ihrer Intensität verlieren (vgl. *Müller*, Photometrie, p. 140), genügen wenige Zentimeter Luft, um die Strahlen von Wellenlängen unter 157 $\mu\mu$ vollständig zu absorbieren, vgl. *H. Kaysers* Artikel: „Spektralanalyse" in *Winkelmann*, Handb. 6, p. 737. Wenn umgekehrt z. B. *Müller* und *Kempf* in 80° Zenitdistanz die (visuelle) Extinktion für den roten Stern α Tauri um 0.22 Größenklassen größer finden, als für den weißen Stern α Cygni, so liegt das an *physiologischen Ursachen im Auge (Purkinje-Phänomen)*, vgl. *Müller* 1883, p. 274.

9) *H. Kayser* und *C. Runge*, Die Dispersion der atmosphärischen Luft, Berlin Ber. 1893, p. 153, ausführlicher Berlin Abh. 1893.

10) *C. Pulfrich* hat zuerst eingehender nachgewiesen, daß der Brechungsindex von amorphem Quarz sich bei einer Temperaturerhöhung sehr beträchtlich ändert: *C. Pulfrich*, Annalen der Physik und Chemie 34 (1888), p. 332.

11) Vgl. *Winkelmann*, Handb. 6, p. 642.

Die optischen Eigenschaften der atmosphärischen Luft hängen ferner von ihrer tatsächlichen *Zusammensetzung* ab. Das Vorhandensein von *Wasserdampf* und von *Staub* in verschiedenen Mengen ändert ganz wesentlich, qualitativ und quantitativ, die spezifische Absorption, nicht so sehr dagegen die Refraktion. Nach *H. L. Fizeau*[12]) und *J. C. Jamin*[13]) ist der Brechungsindex der feuchten Luft nur wenig geringer als der der trocknen. *E. v. Oppolzer*[14]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß man streng genommen auch die Änderung des *Mischungsverhältnisses von Sauer- und Stickstoff* mit der Höhe in Rechnung ziehen sollte.

3. Beziehungen zwischen Dichtigkeit, Temperatur, Luftdruck und Höhe über dem Meeresniveau.

a) Eine erste Beziehung gibt das

Gesetz von Mariotte-Gay-Lussac:

$$p = \delta(1 + mt), \tag{5}$$

worin p der Luftdruck (Einheit der Druck von 760 mm bei 0° C. unter 45° Breite, am Meeresniveau), δ die Luftdichtigkeit (Einheit die normale der trocknen Luft bei 760 mm und 0°), t die Temperatur in Celsiusgraden, $m = \frac{1}{273}$ den Ausdehnungskoeffizienten der Luft bedeutet.

Bei feuchter Luft, wenn π die Spannung des Wasserdampfes bedeutet, tritt nach *Radau* an Stelle von (5) die Beziehung

$$p - \tfrac{3}{8}\pi = \delta(1 + mt). \tag{5a}$$

Für die Berechnung der Refraktion ist indessen diese Verbesserung fast bedeutungslos; nur bei den neuesten *Radau*schen und *de Ball*schen Tafeln[15]) wird hierauf Rücksicht genommen.

b) Bedingung des aerostatischen Gleichgewichts.

Setzt man weiter voraus, daß die Atmosphäre sich im *mechanischen Gleichgewicht* befindet, so daß an den (sphärischen) Flächen gleicher Dichtigkeit auch gleicher Druck herrscht, so liefert diese

12) Vgl. *H. L. Fizeaus* Brief (1852) an *F. Arago*, aus *Aragos* Nachlaß mitgeteilt in *F. Arago*, Oeuvres complètes 11, Paris-Leipzig 1859, p. 724—732, insbesondere Tabelle p. 731.

13) *J. C. Jamin*, Annales de chimie et de physique (3) 52, Paris 1858, p. 188. Siehe hierüber auch die p. 289 zitierte Arbeit: *De Ball* 1907.

14) *E. v. Oppolzer*, Astr. Nachr. 135 (1894), p. 159.

15) *R. Radau*, Obs. de Paris Ann., mém. 19 (1889), p. G 3 und *L. de Ball*, Refraktionstafeln, Leipzig 1906.

Bedingung folgende Differentialgleichung zwischen p, δ und h (Höhe in km über dem Meeresniveau). Das Inkrement dp des Druckes beim Übergang von der Höhe h zur Höhe $h + dh$ ist, vom Vorzeichen abgesehen, gleich dem Gewicht der bezüglichen Luftsäule der Höhe dh (Querschnitt = 1). Dieses wird durch

$$dG = g\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 \varrho\, dh$$

in *Grammen* gegeben, wenn man durch g die Schwerkraft im Beobachtungsorte, durch a den Erdradius (bei Beobachtungen im Meridian strenger den meridionalen Hauptkrümmungsradius des Erdellipsoids für den Beobachtungsort, dessen Höhe χ mit inbegriffen), durch ϱ die Dichtigkeit der Luft in Verhältnis zu der des Wassers bezeichnet. Hierbei vernachlässigt man die — in der Tat praktisch verschwindende — Anziehung der Luftschicht der Höhe h über dem Beobachtungsorte. Setzt man also obigen Ausdruck von dG dem Gewicht einer Quecksilbersäule der Höhe $-dp \times 0{,}00076$ km (da wir oben als Einheit für p den normalen Druck von 760 mm und als Einheit für h das km angenommen haben) gleich, so folgt die gewünschte Gleichgewichtsgleichung

$$dp \times 0{,}00076 \times g_0 \eta_0 = -g\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 \varrho\, dh,$$

worin g_0 die Schwerkraft bei 45° Breite am Meeresniveau und η_0 die Dichte des Quecksilbers bedeutet. Stellt ϱ_0 die normale Dichte der Luft (bei 0° und 760 mm) dar, so hat man nach den obigen Bezeichnungen

$$\varrho = \varrho_0 \delta,$$

und damit die **Bedingung des aerostatischen Gleichgewichts:**

$$l\,dp = -\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 \delta\, dh, \tag{6}$$

wobei zur Abkürzung:

$$l = 0{,}00076 \frac{\eta_0}{\varrho_0} \frac{g_0}{g} \tag{6a}$$

gesetzt wurde. Die konstanten Größen $a = a_0 + \chi$ und l, welche in der Gleichgewichtsbedingung (6) auftreten, hängen beide von der geographischen Lage (Breite φ und Höhe χ) des Beobachtungsortes ab. Nach *Helmert*[16]) ist nämlich (unter Vernachlässigung der Anziehung der Luftschicht zwischen dem Meeresniveau und der Höhe χ)

$$g = 9{,}7800\,(1 + 0{,}005310 \sin^2 \varphi) \frac{a_0^2}{(a_0+\chi)^2}, \tag{7}$$

16) *Helmert*, Geodäsie 2 (1884), p. 579.

während man für $a_0 = a - \chi$ (meridionaler Hauptkrümmungsradius des Erdellipsoids bei der Breite φ) nach *Bessel*

$$a_0 = \frac{6356{,}06 \text{ km}}{1 - 0{,}0066744 \sin^2\varphi} \tag{8}$$

zu setzen hat. Bei 45° Breite im Meeresniveau und mit den bekannten Werten

$$\eta_0 = 13{,}596, \qquad \varrho_0 = 0{,}001292607$$

erhält man

$$l = 7{,}9939 \text{ km}, \qquad a_0 = 6377{,}36 \text{ km}.$$

Ersteres ist die sog. „*Höhe der homogenen Atmosphäre*", nämlich einer Atmosphäre, welche überall die normale Dichte ϱ_0 der Luft am Meeresniveau besitzt und denselben Druck wie die wirkliche Atmosphäre ausübt.

c) Temperaturmessungen.

Die zwei Gleichungen (5) und (6) reichen nicht aus, um für die verschiedenen Höhen den Wert der drei unbekannten Größen p, δ, t aus den bekannten Werten derselben an der Erdoberfläche auszurechnen. Hierzu ist eine dritte Beziehung erforderlich, welche man am einfachsten aus den experimentellen Untersuchungen über das Verhalten der Temperatur in der Höhe gewinnt.

4. Temperaturänderung mit der Höhe. Beobachtungsresultate. Man besitzt zur Zeit drei ausgezeichnete Beobachtungsreihen über die Temperaturabnahme mit der Höhe, und zwar

a) bis zur Höhe von 8 km die Ergebnisse der Luftfahrten des Berliner Vereins für wissenschaftliche Luftschiffahrt, bearbeitet von *Aßmann* und *Berson*[17]);

b) bis zur Höhe von 10 km die der internationalen Ballonfahrten, bearbeitet von *Hann*[18]);

c) bis zur Höhe von 14 km die von *Teisserenc de Bort* bearbeiteten Ergebnisse der Ballons-sondes-Aufstiege[19]).

Da in den ersten 8, bzw. 10 km alle drei Beobachtungsreihen fast vollkommen übereinstimmen, wird es genügen, um eine Orien-

17) Wissenschaftliche Luftfahrten, bearb. von *R. Aßmann* und *Berson* (3 Bde., Braunschweig 1899 und 1900), Bd. 3.

18) *J. Hann*, Über die Temperaturabnahme mit der Höhe bis zu 10 km Höhe nach den Ergebnissen der internationalen Ballonaufstiege, Wien Ber. 113 (1904), p. 571.

19) *L. Teisserenc de Bort*, Paris C. R. 138 (1904), p. 42.

tierung über das Verhalten der Temperatur als Funktion der Höhe zu bekommen, einen Auszug aus der letzteren ausgedehnteren Reihe zu geben.

Temperaturabnahme mit der Höhe h über dem Boden.

Nach den Ergebnissen von *Teisserenc de Bort*[19]) aus 141 Ballonaufstiegen, bei welchen die Höhe von 14 km erreicht wurde.

Die erste Zeile gibt die Bodentemperatur t_0, die übrigen geben $t_h - t_0$.

Höhe h in km	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
0	+1°,9	+5°,1	+13°,0	+7°,5	+6°,9
1	— 2,1	— 2,7	— 1,2	— 1,4	— 1,8
2	— 3,3	— 7,2	— 5,7	— 5,3	— 5,4
3	— 7,9	—11,5	—10,9	— 9,2	— 9,9
4	—12,8	—17,3	—15,7	—14,0	—15,0
5	—18,9	—23,6	—21,3	—19,9	—20,9
6	—25,6	—30,3	—27,8	—26,2	—27,5
7	—33,4	—37,1	—34,7	—33,3	—34,6
8	—40,9	—44,1	—42,3	—41,0	—42,1
9	—48,8	—51,8	—51,0	—48,9	—50,1
10	—55,9	—57,8	—58,3	—55,8	—57,0
11	—59,8	—58,7	—63,3	—61,9	—60,9
12	—59,8	—58,2	—66,0	—64,6	—62,1
13	—58,8	—57,3	—64,5	—64,6	—61,4
14	—57,4	—57,6	—64,3	—64,6	—61,0

Hiernach wächst der Temperaturgradient pro km von dem mäßigen Mittelwert —1°,8 an der Erdoberfläche bis zum sehr starken, fast adiabatischen Gradienten —8° in der Höhe von 8 km, nimmt dann aber fast plötzlich über 10 km ab, so daß bis 14 km eine *Umkehrungs- oder wenigstens isotherme Zone* herrscht. Die neuesten Aufstiege von Ballons-sondes deuten sogar eine Erstreckung dieser Umkehrung bis in noch größere Höhe (bis zu 20 km) an. Daß tatsächlich irgendwo eine Abnahme des Temperaturgradienten eintreten muß, folgt schon daraus, daß auch eine mittlere Temperaturabnahme von nur 5° pro km den absoluten Nullpunkt (—273°) und hiermit die Grenze der Atmosphäre bereits in 55—60 km Höhe bringen würde, während die Atmosphäre sicherlich weit höher reicht. Für die Berechnung der Refraktion würde man daher zweckmäßig für die Temperatur der Luft bis 10 km Höhe die schon ziemlich gesicherten Beobachtungsresultate verwenden, darüber hinaus aber den Temperaturgradienten —2° oder —1° pro km, welches einer Höhe der gesamten Atmosphäre von 120 bzw. 230 km entspricht.

Aus obiger Tabelle erhellt ferner ein *jahreszeitlicher Unterschied* im Verhalten der Temperatur zwischen dem Frühling-Sommer-Halbjahr und dem Herbst-Winter-Halbjahr, indem bis zu 10 km Höhe

die Temperaturabnahme im ersten Halbjahr bedeutend stärker als die im zweiten ist. Nicht geringer sind nach *Hann* die von der *Wetterlage* abhängigen Unterschiede; bis 6 km findet er nämlich in Hochdruckgebieten eine Temperaturabnahme von —20°, in Niederdruckgebieten aber eine solche von —26°,5. Da nun für die Refraktionstheorie die Temperaturverhältnisse in den ersten km gerade von besonderer Wichtigkeit sind, so wird man als vollkommene Theorien nur diejenigen anerkennen, bei welchen die Berücksichtigung der eben erwähnten meteorologischen Tatsachen leicht möglich ist. In dieser Beziehung ist bis jetzt die *Radau*sche Bearbeitung der Refraktion[15]) allen anderen vorzuziehen.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

II. Physikalische Hypothesen.

5. Kritische Besprechung der Hypothesen über die Konstitution der Atmosphäre. Jede bestimmte Hypothese über den Zusammenhang zwischen zwei der vier veränderlichen Größen t, p, δ, h führt mit den Gleichungen (5) und (6) und den Grenzbedingungen

(9) $t = t_0$ $p = 1$ bei $h = 0$,
$p = 0$ bei $h = H$ (Höhe der gesamten Atmosphäre),

zur vollständigen Kenntnis der *theoretischen* Werte der Temperatur in den verschiedenen Höhen. Man kann also gleich auf Grund der eben (Nr. 4) erwähnten Beobachtungsresultate den relativen Wert der verschiedenen Hypothesen prüfen, bevor man dieselben zur Darstellung der Refraktion anwendet.

a) **Cassini.** Nimmt man zunächst mit *Cassini*[20]) (1662) die *Luftdichtigkeit als konstant*, also

$$\delta = 1$$

an, vernachlässigt man außerdem die Veränderung der Schwerkraft, also den Faktor $\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$ in der Gleichgewichtsbedingung (6), dann erhält man sofort durch Integration in Rücksicht auf die Grenzbedingungen (9):

(10) $$p = \frac{1}{l}(H - h),$$

(11) $$H = l = 7{,}994 \text{ km},$$

(12) $$t - t_0 = -\frac{273^\circ}{l} h = -34^\circ \cdot h.$$

---

20) *Giov. Dom. Cassini*, Ephemerides novissimae motuum coelestium 1661 bis 1666, additis ephemeridibus solis et tabulis refractionum, Mutinae 1662. Vgl. p. 290 sowie Fußn. 43, auch *Wolf*, Handb. 2, p. 263.

Bei den gemachten Hypothesen (konstante Dichtigkeit und Schwerkraft) würden also der Luftdruck und die *Lufttemperatur linear mit der Höhe abnehmen.* Die *Höhe* der Atmosphäre würde aber *nur* 8 *km* betragen, der *Temperaturgradient* dagegen den riesigen Betrag -34^0 *pro km* erreichen, während der höchste mögliche (adiabatische) ein Gradient von $9^0{,}9$ pro km ist. Unter Beibehaltung des Faktors $\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$ in (6) würde man praktisch denselben Druck- und Temperaturverlauf erhalten, also immer noch in schroffem Widerspruch mit den Beobachtungsresultaten über die Konstitution der Atmosphäre bleiben.

b) **Tobias Mayer.** Die *Mayer*sche Refraktionsformel (Nr. 8)[21]), auf welche sich die *Bouguer-*, *Simpson-* und *Bradley*schen Formeln reduzieren lassen, gründet sich auf die Hypothese einer *linearen Abnahme der Dichtigkeit*, setzt also eine Beziehung der Form

$$\delta = 1 - \frac{h}{K} \tag{13}$$

voraus. Die Höhe K, bei welcher die Dichtigkeit verschwindet, muß nicht als die Höhe H der gesamten Atmosphäre aufgefaßt werden, da man für die Grenze der Atmosphäre eine Dichtigkeit $\delta_H > 0$ annehmen kann; es soll also nur

$$K \geqq H$$

sein. Unter Vernachlässigung der Veränderung der Schwerkraft erhält man zunächst aus (6) mit den Bedingungen (9)

$$p = 1 - \frac{1}{l}\left(h - \frac{h^2}{2K}\right), \tag{14}$$

$$0 = 1 - \frac{1}{l}\left(H - \frac{H^2}{2K}\right), \tag{15}$$

endlich aus (5)

$$t = -\frac{273^0}{2l}h \cdot \frac{2(K-l)-h}{K-h}. \tag{16}$$

Bei $K = H = 2l = 16$ km, wenn man also die Dichtigkeit an der Grenze der Atmosphäre als verschwindend klein annimmt, folgt

$$t = -17^0{,}08 \cdot h,$$

also wiederum eine *gleichförmige Temperaturabnahme*, welche aber mindestens *dreimal so stark als die beobachtete* ist. Nimmt man ferner $K = nH$ (worin $n \geq 1$) an, dann folgt aus (15)

$$H = \frac{2n}{2n-1} \cdot l,$$

21) Vgl. Fußnote 44.

also eine noch kleinere Höhe für die Atmosphäre und, wie aus (16) sofort ersichtlich, eine noch stärkere Temperaturabnahme mit der Höhe.

Bei strengerer Berücksichtigung der Gleichung (6) würde man wieder praktisch dasselbe Temperaturgesetz erhalten.

c) **Newton.** Im Gegensatz zu den eben besprochenen Hypothesen, welche eine zu starke Temperaturabnahme mit der Höhe ergeben, steht die *Newton*sche Hypothese[22]) einer *konstanten Temperatur*. Führt man diese Annahme, welche durch

$$t = 0$$

ausgedrückt werden kann, in (5) und (6) ein und verwendet die „reduzierte Höhe"

$$s = \frac{h}{a + h}, \tag{17}$$

so folgt für die Dichteverteilung ein *Exponentialgesetz:*

$$p = \delta = e^{-\frac{a}{i}s}. \tag{18}$$

Als *Höhe der gesamten Atmosphäre* ergibt sich hier, auch im Gegensatz zu den obigen Hypothesen, welche zu kleine Höhen ergaben, ein *unendlicher* Wert.

d) **Laplace.** Aus der Tatsache, daß die beobachteten Werte der astronomischen Refraktion zwischen denjenigen liegen, welche die *Mayer*sche bzw. die *Newton*sche Formel ergeben, schloß *Laplace*[23]), daß eine bessere Darstellung der Refraktion durch eine *Verbindung des arithmetischen und des geometrischen Gesetzes für die Abnahme der Luftdichtigkeit* zu erreichen sei. So wurde er zum Ausdruck

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + f\frac{u}{k}\right)e^{-\frac{u}{k}} \tag{19}$$

geführt, worin δ_0 den Wert der Luftdichte an der Erdoberfläche, f und k konstante Größen, u aber die neue Variabele

$$u = s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) \tag{20}$$

bezeichnet. Hierbei bedeutet α die sogenannte *Refraktionskonstante*

22) Über *J. Newtons* Refraktionstafel vgl. *J. B. Biot*, Analyse des tables de réfraction construites par *Newton*, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer, Journal des Savants, année 1836, Paris 1836, p. 735. Ferner *Wolf*, Handb. 2, p. 267. Siehe auch p. 290.

23) *P. S. de Laplace*, Traité de mécanique céleste 4, Paris 1805, seconde partie, livre 10, chapitre 1: Des réfractions astronomiques = Oeuvres 4, Paris 1880, p. 233 ff., insbesondere § 7, p. 263.

(Nr. 7), welche sehr nahe dem Überschuß des Brechungsindex μ der Luft über die Einheit gleich ist. Nach *Bessel* (Fundamenta astronomiae) ist

(21) $$\alpha = 0{,}00029243 \quad \text{(bei } 0^0 \text{ und } 760 \text{ mm)}.$$

Der Zusammenhang der Dichtigkeit δ mit der Höhe $h = \frac{as}{1-s}$ ist also bei *Laplace* keineswegs einfach, und die Beziehung (19) hat tatsächlich mehr die möglichste Vereinfachung der analytischen Behandlung des Refraktionsintegrals (Nr. 7), als die Darstellung der tatsächlichen Verhältnisse der Atmosphäre im Auge. Trotzdem hat die *Laplace*sche Hypothese einen höheren physikalischen Wert, als die vorherigen Annahmen.

Dividiert man die Gleichung (6) durch

$$p_0 = \delta_0(1 + mt_0)$$

(Gleichung von *Mariotte-Gay-Lussac* für die Erdoberfläche) und setzt man der Kürze wegen

(22) $$l(1 + mt_0) = l_0,$$

(22a) $$x = \frac{\delta}{\delta_0} \quad (\text{„}\textit{relative Dichtigkeit}\text{“}),$$

so erhält man

(23) $$l_0 \frac{dp}{p_0} = -\alpha x ds.$$

Nach Gl. (20) ist aber

$$ds = du - \alpha dx,$$

also

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{a\alpha}{l_0} x dx - \frac{a}{l_0} x du,$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen

$p = 0$ (Grenze der Atmosphäre)

und $p = p$ (laufende Höhe)

folgt

(24) $$\frac{p}{p_0} = \frac{a\alpha}{2l_0} x^2 + \frac{ak}{l_0} x + \frac{fak}{l_0} e^{-\frac{u}{k}} + c,$$

worin c die Integrationskonstante bedeutet. Zwischen den Konstanten k, f, c bestehen zwei Gleichungen, den Grenzbedingungen (9) entsprechend, und zwar

(25) $$\begin{cases} 1 = \frac{a\alpha}{2l_0} + \frac{ak}{l_0} + \frac{fak}{l_0} + c, \\ 0 = \frac{a\alpha}{2l_0} \xi^2 + \frac{ak}{l_0} \xi + \frac{fak}{l_0} e^{-\frac{U}{k}} + c. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten U und ξ die Grenzwerte der Variabeln U, bzw. der Dichtigkeit x, welche letztere sich mit der Höhe einem von Null verschiedenen Grenzwert nähert; indessen findet man bei dem von *Laplace* angenommenen Wert der Konstanten k

$$k = \frac{1}{1342} \tag{26}$$

bereits in einer Höhe von 64 km (wo s und u sehr nahe $= 0{,}01$ sind)

$$e^{-\frac{u}{k}} = e^{-13{,}42} = 0{,}0000015.$$

Die Luftdichtigkeit ist also bei dieser Höhe schon sehr klein und kann an der Grenze der Atmosphäre *praktisch* gleich null gesetzt werden. Damit folgt sogleich aus (24) und (25)

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \frac{a\alpha}{2l_0}x^2 + \frac{ak}{l_0}x + \frac{fak}{l_0}e^{-\frac{u}{k}}, \\ 1 &= \frac{a\alpha}{2l_0} + \frac{ak}{l_0} + \frac{fak}{l_0}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Bei den normalen Werten von a, l_0, α und k (s. Nr. 3 und Formel (21) und (26)) folgt aus letzterer Gleichung

$$f = 0{,}495.$$

Dann ist man imstande, aus den Gleichungen (19), (20) und (27) die Werte von x, s und p bei verschiedenen Werten von u, und hiermit auch die Werte der Temperatur

$$t = -273^0 \cdot \left(\frac{p}{\delta} - 1\right)$$

(s. Gl. (5)) für die verschiedenen Höhen $h = \frac{as}{1-s}$ auszurechnen. Man findet:

u	$x = \delta : \delta_0$	s	$p : p_0$	h	t
0,0000	1,0000	0,000000	1,0000	0,0 km	0,°0
0,0002	0,8662	0,000239	0,8233	1,5	—13,5
0,0004	0,7400	0,000476	0,6728	3,0	—24,8
0,0006	0,6252	0,000710	0,5467	4,5	—34,2
0,0008	0,5234	0,000939	0,4422	6,0	—42,3
0,0010	0,4349	0,001165	0,3565	7,4	—49,2
0,0012	0,3591	0,001388	0,2866	8,9	—55,1
0,0014	0,2949	0,001606	0,2299	10,3	—60,1

Die Temperaturabnahme bei der *Laplace*schen Hypothese geht also zunächst sehr rasch, fast adiabatisch[24]), vor sich, wird aber mit

24) Bei genauerer Berechnung des Differentialquotienten der Temperatur nach der Höhe findet man, daß an der Erdoberfläche selbst der Temperatur-

der Höhe immer kleiner, so daß im 8ten km nur noch ein Temperaturgradient von 4° übrig bleibt. Das sind im Großen und Ganzen gut annehmbare Werte für den Temperaturgradienten, viel bessere jedenfalls, als bei den vorherigen und auch bei mancher späteren Hypothese. Leider ist der Gang des Temperaturgradienten gerade dem beobachteten entgegengesetzt, da die neuesten Ballonaufstiege mäßige Werte bei der Erdoberfläche und ein Maximum bei 8 km Höhe ergeben. Als Grenzwert der Temperatur an der oberen Grenze der Atmosphäre erhält man übrigens bei der *Laplace*schen Hypothese nicht den absoluten Nullpunkt (—273°), sondern

$$t = -273^0\left(1 - \frac{ak}{l_0} - \frac{fak}{l_0}\frac{1}{1+\frac{f}{k}(1-\alpha)}\right) = -111^0.$$

e) **Kramp** und **Bessel.** Die *Kramp*sche Refraktionstheorie[25]), welche für die *Bessel*sche vorbildlich gewesen ist, geht aus von der Fundamentalhypothese einer *exponentialen Temperaturabnahme,* nämlich

$$\text{(28)} \qquad \text{(spezifische Elastizität)} = \frac{1+mt}{1+mt_0} = e^{-\frac{a}{g}s},$$

worin m, a, s die schon p. 297, 298, 303 erwähnte Bedeutung haben, g aber eine empirische Konstante ist. Für diese nahm *Bessel,* nach den *Bradley*schen Meridianbeobachtungen, den Wert 228 an, so daß $\frac{a}{g} = \frac{6377}{228}$ nahe 30 beträgt. Rechnet man nun aus (28) die Werte von $t - t_0$ bei den drei Annahmen

$$\frac{a}{g} = 20, \quad = 30, \quad = 40,$$

so findet man bzw.

h =	1 km	10 km	1 km	10 km	1 km	10 km
$t - t_0$ =	—4°,5	—41°,8	—6°,7	—60°,1	—8°,9	—77°,1

Die Temperaturabnahme mit der Höhe bei der *Kramp*schen Hypothese ist also innerhalb der ersten Kilometer noch eine fast gleichförmige und kann bei passender Auswahl des Wertes von g in gute Übereinstimmung mit den beobachteten Werten der Temperatur gebracht werden. An der Grenze der Atmosphäre führt diese Hypothese zum absoluten Nullpunkt.

---

gradient nach der *Laplace*schen Hypothese und bei den angenommenen Werten der Konstanten gleich —11,°4, also überadiabatisch wird.

25) *Chr. Kramp,* Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Leipsic et Paris 1799.

Führt man die Hypothese (28) in (5) ein und eliminiert δ zwischen (5) und (6), so erhält man durch Integration

$$\log \frac{p}{p_0} = \frac{g}{l_0}\left(1 - e^{-\frac{a}{g}s}\right),$$

also *verschwindet bei Kramp der Luftdruck nicht strenge* in unendlicher Entfernung von der Erde. Für die Dichtigkeit x (22a) erhält man

$$\log x = \log \frac{p}{p_0} - \log \frac{1+mt}{1+mt_0} = \frac{g}{l_0}\left(1 - e^{-\frac{a}{g}s}\right) + \frac{a}{g}s$$
$$= -a\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{g}\right)s - \frac{a^2}{2gl_0}s^2 \pm \cdots.$$

Zur *definitiven Berechnung* der Refraktion behält *Kramp* schließlich — und *Bessel*[26]) mit ihm — nur das Glied erster Ordnung bei, nimmt also

$$\log x = -a\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{g}\right)s = -\beta s \tag{29}$$

an. Das ist ein rein *exponentiales Gesetz für die Luftdichtigkeit*, wie wir es schon bei der *Newton*schen Hypothese angetroffen haben, nur hängt hier die Konstante β von der Temperatur an der Erdoberfläche ab (vgl. Formel (22)). Die Beziehung (29) bringt aber ein ganz *anderes Temperaturgesetz* als (28) mit sich. Man findet nämlich durch die Einführung von (29) in (5) und (6)

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{a}{l_0\beta}(e^{-\beta s} - 1), \tag{30}$$
$$\frac{1+mt}{1+mt_0} = \frac{a}{l_0\beta} + \left(1 - \frac{a}{l_0\beta}\right)e^{-\beta s}.$$

Rechnet man hieraus mit den *Bessel*schen Werten

$$a = 6372969 \text{ m} \quad \left.\begin{array}{l}\beta_0 = 745{,}747 \\ l_0 = 8236{,}73 \text{ m}\end{array}\right\} \text{ bei } t_0 = 9^0{,}31$$

den Wert von $t - t_0$, so findet man für

$h =$	1 km	2	3	4	6	8
$t - t_0 =$	$-1^0{,}3$	$-2^0{,}8$	$-4^0{,}5$	$-6^0{,}4$	$-10^0{,}8$	$-16^0{,}5$,

während die beobachtete Temperaturabnahme bei 8 km Höhe nicht weniger als -40^0 beträgt (p. 300). Nach Gl. (30) bekommt man weiter bei $p = 0$ als Grenzwert für s (reduzierte Höhe der Atmosphäre bei der *Bessel*schen Hypothese)

$$S = -\frac{1}{\beta}\log\left(1 - \frac{l_0\beta}{a}\right);$$

26) *F. W. Bessel*, Fundamenta astronomiae pro anno 1755, Regiomonti 1818, sectio IV, p. 26/44, verbessert in *F. W. Bessel*, Tabulae Regiomontanae[47]), Regiomonti Prussorum 1830, p. LIX. Vgl. VI 2, 5 (*Cohn*), p. 246, Fußnote 97.

das gibt nur $H = 28{,}5$ km für die Höhe der gesamten Atmosphäre. Die Luftdichtigkeit an der Grenze der Atmosphäre wird hiernach nicht kleiner als

$$1 - \frac{l_0 \beta}{a} = 0{,}036,$$

während die Temperatur bis zum absoluten Nullpunkt herabsinkt. Das sind alles unphysikalische Bedingungen.

f) **Ivory**[27]) nahm als Fundamentalgesetz für die Konstitution der Atmosphäre eine *lineare Beziehung zwischen Temperatur t und Luftdichtigkeit x* (Formel 22a) in der Form

$$\frac{1 + mt}{1 + mt_0} = 1 - f(1 - x) \tag{31}$$

an. Hieraus in Verbindung mit Gl. (5) folgt

$$\frac{dp}{p_0} = (1 - f + 2fx)dx.$$

Eliminiert man p zwischen dieser und der Gleichgewichtsgleichung (23), so erhält man die Differentialgleichung für x

$$(1 - f + 2fx)\frac{dx}{x} = -\frac{a}{l_0} ds,$$

aus welcher durch Integration

$$2f \cdot (1 - x) - (1 - f) \log x = \frac{a}{l_0} s \tag{32}$$

folgt. Bei gegebenen Werten von x kann man aus (31) und (32) die bezüglichen Werte von t und s, dann auch von h berechnen und hiermit das von der *Ivory*schen Hypothese bedingte Temperaturgesetz herstellen. Für die Konstante f nahm *Ivory* zunächst den Wert $\frac{1}{4}$, später nach den Versuchen von *Dalton* und *Ramond* $\frac{2}{3}$ an. Hier folgen für einige Werte von x die entsprechenden Werte von h und t bei den extremen Annahmen $f = 0{,}2$, $f = 0{,}3$; wir fügen noch die beobachteten Temperaturabnahmen im Jahresmittel (vgl. p. 300) hinzu.

x	$f = 0{,}2$			$f = 0{,}3$		
	h	$t_{ber.}$	$t_{beob.}$	h	$t_{ber.}$	$t_{beob.}$
0,95	0,5 km	−2°,7	0°,0	0,5 km	−4°,1	0°,0
0,90	1,0	−5°,5	−1°,8	1,1	−8°,0	−1°,8
0,85	1,5	−8°,2	−3°,5	1,6	−12°,3	−3°,5
0,80	2,1	−10°,9	−5°,8	2,2	−16°,4	−6°,3
0,70	3,2	−16°,4	−10°,8	3,4	−24°,6	−11°,8
0,50	6,0	−27°,3	−27°,5	6,3	−41°,0	−29°,5
0,30	10,0	−38°,2	−57°,0	10,1	−57°,3	−57°,4

27) *J. Ivory*, On the astronomical refractions, Lond. Phil. Trans. 1823, p. 409 [Refraktionstafel p. 491 ffg.] und Lond. Phil. Trans. 1838, p. 169 [Refraktionstafel p. 227 ffg.].

In beiden Fällen ist die berechnete Temperaturabnahme in den ersten km zu rasch; der Gang des Temperaturgradienten ist ferner, wie schon bei der *Laplace*schen Hypothese, gerade dem beobachteten entgegengesetzt. Die kleinsten Abweichungen (Beobachtung — Rechnung) bis 5 km Höhe bietet die erste Annahme $f = 0{,}2$ (Normalwert bei den neueren *Radau*schen Refraktionstafeln). Ferner bedingt die *Ivory*sche Hypothese bei unendlicher Höhe der Atmosphäre einen Grenzwert für die Temperatur:

$$t_\infty = -f \cdot 273^0(1 + mt_0),$$

also etwa -55^0, bei $f = 0{,}2$ und $t_0 = 0^0$. Das ist offenbar eine zu hohe Temperatur, da schon bei 10 km Höhe die Beobachtung geringere Werte ergibt (vgl. Tabelle in Nr. 4, p. 300).

g) **Schmidt.** Nach den Beobachtungen im Gebirge, welche im allgemeinen eine fast gleichförmige Temperaturabnahme mit der Höhe ergeben, setzte *Schmidt*[28]) die *Temperatur als lineare Funktion der Höhe h* und zwar in der Form

$$\frac{1 + mt}{1 + mt_0} = 1 - \frac{h}{H} \tag{33}$$

an. Hiernach hängt der Temperaturgradient, außer von der angenommenen Höhe H der Atmosphäre, auch noch von der Temperatur t_0 an der Erdoberfläche ab, und zwar in Übereinstimmung mit den meteorologischen Ergebnissen, daß die Temperaturabnahme um so stärker ist, je größer t_0 ist. *Schmidt* nimmt $H = 49{,}1$ km an; dementsprechend findet man bei den mittleren Bodentemperaturen $+ 1^0{,}9$ und $+ 13^0{,}0$ von *Teisserenc de Borts* Winter- und Sommerfahrten die Temperaturabnahme bis 10 km Höhe

$t_{10} - t_0$	Winter	Sommer
nach der *Schmidt*schen Hypothese . . .	$-56^0{,}0$	$-58^0{,}2$
nach *Teisserenc de Borts* Aufstiegen . . .	$-55^0{,}9$	$-58^0{,}3$

Das ist eine geradezu überraschende, wenn auch zum Teil zufällige Übereinstimmung. Freilich, da der beobachtete Temperaturgradient in der freien Luft (s. Tabelle in Nr. 4, p. 300) nicht gerade konstant bleibt, ist eine ebenso gute Übereinstimmung in den geringeren Höhen nicht zu erwarten; die *Schmidt*sche Hypothese bietet

28) *Ed. Schmidt*, Theorie der astronomischen Strahlenbrechung, Göttingen 1828.

aber jedenfalls vor den anderen von *Laplace, Kramp, Ivory* und den gleich zu erwähnenden von *Gyldén, Kowalski, v. Oppolzer* den Vorteil, daß der Temperaturgradient nicht einen dem beobachteten entgegengesetzten Gang (von 0 bis 10 km Höhe, also bei dem für das Refraktionsintegral wichtigsten Teil) aufweist.

h) **Bauernfeind.** Die Hypothese von *Bauernfeind*[29]) unterscheidet sich von der *Schmidt*schen nur darin, daß die *Höhe der Atmosphäre* nicht als konstant, sondern als *von der Temperatur an der Erdoberfläche abhängig* aufgefaßt wird. *Bauernfeind* setzt nämlich

$$H = 48 \text{ km } (1 + mt_0).$$

Hierdurch fällt aber die jährliche Veränderung des Temperaturgradienten weg, welche die *Schmidt*sche Hypothese so gut darzustellen vermag. In dieser Hinsicht ist also die Neuerung keineswegs glücklich. Außerdem nimmt *Bauernfeind* bei der folgenden Entwicklung des Refraktionsintegrals für die Dichte x (Gl. 22a) die Beziehung

$$x = \left(\frac{1 + mt}{1 + mt_0}\right)^5$$

an. Das ist aber weiter nichts, als eine andere Hypothese, welche mit der Fundamentalhypothese (33) nicht im Einklang steht, wovon man sich sofort durch das Heranziehen der Gleichgewichtsbedingung überzeugen kann. Die Temperatur an der Grenze der Atmosphäre ist bei *Bauernfeind*, wie bei *Schmidt*, der absolute Nullpunkt.

i) **Gyldén.** Als eine Umgestaltung der *Schmidt*schen Hypothese kann man auch die *Gyldén*sche[30]) auffassen, welche die Temperatur t mit der reduzierten Höhe s (p. 303, 307) durch die Formel

$$\frac{1 + mt}{1 + mt_0} = (1 - \tfrac{1}{2}\beta s)^2 = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^2 \tag{34}$$

verbindet. Unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes, welches fast ohne Bedeutung bei der Berechnung der Refraktion ist, reduziert sich (34) auf (33). Für die Konstante β setzt *Gyldén*

$$\beta = 120\,(1 + i),$$

worin i verschiedene Werte für die verschiedenen Jahreszeiten (ja sogar für die Monate) annehmen soll. Nach den Refraktionsbeobachtungen von *Fuß*[31]) ist z. B.

---

29) *C. M. Bauernfeind*, Astr. Nachr. 62 (1864), p. 209; Astr. Nachr. 67 (1866), p. 33.

30) *H. Gyldén*, Refr. 1866—68. Siehe auch St. Pét. Bull. 12 (1868), p. 474.

31) *V. Fuß*, Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizonts, St. Pét. Mém. (7) **18** (1871/72), Nr. 3.

	Januar	April	Juli	Oktober
$i =$	$-0{,}40$	$+0{,}05$	$+0{,}66$	$-0{,}10$
$\beta =$	72	126	199	108

Hiernach ändert sich also der Temperaturgradient im Laufe des Jahres, und zwar erhält man, den meteorologischen Ergebnissen entsprechend, größere Werte im Frühling-Sommer als im Herbst-Winter Die theoretische Änderung ist aber viel größer als die beobachtete, wie folgende kleine Zusammenstellung beweist.

Temperaturabnahme bei 5 und 10 km Höhe nach der Theorie von *Gyldén* (*Fuß*) und nach den Beobachtungen von *Teisserenc de Bort*.

Höhe	Winter: $t_0 = +1°{,}9$		Frühling: $t_0 = +5°{,}1$		Sommer: $t_0 = +13°{,}0$		Herbst: $t_0 = +7°{,}5$	
	Theor.	Beob.	Theor.	Beob.	Theor.	Beob.	Theor.	Beob.
5 km	$-15°{,}2$	$-18°{,}9$	$-25°{,}1$	$-23°{,}6$	$-39°{,}6$	$-21°{,}3$	$-22°{,}3$	$-19°{,}9$
10 km	$-29°{,}7$	$-55°{,}9$	$-47°{,}9$	$-57°{,}8$	$-72°{,}4$	$-58°{,}3$	$-39°{,}0$	$-55°{,}8$

Läßt man die jährliche Änderung des Temperaturgradienten fallen, welche man eventuell bei passender Auswahl der Werte von i erheblich besser darstellen könnte, so bleibt immer zu Ungunsten der *Gyldén*schen Hypothese bestehen, daß sie für den Temperaturgradienten nach der Höhe einen dem beobachteten entgegengesetzten Gang ergibt. Für die Höhe der Atmosphäre ergibt die *Gyldén*sche Hypothese den Wert

$$H = \frac{aS}{1-S} = \frac{6377}{59} = 108\,\text{km};$$

die Grenztemperatur ist der absolute Nullpunkt.

k) **Kowalski.** Wie eine Gruppe von Hypothesen für die Refraktionstheorie (*Schmidt*, *Bauernfeind*, *Gyldén*) an die Ergebnisse der Temperaturbeobachtungen im *Gebirge* (gleichförmige Temperaturabnahme) angeschlossen werden kann, so knüpft eine andere Gruppe an die ersten ausgedehnteren Untersuchungen über die Temperaturverhältnisse in *der freien Luft*, d. h. an die *Glaisher*schen Luftfahrten (1860—1870) an. Diese Untersuchungen, welche leider durch die neueren nicht bestätigt und wahrscheinlich durch Strahlungswirkungen und instrumentelle Fehler entstellt wurden, ergaben eine, an der Erdoberfläche sehr starke, sich aber mit der Höhe sehr rasch verringernde Temperaturabnahme.

Eine vorzügliche Darstellung der *Glaisher*schen Resultate erhielt zunächst *Kowalski*[32]) mit der Hypothese

32) *M. Kowalski*, Recherches sur la réfraction astronomique, Kasan 1878.

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = 1 + k\,(1-x)^{\frac{5}{7}}, \tag{35}$$

worin x wieder die relative Dichte (Gl. 22a),

$$k = 0{,}1871 \quad \text{für} \quad t_0 = 62^0 \text{ Fahr.} = 16^0{,}7 \text{ C.}$$

Aus (35), in Verbindung mit den Gleichungen (5) und (23), ergibt sich durch Reihenentwicklung nach den Potenzen von $1 - x$:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{x}{1 + k\,(1-x)^{\frac{5}{7}}} = x - kx\,(1-x)^{\frac{5}{7}} + \cdots, \tag{36}$$

$$\frac{a}{l_0} s = -\log x + k\,(1-x)^{\frac{5}{7}} - \tag{37}$$

$$- k\,(1-x)^{\frac{5}{7}}\left[\tfrac{7}{12}(1-x) - \tfrac{7}{19}(1-x)^2 + \cdots\right] + \cdots$$

Hieraus kann man bei gegebenem x den Wert von t und s oder h (s. Gl. (17)) ausrechnen und hiermit die Art der Temperaturabnahme nach dieser Hypothese erkennen. Man findet:

bei $x =$	0,9	0,5	0,2
bzw. $h =$	1,1 km	6,3 km	13,3 km
$t - t_0 =$	$-10^0{,}1$	$-29^0{,}8$	$-39^0{,}9$

während nach den Aufstiegen von *Teisserenc de Bort* für dieselben Höhen und für den Sommer ($t_0 = 13^0{,}3$) bzw.

$t - t_0 =$	$-1^0{,}6$	$-29^0{,}9$	$-64^0{,}5$

ist. Der zufälligen Übereinstimmung bei 6 km steht die starke Abweichung bei 1 bzw. 13 km gegenüber. Die Temperatur an der Grenze der Atmosphäre wird nach Gl. (35) viel zu hoch, nämlich

$$t = \frac{16^0{,}7 - k \cdot 273^0}{1+k} = -29^0.$$

l) **v. Oppolzer, Mendeléef, Pizzetti.** Ähnliche Einwendungen kann man gegen die *v. Oppolzer*sche Hypothese[33]) und die *Mendeléef*sche[34])

$$t = -50^0 + (t_0 + 50^0)\,x$$

$$t = -36^0 + (t_0 + 36^0)\,\frac{p}{p_0}$$

erheben. Die erste unterscheidet sich nur in der Bestimmung des Parameters f von der schon besprochenen *Ivory*schen Hypothese; die

33) *Th. v. Oppolzer*, Wien Denkschr. 1886, p. 53.

34) *D. Mendeléef*, De la température des couches supérieures de l'atmosphère, Archives des sciences physiques et naturelles, nouvelle période 55, Genève 1876, p. 233.

zweite, aus den *Glaisher*schen Ergebnissen abgeleitete, von *Pizzetti*[35]) später (1897) zu einem Versuch über die Refraktionstheorie angewandte Formel, gibt offenbar eine zu hohe Temperatur (— 36°) für die Grenze der Atmosphäre.

6. Schlußbetrachtung über die Leistungen der bis jetzt aufgestellten Hypothesen. Brunssches Verfahren. Andere mehr oder weniger komplizierte Hypothesen rühren von *Young* (1824), von *Lubbock* (1855), von *Baeyer* (1860) und von *Radau* (1882—1889) her[36]). *Keine* ist geeignet die Ergebnisse der neueren Forschungen über die Verteilung der Temperatur in der freien Luft einigermaßen gut darzustellen. Auch scheint es sehr fraglich, ob eine einzige so biegsame Formel zu finden ist, daß sie gleich gut die für die verschiedenen Jahreszeiten und Witterungslagen geltenden Temperaturgesetze darzustellen vermag.

Wenn man dabei der Mühe gedenkt, welche die zahllosen analytischen Behandlungen der Refraktionstheorie, insbesondere die vollkommensten von *Gyldén* und *Radau*, gekostet haben, so scheint die Frage berechtigt, ob die Ableitung der astronomischen Refraktion nicht leichter zu erreichen ist vermittelst *der bloßen numerischen Berechnung (mechanischer Quadratur) unter direkter Anpassung an die Ergebnisse der Physik der Atmosphäre*, als durch den Umweg über eine Hypothese, von welcher man gegenwärtig für die Gebiete unter 10 km Höhe schon gänzlich absehen kann und welche nach den neuesten Fortschritten der Ballons-sondes-Technik bald wohl überhaupt entbehrlich sein wird

Eine andere gründliche Vereinfachung der Behandlung der astronomischen Refraktion wurde im Jahre 1891 von *H. Bruns*[37]) vorgeschlagen, welche darin besteht, daß man die Hypothese gleich in der Form einer Beziehung zwischen dem Brechungsindex μ und der Höhe H annimmt, mit so vielen empirischen Konstanten, als nötig sind, um die beobachteten Werte der Refraktion gut darzustellen. Das ist zweifellos das einfachste Verfahren, wenn man nur die *empirische* Darstellung der Refraktion im Auge hat. Was man aber außerdem sucht, ist die *physikalische* Darstellung des Phänomens, welche nur

35) *Pizzetti* 1897.

36) *Th. Young*, Lond. Phil. Trans. 1824, part 1, p. 159; *J. W. Lubbock*, Lond. Astr. Soc. Mem. 24 (1855), p. 103; *J. J. Baeyer*, St. Pét. Mém. (7), 3, St. Petersburg 1860, Nr. 5; *R. Radau* 1882 und *R. Radau* 1889.

37) *H. Bruns*, Leipzig Ber. 43 (1891), p. 164; *F. Hausdorff*, Leipzig Ber. 43 (1891), p. 481.

durch die Verbindung mit den anderweitig bekannten Daten der Physik der Atmosphäre zu erreichen ist und wohl am leichtesten eben durch mechanische Quadratur erreicht wird.

III. Theorie der Refraktion.

7. **Aufstellung des Refraktionsintegrals.** a) *Die Refraktionskurve.* Denkt man die Atmosphäre in unendlich viele Schichten gleicher Dicke zerlegt und setzt eine beliebige aber kontinuierliche Änderung der Dichte in der Reihe dieser Schichten voraus, so daß (vgl. Nr. 2) auch der Brechungsindex μ kontinuierlich sich ändert; nennt ferner μ und $\mu' = \mu + d\mu$ die Brechungsindizes für zwei einander folgende Schichten M und M', dann wird nach dem *Snellius*schen Brechungsgesetz zwischen den bezüglichen Inzidenz- und Brechungswinkeln i und $i - di$ die Gleichung

$$\sin i = \frac{\mu + d\mu}{\mu} \sin (i - di) = \sin i - \cos i di + \sin i \frac{d\mu}{\mu}$$

bestehen. Hieraus folgt das **Differentialgesetz der Refraktion**

$$di = \operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} = dR \tag{38}$$

für die Elementarrefraktion dR beim Übergang von M in M'. Nimmt man weiter an, daß das Erdellipsoid in der Nähe des Beobachtungsortes durch die oskulierende Kugel im Beobachtungsorte selbst ersetzt werden kann und daß die Flächen gleicher Dichte der Atmosphäre die hierzu konzentrischen Kugeln sind, dann führt das Brechungsgesetz sofort auf den Schluß:

Die Trajektorie der Lichtstrahlen (Refraktionskurve) durch die angenommene, sphärisch geschichtete Atmosphäre ist immer eine ebene und zwar in einer vertikalen Ebene liegende Kurve.

Wenn aber die Kurve eine ebene ist, so ergibt das Integral aus den Kontingenzwinkeln dR längs eines bestimmten Bogens (der Refraktionskurve) genommen den Winkel zwischen den Tangenten in den Endpunkten, also in unserem Falle die dem Lichtstrahl auf dem betrachteten Wege erteilte Refraktion R. Geht dieser Weg durch die ganze Atmosphäre hindurch, wie es bei der Beobachtung von Gestirnen der Fall ist, dann spricht man von der *astronomischen Refraktion*, geht der Lichtstrahl dagegen zwischen zwei der Erdoberfläche angehörigen Punkten, dann spricht man von der *terrestrischen Refraktion*. Da die letztere immer als Differenz zweier astronomischer Refraktionen aufgefaßt werden kann, so brauchen wir darauf nicht

näher einzugehen. S. übrigens im Teilbande *„Geodäsie und Geophysik"* den Artikel VI 1, 3 (*Pizzetti*), Nr. **34**, **35**, **36**.

Die astronomische Refraktion R wird also durch das Integral

$$R = \int_{\mu_H}^{\mu_0} \operatorname{tang} i \frac{d\mu}{\mu} \tag{39}$$

gegeben, worin μ_H und μ_0 die an der Grenze der Atmosphäre bzw. an der Erdoberfläche bezüglichen Werte von μ bedeuten. Um die gesamte Refraktion zu erhalten, hat man im allgemeinen die Brechungen an den Grenzen hinzuzufügen. Die Brechung an der oberen Grenze der Atmosphäre ist nicht zu vernachlässigen bei den Theorien, welche, wie die *Bessel*sche, eine nicht sehr kleine Grenzdichte annehmen. Für die untere Grenze ist keine besondere Grenzbrechung erforderlich, so lange man den Beobachter in der *freien* Luft voraussetzt. Das ist aber in der Praxis nie der Fall, und die neueren genaueren Refraktionsbeobachtungen, insbesondere die von *Bauschinger*[38]), von *Großmann*[39]), von *Courvoisier*[40]), haben die Existenz einer unteren, von den örtlichen Verhältnissen abhängigen „Saalrefraktion" außer Zweifel gestellt.

b) *Die Invariantenbeziehung (Elimination von i).*

Bei der Aufstellung der Gleichung (39) haben wir im Grunde nur von der Annahme Gebrauch gemacht, daß die Refraktionskurve eine ebene ist. Beachten wir aber, daß die isotropen, atmosphärischen Schichten von sphärisch konzentrischen Flächen begrenzt sind, dann ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen i, μ und h (oder $r = a + h$), so daß zur weiteren Berechnung der Refraktion nur noch die Kenntnis der Beziehung zwischen μ und h erforderlich ist.

Betrachten wir nämlich nochmals zwei einander folgende, unendlich dünne, atmosphärische Schichten M und M'; nennen i, e den Inzidenz- bzw. Brechungswinkel an der Grenzfläche zwischen M und M', i' den Inzidenzwinkel auf die innere Grenzfläche von M', r und r' die Entfernungen der Inzidenzpunkte I und I' von dem Erdmittelpunkt O, μ und μ' die Brechungsindizes für M und M', dann folgt aus dem Brechungsgesetze:

$$\mu \sin i = \mu' \sin e$$

38) *J. Bauschinger* 1898.
39) *E. Großmann* 1901.
40) *Courvoisier* 1904.

und aus dem Dreiecke OII':

$$r' \sin i' = r \sin e,$$

also gilt die **Invariantenbeziehung:**

$$r\mu \sin i = r'\mu' \sin i' = \text{konst.}$$

In Worten ausgedrückt: *Das Produkt aus der Entfernung r vom Erdmittelpunkt O mit dem Brechungsindex μ und dem Sinus des Einfallswinkels i ist für alle Punkte der Refraktionskurve konstant* und infolgedessen $= a\mu_0 \sin z$, wenn a die Entfernung des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkt O und z die scheinbare Zenitdistanz des beobachteten Objekts bedeutet.

Setzt man den aus der Gleichung

$$r\mu \sin i = a\mu_0 \sin z \tag{40}$$

für tang i folgenden Wert in (39) ein, so bekommt man den Ausdruck

$$R = \int_{\mu_H}^{\mu_0} \frac{\frac{\mu_0 a}{\mu r} \sin z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_0 a}{\mu r} \sin z\right)^2}} \frac{d\mu}{\mu}, \tag{41}$$

worin nur noch μ durch die Luftdichtigkeit δ nach den in Nr. 2 behandelten Beziehungen auszudrücken ist, um dann auf Grund einer der in Nr. 5 besprochenen Hypothesen das Problem auf eine Quadratur zurückgeführt zu haben.

c) *Die Laplacesche Beziehung (Elimination von μ).*

Nehmen wir, wie bei den meisten Refraktionstheorien, die *Laplace*sche Beziehung [vgl. Formel (1)]

$$\mu^2 - 1 = 2c\delta$$

an, führen wir noch (wie in Nr. 5, p. 303—304) die *reduzierte Höhe*

$$s = \frac{h}{a+h} = \frac{r-a}{r}$$

und die *relative Dichtigkeit* $x = \delta/\delta_0$ ein, setzen wir ferner die sogenannte **Refraktionskonstante**[41]) α gleich:

$$\alpha = \frac{c\delta_0}{1 + 2c\delta_0} = \frac{\mu_0^2 - 1}{2\mu_0^2}, \tag{42}$$

41) Konstant ist α nur, so lange man bestimmte Druck- und Temperaturverhältnisse für den Beobachtungsort annimmt. Nennt man α_0 den bei 0° und 760 mm gültigen Wert von α, dann ist sehr nahe der Wert der *Refraktionskonstanten bei der Temperatur t und dem Barometerstande B*

$$\alpha_{t,B} = \alpha_0 \frac{B}{760} \frac{1}{1 + mt}.$$

so erhalten wir leicht aus (41) das **Refraktionsintegral in seiner endgiltigen Form**

$$(43) \qquad R = \alpha \int_{x_H}^{1} \frac{1-s}{1-2\alpha(1-x)} \frac{\sin z\, dx}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1-x) + (2s-s^2)\sin^2 z}},$$

worin x_H den an der Grenze der Atmosphäre gültigen Wert der Luftdichtigkeit x bedeutet.

Die Refraktionskonstante α ist nach *Bessel* gleich 0,0002932 (bei 0^0 und 760 mm) zu setzen, so daß $1 - 2\alpha(1-x)$ zwischen 0,9994 und 1,0000 verläuft. Das ist eine so geringe Änderung, daß man ruhig den Mittelwert $1 - \alpha$ an Stelle des veränderlichen Faktors $1 - 2\alpha(1-x)$ setzen kann; die größtmögliche Abweichung von drei Zehntausendstel des Wertes von R (also 0″,6 bei der Horizontalrefraktion und 0″,05 bei 70^0 Zenitdistanz) ist praktisch immer zu vernachlässigen. Ebenso kann man das Glied 2ter Ordnung in s unter der Wurzel in (43) weglassen, man darf aber nicht den Faktor $1 - s$ im Zähler durch die Einheit ersetzen, denn dies macht bei $z = 70^0$ einen Fehler von 0″,2[42]) aus, welcher den Wert der Refraktionskonstante α nicht unwesentlich verfälscht. Diese nicht zulässige Vereinfachung kommt in den Refraktionstheorien von *Bessel* und *Gyldén* vor.

8. Refraktionsformeln nach den Hypothesen von Cassini ($\delta = \text{konst.}$) **und von Mayer** $\left(\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{h}{H}\right)$. **Bradleysche und Simpsonsche Formel.** Bei der *Cassini*schen Hypothese $\delta = \text{konst.}$ verschwindet das Integral (43) gänzlich, da bei konstanter Dichte der Weg der Lichtstrahlen durch die Erdatmosphäre geradlinig, die bezügliche Refraktion also null ist. Hier hat man also nur mit der Grenzbrechung zu rechnen. Für diese haben wir zunächst aus der Gl. (40) (da $\mu = \mu_0$)

$$(44) \qquad r \sin i = a \sin z,$$

worin i den Winkel der Trajektorie mit der Normale im Einfallspunkt, also den Brechungswinkel bei der Grenzbrechung bedeutet. Ist $i' = i + R$ der bezügliche Einfallswinkel, dann gibt das Brechungsgesetz

$$(45) \qquad \sin(i + R) = \mu \sin i.$$

Aus (44) und (45) durch Elimination von i und Auflösung nach R ergibt sich die **Refraktionsformel nach Cassinis Hypothese**[43])

---

42) S. hierüber *Bemporad*, Spettrosc. 1905, p. 239ff. oder *R. Radau* 1882.

43) Vgl. *Cassini*[30]). Die Berechnungsart von *Cassini* war etwas weitläufiger Formel (46) wurde von *A. Bemporad* aufgestellt (*Bemporad*, Spettrosc. 1905).

$$(46)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}R = \frac{1}{(1+\mu)\sin z}\left\{\sqrt{(1+H)^2-\sin^2 z}-\sqrt{(1+H)^2-\mu^2\sin^2 z}\right\},$$

worin, da für H die Höhe der homogenen Atmosphäre (8 km) zu setzen ist, nur μ vermittelst einer Refraktionsbeobachtung zu bestimmen ist. Nimmt man zu diesem Zwecke nach *Bessel*

$$\text{Refr. bei } 70^0 = 164'',50,$$

dann folgt der Wert

$$\mu = 1{,}00029301,$$

welcher sich sehr wenig von dem *Bessel*schen Wert (1,00029315) unterscheidet. Die nach der Formel (46) berechneten Werte der Refraktion stimmen bis 70° vorzüglich mit den *Bessel*schen überein, wie aus der Tabelle in Nr. 12 ersichtlich; nur bei $z = 85^0$ und darüber werden die Abweichungen zwischen berechneten und beobachteten Werten sehr groß.

Bei der *Mayer*schen Hypothese (13) einer gleichförmigen Dichtigkeitsabnahme mit der Höhe erhält man, wenn man in (43) den Faktor $1 - 2\alpha(1-x)$ vernachlässigt und Zähler und Nenner durch $1-s$ dividiert, ferner $(1-s)^{-2}$ durch $1+2\frac{h}{a}$ ersetzt, durch Integration zwischen den Grenzen 0 und H die **Mayersche Refraktionsformel**[44]):

$$(47)\qquad R = \frac{\alpha}{b}\sin z\left(\sqrt{\cos^2 z + 2b} - \cos z\right),$$

worin

$$b = \frac{H}{a} - \alpha.$$

Da nach den obigen Erläuterungen (Nr. 5b, *Tob. Mayer*, p. 302) der Wert $H = 2l = 16$ km am besten den physikalischen Bedingungen entspricht, so bleibt nur die Konstante α zur Verfügung. Wenn man diese aus dem *Bessel*schen Werte der Refraktion bei $z = 70^0$ bestimmt, erhält man

$$\mu = (1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1{,}00029312 \quad (\textit{Bessel}\ 1{,}00029315)$$

und die aus (47) berechneten Refraktionen stimmen dann (s. Tabelle in Nr. 12, p. 325) fast bis 85° mit den beobachteten (*Bessel*schen) überein.

Auf die *Mayer*sche Refraktionsformel (47) lassen sich durch leichte Umformungen und Annäherungsverfahren die im 18. Jahrhundert (bis

44) *Tob. Mayer*, Tabulae motuum solis et lunae novae et correctae, quibus accedit methodus longitudinum promota, (posthum) London 1770, p. XXXII (Refraktionstafel); p. 62 und 115 (Erklärung); p. 64 und 120 (Refraktionsformel). Vgl. *Bruhns*, Hist. Entw. (1861), p. 58—60; *Wolf*, Handb. 2 (1893), p. 270.

in die ersten Jahre des 19. Jahrhunderts) sehr häufig gebrauchten **Refraktionsformeln von Bradley**[45]:

$$R = \alpha \operatorname{tg}(z - mR), \tag{48}$$

und **von Simpson**[46]:

$$R = \frac{1}{n}\{z - \arcsin(k \sin z)\} \tag{49}$$

reduzieren, in denen m, n, k empirische Konstanten sind. Diese Formeln geben also, wie die *Mayer*sche Formel, eine für die praktische Astronomie ganz brauchbare Darstellung der Refraktion.

9. Orianis (Laplaces) Satz. *Bis etwa 75° Zenitdistanz ist die Art der Hypothese über die Konstitution der Atmosphäre praktisch ohne Einfluß auf die Refraktion.* Man kann in der Tat aus der Formel (43) eine nach Potenzen von tang z fortschreitende Entwicklung erhalten, welche bis $z = 75°$, *bei jeder Hypothese*, so konvergent bleibt, daß bereits die ersten zwei Glieder zur Darstellung der theoretischen Refraktion ausreichen. Diese zwei Glieder aber hängen nur von den Druck- und Temperaturverhältnissen am Beobachtungsorte und nicht von der besonderen angenommenen Theorie ab. Die angedeutete Entwicklung wird dadurch erhalten, daß man das auf der rechten Seite der Gl. (43) vorkommende Radikal nach den Potenzen von $\eta = \frac{-2\alpha(1-x)+2s\sin^2 z}{\cos^2 z}$ entwickelt. Man erhält, wenn man nur die Glieder erster Ordnung in s und α mitnimmt,

$$R = \frac{\alpha}{1-\alpha} \operatorname{tang} z \int_0^1 \{1 + \alpha(1-x)\sec^2 z - s\sec^2 z\}\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} \operatorname{tang} z \left\{1 + \frac{\alpha}{2}\sec^2 z - \sec^2 z \int_0^1 s\, dx\right\}.$$

Nimmt man die Dichtigkeit x an der Grenze der Atmosphäre als verschwindend klein an, dann erhält man durch teilweise Integration

$$\int_0^1 s\, dx = -\int_1^0 x\, ds.$$

Nach der Gleichgewichtsbedingung (23) hat man weiter

$$\int_0^1 x\, ds = \frac{l_0}{a}\int_0^{p_0} \frac{dp}{p_0} = \frac{l_0}{a},$$

45) Siehe Literaturverzeichnis I c. Vgl. auch *Wolf*, Handb. 2 (1893), p. 269.

46) *Th. Simpson*, Mathematical dissertations on physical and analytical subjects, London 1743. Vgl. *Bruhns*, Hist. Entw., p. 90; *Wolf*, Handb. 2 (1893), p. 268.

also schließlich

$$(50) \quad R = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\left(1 + \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{l_0}{a}\right)\operatorname{tang} z - \left(\frac{l_0}{a} - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tang}^3 z\right\},$$

worin die Koeffizienten, nach den Formeln (6a), (7), (8), (22) und (42), nur von der Temperatur und vom Luftdruck, bzw. von der geographischen Lage (Breite und Höhe) des Beobachtungsortes abhängig sind. Mit den bekannten Normalwerten $l = 7{,}9939$ km, $a = 6377{,}36$ km, $\log \alpha = 6{,}46483 - 10$ (*Bessel*)[47]) ergibt sich aus (50)[48])

$$R = [1{,}78097] \operatorname{tang} z - [8{,}82512 - 10] \operatorname{tang}^3 z,$$

und aus dieser bei $z = 45^0, 60^0, 70^0, 75^0$ bzw.:

	45^0	60^0	70^0	75^0
1. Glied	60″,39	104″,60	165″,92	225″,38
2. Glied	— 0,07	— 0,35	— 1,39	—3,48
R	60,32	104,25	164,53	221,90
Refr. nach *Bessel*	60,32	104,23	164,50	221,90

Man sieht, daß die Darstellung der Refraktion bis zu 75^0 eine vollkommene ist.

10. Entwicklung des Refraktionsintegrals bei der Besselschen Theorie. Mit den in Nr. 7, p. 317 angedeuteten Vereinfachungen, unter Einführung der *Bessel*schen Hypothese [s. p. 307, Formel (29)]

$$x = e^{-\beta s}$$

und der Abkürzungen

$$Z^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 z, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{\sin^2 z}, \qquad S = \frac{H}{a+H},$$

erhält man aus (43)

$$R = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)\sqrt{2}} \int_0^S \frac{e^{-\beta s} ds}{\sqrt{Z^2 + s - \varepsilon(1 - e^{-\beta s})}},$$

worin S die reduzierte Höhe der Atmosphäre bedeutet. Bei *Bessel* (vgl. Nr. 5e, p. 308) ist $S = 0{,}00445$, $H = 28{,}5$ km.

Wenn man die neue Variabele

$$u = s - \varepsilon(1 - e^{-\beta s})$$

einführt und das *Lagrange*sche Reversionstheorem anwendet, er-

47) *F. W. Bessel*, Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum 1750—1850 computatae, Regiomonti 1830, p. LIX, 538—542.

48) *Eingeklammerte Zahlen* bedeuten durchweg diejenige Zahl, deren dekadischer Logarithmus in der Klammer steht, also $[N] = 10^N$.

gibt sich

$$(51)\quad R = \frac{\alpha\beta^U}{(1-\alpha)\sqrt{2}}\int_0^U \frac{du}{\sqrt{Z^2+u}}\Big\{e^{-\beta u} + \varepsilon\beta(2e^{-2\beta u} - e^{-\beta u}) + \frac{\varepsilon^2\beta^2}{1\cdot 2}(3^2 e^{-3\beta u} - 2^2\cdot 2e^{-2\beta u} + e^{-\beta u}) + \frac{\varepsilon^3\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3}(4^3 e^{-4\beta u} - 3^3\cdot 3e^{-3\beta u} + 2^3\cdot 3e^{-2\beta u} + e^{-\beta u}) + \cdots\Big\},$$

wobei die obere Grenze U durch

$$U = S - \varepsilon(1 - e^{-\beta S})$$

bestimmt ist. *Bessel* setzt nun die obere Grenze $= \infty$, wobei stillschweigend angenommen wird, daß der Teil des Integrals von $u = U$ bis $u = \infty$ praktisch verschwindend klein ist. Daß dies nicht der Fall ist, wird aber leicht durch eine angenäherte Berechnung gezeigt. Man findet nämlich[49])

bei $z =$	45°	70°	80°	85°	90°
$\int_U^\infty dR =$	2″,1	5″,5	10″,2	15″,3	20″,2.

Diese Beträge wären wegzulassen und dafür die der Grenzbrechung R_H an der oberen Grenze der Atmosphäre einzusetzen, welche nur bis $z = 75°$ praktisch mit $\int_U^\infty dR$ zusammenfallen; über 80° hinaus sind die Unterschiede $\Delta R = R_H - \int_U^\infty dR$ nicht mehr ganz unbedeutend, und zwar findet man

bei $z =$	80°	85°	90°
$\Delta R =$	+ 0″,3	+ 1″,1	+ 2″,5.

Setzt man mit *Bessel* in der Gl. (51) die obere Grenze $U = \infty$ ein, dann nehmen alle auf der rechten Seite vorkommenden Integrale die Form

$$J_p = \int_0^\infty \frac{e^{-p\beta u}}{\sqrt{Z^2+u}}du$$

an, worin p eine positive, ganze Zahl bedeutet. Durch die Substitution

$$p\beta(Z^2+u) = t^2,$$

$$(51a)\qquad \sqrt{p\beta}Z = T$$

49) Vgl. *A. Bemporad*, Una osservazione alla teoria di refrazione di *Bessel*, Memorie della Società degli spettroscopisti Italiani 31, Catania 1902, p. 278.

reduzieren sich alle diese Integrale auf die sogen. **Krampsche Funktion** (das Wahrscheinlichkeitsintegral)

$$\psi(T) = e^{TT}\int_T^\infty e^{-tt}dt,$$

für welche Tafeln von *Chr. Kramp*[50]) selbst, von *F. W. Bessel*[51]) und ausgedehnter von *R. Radau*[52]) vorliegen. Setzt man mit *Radau*

$$\sqrt{p}\cdot e^{TT}\cdot\int_T^\infty e^{-tt}dt = \psi_p$$

(worin T nach (51a) auch von p abhängig ist), dann erhält man als **definitiven Ausdruck der Refraktion nach Bessel**

$$R = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha}\{e^{-\beta\varepsilon}\psi_1 + \beta\varepsilon e^{-2\beta\varepsilon}\psi_2 + \tfrac{3}{2}\beta^2\varepsilon^2 e^{-3\beta\varepsilon}\psi_3 + \cdots\}.$$

Für die Horizontalrefraktion ($z = 90^0$, $T = 0$), folgt, da bekanntlich

$$\int_0^\infty e^{-tt}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{also} \quad \psi_p = \frac{\sqrt{p\pi}}{2} \text{ ist:}$$

$$R_{90^0} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}}e^{-\alpha\beta}\{1 + 2^{\frac{1}{2}}\alpha\beta e^{-\alpha\beta} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{1\cdot 2}\alpha^2\beta^2 e^{-2\alpha\beta} + \cdots\}.$$

Die erste *Bessel*sche Refraktionstafel[53]) wurde nach den obigen Formeln unter Annahme der aus den *Bradley*schen Meridianbeobachtungen abgeleiteten Werte der Konstanten

$$\alpha_0 = 57'',538; \qquad \beta = 745{,}747 \quad \text{(bei } 9^0{,}13 \text{ C. und } 751{,}8 \text{ mm)}$$

berechnet. Später fand *Bessel* aus eigenen und *Argelander*schen Beobachtungen, daß die so erhaltenen Refraktionen bis $z = 85^0$ zu klein, von 85^0 bis 90^0 zu groß waren. Er multiplizierte deshalb die ersten mit dem Faktor 1,000328, letztere aber ersetzte er einfach durch die beobachteten, also empirischen Werte. In den so gewonnenen, bis heute im allgemeinen Gebrauch gebliebenen *Tabulae Regiomontanae*[47]) sind nicht die Refraktionen selbst, sondern, der Kürze wegen, die Werte von $k = \frac{R}{\operatorname{tg} z}$ mit dem Argument z tabuliert.

Zur Ableitung der Refraktion bei beliebigen Werten der Temperatur und des Luftdrucks am Beobachtungsorte entwickelte *Bessel* ziemlich weitläufige Differentialformeln, welche er dann aber zur

50) *Chr. Kramp*[25]), p. 207—210.
51) *F. W. Bessel*, Fund.[20]) (1818), p. 36, auch *Bruhns*, Hist. Entw., p. 112.
52) *R. Radau*, Obs. de Paris Ann., mém. 18 (1885).
53) *Bessel*, Fundamenta astronomiae, Regiomonti 1818, p. 45—52.

logarithmischen Berechnung bequem umgestaltete und mit besonderen Tafeln ausstattete.

In ähnlicher Weise wie die *Bessel*sche lassen sich auch die *Laplace*sche, *Ivory*sche, *v. Oppolzer*sche Refraktionstheorie am einfachsten unter Einführung der ψ-Funktion entwickeln. Bei anderen Theorien dagegen, wie denen von *Schmidt*, von *Bauernfeind*, von *Gyldén*, gelangt man zu einfacheren Integralen, die sich durch Rational- und Exponentialfunktionen ausführen lassen, dafür treten aber umständliche Reihenentwicklungen auf, von denen viele Glieder mitzunehmen sind. Als Typus dieser Art der Entwicklung werden wir in folgender Nr. die *Schmidt*sche Theorie in ihren Hauptzügen wiedergeben.

11. Entwicklung des Refraktionsintegrals für die Schmidtsche Theorie[54]. Führt man die *Schmidt*sche Hypothese [s. Nr. 5g), *Schmidt*, p. 309)]

$$\frac{1+mt}{1+mt_0} = 1 - \frac{h}{H}$$

in die Gleichungen (5), (6) ein, so erhält man für die relative Dichte x (Formel 22a) die Differentialgleichung

$$dx\left(1-\frac{h}{H}\right) - x\frac{dh}{H} = -\frac{a}{l_0}x\,ds = -\frac{a^2}{l_0}\frac{x\,dh}{(a+h)^2}.$$

Unter Vernachlässigung des Gliedes mit h^2 im Nenner auf der rechten Seite und durch Auflösung in einfache Brüche ergibt sich

$$\frac{dx}{x} = -k\frac{\frac{dh}{H}}{1-\frac{h}{H}} - (k+1)\frac{2\frac{dh}{a}}{1+\frac{2h}{a}}, \tag{52}$$

worin zur Abkürzung

$$k+1 = \frac{1}{l\left(\frac{1}{H}+\frac{2}{a}\right)} \tag{53}$$

gesetzt ist. Aus (52) folgt durch Integration bei der Grenzbedingung $h=0$, $x=1$:

$$x = \left(1-\frac{h}{H}\right)^k\left(1+2\frac{h}{a}\right)^{-k-1} \tag{54}$$

Schmidt nimmt das Refraktionsintegral (43) in der Form

$$R = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sin z\int_0^1 \frac{(1-s)\,dx}{\sqrt{1-2\alpha(1-x)-(1-s)^2\sin^2 z}}, \tag{55}$$

so daß er weder das quadratische Glied $s^2\sin^2 z$ im Nenner, noch den Faktor $1-s$ im Zähler vernachlässigt (vgl. Nr. 7, p. 317). Da er

54) Vgl. Fußnote 28.

für die Höhe H der Atmosphäre 49,1 km annimmt, so folgt für die reduzierte Gssamthöhe der Atmosphäre

$$S = \frac{H}{a+H} = 0{,}00763.$$

An Stelle von s führt *Schmidt* die neue Variabele u gemäß der Beziehung

(56) $$(1-s)^2 = 1-\beta(1-u)$$

ein, worin β so gewählt wird, daß bei $s = S$, also an der Grenze der Atmosphäre, $u = 0$ ist; demnach

(56a) $$\beta = 2S - S^2 = 2\frac{H}{a} - 3\frac{H^2}{a^2} \pm \cdots = 0{,}01525.$$

Aus der Gleichung (56) folgt

(57) $$s = 1-[1-\beta(1-u)]^{\frac{1}{2}},$$

also zufolge (17)

(58) $$h = \frac{as}{1-s} = a\{[1-\beta(1-u)]^{-\frac{1}{2}} - 1\}$$
$$= a\{\tfrac{1}{2}\beta(1-u) + \tfrac{3}{8}\beta^2(1-u)^2 + \cdots\}.$$

Vermöge der Gleichung (57) und unter Einführung der Abkürzungen

$$K = \frac{\beta \sin^2 z}{\cos^2 z + \beta \sin^2 z}, \quad L = \frac{2\alpha}{\cos^2 z + \beta \sin^2 z}$$

geht der Ausdruck (55) in

(59) $$R = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{K}{\beta_0}}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\beta(1-u)}}{\sqrt{1-Ku-L(1-x)}}\,dx$$

über.

Die Formel (53) gibt mit den bekannten Werten $l = 8$ km, $H = 49$ km sehr nahe $k+1 = \frac{49}{8}$, also k nahe $= 5$. Da nun k durch l_0 von der Temperatur am Beobachtungsorte abhängig ist (vgl. Formel (22) in Nr. 5, p. 304), so wählt *Schmidt* als Normaltemperatur bei seiner Theorie eben eine solche ($t_0 = -2^0{,}2$), bei welcher genau $k = 5$ ist. Dann ergibt sich nach den Gleichungen (54), (58), wenn man bei den Gliedern erster Ordnung in β stehen bleibt,

$$x = \left[1 - \frac{a\beta}{2H}(1-u) - \frac{3}{4}\frac{a\beta^2}{2H}(1-u)^2\right]^5 \cdot [1+\beta(1-u)]^{-6}.$$

Setzt man hier für $\frac{a\beta}{2H}$ den aus (56a) erhältlichen Wert

$$\frac{a\beta}{2H} = 1 - \tfrac{1}{4}\beta + \cdots$$

ein, so folgt

$$x = [u + \tfrac{1}{4}\beta u(1-u)]^5\,[1+\beta(1-u)]^{-6} = u^5[1 - \tfrac{1}{4}(1-u) + \cdots].$$

Wenn man jetzt diesen Ausdruck anstelle von x in Gl. (59) einsetzt und die Wurzel nach den Potenzen von L, den Zähler aber nach den Potenzen von u und von $1 - u$ entwickelt, so erhält man eine lange Reihe von Gliedern der Form

$$C_{pqrs} \int_0^1 \frac{(1-u)^p (1-u^5)^q}{(1-Ku)^{r+\frac{1}{2}}} u^s \, du,$$

worin p, q, r, s ganze Zahlen bedeuten. Diese Integrale sind nun durch bekannte Verfahren leicht auszuführen, die ganze Entwicklung wird aber offenbar infolge der vielen Integrationen äußerst langwierig.

Von diesem Mangel abgesehen ist die *Schmidt*sche Refraktionstheorie als eine physikalisch gut begründete und analytisch sehr streng durchgeführte Theorie hervorzuheben. Auch die von *Schmidt* ersonnene Einrichtung zur Verbesserung der Refraktion wegen der Temperatur t und des Luftdrucks B ist deshalb beachtenswert, weil sie die Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung (in dt und dB) gestattet, während das *Bessel*sche Verfahren auf die Glieder erster Ordnung beschränkt ist.

12. Vergleichstabelle der nach den wichtigsten Theorien berechneten Werte der Refraktion. In der folgenden Tabelle werden für eine Reihe von Zenitdistanzen die Werte der Refraktion bei den wichtigsten Theorien und bei den Formeln (46) (*Cassini*) und (47) (*Mayer*) zusammengestellt. Mit Ausnahme der letzteren Werte sind alle anderen aus einer Tabelle der mehrmals erwähnten *Radau*schen Abhandlung entlehnt.

z	Werte der Refraktion bei 0° und 760 mm nach:							
	Cassini	Mayer	Laplace	Bessel [T.R.[55])]	Ivory	Schmidt	Gyldén	Kowalski
45°	60″,3	60,3	60,5	60,3	60,6	60,5	60,3	60,3
70	164,5	164,5	165,1	164,5	165,2	165,0	164,6	164,5
80	330,8	331,0	332,3	331,1	332,9	332,3	331,4	331,3
85	607,9	611,8	617,7	615,8 Theor. 613,9 Beob.	619,3	617,9	616,4	616,4
90	1287,0	1816,4	2106,0	(2241,3)	2200,6	2207,8	2210,2	(2095,6)

Hilfstafeln für die Berechnung der Refraktion sind vielen Theorien beigegeben. Die gebräuchlichsten sind wohl die *Bessel*schen (p. 322), ausführlicher und genauer die neueren *Radau*schen, sehr bequem eingerichtet die neuesten *de Ball*schen Refraktionstafeln[55]).

55) Vgl. das Literaturverzeichnis, p. 290, Abschnitt I e): „*Refraktionstafeln*".

IV. Theorie der Extinktion.

13. Aufstellung des Extinktionsintegrals. Wenn man sich auf Strahlen einer bestimmten Wellenlänge beschränkt, so daß die von einer gewissen Luftschicht durchgelassenen Lichtstrahlen qualitativ von den einfallenden nicht verschieden sind, dann gilt strenge das *exponentiale Absorptionsgesetz* (3)

$$J = e^{-k\sigma} J^*,$$

worin σ die durchlaufene Strecke, k den Absorptionskoeffizienten der Längeneinheit, J^* die anfängliche, J aber die durchgelassene Lichtmenge bedeutet. Fügen wir noch das *Beer*sche Gesetz (4)

$$k = C\delta$$

hinzu, dann ergibt sich die **Fundamentalformel der Extinktionstheorie**

$$\log J = \log J^* - C\delta_0 \int \frac{\delta}{\delta_0} d\sigma, \tag{60}$$

worin δ_0 die für die Erdoberfläche geltende Luftdichtigkeit bedeutet, $d\sigma$ das Element der Trajektorie des Lichtstrahls, also der Refraktionskurve, δ die bezügliche Luftdichte darstellt und das Integral über die ganze Trajektorie zu erstrecken ist. Setzt man weiter

$$\begin{cases} \lambda = \int_0^H \frac{\delta}{\delta_0} dh, \\ p = e^{-C\delta_0 \lambda} \text{ (Transmissionskoeffizient der Atmosphäre)}, \\ F(z) = \frac{1}{\lambda} \int_0^H \frac{\delta}{\delta_0} d\sigma, \end{cases} \tag{61}$$

worin H die Höhe der gesamten Atmosphäre bedeutet, und bezeichnet man mit J_z und J_0 die scheinbare Helligkeit bei der Zenitdistanz z, bzw. bei der Zenitrichtung ($z = 0$), dann folgt aus (60), (61)

$$\log J_z = \log J_0 + \log p[1 - F(z)].$$

Die Berechnung des Integrals $F(z)$, also der von den Lichtstrahlen durchlaufenen Luftmasse (Einheit ist die Masse λ einer Atmosphäre in der Vertikalrichtung), *bildet die Aufgabe der Extinktionstheorie.*

Bedeutet i die Neigung der Refraktionskurve in der Höhe h gegen die Normale r an den sphärischen Niveauflächen, so hat man für das Element $d\sigma$ dieser Kurve

$$d\sigma = \frac{dr}{\cos i}.$$

Setzt man für $\cos i$ den aus der Invariantenbeziehung (40) (Nr. 7) erhältlichen Ausdruck, und führt, wie schon p. 304, x (relative Dichtigkeit) an Stelle von $\frac{\delta}{\delta_0}$ ein, so ergibt sich die Formel:

$$F(z) = \frac{1}{\lambda}\int_0^H \frac{x\,dh}{\sqrt{1-\left(\frac{a\mu_0}{r\mu}\right)^2 \sin^2 z}}, \tag{62}$$

welche hier dieselbe Rolle, wie die Formel (41) in der Refraktionstheorie spielt.

14. Entwicklung des Extinktionsintegrals unter Annahme konstanter Dichtigkeit oder konstanter Temperatur. Lambert- und Bouguersche Formel. Denkt man sich die Atmosphäre durch eine *homogene Luftschicht* ersetzt, nimmt man also $x = 1$ und daher auch $\mu_0 = \mu$ an, dann folgt zugleich

$$\lambda = H,$$

$$F(z) = \frac{1}{H}\left[\sqrt{a^2\cos^2 z + 2aH + H^2} - a\cos z\right], \tag{63}$$

d. i. die sogen. **Lambertsche Extinktionsformel**[56]), welche eine genügende Darstellung der durchlaufenen Luftmassen ergibt, wenn man für H den Wert der Höhe l der homogen reduzierten Atmosphäre [Nr. 3 b), p. 298], also etwa 8 km annimmt.

Bei der Annahme einer *konstanten Temperatur* und unter Vernachlässigung der Veränderung der Schwerkraft mit der Höhe erhält man [vgl. Nr. 5 c), *Newton*, p. 303]

$$x = e^{-\frac{h}{l}}, \quad H = \infty,$$

also

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-\frac{h}{l}}\,dh = l = 7{,}9994 \text{ km}.$$

Führt man diese Werte in (62) ein, vernachlässigt man weiter die Krümmung der Trajektorie, welches durch die Annahme $\mu = \mu_0$ geschieht, so ergibt sich aus (62)

$$F(z) = \frac{1}{al\cos z}\int_0^\infty e^{-\frac{h}{l}}(a+h)\left(1+\frac{2ah+h^2}{a^2\cos^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}dh \tag{64}$$

und durch Reihenentwicklung, welche etwa bis $z = 82^0$ zulässig ist[57])

56) *Lambert*, Photometria 1760.

57) Vgl. hierüber *Bemporad* 1901. Die in den Lehrbüchern als *Bouguer*sche Extinktionsformel gegebene Entwicklung unterscheidet sich von dieser in den

die *korrigierte*[57]) **Bouguersche Extinktionsformel**

$$(65) \qquad F(z) = \sec z - \frac{l}{a} \sec z \operatorname{tg}^2 z + \frac{3}{2}\frac{l^2}{a^2} \sec^3 z \operatorname{tg}^2 z - \cdots$$

Eine bei großen Zenitdistanzen sehr schnell konvergierende Entwicklung des Integrals (64) erhielt *Bemporad*[58]) durch die **Einführung der Krampschen Funktion** $\psi(T)$ (p. 322). Führt man nämlich die neue Variabele t durch die Gleichung

$$h + a(1 - \sin z) = lt^2$$

ein, entwickelt dann die Wurzel nach Potenzen von $\frac{lt^2}{2a \sin z}$ und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{l}{2a \sin z} = l_s, \quad \frac{a(1 - \sin z)}{l} = T^2, \quad \psi(T) = e^{T^2} \int_T^\infty e^{-t^2} dt,$$

so erhält man

$$(65a) \qquad F(z) = l_s^{-\frac{1}{2}} \psi(T) + \tfrac{3}{4} l_s^{\frac{1}{2}} [T + \psi(T)] - \tfrac{5}{16} l_s^{\frac{3}{2}} [T^3 + \tfrac{3}{2} T + \tfrac{3}{2} \psi(T)] + \cdots$$

Diese Entwicklung konvergiert so rasch, daß bis zu $z = 84^0$ zwei Glieder zur genauen Berechnung von $F(z)$ ausreichen. Sie ist ferner auch bei $z > 90^0$ brauchbar[58]).

15. Laplacesche Extinktionsformel. Aus den Fundamentalgleichungen (5) und (6) folgt unter Vernachlässigung der Veränderung der Temperatur und der Schwerkraft:

$$(66) \qquad p = \delta = \delta_0 x,$$

$$l dx = - x dh.$$

Nach der *Laplace*schen Beziehung (1)

$$\mu^2 = 1 + 2c\delta$$

ist ferner

$$\mu d\mu = c d\delta = c\delta_0 dx,$$

also

$$(67) \qquad l dx = \frac{l \mu d\mu}{c \delta_0}.$$

Ersetzt man in $F(z)$ den Wert von $x dh$ durch seinen aus (66) und (67) erhältlichen Ausdruck, ferner l durch λ (vgl. oben), so folgt

---

numerischen Koeffizienten, ist aber wegen zu grober Vernachlässigungen schon im zweiten Gliede unrichtig.

58) Vgl. *Bemporad* 1906 und *Cerulli* 1906.

unter gehöriger Änderung der Integrationsgrenzen

$$F(z) = \frac{1}{c\delta_0} \int_1^{\mu_0} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{a\mu_0}{r\mu}\right)^2 \sin^2 z}}.$$

Vergleicht man diese mit der Fundamentalformel (41) der Refraktionstheorie (Nr. 7), so ergibt sich

$$dF = \frac{1}{c\delta_0} \frac{dR}{\sin z} \cdot \mu^2 \cdot \frac{r\mu}{a\mu_0}.$$

Da nun μ und $\frac{r\mu}{a\mu_0}$ sich sehr wenig von der Einheit unterscheiden, so wird sehr nahe

(68) $F(z) = \text{konst.} \cdot \frac{\text{Refr.}}{\sin z}$ (**Laplacesche Extinktionsformel**)

sein.

16. Strengere Behandlung der Extinktionstheorie bei der Annahme einer gleichförmigen Temperaturabnahme mit der Höhe von Bemporad. Nach den im vorigen (Nr. 7 und 10) eingeführten Bezeichnungen ergibt sich aus (62)

$$F(z) = K \int_0^S \frac{x\sqrt{1 - 2\alpha(1-x)}(1 + 2s + \cdots)ds}{\sqrt{Z^2 - \varepsilon(1-x) + s - \frac{1}{2}s^2}},$$

worin

$$K = \frac{a}{1\sqrt{2} \cdot \sin z}, \quad Z^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} z, \quad \varepsilon = \frac{a}{\sin^2 z}, \quad S = \frac{H}{a+H}$$

(H Höhe der Atmosphäre) eingesetzt wurde. Nimmt man für die Konstitution der Atmosphäre die Hypothese einer gleichförmigen Abnahme der Temperatur mit der Höhe in der Form

$$t - t_0 = -\beta a s$$

an, dann erhält man aus (5) und (6) (Nr. 3)

$$x = (1 - \gamma s)^k,$$

worin

$$\gamma = \frac{m\beta a}{1 + m t_0} \quad \text{und} \quad k = \frac{a}{\gamma l} - 1 = \frac{1}{m\beta l_0} - 1.$$

Bei der Annahme des Temperaturgradienten $\beta = 6^0{,}22$ pro km wird

$$S = \frac{1}{\gamma} = 0{,}006894, \quad H = 43 \text{ km}, \quad k = \tfrac{2}{3}.$$

Dann folgt

$$\lambda = l\left(1 + \frac{1}{13\gamma} + \frac{8}{65\gamma^3} + \cdots\right) = 8{,}0109 \text{ km},$$

und durch *Taylor*sche Entwicklung der Wurzel aus $[Z^2 - \varepsilon(1-x) + s]^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von $\varepsilon(1-x)$ unter Einführung der neuen Variabeln t (welche natürlich nichts mit der Temperatur t zu tun hat):

$$t = \frac{1-\gamma s}{1+Z^2\gamma}$$

ergibt sich:

$$F(z) = \frac{C_0}{\sin z} T^{-\frac{2k+1}{2}} \int_0^T \frac{t^k\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{C_1}{\sin^3 z}\left\{T^{-\frac{2k-1}{2}} \int_0^T \frac{t^k\,dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} - T^{-\frac{4k-1}{2}} \int_0^T \frac{t^{2k}\,dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\right\} + \cdots,$$

worin

$$T = \frac{1}{1+Z^2\gamma}, \quad C_0 = \frac{a}{\lambda\sqrt{2\gamma}}, \quad C_1 = \tfrac{1}{2} C_0 \alpha\gamma, \cdots$$

gesetzt ist. Die hierbei vorkommenden Integrale sind nun bei dem Normalwert $k = \frac{3}{2}$ leicht durch trigonometrische Funktionen darstellbar[59]), und die Entwicklung erweist sich bei allen Zenitdistanzen als rasch konvergierend.

17. Vergleichstabelle der verschiedenen Extinktionstheorien. In der folgenden Tabelle werden für eine Reihe von Zenitdistanzen die Werte von $F(z)$ (durchlaufene Luftmasse) nach den Formeln von *Lambert* (63), *Bouguer* (65) und (65a), *Laplace* (68) und nach der Theorie von *Bemporad* (Nr. **16**) zusammengestellt.

Zenitdist. z	Werte der durchlaufenen Luftmasse $F(z)$ nach: *Lambert*	*Bouguer*	*Laplace*	*Bemporad*
60°	1,997	1,993	1,993	1,995
70	2,909	2,897	2,899	2,904
80	5,647	5,551	5,563	5,600
85	10,663	10,142	10,196	10,395
88	20,858	18,677	18,835	19,787
90	39,957	35,416	36,664	39,652

18. Die terrestrische Extinktion. Ganz analog wie bei der terrestrischen Refraktion (Nr. 7) sprechen wir von *terrestrischer Extinktion*, wenn die von den Lichtstrahlen durchlaufene Strecke von

59) Vgl. *Bemporad*, Extinkt., Heidelb. Mitt. 4, 1904.

der Erdoberfläche an nicht bis zur Grenze der Atmosphäre, sondern nur bis zu einer gewissen Höhe verläuft. Dieser Fall kommt vor bei der photometrischen Beobachtung von Lichtquellen, welche der Erdoberfläche angehören (z. B. von entfernten Schneefeldern[60]) oder bei der gleichzeitigen Beobachtung eines und desselben Gestirnes aus zwei Stationen in sehr verschiedenen Höhen über dem Meeresniveau. Die diesbezüglichen Formeln müssen notwendigerweise komplizierter als die der astronomischen Extinktion ausfallen; doch hat *Bemporad* auf Grund der in Nr. **16** besprochenen Theorie Tafeln eingerichtet, welche die Berechnung der terrestrischen Extinktion (also der durchlaufenen Luftmassen) bis zur Zenitdistanz von 89° und bis zur Höhe von 5000 m über dem Meere ermöglichen[61]).

19. Die selektive Absorption. Da die Atmosphäre die Strahlungen verschiedener Wellenlänge in sehr verschiedenem Betrage absorbiert, so kann jede Extinktionstheorie zunächst nur bei monochromatischem Licht eine strenge physikalische Bedeutung beanspruchen. Da aber die spektralphotometrischen bzw. bolometrischen Untersuchungen wegen der kostspieligen instrumentellen Einrichtung, auch wegen ihrer Schwierigkeit, bisher keine große Verbreitung gefunden haben, so ist man in der Praxis genötigt, die Extinktionstheorie auf die Gesamthelligkeit der Gestirne durch Einführung einer mittleren, etwa den hellsten Partien des Spektrums entsprechenden Absorptionskonstante anzuwenden. Wie weit dies Verfahren zulässig ist, ist eine viel diskutierte Frage.

Schon im Jahre 1842 machte *Forbes* darauf aufmerksam, daß eine *dünnere* rote Glasscheibe nahezu alle Strahlengattungen, eine *dickere* aber nur die roten Strahlen hindurchgehen läßt. Die spezifische Absorptionskonstante c dieses Glases für ein bestimmtes natürliches Licht müßte also notwendigerweise verschieden ausfallen, je nachdem dünnere oder dickere Scheiben untersucht werden. *Forbes* präzisierte auch, daß im zweiten Falle eine kleinere Absorptionskonstante herauskommen muß, und daß eben dieselbe Erscheinung bei der Bestimmung der atmosphärischen Absorption auf kleinen (vertikalen) und auf großen (fast horizontalen) Weglängen zu erwarten ist, *daß nämlich am Horizont anscheinend eine große spezifische Durchlässigkeit der Luft herauskommen muß* (**Forbessches Phänomen**).

---

60) *Oddone* 1901; *Bemporad*, Memorie del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere 20 (3. serie 11), classe di scienze matematiche e naturali, Milano 1905.

61) *Bemporad*, Lincei 1905.

Diese richtige Ansicht von *Forbes* wurde in präziserer mathematischer Form von *Langley*[62]) nochmals vorgebracht. Er bewies mit aller Strenge, daß einerseits wegen der allgemeinen, kontinuierlichen Zunahme der Absorptionskonstante vom roten bis zum violetten Ende des Spektrums[8]), andererseits wegen der diskontinuierlichen Wirkung der sogenannten *atmosphärischen Absorptionsstreifen*, die in der gewöhnlichen Weise, d. h. ohne spektrale Zerlegung bestimmte mittlere Absorption von etwa 18% der ursprünglichen Intensität (bei der Vertikalrichtung) nur eine untere Grenze für die wirklich stattfindende Absorption bedeutet. Nach *Langley* sollte letztere nicht weniger als 40% betragen.

Während nun von allen Seiten die theoretische Richtigkeit der *Langley*schen Einwendungen eingeräumt wurde, bestritt man doch die praktische Bedeutung derselben. Man bemerkte zunächst (*Seeliger*[63]), daß die optisch wirksamsten Strahlen in einer verhältnismäßig schmalen Zone im Gelb und Grün konzentriert sind, welche an Wirkung die übrigen Partien im Spektrum so sehr übertrifft, daß fast nur sie allein berücksichtigt zu werden braucht; dann wird die erste der betrachteten Fehlerquellen (allgemeine Zunahme der Absorptionskonstante mit abnehmender Wellenlänge) bedeutend verringert. Andere (*Müller*[64])) bemerken, daß bei der Anwendung der Extinktionstheorie an den zuverlässigsten empirischen Extinktionstabellen keine Spur des *Forbes-schen Phänomens* zu finden ist. Dasselbe Phänomen sollte auch bewirken, daß die auf hohen Bergen angestellten Extinktionsbeobachtungen im allgemeinen größere Absorptionskonstanten als die ähnlichen Beobachtungsreihen in niedrigeren Stationen ergeben sollten. Die bis jetzt in dieser Richtung angestellten Versuche ergeben nun nichts dergleichen, vielmehr öfters das Gegenteil[65]).

Hingegen haben sich neuerdings Anzeichen gefunden, daß man trotzdem nicht mit einem mittleren Extinktionskoeffizienten — auch für visuelle Beobachtungen — auskommt. *Müller* und *Kempf*[66]) haben im Jahre 1894 gleichzeitig auf dem Ätna und in Catania Helligkeitsmessungen an Sternen vorgenommen, die mit einem einheitlichen Extinktionskoeffizienten nicht zu erklären waren. Die Verfasser

62) *Langley*, Amer. Journ. 1884.

63) *Seeliger* 1891.

64) *Müller*, Photometrie (1897), p. 143.

65) Vgl. die Tabelle der wichtigsten Bestimmungen des Transmissionskoeffizienten p in *Müller*, Photometrie (1897), p. 138.

66) *Müller-Kempf* 1898, p. 278.

führten diesen Widerspruch auf die Wirkung einer Catania umgebenden Staubwolke zurück. Während *Müller* und *Kempf* bei ihrer Bearbeitung nur die gleichzeitigen Beobachtungen von Zenitsternen herangezogen hatten, hat *A. Bemporad*[67]) bei einer Neubearbeitung auch die gleichzeitigen Beobachtungen eines und desselben Sternes bei sehr großen Zenitdistanzen direkt miteinander verglichen. Zur strengen Berechnung der von beliebig geneigten Strahlen durchlaufenen Luftmassen zwischen den Höhen von Catania (69 m) und vom Ätnaobservatorium (2942 m) wurden die schon oben (Nr. 18) erwähnten Tafeln der terrestrischen Extinktion entworfen. Als Resultat dieser neuen Bearbeitung der *Müller-Kempf*schen Beobachtungen stellte sich in Bestätigung der *Forbes-Langley*schen Ansichten heraus, daß die mittlere Extinktionskonstante keineswegs dieselbe war für alle Strahlen, welche dieselbe Schicht unter verschiedener Neigung durchliefen, daß vielmehr bei zunehmender Zenitdistanz die Extinktionskonstante beständig abnahm, sodaß sie bei 80° Zenitdistanz nur noch etwa halb so groß war, wie im Zenit.

Ganz ähnliche Resultate hat eine Neubearbeitung der *Ångström*schen pyrheliometrischen Messungen[68]) zu Teneriffa (1897), sowie der in Catania und auf dem Ätna angestellten aktinometrischen Beobachtungen[69]) vom Jahre 1904 durch *Bemporad* ergeben. Aus den Beobachtungen auf Teneriffa ließ sich übrigens noch ableiten[68]), daß der (logarithmisch genommene) Extinktionskoeffizient der unteren Luftschichten etwa mit der vierten Potenz der Dichte der Luft abnimmt.

Da aber hier immer nur etwas unbestimmte Mittelwerte für größere Spektralgebiete vorlagen und auch systematische Beobachtungsfehler eine Rolle gespielt haben können, so bleibt eine zuverlässige und ausgedehnte *spektralphotometrische* Untersuchung der Extinktion ein unbedingtes Erfordernis. Die bisherigen spektralphotometrischen Ergebnisse[70]) gehen weit auseinander und gestatten noch nicht einmal einen Entscheid darüber, ob die *Rayleighsche Theorie*[71]) gilt, welche ein Wachsen des Absorptionskoeffizienten umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge fordert. Auch ist noch zu entscheiden, wie weit *Staub* und wie weit die *Luftmoleküle* selbst

---

67) *Bemporad*, Lincei 1905, p. 281—282.

68) *Bemporad* 1908.

69) *Bemporad-Mendola* 1907.

70) *Müller*, Photometrie (1897), p. 140.

71) *Lord Rayleigh* [*J. W. Strutt*], Phil. Mag. 41 (1871), p. 107, 274, 447 = *Lord Rayleigh*, Scientific papers 1, Cambridge 1899, p. 87 und p. 104.

an der Absorption beteiligt sind[72]). Ferner scheinen *tägliche* und *jahreszeitliche Schwankungen* der Extinktion zu bestehen, deren Studium namentlich für die Frage nach der Konstanz der Sonnenstrahlung, der sogenannten Solarkonstanten, wichtig ist[73]).

72) *Lord Rayleigh,* Phil. Mag. 47 (1899), p. 375 = *Lord Rayleigh,* Scientific papers 4, Cambridge 1903, p. 397.

73) *C. G. Abbot,* Smithsonian Miscellaneous Collections 45 (1903), p. 74; *S. P. Langley,* The „solar constant" and related problems, Astroph. Journ. 17 (1903), p. 89; *S. P. Langley,* On a possible variation of the solar radiation, Astroph. Journ. 19 (1904), p. 305.

(Abgeschlossen im Dezember 1907.)

VI 2, 7. THEORIE DER FINSTERNISSE.

Von

F. K. GINZEL IN BERLIN und A. WILKENS IN KIEL.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Einteilung der Finsternisse.

A. Sonnenfinsternisse.

2. Kriterium für das Stattfinden einer Sonnenfinsternis überhaupt.
3. Die Grundgleichungen der Finsternisse.
4. Die Grenzkurven der Sichtbarkeit.
5. Der lokale Verlauf der Finsternis.
6. Anwendung der Sonnenfinsternisse; Tafeln.
7. Die Perioden der Finsternisse.

B. Mondfinsternisse.

8. Kriterium für das Stattfinden einer Mondfinsternis überhaupt.
9. Verlauf einer Mondfinsternis.
10. Tafeln zur Berechnung von Mondfinsternissen.

C. Andere Finsternisse und Bedeckungen.

11. Sternbedeckungen.
12. Planetenvorübergänge.
13. Finsterniserscheinungen in anderen Trabantensystemen.

Literatur.

I. Sonnen- und Mondfinsternisse.

1. Theorie.

a. Originalarbeiten.

P. A. Hansen, Über die Verfinsterungen auf der Erde überhaupt, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 33—104. Nachtrag unter dem Titel:

— Über den Einfluß der Strahlenbrechung auf Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 185.

— Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 4 (1859), p. 303 (*Hansen, Theorie d. Sonnenf. (1859)*).

— Analyse der ekliptischen Tafeln, Leipzig Ber. 15 (1863), p. 143 (*Hansen, Analyse d. ekl. Tafeln (1863)*).

F. W. Bessel, Analyse der Finsternisse, erschien in *Bessel,* Astron. Untersuch., Band 2, Königsberg 1842, p. 95. Abgedruckt in *Bessel,* Abhdl., Band 3, p. 369 (*Bessel, Analyse der Finsternisse (1842)*).

J. A. Grunert, Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen, Wien Denkschr. 8 (1854), 1. Abteilung, p. 133.

R. Schram, Beitrag zur *Hansen*schen Theorie der Sonnenfinsternisse, Wien Ber. 92 (1885), p. 1233.

C. Stechert, Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwertung zur Längenbestimmung, Archiv der deutschen Seewarte 22. Jahrg. (1899), Nr. 1, Hamburg 1899.

b. Lehrbücher.

J. J. Littrow, Theoretische und praktische Astronomie, Wien 1821, Bd. 2, 6. Kap.

A. Sawitsch, Abriss der praktischen Astronomie, 2. Aufl., deutsch neu herausgegeben von *C. F. W. Peters,* Leipzig 1879, 5. Abschnitt, p. 452 ff.

F. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie (4. Aufl. Berlin 1881: *Brünnow*) 5. Abschnitt, 5. Kapitel.

W. Chauvenet, A manual of spherical and practical astronomy (2 vols.), 5th ed. (*Chauvenet (1900)*) Philadelphia 1885, 1893, 1900, vol. 1, chapter 10, p. 436.

2. Tafeln.

C. L. Largeteau, Tables pour le calcul des syzygies écliptiques, Conn. des temps pour 1846 (Paris 1843), additions, p. 3 (*Largeteau, Tables (1843)*).

P. A. Hansen, Ekliptische Tafeln für die Konjunktionen des Mondes und der Sonne, Leipzig Ber. 9 (1857), p. 75 (*Hansen, Ekl. Tafeln (1857)*).

Th. von Oppolzer, Syzygientafeln für den Mond, Astr. Ges. Publ. 16, Leipzig 1881 (*Oppolzer, Syzygientafeln (1881)*).

— Tafeln zur Berechnung der Mondfinsternisse, Wien Denkschr. 47 (1883) (*Oppolzer, Tafeln f. Mondf. (1883)*).

P. Lehmann, Tafeln zur Berechnung der Mondphasen und der Sonnen- und Mondfinsternisse, herausgegeben vom k. Statistischen Bureau, Berlin 1882 (*Lehmann, Tafeln (1882)*).

S. Newcomb, On the recurrence of solar eclipses with tables of eclipses (für den Zeitraum 700 vor Chr. bis 2300 nach Chr.), Wash. Astron. Papers, vol. 1, Washington 1882, Nr. 1 (*Newcomb, Recurrence of solar ecl. (1882)*).

R. Schram, Tafeln zur Berechnung der näheren Umstände der Sonnenfinsternisse, Wien Denkschr. 51 (1886), p. 385 (*Schram, Tafeln zur Berechn. v. Sonnenf. (1886)*).

— Reduktionstafeln für den *Oppolzer*schen Finsterniskanon zum Übergang auf die *Ginzel*schen empirischen Korrektionen, Wien Denkschr. 56 (1889), p. 185 (*Schram, Reduktionstafeln (1889)*).

3. Berechnete Finsternisse.

L'Art de vérifier les dates des faits historiques, éd. par des Benedictins, 1ère éd. Paris 1750; 2ième éd. Paris 1770; 3ième éd., 3 tomes, Paris 1783, 84, 87 (*L'Art de vérifier les dates*).

A. G. Pingré, Chronologie des éclipses qui ont été visibles depuis le pôle boréal jusque vers l'équateur, pendant les dix siècles qui ont précédé l'ère chrétienne, Paris 1787.

C. Hallaschka, Elementa eclipsium, quas patitur tellus, luna eam inter et solem versante, Prag 1816 [Sonnenfinsternisse von 1816—1860]. Fortgesetzt u. d. T.: Calculus eclipsis Solis observatae die 19. novembris 1816 cui accedunt Elementa eclipsium quas patitur tellus, luna eam inter et solem versante, ab anno 1861 usque ad annum 1900 etc., Prag 1820 [Sonnenfinsternisse von 1861—1900].

E. Mahler, Die zentralen Sonnenfinsternisse des 20. Jahrhunderts, Wien Denkschr. 49 (1885), p. 237.

Th. von Oppolzer, Canon der Finsternisse, Wien Denkschr. 52 (1887) (*Oppolzer Canon (1887)*).

F. K. Ginzel, Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Altertumswissenschaften und den Zeitraum von 900 vor Chr. bis 600 nach Chr., Berlin 1899 (*Ginzel, Kanon (1899)*).

4. Graphische und Näherungsmethoden.

W. Leonhardi, Anleitung zur Berechnung und graphischen Bestimmung der Sonnen- und Mondfinsternisse, Leipzig 1846.

Bach (in Straßburg), Calcul des éclipses de soleil par la méthode des projections, Paris 1860.

A. Laussedat, Paris C. R. 70 (1870), p. 240.

A. Cayley, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 30 (1870), p. 162.

Ph. Hatt, Paris C. R. 86 (1878), p. 303.

II. Sternbedeckungen.

J. J. Littrow, Über eine neue Methode, Sternbedeckungen für verschiedene Orte vorher zu bestimmen, Tübinger Zs. für Astr. 4 (1817), p. 334.

C. Kramp, Mémoire sur les occultations des étoiles fixes par la lune, Annales des mathématiques pures et appliquées, tome 8, Nismes et Paris 1818, p. 165.

J. Fr. Encke, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen, Berl. astr. Jahrb. für 1830 (Berlin 1828), p. 253.

F. W. Bessel, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen, Berl. astr. Jahrb. für 1831 (Berlin 1829), p. 257, sowie Astr. Nachr. 7 (1829), p. 1 = *Bessel,* Abhdl. 1, p. 209.

C. F. A. Shadwell, Tables for facilitating the approximate prediction of occultations and eclipses for any particular place, London 1847.

T. Chevallier, Report of the 17th meeting of the British Association for the advancement of science, held 1847, London 1848, Notices, p. 7.

F. C. Penrose, On a method of predicting, by graphical construction, occultations of stars by the moon and solar eclipses for any given place, London 1869.

Baills, Occultations, prédiction graphique, Paris C. R. 85 (1877), p. 1056.

C. Berry, Théorie complète des occultations à l'usage spécial des officiers de marine et des astronomes, Paris 1880.

P. Jaffré, Théorie complète élémentaire des occultations, St. Nazaire 1883.

C. Stechert, Tafeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen, Archiv der deutschen Seewarte, 19. Jahrg. (1896), Nr. 3, Hamburg 1896. (*Stechert, Tafeln für Sternbedeck. (1896)*).

C. Stechert, Hilfsgrößen für die Berechnung der im nächsten Jahre stattfindenden Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen, Ann. d. Hydr. seit 1897 jährlich (*Stechert, Hilfsgrößen (1897)*).

III. Planetenvorübergänge.

J. F. Encke, Über die Vorausberechnung der Planetendurchgänge, Berl. astr. Jahrb. für 1842, p. 291.

J. L. Lagrange, Mémoire sur le passage de Vénus du 3 Juin 1769, Berl. hist. 1766, p. 265 = Oeuvres 2 (1868), p. 335.

P. A. Hansen, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 9 (1870), p. 455.

K. Friesach, Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe, Leipzig 1874.

M. Vodušek, Neue Methode für die Berechnung der Sonnen- und Mondesparallaxe aus Planetenvorübergängen und Sonnenfinsternissen, Laibach 1879.

Ferner in vielen Werken über die Bestimmung der Sonnenparallaxe und in Lehrbüchern, z. B. in den Seite 336 unter I 1 b zitierten *Brünnow,* p. 390; *Chauvenet* (1900), vol. 1, p. 591.

IV. Verfinsterungen der Jupitertrabanten.

J. B. J. Delambre, Tables pour calculer les éclipses des quatre satellites de Jupiter, erschienen in *J. J. de Lalande,* Astronomie, 3ième éd., tome 1, Paris 1792, Anhang (Tables astronomiques), p. 236.

P. S. de Laplace, Traité de mécanique céleste, tome 4, Paris 1805, livre 8, chapitre 8 = Oeuvres 4 (1880), p. 106.

W. S. B. Woolhouse, New tables for computing the occultations of Jupiters satellites by Jupiter, The nautical almanac and astronomical ephemeris for the year 1835, London 1834, appendix.

M. C. T. de Damoiseau, Tables écliptiques des satellites de Jupiter, 5. Band der Paris Bur. Long. tabl. astr., Paris 1836, und deren Fortsetzungen von *D. P. Todd,* A continuation of *de Damoiseau's* tables of the satellites of Jupiter, Washington, The American Bureau of Navigation 1876 (für 1880—1900) und *L. Pottier,* Paris Bull. astr. 13 (1896), p. 67 u. 107 (für 1900—1920).

V. Schatten des Saturnringes.

C. Souillart, Sur l'ombre d'une planète, Astr. Nachr. 91 (1878), p. 129.

H. Seeliger, Über den Schatten eines Planeten, München Ber. 24 (1894), p. 423.

— Zur Theorie der Beleuchtung der großen Planeten, insbesondere des Saturn, Münch. Abh. 16 (1887), 2. Abteilung, p. 405.

Einleitung.

1. Einteilung der Finsternisse. Verfinsterungen der Himmelskörper können auf zweierlei Weise entstehen. Wird ein Planet von seinem Zentralkörper beleuchtet, so können die den Planeten umlaufenden Monde, bei geeigneter Stellung ihrer Bahnen, von Zeit zu

Zeit in den Schatten des Planeten kommen und unsichtbar werden (*wahre Finsternisse*). Innerhalb des Sonnensystems kann dies z. B. beim Erdmonde, ferner in den Trabantensystemen von Jupiter, Saturn, Mars usw. stattfinden. Wichtig für die Beobachtung sind von diesen wahren Verfinsterungen nur die Mondfinsternisse, die Verfinsterungen der Jupiter- und Saturntrabanten und die durch den Schatten des Saturnrings bewirkten Finsternisse. Die anderen Fälle, wo den betreffenden Himmelskörpern nicht das Sonnenlicht entzogen wird, sondern nur eine Verdeckung des einen Körpers durch den anderen *in bezug auf den Beobachtungsort* stattfindet, bezeichnet man als *scheinbare Finsternisse*. Diesen Fall illustrieren z. B. die Sonnenfinsternisse, die Sternbedeckungen durch den Mond oder die Planeten und die Vorübergänge der beiden inneren Planeten Merkur und Venus vor der Sonne.

A. Sonnenfinsternisse.

2. Kriterium für das Stattfinden einer Sonnenfinsternis überhaupt. Die Sonnenfinsternisse können nur zur Zeit des Neumondes stattfinden, und auch dann nur, wenn der Mond der Verbindungslinie von Erde und Sonne genügend nahe kommt. Der äußere Umhüllungskegel von Sonne und Mond begrenzt den Kernschatten, der innere den Halbschatten des Mondes. Je nach der Entfernung des Mondes von der Erde erscheint uns bekanntlich der Mondradius größer oder kleiner als der der Sonne, so daß die Spitze des Kernschattenkegels dementsprechend näher zur Erde oder weiter von ihr entfernt liegt. Ist der scheinbare Durchmesser des Mondes in dem Augenblick, wo die Mitten von Sonne und Mond und der Beobachtungsort auf einer Geraden liegen, größer als der der Sonne, so erreicht die Spitze des Schattenkegels die Erde, der Beobachtungsort fällt in den Kernschatten und es findet für ihn eine *totale Sonnenfinsternis* statt. Erscheint aber der Monddurchmesser kleiner als der der Sonne, so trifft die Spitze des Schattenkegels die Erde nicht; der Mond verdeckt die Sonne zentral, aber nicht ganz, es entsteht eine *ringförmige Sonnenfinsternis*. Erreicht die Kegelspitze die Erde nur in einem Teile der Schnittkurve der Kegelachse und der Erdoberfläche, so findet eine *ringförmig-totale Sonnenfinsternis* statt. Passiert die Erde den Kernschatten überhaupt nicht, so kann höchstens eine *partielle Verfinsterung* durch den Halbschatten eintreten. Das Kriterium für das Stattfinden einer Sonnenfinsternis überhaupt ergibt sich aus der Bedingung, daß der Mond um die Zeit der Konjunktion[1]) herum in

1) *Konjunktion* zweier Gestirne bedeutet den Zeitpunkt, in dem sie, auf

den äußeren Umhüllungskegel von Sonne und Erde eintauchen oder diesen Kegel doch mindestens berühren, d. h. der scheinbare Minimalabstand der Zentren von Sonne und Mond, wie ein bloßes Aufzeichnen der Kegeldurchschnitte lehrt, $\leqq m + \mu + p - \pi$ sein muß, wenn m und μ die vom Zentrum der Erde aus gesehenen Radien, p und π die Parallaxen von Mond und Sonne bedeuten. Ist β die Breite des Mondzentrums gegen die Ekliptik zur Zeit der Konjunktion und i die Neigung der Mondbahn gegen dieselbe Grundebene, so ist der scheinbare Mindestabstand der Zentren von Sonne und Mond gleich $\beta \cos i$; folglich können wir dem Kriterium auch die folgende Form geben: $\beta \leqq (m + \mu + p - \pi) \sec i$.

Entsprechend den Grenzwerten für die innerhalb enger Grenzen mit der Zeit variablen m, μ, p, π und i ergeben sich als Grenzwerte für β die folgenden: $\beta_1 = 1^\circ 34',9$ und $\beta_2 = 1^\circ 23',2$. Ist, absolut genommen, $\beta < \beta_2$, so findet sicher eine Finsternis statt, ist aber $\beta > \beta_1$, so ist eine Finsternis unmöglich; ist β schließlich zwischen β_1 und β_2 gelegen, so hängt das Stattfinden der Finsternis von den speziellen Werten von m, μ, p, π, i ab.

3. Die Grundgleichungen der Finsternisse. Ist das Eintreten einer Sonnenfinsternis als sicher erkannt, so ist zunächst der *Bereich der Sichtbarkeit* der Finsternis auf der Erde zu ermitteln. In jedem Zeitmoment schneidet der Schattenkegel des Mondes auf der Erdoberfläche den Bereich der jeweils verfinsterten Erdorte aus. Die doppeltgekrümmte Schnittkurve soll kurz als *„Schattenoval"* bezeichnet werden. Die Enveloppen der Schattenovale bilden die *nördliche* und *südliche Grenzkurve*, und die Berührungspunkte der Mantelgeraden des Schattenkegels mit der Erde die *östliche* und *westliche Grenzkurve*.

Die Ermittelung dieser und anderer Kurven und der Sichtbarkeitsverhältnisse überhaupt basiert auf der Diskussion der Bedingung, die ausdrückt, daß ein Punkt der Erdoberfläche sich auf dem Umhüllungskegel von Sonne und Mond befindet. Die Gleichung dieses Kegels, den wir, weil Sonne und Mond Kugeln sind, als *Kreiskegel* betrachten, erhält ihre einfachste Gestalt, wenn eine der Achsen, die z-Achse des *rechtwinkeligen Koordinatensystems*, auf das die Punkte der Kegeloberfläche bezogen werden sollen, der Kegelachse parallel ist. Den Anfangspunkt des Koordinatensystems legen wir in den Mittelpunkt O der Erde, auf den auch in den Ephemeriden die Ko-

---

das Figurenzentrum der Erde bezogen, gleiche Rektaszension haben. Die in den Ephemeriden angegebene *Zeit des Neumonds* ist exakt die Konjunktion von Sonne und Mond, also nicht der Zeitpunkt kleinster Mondphase.

ordinaten von Sonne und Mond stets bezogen sind; als Längeneinheit wählen wir den Erdradius.

Sind jetzt x, y, z die Koordinaten des Mondes, ξ, η, ζ die eines Erdortes E, f der Öffnungswinkel des Schattenkegels und endlich u' und u die Radien der beschatteten Kreise in der x-y-Ebene[1a]) und in deren Parallelebene durch E (Figur 1), so lautet die Bedingung dafür, daß der Erdort E auf dem Schattenkegel liegt:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=u^2.$$

Substituieren wir hier $u=u'-\zeta\operatorname{tg}f$, so erhält die Grundgleichung der Finsternisse die Form:

I) $\quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(u'-\zeta\operatorname{tg}f)^2$

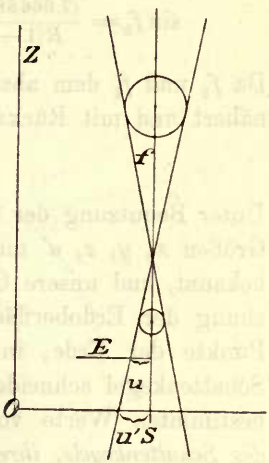


Fig. 1.

oder in Polarkoordinaten u und p, wo p den in der x-y-Ebene gezählten Positionswinkel des Schattenkreismittelpunktes S im Erdort E darstellt:

II) $$\left.\begin{aligned} x-\xi &= u\sin p\\ y-\eta &= u\cos p\end{aligned}\right\},\quad \text{wo } u=u'-\zeta\operatorname{tg}f.$$

Die Koordinaten x, y, z des Mondes in unserem speziellen Koordinatensystem ergeben sich aus den in den Ephemeriden zu findenden, die auf den Äquator oder die Ekliptik als Fundamentalebene bezogen sind, durch eine gewöhnliche Koordinatentransformation[2]); dasselbe gilt von den Koordinaten des Erdortes.

Ist k der in Einheiten des Erdradius ausgedrückte lineare Mondradius, so wird $u'=\left(z+\frac{k}{\sin f}\right)\operatorname{tg}f$, und der Öffnungswinkel f, den wir beim Halbschatten positiv, beim Kernschatten negativ zählen müssen, ergibt sich aus den Gleichungen

$$\sin f_h=\frac{k+S}{G}\qquad\text{(Halbschattenkegel)},$$

$$\sin f_k=\frac{k-S}{G}\qquad\text{(Kernschattenkegel)},$$

wo S den linearen Sonnenradius und G die Entfernung Sonne-Mond bedeutet; werden S und G durch die Parallaxen von Sonne und

---

1a) Der beschattete Kreis in der x-y-Ebene heißt *„Schattenkreis"*.

2) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), I. Abschnitt, § 2 = Astr. Nachr. 14 (1837), p. 132 = *Bessel*, Astron. Untersuch. 2, p. 111 = *Bessel*, Abhdl. 3, p. 376; *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 310 usw.

Mond ($\pi_\odot$ und $\pi_\mathbb{C}$) und den Abstand Erde-Sonne R ausgedrückt, und k durch seinen numerischen Wert ersetzt, so ist[3])

$$\left.\begin{aligned} \sin f_h &= \frac{(7.668\,767)}{R(1-\mu)} \quad \text{(Halbschatten)} \\ \sin f_k &= \frac{(7.666\,584_n)}{R(1-\mu)} \quad \text{(Kernschatten)} \end{aligned}\right\} \quad \text{wo } \mu = \frac{\sin \pi_\odot}{\sin \pi_\mathbb{C}}.$$

Da f_h und f_k dem absoluten Betrage nach fast gleich sind, so ist genähert und mit Rücksicht darauf, daß $\cos f$ nahezu $= 1$:

$$u_h' + u_k' = 2k = 0{,}54.$$

Unter Benutzung der astronomischen Ephemeriden sind dann also die Größen x, y, z, u' und f für jeden Zeitpunkt t eines ersten Meridians bekannt, und unsere Gleichung I resp. II repräsentiert, mit der Gleichung der Erdoberfläche $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ verbunden, den Ort der Punkte der Erde, in welchen sich die Oberflächen von Erde und Schattenkegel schneiden; im speziellen liefert das System II zu jedem bestimmten Werte von p, d. h. *zu jeder bestimmten Mantelgeraden des Schattenkegels, ihren Schnittpunkt mit der Erde.* Charakteristisch für die Fundamentalgleichungen ist, daß die Zeit t transzendent in dieselben eingeht, weil die Koordinaten von Sonne und Mond transzendente Funktionen der Zeit sind, während die den Erdort definierenden Koordinaten der Breite φ und Länge λ insofern nur algebraisch auftreten, als nur algebraische Funktionen von $\sin\varphi$ und $\sin\lambda$ vorkommen. Folglich sind alle Auflösungen der Grundgleichungen nach der Zeit t transzendent, während die Auflösung nach den Koordinaten eines Erdortes bei gegebener Zeit algebraisch ist.

Die wichtigsten und zugleich klassischen Bearbeitungen der an die Grundgleichungen der Finsternisse sich anschließenden Probleme stammen von *F. W. Bessel*[4]) und *P. A. Hansen*[5]). Während *Bessel* alle Aufgaben der Theorie soweit als möglich streng und direkt zu lösen sucht, will *Hansen* dieselben Aufgaben mit zwar theoretisch geringerer, für die Bedürfnisse der Praxis aber durchaus genügender Genauigkeit lösen. Aber typisch und auffällig für die Bearbeitung der Finsternisprobleme durch diese beiden Autoren und andere ist, daß das geometrisch doch so anschauliche Problem trotzdem so wenig geometrische Interpretation gefunden hat.

---

3) Eingeklammerte Zahlen bedeuten diejenige Zahl, deren dekadischer Logarithmus in der Klammer steht.

4) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842).

5) *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859) usw.

Nach Aufstellung der Grundgleichungen sind dieselben jetzt für die folgende Anwendung vorzubereiten.

Zunächst ist die *Wirkung der Strahlenbrechung*, die, wie *P. A. Hansen*[6]) zuerst nachgewiesen hat, einen Einfluß auf die Erscheinung ausübt, in Rechnung zu ziehen. Eine Mantelgerade des Schattenkegels SB (s. Fig. 2), d. h. eine Berührende der beiden Scheiben von Sonne und Mond, treffe die Grenze der Atmosphäre, wo deren brechende Kraft in Wirksamkeit zu treten beginnt, in B; der gebrochene Strahl trifft das Auge des Beobachters in A, dem die Berührung der Scheiben in der Richtung der letzten Tangente an den gebrochenen Lichtstrahl, in der Richtung AS' erscheint. Der ungebrochene Lichtstrahl SB würde dagegen in seiner Verlängerung die Vertikale von A in A' schneiden. Man würde also die Erscheinung, wenn keine Refraktion stattfindet, in A' in derselben Weise und zu derselben Zeit wahrnehmen, wie bei Vorhandensein einer Strahlenbrechung im Beobachtungsort A. Mithin findet die Strahlenbrechung dadurch Berücksichtigung, daß der Erdradius AO durch $A'O$ ersetzt wird; wird also $\frac{A'A}{AO} = \psi$ gesetzt, so sind der Erdradius AO und folglich auch die geozentrischen Koordinaten ξ, η, ζ mit $(1 + \psi)$ zu multiplizieren, wo ψ von der brechenden Kraft der Erdatmosphäre, der Refraktionskonstanten und der Zenitdistanz des Berührungspunktes abhängt[7]).

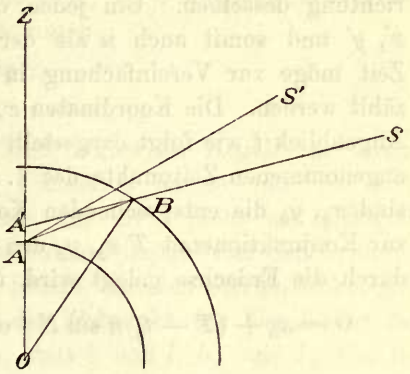


Fig. 2.

Eine *Erhebung des Beobachters* über die Erdoberfläche um die Höhe ψ' ist ebenso wie die Strahlenbrechung durch Anbringung eines Faktors $(1 + \psi')$ an die Koordinaten des Erdortes zu berücksichtigen.

Ferner sind die *Koordinaten des Mondes* mit Rücksicht auf die Praxis und auf die Auflösung der Grundgleichungen nach der Zeit t *nach Potenzen der Zeit zu entwickeln.* In der Regel wählt man fünf die Zeit der Konjunktion des Mondes umschließende Zeitpunkte und berechnet für jeden derselben die Koordinaten x, y, z des Mondes

6) *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 185.

7) Eine Tafel für $\log(1 + \psi)$ findet sich bei *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 325.

und deren stündliche Änderungen x', y' und z'. Setzt man

$$x' = n \sin N, \qquad y' = n \cos N,$$

so bedeutet n die stündliche Bewegung des Schattenkreismittelpunktes relativ zum Erdmittelpunkt und N den Positionswinkel der Bewegungsrichtung desselben. Um jeden der 5 Zeitpunkte herum kann man x', y' und somit auch n als der Zeit proportional annehmen. Die Zeit möge zur Vereinfachung in Sternzeit des Ersten Meridians gezählt werden. Die Koordinaten x, y können dann für einen beliebigen Augenblick t wie folgt dargestellt werden. Ist t_0 einer der willkürlich angenommenen Zeitpunkte des 1. Meridians um den Neumond herum, sind x_0, y_0 die entsprechenden Koordinaten des Mondes, so ist, wenn zur Konjunktionszeit T x_c, y_c den Mondort bedeutet und die yz-Ebene durch die Erdachse gelegt wird, in diesem Augenblicke $x_c = 0$, d. h.

$$0 = x_0 + (T - t_0) n \sin N \quad \text{und} \quad y_c = y_0 + (T - t_0) n \cos N$$
$$= y_0 - x_0 \operatorname{ctg} N.$$

Folglich ist der kürzeste Abstand γ des Erdmittelpunktes von der Kegelachse:

$$\gamma = y_c \sin N = y_0 \sin N - x_0 \cos N$$

und die zugehörige Zeit

$$\tau = T - \frac{1}{n} y_c \cos N = t_0 - \frac{1}{n} (x_0 \sin N + y_0 \cos N).$$

Mithin erhalten die Koordinaten x und y, wenn t_1 die Ortssternzeit des Beobachtungsortes, λ seine westliche Länge ist, die Form:

$$\begin{cases} x = -\gamma \cos N + (t_1 + \lambda - \tau) n \sin N \\ y = \gamma \sin N + (t_1 + \lambda - \tau) n \cos N. \end{cases}$$

Für die *Koordinaten des Erdortes* gelten ferner die folgenden in die Grundgleichungen zu substituierenden Formeln:

$$\begin{cases} \xi = \varrho \cos \varphi' \sin (t - \lambda - l), \\ \eta = \varrho \{ \sin \varphi' \cos b - \cos \varphi' \sin b \cos (t - \lambda - l) \}, \\ \zeta = \varrho \{ \sin \varphi' \sin b + \cos \varphi' \cos b \cos (t - \lambda - l) \}, \end{cases}$$

wo ϱ den lokalen Erdradius, φ' die geozentrische Breite[9]), λ die westliche Länge, b und l Deklination und Rektaszension des Zielpunktes der Kegelachse bedeuten. Mit *Hansen*[8]) kann man in diese Ausdrücke

8) *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 333.

9) Die *geozentrische Breite* φ' des Erdorts ist sein Winkelabstand vom Erdäquator, gesehen vom Figurenzentrum des Erdellipsoids. Formeln für ϱ und φ' siehe Seite 49, Fußnote 87; Tafeln für zahlreiche Erdorte in jedem Jahrgang der Conn. des temps.

statt der zwei abhängigen Variabeln ϱ und φ' eine einzige Variable φ_1, die sogenannte *„reduzierte Breite"*, die formal der exzentrischen Anomalie der Planetenbewegung entspricht, substituieren. Ist nämlich α die Abplattung der Erde, und setzt man die halbe große Achse der Erdmeridiane $= 1$, so lauten die in ξ, η, ζ eingehenden Verbindungen von ϱ und φ' als Funktion von φ_1:

$$\varrho \cos\varphi' = \cos\varphi_1,$$
$$\varrho \sin\varphi' = (1 - \alpha)\sin\varphi_1.$$

Die Koordinaten b und l des Zielpunktes der Kegelachse unterscheiden sich um die Zeit einer Finsternis herum von den entsprechenden Koordinaten der Sonne um nicht mehr als $\frac{1}{4}$ Bogenminute und zwar offenbar um eine kleine Größe von der Ordnung der Sonnenparallaxe; bei ∞ ferner Sonne, also bei Sternbedeckungen, fallen der Sonnenmittelpunkt und der Zielpunkt der Kegelachse zusammen. Deshalb führt man noch, statt b und l, $b_\odot$ und $l_\odot$ ein, indem man setzt

$$b - b_\odot = \Delta b, \qquad l - l_\odot = \Delta l.$$

Dann lauten die *Grundgleichungen der Finsternisse in ihrer endgültigen Form:*

$$\text{III)} \quad \begin{cases} u\sin p = -\gamma\cos N + (t_1 + \lambda - \tau)\, n \sin N \\ \qquad - (1+\omega)\cos\varphi_1 \sin(t_1 - l_\odot - \Delta l), \\ u\cos p = \gamma\sin N + (t_1 + \lambda - \tau)\, n\cos N \\ \qquad - (1+\omega)\{(1-\alpha)\sin\varphi_1\cos(b_\odot + \Delta b) \\ \qquad\qquad - \cos\varphi_1 \sin(b_\odot + \Delta b)\cos(t_1 - l_\odot - \Delta l)\}, \end{cases}$$

wo

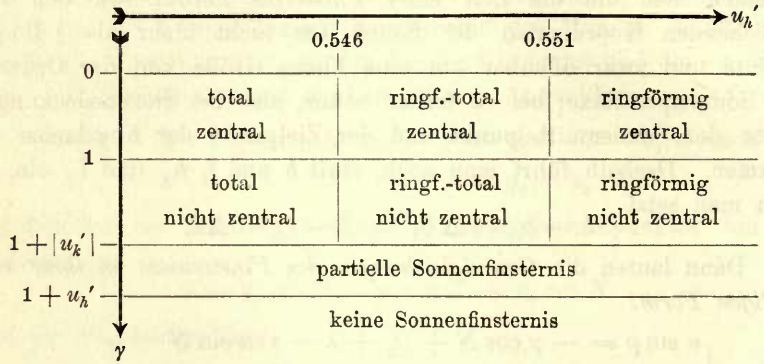
$$u = u' - (1+\omega)\{(1-\alpha)\sin\varphi_1\sin(b_\odot + \Delta b) + \cos\varphi_1\cos(b_\odot + \Delta b)\cos(t_1 - l_\odot - \Delta l)\}\operatorname{tg} f$$
$$1 + \omega = (1+\psi)(1+\psi')$$

ist.

Es sei noch bemerkt, daß $t_1 - l_\odot$ die wahre Ortszeit t' und N der Positionswinkel der Bewegungsrichtung des Zielpunktes der Kegelachse gegen den Deklinationskreis an der betreffenden Stelle der Sphäre ist.

Die numerischen Beträge von γ und u' entscheiden über die *Gattung der Finsternis.* Reicht nämlich die Spitze des Kernschattenkegels über die xy-Ebene hinaus, so daß die z-Koordinate der Spitze negativ ist, so ist die Finsternis für alle Erdorte, welche der Kernschattenkegel überstreicht, total; der entsprechende Radius u_h' des Halbschattenkreises muß dann $< 0{,}546$ sein. Erreicht aber die Spitze des Kernschattenkegels die Erdoberfläche überhaupt nicht, so ist die

Finsternis für die Orte, die in der Verlängerung des Kernschattenkegels über seine Spitze hinweg liegen, ringförmig und $u_h' > 0{,}551$. Liegt u_h' zwischen beiden Grenzwerten, so erscheint die Finsternis, was den Kernschatten betrifft, teils total, teils ringförmig. Soll die Finsternis zentral sein, so muß γ kleiner als der Erdradius, d. h. $\gamma < 1$ sein; für totale Finsternisse muß $\gamma - u_k' < 1$ sein; für ringförmige $\gamma + u_k' < 1$, weil u_k' in diesem Falle negativ; schließlich für partielle Finsternisse: $\gamma - u_h' < 1$. Wir erhalten insgesamt die in folgender Tabelle dargestellten Bereiche der Größen u_h' und γ, welche die verschiedenen Gattungen der Finsternis bedingen:



4. Die Grenzkurven der Sichtbarkeit. Ist der Halbmesser der Erde $= 1$, so kann der Radius u_h' des Halbschattens höchstens 0,58 werden, und es ist deshalb nicht möglich, daß die Erde von dem Schattenkegel vollständig eingehüllt wird. Folglich ist die Sichtbarkeit einer Sonnenfinsternis in bestimmte Gebiete auf der Erdoberfläche eingeschlossen und durch Grenzkurven von den Gebieten getrennt, die nichts von der Finsternis wahrnehmen. Gelangen alle Mantelgeraden des Schattenkegels zum Eintritt in die Erde, so besteht die Begrenzung aus vier verschiedenen Kurven, die man zweckmäßig als *nördliche* resp. *südliche* und als *westliche* resp. *östliche Grenzkurve* bezeichnet. Wie erwähnt, bilden die Enveloppen der Schattenovale auf der Erde die nördliche resp. südliche Grenzkurve, während der Ort der Punkte, in denen die Mantelgeraden die Erde berühren, die westliche resp. östliche Grenzkurve darstellt. Zeitlich sind der erste resp. letzte Punkt der Grenzkurven

a) die Punkte des Beginns und Endes der Finsternis überhaupt,

die als Berührungspunkte von Erde und Halbschattenkegel auf der westlichen resp. östlichen Grenzkurve (aber auf deren inneren Teilen,

vgl. Fig. 7) gelegen sind. Der Berührungspunkt der beiden Scheiben von Sonne und Mond erscheint im Horizont des Erdorts, weil die dem Berührungspunkt entsprechende Mantelgerade die Erde berührt. Bei äußeren Berührungen, also im Falle des Halbschattens, steht der Sonnenmittelpunkt in jenen Momenten unter dem Horizonte, der des Mondes über demselben; ist R die Strahlenbrechung im Horizont und $r_\odot$ der scheinbare Sonnenradius, so ist die wahre Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem Horizont

$$-(R \pm r_\odot) \text{ für } \begin{matrix}\text{äußere}\\ \text{innere}\end{matrix} \text{ Berührungen resp. } \begin{matrix}\text{Halbschatten}\\ \text{Kernschatten}\end{matrix}.$$

Ist t' die wahre Sonnenzeit des Berührungspunktes auf der Erde, φ und λ seine Breite und westliche Länge, so daß $t' + \lambda = \tau'$ die entsprechende wahre Zeit des ersten Meridians, und $\delta_\odot$ die Deklination der Sonne, so ist für den Auf- und Untergang der Sonne:

$$\cos t' = \cos(\tau' - \lambda) = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_\odot - (R \pm r_\odot) \sec\varphi \sec\delta_\odot \begin{matrix}\text{äußere}\\ \text{innere}\end{matrix} \text{ Berührung},$$

womit wir die *erste Bedingung* für die gesuchten Punkte erhalten. Da nun Erde und Schattenkegel nach der allerersten resp. vor der allerletzten Berührung zwei Mantelgeraden des Kegels als gemeinsame Tangenten besitzen, so muß für die allerletzte resp. allererste Berührung, wo nur eine einzige Mantelgerade berührt, die entsprechende Zeit τ' des ersten Meridians ein Maximum resp. Minimum sein. Man erhält folglich die *zweite Bedingungsgleichung* für die allererste und allerletzte Berührung, indem man die Fundamentalgleichungen II) nach τ' differenziert, wobei p ebenfalls als variabel zu betrachten ist, und nach der Differentiation $d\tau' = 0$ setzt; die gleich 0 gesetzte Determinante der so erhaltenen drei in dp, $d\varphi$, $d\lambda$ homogenen Gleichungen stellt die gesuchte Bedingung dar. Dieselbe hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Im Augenblicke einer allerersten oder allerletzten Berührung liegen nämlich die Mittelpunkte S und M von Sonne und Mond, der Berührungspunkt auf der Erde und sein Zenitpunkt Z in einer einzigen Ebene, die auch noch den Zielpunkt S_1 der Kegelachse enthält (s. Fig. 3). Letzterer fällt aber, wie schon erwähnt, nahezu mit dem Sonnenmittelpunkt zusammen, da er sich im Falle einer Finsternis höchstens um $\frac{1}{4}$ Bogenminute, d. h. weniger als $\frac{1}{60}$ des scheinbaren Sonnenhalbmessers vom Sonnenmittelpunkt entfernen kann. Folglich ist der

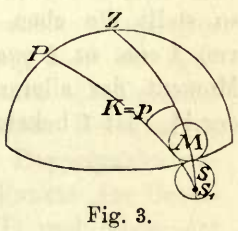


Fig. 3.

um den Zielpunkt S_1 der Kegelachse im Äquatorsystem gemessene Positionswinkel p des Berührungspunktes der beiden Scheiben streng gleich dem parallaktischen Winkel des Zielpunktes, also sehr genähert gleich dem parallaktischen Winkel K des Sonnenmittelpunktes im Augenblick der ersten resp. letzten Berührung im Horizont. Da nun im Horizont allgemein $\sin K = \cos\varphi \sin t'$, so ist wegen $p = K$

$$\sin p = \cos\varphi \sin t',$$

also wegen

$$\begin{cases} \cos t' = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_\odot + \text{Refraktionsglied}, \\ \sin p = \cos\varphi \sqrt{1 - (-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta_\odot + \text{Refr.})^2}, \end{cases}$$

wodurch t' und p als Funktionen von φ allein dargestellt sind. Die Substitution dieser Ausdrücke für t' und p in das System III) liefert dann zwei Gleichungen für φ und λ, und zwar ergibt sich bei Auflösung nach φ und λ eine *Gleichung 4. Grades für sin φ resp. sin λ*, entsprechend den zwei inneren und zwei äußeren Berührungen des Schattenkegels mit der Erde.

In der Praxis löst man diese Gleichungen durch *Näherungsmethoden* auf[10]). Die *ersten Näherungswerte* kann man sich leicht bei *Voraussetzung einer kugelförmigen Erde* verschaffen. Sind nämlich a, b, c die Koordinaten der Spitze des Schattenkegels in unserem Koordinatensystem (x, y, z), so lautet die Bedingung der Berührung des Schattenkegels und der Erdkugel, wenn man deren Radius $= 1$ setzt:

$$(1 + c \sin f)^2 = (a^2 + b^2) \cos^2 f, \qquad f = \text{Öffnungswinkel des Kegels},$$

wie man durch bloßes Aufzeichnen sofort erkennt. In der Praxis entwickelt man dann die Koordinaten a, b, c in Potenzreihen nach der Zeit, so daß $a = a_0 + a_1 \cdot t + \cdots$ usw.

Begnügt man sich nun in dieser Entwicklung der Koordinaten mit den in t linearen Gliedern, was in der Praxis durchaus ausreicht, so stellt die eben genannte Bedingungsgleichung zur Bestimmung von *t eine in t quadratische Gleichung* dar, deren eine Lösung den Moment der allerersten und die andere den der letzten Berührung ergibt. Ist t bekannt, so folgen φ und λ aus den Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 = \cos^2 f,$$
$$\xi : \eta = a : b,$$
$$\zeta = \sin f.$$

---

10) *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 357 usw.

F. W. Bessels analytische Methode für die Bestimmung der Berührungspunkte ist die folgende. *Bessel* löst die allgemeine Aufgabe, die Schnittkurve von Erde und Schattenkegel zu ermitteln, in der Weise, daß er die Koordinaten ξ, η, ζ eines beliebigen Punktes jener Kurve als Funktion des Positionswinkels p darstellt, indem er also die Schnittpunkte jeder einzelnen Mantelgeraden mit der Erde bestimmt. Da zwei Schnittpunkte vorhanden sind, erhält man die Koordinaten in der Form: $\xi = \alpha \pm \beta P(p)$, wo P ein von p abhängiger Wurzelausdruck ist. Die Berührung einer durch den Positionswinkel p charakterisierten Mantelgeraden mit der Erde ist dann folglich durch $P = 0$ bedingt; im Falle einer allerersten resp. allerletzten Berührung tritt zu dieser Bedingung noch $d\tau' = 0$ hinzu. Wie *Bessel*[11]) gezeigt hat, erhält man zwei getrennte Gleichungen, deren eine p, die andere τ' liefert. Die Bedingung $P = 0$ enthält außer p an Variabeln noch die Koordinaten des Mondes, die sphärischen Koordinaten des Zielpunktes der Kegelachse und ferner den Öffnungswinkel f; man entwickelt alle diese langsam veränderlichen Größen nach Potenzen von t und leitet die Berührungszeiten wieder durch sukzessive Näherungen her.

b) Die östliche und westliche Grenzkurve.

Den frühesten resp. spätesten Berührungen folgen resp. gehen vorher weitere Berührungen der Erde mit den Mantelgeraden des Schattenkegels. Die entsprechenden Berührungspunkte auf der Erde, in denen die Berührung der Scheiben von Sonne und Mond im Horizont erfolgt, bilden in ihrer Gesamtheit *die östliche und die westliche Grenzkurve*. Bewegt sich der Schattenkegel so durch die Erde hindurch, daß nacheinander alle Mantelgeraden zur Berührung mit der Erde kommen, so besteht der Ort der Berührungspunkte aus zwei getrennten und geschlossenen ovalförmigen Kurven, deren eine die westliche, die andere die östliche Grenzkurve darstellt. Ragt aber der Schattenkegel während seiner Hinwegbewegung über die Erde über dieselbe hinaus, so daß nicht alle Mantelgeraden die Erde berühren können, so gehen die beiden sonst getrennten Grenzkurven ineinander über und bilden eine einzige mit einem Doppelpunkt versehene schleifenförmige Kurve. — Die einzelnen Punkte der Grenzkurve genügen einmal dem Fundamentalsystem II) und ferner der

11) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), II. Abschn. § 20; Astron. Untersuch. 2, p. 162 = *Bessel*, Abhdl. 3, p. 397.

Bedingung, daß die Zeit, zu welcher wir die Mantelgerade die Erde schneiden lassen, bei festgehaltenem p, d. h. bei Fixierung einer bestimmten Mantelgeraden, ihren kleinsten resp. größtmöglichen Wert annehmen muß. Wir erhalten so drei Bedingungsgleichungen, aus denen wir die *Koordinaten des Berührungspunktes* auf der Erde (φ und λ) und die zugehörige Zeit t *als Funktion von* p ermitteln können.

Die Bedingungsgleichung selber für die Punkte der westlichen resp. östlichen Grenzkurve kann man analytisch ganz analog dem Falle der Punkte der ersten und letzten Berührungen herleiten[12]). Aber auch hier können wir die betreffende Bedingung leicht auf geometrischem Wege erlangen. Während die scheinbare Zentrale der Scheiben von Sonne und Mond im Falle der frühesten resp. spätesten Berührung senkrecht zum Horizont des Berührungspunktes der Erde stand, ist sie für jeden anderen Punkt der Grenzkurve im Augenblick der Berührung um einen beliebigen Winkel gegen den Horizont geneigt (s. Fig. 4). Sind S und M die Mitten von Sonne und Mond und B der Berührungspunkt der beiden Scheiben, so liegt der Zielpunkt der Kegelachse in der Verlängerung von SM in S_1, und zwar höchstens $\frac{1}{4}$ Bogenminute von S entfernt. Dann ist $S_1B = f$, gleich dem Öffnungswinkel des Schattenkegels, und $PS_1B = p$, gleich dem Positionswinkel des Berührungspunktes. Da ferner

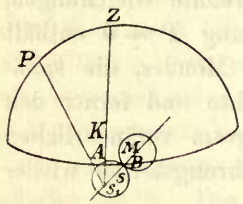


Fig. 4.

$$S_1A = -H \qquad (A = \text{Schnittpunkt von Horizont und } S_1Z)$$

die Höhe der Sonne und $PS_1Z = K$ den parallaktischen Winkel derselben bedeutet, so ist mit Rücksicht darauf, daß H und f kleine Winkel sind:

$$H = -f\cos(p - K)$$

die *Bedingungsgleichung für die Punkte der östlichen resp. westlichen Grenzkurve.*

Da man H und K als Stücke des sphärischen Dreiecks PZS_1 auch durch φ, λ, $\delta_\odot$, t ausdrücken kann, so kann man die soeben erwähnte Bedingung in eine solche zwischen p, φ, λ, $\delta_\odot$, t transformieren. Man kann auch umgekehrt mit *P. A. Hansen* in die Grundgleichungen überall H und K statt t und φ einführen. Mit den beiden Grundgleichungen II) zusammen, haben wir dann die drei Gleichungen, die

12) *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 349.

uns φ, λ, p *und* t *als Funktionen einer dieser Größen* liefern. In der Praxis löst man diese Gleichungen wie immer durch Näherungen auf[13]).

F. W. Bessel löst die Aufgabe mittels der S. 349 erwähnten Bedingung $P(p, t) = 0$, die eine der Größen p und t als Funktion der anderen liefert. $P(p, t)$ ist eine ganze rationale Funktion 4. Grades in $\sin p$ und transzendent in t. Ist also t bekannt, so wird p *aus einer trigonometrischen Form 4. Grades bestimmt,* die, wie *F. W. Bessel* näher ausführt, stets in zwei reelle Faktoren 2. Grades zerlegt werden kann[14]). Alle vier Wurzeln können reell sein, d. h. der Schattenkegel kann das Erdellipsoid nicht nur in zwei, sondern unter Umständen sogar in vier Mantelgeraden berühren. Alsdann können sich Erde und Schattenkegel bei entsprechender Lage in zwei getrennten Kurven AB und CD schneiden, wie die Figur 5 schematisch andeutet, so daß vier Mantelgeraden die Erde berühren. Im Falle einer kugelförmigen Erde ist aber nur eine einzige Schnittkurve vorhanden und folglich auch nur zwei Berührungspunkte. Sollten bei dem tatsächlichen Ellipsoid vier reelle Berührungen vorhanden sein, so müßte der Radius des Schattenkreises bei der geringen Exzentrizität der Erdmeridiane nahezu gleich dem Erdradius sein, was aber bei weitem nicht der Fall ist, so daß die Gleichung 4. Grades *im Falle einer Sonnenfinsternis nur zwei reelle Wurzeln* hat.

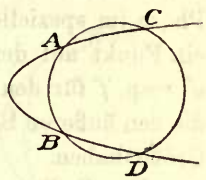


Fig. 5.

Sind p und t bekannt, so liefern die Fundamentalgleichungen den entsprechenden Erdort, d. h. φ und λ. Substituiert man, mittels $P = 0$, p als Funktion von t in die Fundamentalgleichungen II), so stellen diese die *Gleichung der Grenzkurve* dar, die aber transzendent ist, weil t transzendent in den Koordinaten enthalten ist, während die erzeugenden Schnittkurven von Schattenkegel und Erde als Schnitte zweier algebraischen Flächen 2. Grades algebraisch und zwar vom 4. Grade sind.

Die Wirkung der Strahlenbrechung ist gerade für die östliche und westliche Grenzkurve eine maximale, weil die Strahlenbrechung selbst im Horizont ihr Maximum erreicht.

---

13) *Hansen,* Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 349.

14) *Bessel,* Analyse der Finsternisse (1842), II. Abschn., §§ 12 und 22 = *Bessel,* Astron. Untersuch. 2, p. 137 und p. 168 usw. = *Bessel,* Abhdl. 3, p. 386 und 399.

c) Die nördliche und südliche Grenzkurve.

Sie werden durch die Enveloppen der Schattenkreise des Halbschattenkegels gebildet. Jeder Punkt derselben sieht von der Finsternis weiter nichts als die Berührung der beiden Scheiben von Sonne und Mond, d. h. die äußere Berührung ist für jene Erdorte das Maximum der Finsternis, die größte Phase. Fassen wir allgemein an einem Punkte innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches der Finsternis jede einzelne Phase als eine Berührung der Mondscheibe mit einer der betreffenden Phase entsprechenden verkleinerten Sonnenscheibe auf, so müssen wir den Radius u' des Schattenkreises als eine Funktion der Zeit betrachten, und der Augenblick der größten Phase ist durch das Minimum von u', folglich auch von f in bezug auf die Zeit t bedingt. Soll die größte Phase im speziellen Falle verschwinden, d. h. soll der betreffende Erdort ein Punkt auf der nördlichen oder südlichen Grenzkurve sein, so muß u' resp. f für den betreffenden Punkt im Augenblick der größten Phase die den äußeren Berührungen von Erde und Schattenkegel entsprechende Größe haben.

Die Bedingungsgleichung für die Punkte der Grenzkurve wird ganz analog der für die östliche und westliche Grenzkurve erhalten. Die Grundgleichungen werden bei variablem u' nach der Zeit differenziert, und nach der Differentiation wird $du' = df = 0$ gesetzt. Die gleich 0 gesetzte Determinante der entstehenden drei homogenen Gleichungen zwischen du, dp und dt ist dann die gesuchte Bedingungsgleichung der Grenzkurve, nachdem für u' resp. f die den äußeren Berührungen entsprechende Größe substituiert worden ist. Die Auflösung der Bedingungsgleichung nach dem Winkel $\psi = p - N$ gibt derselben die Form:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\alpha + \beta \sin(\gamma + t)}{\delta \cos(\varepsilon + t)},$$

wo α, β, γ, δ und ε von den Variabeln und Parametern des Problems abhängen, außer von der Zeit t, die, soweit sie explizit in $\operatorname{tg}\psi$ auftritt, ersichtlich gemacht ist. Mit den Fundamentalgleichungen II) zusammen haben wir dann wieder drei Gleichungen zur Bestimmung von φ, λ, p *und* t *als Funktion einer derselben* als willkürlichem Parameter.

Die numerische Auflösung dieser Gleichungen erfolgt wieder durch sukzessive Näherungen[15]); dieselben basieren vor allem darauf, daß der Winkel $\psi = p - N$, welcher den Positionswinkel des Be-

15) *Hansen,* Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 341.

rührungspunktes gegen die Bewegungsrichtung des Zielpunktes der Kegelachse fixiert, stets nahezu 90^0 resp. 270^0 ist; denn die Richtung vom Schattenkreismittelpunkt nach dem Berührungspunkt steht nahezu senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schattenkreismittelpunktes und kann sich höchstens um 20^0 von 90^0 resp. 270^0 unterscheiden, so daß $\sin\psi$ stets nahezu $= \pm 1$.

Wählt man die Zeit t als willkürlichen Parameter und löst die Gleichungen nach dem Positionswinkel p auf, so erhält man eine *Gleichung 8. Grades für* $\sin p$, falls man die Erde als Rotationsellipsoid betrachtet[16]); im Falle einer kugelförmigen Erde reduziert sich diese Gleichung auf den 6. Grad. Zur geometrischen Veranschaulichung nehme man statt des Schattenkegels einen Zylinder, dessen Achse in der Ebene des Äquators liegt und der, ohne eigene Bewegung, so gelegt wird, daß er mehr als halb von der *zunächst kugelförmig angenommenen Erde* umschlossen wird. Dann ist die Schnittkurve ein einziges räumliches Oval. Die nördlichsten und südlichsten Punkte desselben A, B, C, D, E, F (s. Fig. 6) repräsentieren die sechs Lösungen unsrer Gleichung, sie befriedigen die Bedingung $du' = 0$. Dabei sehen A, B, D, F die Ränderberührung als Maximum, C und E als Minimum der Finsternis.

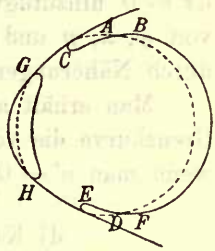


Fig. 6.

Zu diesen sechs Punkten resp. Lösungen treten im *Falle einer ellipsoidischen Erde* noch zwei weitere hinzu, weil die Schnittkurve in diesem Fall, wie bereits p. 351 erwähnt, aus zwei getrennten Kurven bestehen kann; es tritt dann das Oval GH hinzu, wo G und H ebenfalls die Bedingung $du' = 0$ befriedigen, und zwar so, daß die Berührung der Ränder ein Minimum bedeutet. Tatsächlich erfüllen die Dimensionen der Erde und des Schattenkegels die zu dieser Art des Verlaufes der Erscheinung notwendige Bedingung nicht.

Die nördliche und südliche Grenzkurve sind geschlossene Kurven, aber nur ein Teil derselben liegt auf der der Sonne zugewandten, der andere auf der von der Sonne abgewandten Seite. Die Endpunkte des der Sonne zugewandten Teiles dieser Kurven, also die zeitlich frühesten Punkte, sind die, in denen die jene Kurven erzeugenden Mantelgeraden des Schattenkegels die Erde berühren, d. h. *Punkte*, die gleichzeitig auch auf der westlichen resp. östlichen Grenzkurve liegen und *in denen sich nördliche resp. südliche Grenzkurve mit der westlichen resp. östlichen berühren.* J, K, L und M mögen diese Endpunkte

16) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), p. 173.

sein (s. Fig. 7); daß dieselben für beide Kurvenklassen *Berührungspunkte* sind, folgt daraus, daß, wenn dieselben sich schneiden würden, die den Schnittpunkten entsprechenden Erdörter J' und K' im nächsten Augenblick nach der Berührung in den Schatten geraten würden, was der Voraussetzung widerspricht, daß jene Punkte höchstens eine Berührung wahrnehmen dürfen.

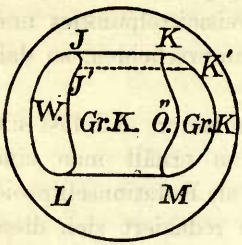


Fig. 7.

Man erhält die Endpunkte offenbar, wenn man zu den schon fixierten drei Bedingungsgleichungen noch die der östlichen und westlichen Grenzkurve entsprechende Bedingung $d\tau = 0$ hinzufügt; man hat dann vier Gleichungen zur Bestimmung von φ, λ, p und t. Die numerische Auflösung erfolgt wie immer durch Näherungen[17]).

Man erhält aus den Gleichungen für die nördliche und südliche Grenzkurve die von der Kegelachse beschriebene *Kurve der Zentralität*, wenn man $u' = 0$, d. h. f und k (Mondradius) $= 0$ setzt.

d) Kurven sonstiger spezieller Phasen.

Zu diesen Kurven gehören einmal die Kurven, in deren Punkten eine bestimmte vorgelegte Phase als größte Phase wahrgenommen wird *(Kurven gleicher größter Phase)*; man gewinnt dieselben offenbar aus den Gleichungen der nördlichen resp. südlichen Grenzkurve, indem man sich aus der Sonne eine der vorgelegten größten Phase entsprechende verkleinerte Scheibe, einem bestimmten u' resp. f entsprechend, herausgeschnitten denkt, so daß die Erscheinung dem Falle verschwindender Phase analog ist.

Eine spezielle Kurve ist ferner die, deren Punkte die *größte Phase im Horizonte* sehen. Man erhält dieselbe, indem man zu den Bedingungsgleichungen der größten Phase noch die Bedingung des Sonnenauf- resp. -unterganges hinzufügt.

Schließlich ist noch die Kurve erwähnenswert, auf der die *größte Phase im Mittage* gesehen wird. Diese Kurve trennt den Sichtbarkeitsbereich der Finsternis in zwei Teile, deren einer den größten Teil der Finsternis am Vormittage, der andere dagegen am Nachmittage wahrnimmt. Diese Kurven sind namentlich für die Untersuchung antiker Finsternisse von Interesse. Man erhält diese Kurve wieder aus den Gleichungen der nördlichen resp. südlichen Grenzkurve, in-

17) *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 355.

dem man die wahre Ortszeit $t = 0$ setzt und u' entsprechend den verschiedenen größten Phasen innerhalb der zulässigen Grenzen variiert.

5. Der lokale Verlauf der Finsternis. Für einen Erdort, der innerhalb des Sichtbarkeitsbereiches der Finsternis liegt, interessiert es mit Rücksicht auf die Beobachtung der Erscheinung, die *Zeiten des Eintritts der verschiedenen Phasen*, speziell die Zeit der Berührungen und die der größten Phase zu bestimmen. Die Berechnung des Eintretens jeder anderen Phase der Finsternis reduziert sich, wie schon erwähnt, durch Annahme einer entsprechend verkleinerten Sonnenscheibe sofort auf das Problem der Ränderberührung.

Da die strenge Auflösung der Grundformeln nach der Zeit transzendent ist, so bedient man sich einer Näherungsmethode[18]), die schnell zum Ziel führt. Man entwickelt die Koordinaten des Mondes, des Erdortes und der übrigen veränderlichen Größen um die Eintrittszeit der Erscheinung herum nach Potenzen der Zeit t, so daß die Fundamentalgleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = u^2 = (u' - \zeta \operatorname{tg} f)^2$$

bei Mitnahme nur der in t linearen Glieder in den Koordinaten eine *zur Bestimmung von t quadratische Gleichung* liefert. Haben die Koordinaten x, y im Moment T_0 des ersten Meridians die Werte x_0, y_0, und sind ihre minutlichen Änderungen x', y', so sind die Koordinaten im Zeitpunkt T des Beobachtungsortes der Länge λ und der geozentrischen Breite φ':

$$x = x_0 + [T - (T_0 - \lambda)]x'$$

und analog y, ξ und η.

Ist d die Deklination und H der Stundenwinkel des Zielpunktes der Kegelachse für den Nullmeridian, die z. B. in der französischen Ephemeride „Connaissance des Temps" berechnet vorliegen, so lauten die Koordinaten des Erdortes (Radius $= \varrho$) und dessen Änderungen, wenn wir noch

$$\left.\begin{aligned} \varrho \sin\varphi' &= A \sin B, \\ \varrho \cos\varphi' \cos(H - \lambda) &= A \cos B \end{aligned}\right\}$$

setzen[3]):

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos\varphi' \sin(H - \lambda), \\ \eta &= A \sin(B - d), \\ \zeta &= A \cos(B - d), \end{aligned}\right. \qquad \text{und} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= (7.63\,982) A \cos B, \\ \frac{d\eta}{dt} &= (7.63\,982)\xi \sin d. \end{aligned}\right.$$

---

18) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842), p. 207 und *Hansen*, Theorie d. Sonnenf. (1859), p. 411.

Setzen wir schließlich noch, um der Lösung eine trigonometrische Form zu geben

$$m \sin M = x_0 - \xi, \quad n_1 \sin N_1 = x' - \frac{d\xi}{dt}, \quad \sin\psi = \frac{m}{u} \sin(M - N_1)$$

$$m \cos M = y_0 - \eta, \quad n_1 \cos N_1 = y' - \frac{d\eta}{dt}, \quad u = u' - \xi \operatorname{tg} f,$$

so lautet nach Substitution dieser Hilfsgrößen in die Fundamentalgleichung deren Auflösung nach T:

$$T = T_0 - \lambda \mp \frac{m}{n_1} \frac{\sin(M - N_1 \pm \psi)}{\sin\psi}$$

oberes Vorzeichen: Eintritt,
unteres „ Austritt.

Die *Zeit der größten Phase* wird:

$$T_1 = T_0 - \lambda - \frac{m}{n_1} \cos(M - N_1).$$

Ist u^* der dem Zeitpunkt T_1 entsprechende Minimalwert von u, so ist $u^* = \pm m \sin(M - N_1)$, wo u^* stets positiv zu nehmen ist. Teilt man den Sonnendurchmesser in 12, *Zolle* (frz. *doigts*) benannte Teile, so ist die Zahl der vom Monde verdeckten, in Zollen ausgedrückten Teile des Sonnendurchmessers im Augenblick der größten Phase, d. h. die *Größe der Finsternis*[19]: $12 \frac{u_h - u^*}{u_h - u_k}$ oder auch, weil u_k sehr klein gegen u_h, genähert $12 \frac{u_h - u^*}{u_h}$, was geometrisch durch bloßes Aufzeichnen sofort ersichtlich ist. Ebenso findet man leicht für die *Positionswinkel der Berührungspunkte*:

$N_1 + 180^0 - \psi$ für den Eintritt,
$N_1 + \psi$ „ „ Austritt.

Ferner bedient man sich zur Vorausbestimmung des lokalen Verlaufs einer Finsternis vielfach und vorteilhaft der *teils graphischen, teils interpolatorischen Methode.* Man berechnet für eine Reihe von Zeitpunkten, welche die Erscheinung umfassen, die scheinbaren lokalen Örter von Sonne und Mond und die denselben Momenten entsprechenden scheinbaren Abstände von Sonne und Mond. Durch Interpolation findet man dann leicht die den Berührungen der Ränder entsprechenden Zeiten und Zeit und Größe der größten Phase. Diese nach *J. Kepler* benannte Methode ist *in extenso* von *Bohnenberger*[20] entwickelt worden.

---

19) Die englischen Astronomen geben die *„magnitude of eclipse"* in Dezimalteilen des Sonnendurchmessers an.

20) *J. G. F. Bohnenberger,* Nautical Almanac and astronomical ephemeris for the year 1836, London 1835.

6. Anwendung der Sonnenfinsternisse; Tafeln. Die Bedeutung der totalen Sonnenfinsternisse liegt vor allem darin, daß sie die einzige Gelegenheit zu bestimmten astrophysikalischen Studien an der Sonne und ihrer nächsten Umgebung bieten; ferner liefern sie der Mondtheorie die genauesten Daten über den Mondort, bezogen auf den Ort der Sonne, um die Zeit des Neumonds, und die einzige Möglichkeit, die scheinbare säkulare Mondakzeleration nachzuweisen; in der geographischen Längenbestimmung (vgl. p. 134) stehen sie den Sternbedeckungen durch den Mond lediglich durch ihre relative Seltenheit, nicht an Genauigkeit nach. Die Durchmusterung größerer Zeiträume des Altertums nach Finsternissen der Sonne und des Mondes stellt sich in den Dienst der Chronologie. Demgemäß machte sich das Bedürfnis nach Tabulierung früherer und zukünftiger Finsternisse bald geltend; schon die *„Art de vérifier les dates"* (1. Ausgabe 1750) machte ins einzelne gehende Angaben über die Finsternisse seit Christi Geburt[21]).

Das erste bequeme, die Ergebnisse der Theorie vollständig berücksichtigende und doch die zulaßbarsten Abkürzungen einführende Hilfsmittel zur schnelleren Berechnung der Sonnen- (und Mond-)finsternisse lieferte *P. A. Hansen* mit seinen „Ekliptischen Tafeln". Er entwickelte die in seiner Theorie auftretenden Größen, welche sonst zum Teil aus den Sonnen- und Mondtafeln zu berechnen gewesen wären, in trigonometrische Reihen nach der Zeit[22]). Mittels dieser Tafeln erhält man sämtliche Hilfsgrößen, die man zur Ermittelung der näheren Umstände der Sichtbarkeit einer Finsternis nötig hat. *Hansens* Analyse wurde 1881 von *Th. v. Oppolzer* genauer wiederholt in seinen Syzygientafeln[23]). Da die *Oppolzer*schen ekliptischen Tafeln auf sorgfältiger Revision der Grundlagen beruhen und bei ihrer Tabulierung erheblich mehr Glieder mitgenommen worden sind, als bei den *Hansen*schen, so sind sie wesentlich genauer als die letzteren. Ebenfalls auf *Hansens* Analyse fußen die Tafeln von *P. Lehmann*[24]); sie sind aber genauer als *Hansens* Tafeln und reichen von 2500 v. Chr. bis 2400 n. Chr. Auch *Largeteau*'s Tafeln[25]) leisten, obwohl auf ältere Grundlagen gestützt, gute Dienste für die näherungsweise Ermittelung der Sonnenfinster-

21) L'Art de vérifier les dates, 1. éd., p. 1—73; 2. éd., p. 39—89; 3. éd. tome 1, p. 41—83, umfaßt die in der alten Welt sichtbaren Sonnen- und Mondfinsternisse seit Christi Geburt bis bzw. 1800, 1900, 2000.

22) *Hansen*, Ekl. Tafeln (1857) und *Hansen*, Analyse d. ekl. Tafeln (1863).

23) *Oppolzer*, Syzygientafeln (1881).

24) *Lehmann*, Tafeln (1882).

25) *Largeteau*, tables (1843).

nisse. Da *Oppolzers* Syzygientafeln besonders für die systematische Berechnung der Finsternisse für lange Zeiträume geeignet sind, stellte *Oppolzer* einen „Kanon der Finsternisse“ [26]) her, welcher für die Sonnenfinsternisse von 1208 v. Chr. bis 1261 n. Chr. sämtliche Elemente und für die zentralen unter denselben drei Hauptpunkte der Zentralität liefert; letztere gestatten unmittelbar eine ungefähre Übersicht des Hauptgebietes der Sichtbarkeit der Finsternisse.

Die Bestimmung der Zeit und Größe der Verfinsterungsphase für einen gegebenen Ort (und damit auch der Hauptkurven) hat *R. Schram* [27]) außerordentlich vereinfacht. Unter Aufgabe des Anspruches auf Genauigkeit erhält man aus dessen Tafeln mittels weniger Rechnungsoperationen unter Zugrundelegung der Elemente des *Oppolzer*schen Kanons (oder auch näherungsweise richtig mittels aus den Tafeln selbst erlangbarer Elemente) für jeden gegebenen Ort mit einer zu historischen Zwecken mehr als hinreichenden Genauigkeit Zeit und Größe der Phase. Auch auf *Newcombs* Tafeln [28]) ist noch zu verweisen.

Zur Darstellung der *historischen Sonnenfinsternisse*, namentlich des Altertums, reichen die *Hansen*schen Grundlagen der Mondtheorie, auf welche die Mehrzahl der genannten ekliptischen Tafeln zurückgeht, bekanntlich nicht ganz aus [29]). *Th. von Oppolzer* hat deshalb in seinen „Syzygientafeln“ empirische Korrektionen gegeben, die aus einer provisorischen Ausgleichung einer Anzahl historischer Finsternisse abgeleitet sind. Der „Kanon der Finsternisse“ ist mit Hinzuziehung dieser Korrektionen berechnet. *F. K. Ginzel* hat diese Korrektionen aus 21 mittelalterlichen Finsternissen, für die ein reichhaltiges Beobachtungsmaterial vorliegt, und aus einer vom Jahre 71 n. Chr. von neuem abgeleitet und einen Anschluß jener Finsternisse an die vorchristlichen hergestellt [30]). Diese Korrektionen sind von *R. Schram* tabuliert worden [31]); *Ginzel* hat diese Tafeln zur Berechnung eines ausführlichen Nachweises sämtlicher zwischen 900 v. Chr. bis 600 n. Chr. innerhalb des Ländergebietes von 350° bis 50° östl. Länge und 25° bis 50° nördl. Breite stattgefundenen Sonnenfinsternisse verwendet [32]). Dieses

---

26) *Oppolzer*, Canon (1887).

27) *Schram*, Tafeln zur Berechn. v. Sonnenf. (1886).

28) *Newcomb*, Recurrence of solar ecl. (1882).

29) Siehe VI 2, 17 (*Brown*), Erdmond.

30) *F. K. Ginzel*, Astronomische Untersuchungen über Finsternisse, Wien Ber. 85 (1882), p. 663; 88 (1883), p. 629; 89 (1884), p. 491.

31) *Schram*, Reduktionstafeln (1889).

32) *Ginzel*, Kanon (1899).

Werk liefert für jeden beliebigen Ort dieses Gebietes Zeit und Phase und außerdem speziell für Rom, Athen, Memphis und Babylon noch genauere Angaben.

7. Die Perioden der Finsternisse. Da die Mondbahn gegen die Sonnenbahn um einen bestimmten Winkel ($i = 5^0\,8'.8$) geneigt ist, so gibt es zwei Perioden im Jahre, während welcher die Sonne einmal dem aufsteigenden, das andere Mal dem niedersteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn nahe ist. Ist der Mond gleichzeitig einem dieser Knoten nahe, so kann eine Finsternis, Sonnen- oder Mondfinsternis oder auch beides, in Frage kommen. Diese als *„Finsternisperiode"* bezeichnete kritische Zeit dauert im Durchschnitt für Sonnenfinsternisse 36 Tage, von denen 18 Tage vor dem Durchgange der Sonne durch den Knoten und 18 Tage nachher liegen. Für Mondfinsternisse beträgt die Finsternisperiode nur 23 Tage, wenn für diese nur die durch den Kernschatten der Erde verursachten Finsternisse, die allein genauerer Beobachtung zugänglich sind, in Betracht gezogen werden. Da die Mondknoten sich nun aber bekanntlich rückläufig bewegen, so fällt die Finsternisperiode nicht immer in denselben Monat, sondern liegt in jedem folgenden Jahre durchschnittlich 20 Tage früher. Nach etwa 18 Jahren fällt also die Finsternisperiode wieder in denselben Monat; genauer ist die zwischen den drakonitischen, d. h. vom Durchgang durch den Mondknoten an gezählten Sonnen- und Mondumläufen bestehende Beziehung die folgende:

$$242 \text{ drakonitische Mondumläufe} = 6585{,}357 \text{ Tagen},$$
$$19 \text{ drakonitische Sonnenumläufe} = 6585{,}780 \text{ Tagen},$$

d. i. nahezu 18 Jahre 10 Tage.

Diese größere Periode von 18 Jahren und 10 oder 11 Tagen (je nachdem in den 18 Jahren 5 oder 4 Schalttage enthalten sind), nach deren Ablauf sich die Finsternisse wieder nahezu in derselben Reihenfolge wiederholen, ist der schon den Alten bekannt gewesene *Saroszyklus*, der ihnen ein Mittel zur Vorhersagung der Finsternisse gab. Eine bestimmte Finsternis wiederholt sich aber nach Ablauf des Zyklus nicht zur selben Stunde, sondern, dem Bruchteil des Periodenwertes entsprechend, $7^h\,42^m$ später, sodaß die Mitte der Finsternis erst nach Ablauf von 3 Zykeln annähernd zur selben Stunde eintritt. Da ferner in einem Zyklus 223 Konjunktionen von Sonne und Mond stattfinden, die nach diesen 223 Lunationen verflossene Zeit aber nur 6585.3212 Tage, also etwas weniger als 242 drakonitische Mondumläufe (6585.357 Tage) beträgt, so findet die 223. Konjunktion von Sonne und Mond statt, bevor der Mond den Knoten erreicht hat; der Mond ist in diesem

Augenblick noch annähernd $\frac{1}{2}$ Grad (genauer 28′) vom Knoten entfernt, sodaß eine bestimmte Finsternis nach Ablauf des Zyklus $\frac{1}{2}$ Grad weiter vom Knoten entfernt eintritt. Da nun die Finsternisperiode für die Sonne 36 Tage beträgt, während welcher Zeit die Sonne rund 36° am Himmel zurücklegt, so erhält sich eine Sonnenfinsternis über rund 72 Zykeln, d. h. für eine Zeit von über 1200 Jahren. Da die Finsternisperiode für Mondfinsternisse nur 23 Tage beträgt, so erhalten sich die Mondfinsternisse über eine entsprechend kürzere Zeit von rund 46 Zykeln oder von nahezu 900 Jahren.

Andere brauchbare d. h. nicht zu große Perioden zur Finsternis-Vorausbestimmung, welche namentlich für den Fall eines *bestimmten* Ortes der Erde sich als nützlich erweisen, behandelt *Ginzel*[33]).

B. Mondfinsternisse.

8. Kriterium für das Stattfinden einer Mondfinsternis überhaupt. Die Mondfinsternisse können nur um die Zeit des Vollmondes eintreten. Wie bei den Sonnen-, ist auch bei den Mondfinsternissen das *Stattfinden der Finsternis überhaupt an eine* analoge *Bedingung gebunden*, die man durch bloßes Aufzeichnen der Schattenumrisse sofort erkennt. Die Bedingung ist die, daß die Breite β des Mondes gegen die Ekliptik zur Zeit des Vollmondes in bestimmte Grenzen eingeschlossen ist, und zwar muß dem absoluten Werte nach

$$\beta \leqq (p + \pi - r_\odot) \sec i + r_\mathbb{C} \text{ (Kernschatten)},$$

resp.

$$\beta \leqq (p + \pi + r_\odot) \sec i + r_\mathbb{C} \text{ (Halbschatten)}$$

sein.

Da $(p + \pi - r_\odot) \sec i + r_\mathbb{C}$ zwischen 51′ 57″ und 64′ 19″, $(p + \pi + r_\odot) \sec i + r_\mathbb{C}$ zwischen 1° 24′ 32″ und 1° 35′ 54″ schwankt, so findet sicher eine Mondfinsternis statt, wenn dem absoluten Werte nach

$$\beta < 51' 57'' \text{ (Kernschatten)},$$

resp.

$$\beta < 1^\circ 24' 32'' \text{ (Halbschatten)}.$$

In anderen Fällen ist das Stattfinden der Finsternis von den jeweiligen Werten von p, π, $r_\odot$, $r_\mathbb{C}$, i abhängig. Da der Durchmesser des Kernschattenquerschnittes der Erde in der Mondentfernung im Mittel 82′ beträgt, so kann der Mond, dessen Durchmesser im Mittel nur 32′ beträgt, völlig in ihn eintauchen. Die durch den Einfluß der Erdatmosphäre eintretende *Vergrößerung des Erdschattens*[34])

33) *F. K. Ginzel*, Kanon (1899), p. 263.

34) *J. Hartmann*, Die Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen,

um etwa $^1/_{51}$ bewirkt, daß die eben abgeleiteten Grenzwerte der Breite des Mondes entsprechend zu vergrößern sind.

9. Verlauf einer Mondfinsternis. Wegen der Undeutlichkeit der Schattengrenze sind die Mondfinsternisse zu genaueren Messungen nicht brauchbar. Deshalb genügt zur Darstellung ihres Verlaufs eine *graphische Methode* resp. eine Näherungsrechnung. Man berechnet aus den stündlichen Bewegungen von Sonne und Mond die *Relativbewegung des Mondes gegen die Mitte des Erdschattens*, d. h. gegen den Gegenpunkt der Sonne, und zwar kann man dieselbe innerhalb kurzer Zeiten als gleichförmig betrachten. Zu einer beliebigen Zeit t sind dann die Längen- resp. Breitendifferenzen von Mond und Schattenmittelpunkt:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_0 + \lambda' t, \quad \Delta\beta = \Delta\beta_0 + \beta' t,$$

wo λ' und β' die betreffenden Relativbewegungen bedeuten, und die Berührungszeiten von Mond und Erdschatten folgen, wenn ϱ der scheinbare Schattenradius und $r_\mathbb{C}$ der scheinbare Mondradius ist, aus der Bedingungsgleichung:

$$(\varrho \pm r_\mathbb{C})^2 = (\Delta\lambda_0 + \lambda' t)^2 + (\Delta\beta_0 + \beta' t)^2; \quad \begin{matrix} +, \text{ falls äußere Berührung,} \\ -, \text{ falls innere Berührung,} \end{matrix}$$

wo $\varrho = \pi + p - r_\odot$, im Mittel $= 41'\,9''$. Zeichnet man sich den Weg des Mondes gegen den als ruhend gedachten Schatten auf, so kann man aus dieser Zeichnung sogleich die Positionswinkel der Berührungspunkte, ebenso den Betrag der größten Phase direkt ablesen.

Eine *Mondfinsternis ist* überall da *sichtbar*, wo der Mond über dem scheinbaren Horizont steht, wo also die Zenitdistanz des Mondes $z_\mathbb{C} < 90 - p_\mathbb{C} + R$ (wo R = Strahlenbrechung im Horizont), folglich ist die Sichtbarkeitsbedingung einer bestimmten Phase der Mondfinsternis für einen Ort der geozentrischen Breite φ' und Länge λ, wenn θ die Sternzeit des ersten Meridians für jene Phase:

$$\cos z_\mathbb{C} = \sin\delta_\mathbb{C} \sin\varphi' + \cos\delta_\mathbb{C} \cos\varphi' \cos(\theta - \alpha_\mathbb{C} - \lambda) > \sin(\pi_\mathbb{C} - R),$$

wo $\alpha_\mathbb{C}$ und $\delta_\mathbb{C}$ Rektaszension und Deklination des Mondes sind.

10. Tafeln zur Berechnung von Mondfinsternissen. Die Mondfinsternisse können in ähnlicher Weise wie die Sonnenfinsternisse aus entsprechend eingerichteten *ekliptischen Tafeln* berechnet werden. Die schon genannten Tafeln von *C. L. Largeteau*[25]), *P. Lehmann*[24]) und *Th. von Oppolzer*[26]) ermöglichen diese Rechnung ohne weiteres. Die

Leipzig Ges. Wiss. Abh. 17 (1891), p. 363; *H. Seeliger*, Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen, Münch. Abh. 19, Abteilung 2 (1896), p. 35.

„Syzygientafeln" von *Th. von Oppolzer*[23]) gestatten den Übergang von den für die Konjunktion des Mondes ermittelten Elementen zu denen für die Opposition, indem man an die Elemente nur entsprechende Korrektionen anzubringen braucht. *Oppolzer* hat ferner für den Fall, daß nur ungefähre Angaben für die Mondfinsternisse verlangt werden, durch Zusammenziehung der Argumente die Rechnung noch so abgekürzt[35]), daß man die Zeit und Größe der größten Phase und die Dauer der Finsternis innerhalb kurzer Zeit berechnen kann. Mit diesen Tafeln sind die 5200 Mondfinsternisse im „Canon der Finsternisse" berechnet worden.

C. Andere Finsternisse und Bedeckungen.

11. Sternbedeckungen durch den Mond. Die Sternbedeckungen durch den Mond bilden einen speziellen Fall der Sonnenfinsternisse; man erhält aus deren Theorie die entsprechende für die Sternbedeckungen, indem man die Sonnenparallaxe und ebenso den Öffnungswinkel des Schattenkegels als verschwindend betrachtet, weil man die Entfernung der Fixsterne als beliebig groß und den Schattenkegel deshalb als Zylinder ansehen kann. Dann ist aber der Radius u' des Schattenkreises konstant, gleich dem linearen Mondradius k, sodaß die Fundamentalgleichung jetzt lautet:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = k^2.$$

Zur Berechnung der Berührungs-, d. h. in diesem Falle der Ein- und Austrittszeiten entwickelt man wieder die Koordinaten nach Potenzen der Zeit t und begnügt sich in erster Annäherung mit den in t linearen Gliedern. Man reicht aber selten mit nur einer Annäherung aus, sondern muß deren mehrere machen. Zur Abkürzung derselben sind deshalb zahlreiche Methoden von Astronomen und Nautikern angegeben worden[36]). Besonders bemerkenswert ist *ein von C. Stechert*[37]) *entwickeltes Verfahren*, das die Vorausbestimmung der Berührungszeiten, die dem Beobachter der Erscheinung im voraus bekannt sein müssen, durch ein halb numerisches, halb graphisches

---

35) *Oppolzer*, Tafeln f. Mondf. (1883).

36) Siehe Abschnitt II (Sternbedeckungen) des Literaturverzeichnisses. Für die praktische Rechnung vgl. *Chauvenet* (1900), vol. 1, §§ 340—346 und die Formelzusammenstellung bei *W. F. Wislicenus*, Handbuch der geographischen Ortsbestimmungen auf Reisen, Leipzig 1891.

Lehrbuch der Navigation, herausgeg. vom Reichsmarineamt, 3 Bde Berlin 1901 Bd. II p. 372.

37) *Stechert*, Tafeln für Sternbedeck. (1896) sowie *Stechert*, Hilfsgrößen (1897).

Verfahren unter Benutzung von Tafeln außerordentlich abkürzt. Wie bereits erwähnt, führt die Auflösung der Grundgleichung nach der Zeit auf eine transzendente Gleichung, und zwar bringt *Stechert* dieselbe auf die folgende Form:

Ist θ_0 die Sternzeit der wahren Konjunktion in Rektaszension für den ersten Meridian, λ die Länge des Beobachtungsortes, φ' seine geozentrische Breite, y die zwischen der wahren Konjunktion für den ersten Meridian und der für den Beobachtungsort verfließenden Zeit, A die Rektaszension des bedeckten Sterns, δ_0 die wahre Deklination des Mondes im Augenblick der Konjunktion, $\Delta\alpha$ die Rektaszensionsbewegung des Mondes in 1^h mittlerer Zeit, so lautet die für die Zeit y explizit geschriebene Grundgleichung:

$$y = (0{,}00119)\frac{Pr\cos\varphi'}{\Delta\alpha\cos\delta_0}\sin(\theta_0 - A - \lambda + y),$$

wo r der lokale Erdradius und P die Äquatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes. Diese *transzendente Gleichung für y* ist völlig analog *der Keplerschen Gleichung* der Planetenbewegung. Setzen wir nämlich den Faktor des Sinus gleich e, ferner $A - \theta_0 + \lambda = M$ und $\theta_0 - A - \lambda + y = \varepsilon$, so geht unsere tranzendente Gleichung über in $\varepsilon - e\sin\varepsilon = M$, also in die *Kepler*sche Gleichung, wo ε der exzentrischen, M der mittleren Anomalie und e der Exzentrizität entspricht. *Stechert* gibt zur Lösung der Gleichung eine Tafel, die mit e und M als Argument die Unbekannte ε und somit auch y liefert. Ist y bekannt, so erhält man die Ein- und Austrittszeit mittels der Relativbewegung des Mondes gegen den Stern; die Positionswinkel der Ein- und Austrittstellen am Mondrande erhält man graphisch aus einer Zeichnung, in der man den Mond als ruhend und den Weg des Sterns in erster Annäherung als geradlinig betrachtet. In zweiter Annäherung kann man auch die Krümmung der Bahn berücksichtigen.

Der *Nutzen der Sternbedeckungen* für die Astronomie besteht in der Möglichkeit, mittels derselben Längendifferenzen auf der Erde[37a]), ferner die Parallaxe und den Radius des Mondes, genaue Positionen desselben und die Sonnenparallaxe zu bestimmen[37b]). Besonders wertvoll

---

37a) Hierzu von historischem Interesse *J. Cassini* (le fils), Méthode de déterminer les longitudes des lieux de la terre par les eclipses des étoiles fixes et des planètes par la lune, Paris hist. (2) mém. 1705, p. 194, sowie *L. Euler*, Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la lune, Berl. hist. 1747. Im übrigen vgl. VI 2, 3 (*Wirtz*), Nr. **34**.

37b) *H. Battermann*, Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung und der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen von Sternbedeckungen am 6füßigen *Merz*schen

sind für diese Zwecke die Bedeckungen von helleren Sternhaufen wegen der großen Zahl der Bedeckungen (Plejaden). Schließlich bieten die Sternbedeckungen auch ein Mittel zur Herleitung der Abplattung des Erdkörpers, eine Aufgabe, die *F. W. Bessel*[38]) kritisch behandelt hat.

12. Planetenvorübergänge. Wird ein Planet vom Monde bedeckt oder ein Fixstern durch einen Planeten, so ist die Theorie der Erscheinung der für die Sonnenfinsternisse resp. Sternbedeckungen völlig analog. Eine Komplikation des Problems entsteht nur durch die eventuell ellipsoidische Figur des bedeckten resp. bedeckenden Planeten und ferner durch die unvollständige Beleuchtung der Planetenscheibe[39]). Mit der Bestimmung des Schattens eines ellipsoidischen Planeten beschäftigten sich *Seeliger*[40]) und *Souillart*[41]). Die Fixsternbedeckungen durch Planeten dienen einmal zur Herleitung genauer Planetenörter und ferner zur Untersuchung der Atmosphäre der Planeten. In dem speziellen Falle einer Bedeckung der Sonne durch Venus diente die Beobachtung derselben zu der Bestimmung der Sonnenparallaxe.

13. Finsterniserscheinungen in anderen Trabantensystemen. Die Theorie der Mondfinsternisse findet ein Analogon bei den *Verfinsterungen eines Trabanten* durch den Schatten seines Hauptplaneten. Die Beobachtung dieser Finsternisse liefert genaue Daten für die *Bahnbestimmung* des Trabanten und hat in diesem Zusammenhang insbesondere zu der Entdeckung der *Lichtgeschwindigkeit* geführt. Da die Zeit des Verschwindens des Trabanten von der Lichtstärke des Fernrohrs abhängt, so legt man neuerdings *photometrisch* den Moment fest, in dem die Helligkeit des Trabanten auf *die Hälfte des normalen Wertes* gesunken ist. Man hat auch den Eintritt der Verfinsterung als Zeitsignal in den Dienst der geographischen *Längenbestimmung*[42])

Fernrohr; sowie: Bestimmung der Mondlänge, des Mondhalbmessers und der Sonnenparallaxe: Berlin Sternw. Ergeb. 5 (1891) bezw. 11 (1902). Vgl. VI. 2, 3 (*Wirtz*), Seite 135.

38) *Bessel*, Analyse der Finsternisse (1842); *Bessel*, Astron. Untersuch. 2, p. 227 = *Bessel*, Abh. 3, p. 423.

39) *F. W. Bessel*, Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe, Astr. Nachr. 12 (1835), p. 201—214 und p. 217—236 = *Bessel*, Astron. Untersuch. 1 (1841), p. 239 = *Bessel*, Abh. 1 (1875), p. 327.

40) *H. Seeliger*, Über den Schatten eines Planeten, Münch. Ber. 24 (1894), p. 423.

41) *C. Souillart*, Sur l'ombre d'une planète, Astr. Nachr. 91 (1878), p. 129.

42) Vgl. VI 2, 3 (*Wirtz*), S. 114.

gestellt. Das seltene Phänomen, daß ein Saturnmond in den Schatten des Saturnringes kommt[43]), ist insofern interessant, als es die Durchsichtigkeit des Florrings des Saturn zu messen erlaubt.

Zum Schluß sei auf die Vorausberechnungen der Finsternisserscheinungen verwiesen, wie sie in der Literatur vorliegen.

Über den Verlauf der einzelnen Sonnenfinsternisse, Mondfinsternisse, Merkurdurchgänge, Sternbedeckungen durch den Mond, Verfinsterungen und Bedeckungen im Jupitersystem findet man die ausführlichsten Angaben in den betreffenden Jahrgängen der „Connaissance des temps". *A. Marth* veröffentlichte für die Satelliten des Uranus (seit 1870), Saturn (seit 1873), Jupiter (seit 1875), Neptun (seit 1878), Mars (seit 1883) in den „Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, London" Ephemeriden, die seit 1897 *A. C. D. Crommelin* weiterführt.

---

43) Über die Japetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem im Jahre 1889 vgl. *A. Marth*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889), p. 427; *H. Buchholz*, Astr. Nachr. 137 (1895) p. 241.

(Abgeschlossen im Dezember 1907.)

VI 2, 8. CHRONOLOGIE

Von

F. K. GINZEL

in Berlin.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung.
2. Tagesbeginn und Tageseinteilung.
3. Wochen.
4. Jahreszeiten.
5. Jahr, Urform desselben.
6. Mond- und Sonnenjahr. Einschaltung, Ausgleichung.
7. Besondere Jahrformen und Zyklen.
8. Epochen (Ären).

Literatur.

I. Ältere Werke.

J. J. Scaliger, De emendatione temporum, Paris 1583, Genf 1629.

S. Calvisius, Opus chronologicum, Leipzig 1605, verschiedene Ausgaben 1629, 1650, 1685.

J. J. Scaliger, Thesaurus temporum, Leyden 1606, Amsterdam 1658.

Dion. Petavius, De doctrina temporum, Paris 1627.

II. Neuere Lehr- und Handbücher.

L. Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, Berlin 1825 [immer noch Hauptwerk, aber jetzt in den meisten Kapiteln veraltet] (*Ideler, Hdb. (1825)*).

W. Matzka, Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, Wien 1844 [eingehende arithmetische Behandlung der chronologischen Aufgaben] (*Matzka, Chr. (1844)*).

E. Brinckmeier, Praktisches Handbuch der Chronologie aller Zeiten und Völker, Berlin 1882.

Wolf, Handb. 1 (1890), p. 598.

H. Grotefend, Zeitrechnung des deutschen Mittelalters und der Neuzeit, 3 Bde., Hannover und Leipzig 1891—98.

W. F. Wislicenus, Astronomische Chronologie, Leipzig 1895.

Valentiner, Handwörterbuch 1 (1897), p. 593—624 [verfaßt von *W. F. Wislicenus*].

F. Rühl, Chronologie des Mittelalters und der Neuzeit, Berlin 1897.
H. Grotefend, Taschenbuch der Zeitrechnung des deutschen Mittelalters und der Neuzeit, 2. Aufl., Hannover und Leipzig 1905.
F. K. Ginzel, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, I. Bd.: Zeitrechnung der Babylonier, Ägypter, Mohammedaner, Perser, Inder, Südostasiaten, Chinesen, Japaner und Zentralamerikaner, Leipzig 1906 (*Ginzel, Handb. d. Chron. I (1906)*).

III. Spezialwerke.

Unter den Spezialwerken, deren es für alle Länder, Völker und Zeiten gibt, heben wir heraus:

R. Lepsius, Chronologie der Ägypter 1, Berlin 1849.
E. Greswell, Origines Calendariae Italicae, Oxford 1854.
L. M. Lewisohn, Geschichte und System des jüdischen Kalenderwesens, Leipzig 1856.
H. Brugsch, Nouvelles recherches sur la division de l'année des anciens Égyptiens, Berlin 1856.
Th. Mommsen, Römische Chronologie, Berlin 1859 (*Mommsen, Röm. Chronol. (1859)*).
H. Brugsch, Matériaux pour servir à la reconstruction du calendrier des anciens Égyptiens, Berlin-Leipzig 1864 (*Brugsch, Matériaux (1864)*).
Ph. Huschke, Das alte römische Jahr und seine Tage, Breslau 1869.
A. Schwarz, Der jüdische Kalender historisch und astronomisch untersucht, Breslau 1872.
H. Brugsch, Thesaurus Inscriptionum Aegyptiacarum, vol. 1 u. 2, Leipzig 1883 (*Brugsch, Thesaurus Inscr. Aegypt. (1883)*).
Aug. Mommsen, Chronologie, Leipzig 1883 [betreffend die Griechen, besonders die Athener].
A. Schmidt, Handbuch der griechischen Chronologie, Jena 1888.

Die Literatur über die Zeitrechnung der Römer, Griechen, Kleinasiaten, Araber, Perser, Ägypter ist ungemein reichhaltig und in philologischen und orientalistischen Fachzeitschriften zerstreut; dieselbe wird jetzt durchwegs in dem oben unter II zitierten Handbuch der math. u. techn. Chronolog. von *F. K. Ginzel* (1906) berücksichtigt.

IV. Tafeln.

F. Wüstenfeld, Vergleichungstabellen der muhammedanischen und christlichen Zeitrechnung, Leipzig 1854; fortgesetzt bis 1500 H. von *E. Mahler*.
Th. v. Oppolzer, Canon der Finsternisse, Wien Denkschr. 52 (1887).
H. Grotefend, siehe oben unter II.
H. Jacobi, „On the computation of Hindu-Dates in Inscriptions", in dem Sammelwerk „Epigraphia Indica [Archaeological survey of India], edited by *J. Burgess*, Calcutta 1892—94", vol. 1, p. 403 und vol. 2, p. 487.
F. K. Ginzel, Spezieller Kanon der Sonnen- und Mondfinsternisse für das Ländergebiet der klassischen Altertumswissenschaften, von 900 v. Chr. bis 600 n. Chr., Berlin 1899.
R. Schram, Kalendariographische und chronologische Tafeln, Leipzig 1908.

1. Einleitung. Die Begründung der Chronologie als selbständiger Wissenschaft durch *Scaliger, Petavius, Calvisius*[1]), *Dodwell* u. a. schließt etwa mit der Zeit *Idelers*[2]) ab. Bis dahin bilden hauptsächlich die Nachrichten der *klassischen Autoren* und einzelne den betreffenden Völkern angehörende Schriftsteller die Quelle, aus welcher man die Schlüsse über die Beschaffenheit der *technischen* Chronologie der Nationen zog. Der großartige Aufschwung, den bald nach Beginn des 19. Jahrhunderts die *Ausgrabungen* im Orient und die vielfältigen *archäologischen Funde* auf klassischem Boden in der Epigraphik und überhaupt in der Altertumsforschung bewirkten, hat die Basis der Chronologie ganz umgestaltet. Jetzt sind die uns erhalten gebliebenen Dokumente, Münzen, Inschriften, Stein- und Kupferplatten, Denkmäler, Papyrus usw. das Hauptmaterial, auf Grund dessen man die Chronologie der Völker festzustellen sucht, und die klassischen Autoren kommen erst in zweiter Linie in Betracht. Daneben ist das Studium der *Festkalender* einzelner Nationen und der mit diesen in Verbindung stehenden *Mythologie* zur unabweisbaren Notwendigkeit für die Befestigung der Chronologie geworden, nicht minder die Berücksichtigung der Resultate der Sprachforschung. Allein immer noch, trotz großer Fortschritte in diesen Zweigen, greifen gegenwärtig die wissenschaftlichen Bedingungen in der technischen Chronologie noch nicht so vollkommen ineinander ein, wie zu wünschen wäre, und eben das tiefere Eindringen mittels der modernen Hilfsmittel hat die Klarstellung mancher chronologischer Kapitel, deren Lösung zu *Idelers* Zeit schon nahegerückt schien, auf die Zukunft gestellt.

In der *mathematischen* Chronologie sind seit den Versuchen von *Gauß, Delambre, Cicolini, Tittel, Matzka*[3]), die Arithmetik resp. Zahlentheorie zur Lösung der praktisch vorkommenden Aufgaben zu verwenden, keine besonderen Fortschritte gemacht worden. Dagegen haben gegenwärtig die mathematischen und astronomischen Hilfsmittel der Chronologie, die Tafeln[4]) zur Verwandlung gegebener Daten einer Zeitrechnung in die einer anderen, zur Bestimmung des Datums der Feste, ferner der Finsternisse, heliakischer Sternaufgänge[5])[22]) usw. einen sehr befriedigenden Stand der Vollkommenheit erreicht.

---

1) Vgl. das Literaturverzeichnis unter I.

2) *Ideler,* Hdb. (1825).

3) *Matzka,* Chr. (1844).

4) Siehe Abschnitt IV des Literaturverzeichnisses.

5) *W. F. Wislicenus,* Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- und Untergänge der Gestirne, Astr. Ges. Publ. 20 (1892).

2. Tagesbeginn und Tageseinteilung. Die Ägypter der älteren Zeit begannen den Tag mit Eintritt der Nacht (nach Sonnenuntergang), nach den Inschriften etwa mit der 10. Nachtstunde[6]), die Babylonier haben, wie es scheint, differierende Taganfänge gehabt, bei ihren Astronomen bilden Mitternacht oder Sonnenuntergang den Tagesanfang, die bürgerliche Rechnung war wahrscheinlich nach letzterer Art[7]), die meisten nach dem Mondjahre rechnenden Völker beginnen den Tag mit Sonnenuntergang, die alten Griechen mit der Morgendämmerung, die späteren Römer mit Mitternacht, die Etrusker um Mittag.

Rohe Tageseinteilungen, mit liturgischen Gebräuchen in den ältesten Zeiten entstanden und zum Teil sich bis in spätere Zeit erhaltend, sind: „nach Gebeten" (Juden, Mohammedaner) nach Vigilien, „Horen" (Römer, Mittelalter), Nachtwachen (Chinesen, Juden) u. dgl. Die älteste *genauere Teilung* der Tag- und der Nachthälfte ist die in 12 Stunden, wahrscheinlich von den Babyloniern oder Ägyptern begründet. Auf alten ägyptischen Denkmälern erscheinen schon die 12 Sonnenscheiben, symbolisch die Tagesphase ausdrückend. In den astronomischen Tafeln der Babylonier ist überall Sexagesimalteilung des Tages angewendet, bei den Griechen, Römern Zwölfteilung. Zu unterscheiden sind die ὧραι καιρικαὶ (horae temporales) der Alten von den ὧραι ἰσημερινὰι (horae aequinoctiales); die ersteren bezeichnen die *natürlichen Tagesstunden*, d. h. die Zwölftel des Tagbogens der Sonne je nach dessen Länge, sind also nach der Jahreszeit länger und kürzer; sie waren allgemein in Gebrauch; die anderen, *gleichteiligen Stunden*, kommen fast nur bei Astronomen vor (*Ptolemäus*). Die späteren Juden teilen so: 1 Stunde = 1080 chelakim, 1 chelak = 76 regaim (sexagesimale, von den Babyloniern übernommene Teilung). Bei den Indern treten mehrere Systeme auf, zum Teil auf Sexagesimalteilung beruhend; der Tag = 60 ghati, 1 ghati = 60 vinadi, 1 vinadi = 60 prana, mit diversen Varianten und weiteren Unterabteilungen, die in arithmetische Spielerei ausarten.

3. Wochen. Die siebentägige Woche ist sicher vorderasiatischen Ursprungs[8]); sie ist durch die Juden zu den Arabern verbreitet

6) *Brugsch*, Thesaurus Inscr. Aegypt. (1883), vol. I, p. 185; *Brugsch*, Matériaux (1864), p. 103.

7) *F. X. Kugler*, Babylonische Mondrechnung, Freiburg i. Br. 1900, p. 114, 192, 201.

8) *Eb. Schrader*, Keilschriften nnd altes Testament, 1883, p. 19—21; *E. Schürer*, Die siebentägige Woche im Gebrauch der christlichen Kirche, Zeitschrift für die neutestamentlichen Wissenschaften und Kunde des Urchristentums, Bd. 6 (1905), p. 1.

worden, die Griechen und Inder erhielten sie vielleicht direkt von den Babyloniern. Die Namen der Tage entsprechen den sieben altbabylonischen Gottheiten von Sonne (Samas), Mond (Sin), Merkur (Nebo), Venus (Istar), Saturn (Adar), Jupiter (Merodach), Mars (Nergal). Die 28tägige Woche der Chinesen deutet auf Zerlegung des Mondmonats (resp. der 28 Mondhäuser) in vier Gruppen. Bei den Ägyptern finden wir, da für diese das Sonnenjahr bestimmend war, eine andere, zehntägige Woche, entsprechend den 36, schon in sehr alten Inschriften auftretenden Dekanen (Schutzgottheiten der Abgestorbenen), welche in den Sternbildern des Zodiakus (unter Dreiteilung der zwölf Zeichen) symbolisiert werden[9]); bei den Römern der alten Zeit weist der Gebrauch achttägiger Wochenabschnitte (Nundinen) auf das Mondjahr[10]). Weniger deutlich und nur durch gewisse mythologische Kongruenzen nachweisbar erscheinen Teilungen nach Wochen, z. B. bei den alten Persern.

4. Jahreszeiten. Ursprünglich unterschieden die meisten Völker einzelne Jahreszeiten nur nach Maßgabe der klimatischen Beschaffenheit ihres Landes, z. B. hatte das nordische und frühmittelalterliche Jahr nur zwei Hälften, die alten Ägypter unterschieden Sommer, Winter und Überschwemmungszeit; an den Ursitzen der Indogermanen (am Indus) hatte man ursprünglich nur hima = Winter und samâ = Sommer; nachdem sich die Einwanderung über den Punjab ausgedehnt hatte, zählte man drei Jahreszeiten, und als die indischen Arier sich über ganz Indien verbreitet hatten, waren, den sehr verschieden gestalteten Verhältnissen des ausgedehnten Landes entsprechend, im Sprachgebrauch sechs Jahreszeiten eingebürgert. Es ist bei einzelnen Nationen deutlich an Festen u. dgl. bemerkbar, daß die ursprünglich den Jahreszeiten gegebenen Namen mit der Zeit wegen der Verschiebung des Wandeljahres (von 365 Tagen) gegen das feste (von $365\frac{1}{4}$ Tagen) ihre Bedeutung geändert haben, z. B. bei den Ägyptern und Persern. Von der Erkenntnis der vier astronomischen Jahrpunkte (*astronomische Jahreszeiten*) und von der unter sich verschiedenen Länge der Jahreszeiten konnte erst bei ziemlich vorgeschrittener Kenntnis der Astronomie die Rede sein. Die Babylonier kannten im dritten Jahrh. v. Chr. die Längen der astronomischen Jahreszeiten bereits sehr genau[11]); sie setzen die Jahrpunkte auf den achten Grad der Zodiakalzeichen (statt auf den dritten); die-

9) *Brugsch,* Thesaurus Inscr. Aegypt. (1883), vol. 1, p. 131.
10) *Mommsen,* Röm. Chronol. (1859), p. 228 ff.
11) *Kugler*[2]), p. 104.

selbe Einrichtung findet sich bei den Römern (*Columella*) und, mit teilweisen Widersprüchen, bei den Griechen (*Meton*); es ist kaum noch zweifelhaft, daß die Annahmen der Römer und Griechen auf babylonischer Überlieferung beruhen. Im Mittelalter finden sich noch weitere Abirrungen im Anfange der Jahreszeiten von den römischen. Die Ägypter der Ptolemäer- und Römerzeit unterscheiden vier Jahreszeiten und symbolisieren dieselben durch die Sonne (das Utsaauge) als Kind (Winter, am Sokarfest Geburt der Sonne), als Jüngling (Frühjahr), als Mann (Sommer, erwachsene Sonne), und als Greis (Herbst).

5. Jahr, Urform desselben. Die ursprüngliche Form des Jahres bei den einzelnen Völkern hängt innig mit dem jeweiligen Kultus zusammen, war aber jedenfalls in Asien vorwiegend das *Mondjahr*. Für das einstige Vorhandensein eines theoretischen Jahres von nur 360 Tagen finden sich gewisse Spuren [babylonische und ägyptische Tempelrechnungen; die besondere, bei den meisten vorderasiatischen Völkern wiederkehrende konstante Trennung der fünf Anhängetage (*Epagomenen*) von den 360 Tagen des 365tägigen Jahres u. a.], welche zu der Annahme berechtigen, daß man zwar nach einem solchen Jahre in der Praxis nicht rechnete, aber vielleicht bei den Schaltungsversuchen davon ausging. Daß es bis zur Formulierung des 365tägigen Wandeljahres einer erheblichen Zeit bedurfte, beweist die Existenz des altindischen 360tägigen *Savanajahrs* und anderer Formen, welche in den vedischen Schriften auftreten[12]). Bei den Babyloniern, Arabern, Juden usw. saß das Mondjahr schon in sehr alter Zeit fest (Mondkultus in Südbabylon, Arabien, Spuren bei den Juden), während es betreffs der Ägypter derzeit noch Streitfrage ist, ob diese nach der Übergangsperiode eines Naturjahres nicht sofort zum Sonnenjahr von 365 Tagen gelangt sind, ohne das Mondjahr rechnungsmäßig (außer zu sakralen Zwecken) zu gebrauchen. In Roms und Griechenlands ältester Zeit bildete das Mondjahr den Ausgangspunkt, von welchem man durch mancherlei Reformen zum Sonnenjahre gelangte.

6. Mond- und Sonnenjahr. Einschaltung, Ausgleichung. Die Lichtphasen des Mondes wickeln sich innerhalb des **synodischen Monats** $= 29^d\ 12^h\ 44^m\ 2^s{,}98 = 29^d{,}53059$ ab. Da die bürgerliche Rechnung nur nach ganzen Tagen zählen kann, muß der Überschuß von $0^d{,}53059$ von Zeit zu Zeit entsprechend eingeschaltet werden, was

12) *G. Thibaut*, Artikel: „Astronomie, Astrologie und Mathematik", im Grundriß der indo-arischen Philologie und Altertums-Kunde, hrsg. von *G. Bühler* und *F. Kielhorn*, 3. Band, 9. Heft, Straßburg 1899.

durch den Gebrauch hohler und voller Monate (zu 29 und 30 Tagen) bewirkt werden kann[13]). Das *freie Mondjahr* (ohne Rücksicht auf den Sonnenlauf) besteht aus Gemeinjahren zu 354 und aus Schaltjahren zu 355 Tagen, die in zwölf Mondmonaten untergebracht werden. Das *tropische Sonnenjahr*, d. h. die Zeit, welche die Sonne bedarf, um zum Frühlingspunkt (s. S. 19) zurückzukehren, beträgt für das Jahr 1800 (nach *Hansen*[14])) $365^d\,5^h\,48^m\,46^s{,}43$. Wird es nur zu 365^d angenommen, so entsteht das *Wandeljahr*, das sich durch Vernachlässigung des Überschusses von $5^h\,48^m\,46^s{,}43$ alsbald gegen die Jahreszeiten verschiebt. Die Berücksichtigung des Überschusses geschah anfänglich durch die Annahme $365\frac{1}{4}{}^d$ (*festes* Jahr, *julianisches Jahr*), späterhin (1582, vgl. Nr. 8) durch ein 365tägiges Jahr mit entsprechender Einschaltung (*Gregorianisches Jahr*[15])). Das *gebundene Mondjahr* entsteht, wenn das Mondjahr mittels Schaltungen in eine bleibende Übereinstimmung mit dem Sonnenjahre gebracht werden soll[16]).

---

13) Die Dauer des synodischen Monats ist

$$29\,\frac{45\,842\,976}{86\,400\,000} = \left(30 - \frac{405{,}57\,024}{864}\right) \text{ Tage.}$$

Verwandelt man den in der Klammer stehenden Bruch in einen Kettenbruch und ermittelt die Werte der einzelnen Näherungsbrüche, so erhält man der Reihe nach $\frac{1}{2}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17}, \frac{23}{49}, \frac{422}{899}$. Der erste Näherungsbruch läßt schon erkennen, daß man etwa jeden zweiten Monat hohl anzuwenden haben wird. Eine viel befriedigendere Schaltung erreicht man mit den Näherungen $\frac{7}{15}$ und $\frac{8}{17}$, nämlich, wenn man unter fünfzehn Monaten sieben hohl sein läßt resp. unter siebzehn Monaten acht. Der vierte Näherungswert $\frac{23}{49}$ gibt bereits den bürgerlichen Mondmonat nur noch um 2^s zu groß.

14) *P. A. Hansen* et *C. F. R. Olufsen,* Tables du Soleil, Copenhague 1853, p. 1.

15) Die möglichen Schaltungen gehen aus den Näherungsbrüchen hervor, die man aus der Kettenbruchentwicklung des Überschusses bestimmen kann. Es ist $365^d\,5^h\,48^m\,46^s{,}43 = 365\,\frac{2\,092\,683}{8\,640\,000}$. Der letztere Bruch ergibt die Näherungen $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}$; der erste Näherungsbruch gibt die Regel an, nach je vier Jahren einzuschalten. Die Näherung $\frac{8}{33}$, nämlich daß man innerhalb von 33 Jahren siebenmal nach vier Jahren, einmal nach fünf Jahren einschalten kann, ist schon ziemlich richtig; der dritte Bruch $\frac{31}{128}$, in 128 Jahren viermal nach fünf, 27mal nach vier Jahren einzuschalten, gibt die Länge des tropischen Jahres bereits sehr genau.

16) Die entsprechenden Näherungsbrüche gehen hervor aus der Gleichung

$$\frac{\text{trop. Jahr}}{\text{synod. Monat}} = 365\,\frac{209,\,26\,426}{864} : 29\,\frac{458,\,42\,976}{864}$$

$$= \frac{31\,556\,926,\,426}{2\,551\,442,\,976} = 12\,\frac{939\,610\,714}{2\,551\,442\,976}$$

Die Babylonier kannten sowohl die Länge des Mondjahrs als des Sonnenjahrs genau und haben Schaltungsmethoden angewendet; welcher Art diese waren, ist zurzeit nur für die jüngere Zeit aufgeklärt; nach *Kugler* scheint die Lage des Schaltjahrs bei ihnen von der Position des Neumondes gegen einen festen Punkt des Widders abzuhängen. Die Entwicklung des gebundenen Mondjahrs *(Lunisolarjahrs)* kann man am besten im Zeitrechnungswesen der Griechen beobachten. Anfangs versuchte man die Ausgleichung mittels zweijähriger und vierjähriger Schaltkreise, im 6. Jahrh. v. Chr. mit der Oktaëteris (von *Kleostratos*) = 99 Monate[17]), deren Ursprung in sehr alte Zeit zurückreicht und durch einen 16jährigen Zyklus (in der *solon*ischen Zeit?) verbessert wurde[18]). Darauf folgte, von Versuchen des *Oinopides, Demokritos* u. a. abgesehen, 433 v. Chr. die Aufstellung eines 19jährigen Zyklus = 6940 Tage = 235 Monate (nämlich 125 volle, 110 hohle)[19]) durch *Meton*. Obwohl von befriedigender Leistung, fand der *Meton*sche Zyklus vermutlich nicht allgemeine Annahme und wurde noch von *Kallippos* (aus Kyzikos) verbessert. Dieser fand, daß das *Meton*sche Sonnenjahr in 76 Jahren um einen Tag zu lang sei, durch Wegnahme von $^1/_{76}$ Tag brachte er es auf $365\frac{1}{4}$ Tage, seine 76jährige Schaltperiode enthielt 27759 Tage = 940 Monate, die in der Länge des synodischen Monats nur einen Fehler von $22^s,5$ übrig ließ[20]). Letzteren Fehler verbesserte um 125 v. Chr. *Hipparch*, indem er vier

---

Der zuletzt angezeigte echte Bruch gibt die Näherungen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{123}{334}, \frac{376}{1021} \cdots = \frac{m}{p}.$$

Da das Verhältnis trop. Jahr : synod. Monat $= 12 + \frac{m}{p}$ ist, so würden näherungsweise p tropische Jahre $= (12p + m)$ synod. Monate. Demnach sind etwa

11 tropische Jahre = 136 synod. Monate (Näherung $^4/_{11}$)
19 „ „ = 235 „ „ „ $^7/_{19}$)
334 „ „ = 4131 „ „ „ $^{123}/_{334}$).

17) In der *Oktaëteris* wurde in 8 Jahren dreimal eingeschaltet, sie enthielt daher $8 \cdot 12 + 3 = 99$ Monate $= 8 \cdot 354^d + 3 \cdot 30^d = 2922^d$, ihr mittlerer Mondmonat war also $2922 : 99 = 29^d 12^h 21^m 49^s,1$, d. h. um $22^m,2$ zu klein, ihr Sonnenjahr $2922 : 8 = 365\,^1/_4{}^d$.

18) Die *Oktaëteris* blieb hinter dem Monde um $1^d 12^h 41^m$ zurück, hätte also eigentlich über $2923\,^1/_2{}^d$ (statt nur 2922^d) enthalten sollen. Durch Verdoppelung der *Oktaëteris*, auf 16 Jahre, brachte man also die 3 fehlenden Tage ein.

19) Das Sonnenjahr des *Meton*schen *Zyklus* enthielt demnach $6940 : 19 = 365\,^5/_{19}{}^d$ ($= 365^d 6^h 19^m$, also um 30^m zu groß), der Mondmonat $29\,^{25}/_{47}{}^d = 29^d 12^h 45^m 57^s$ war also um $1^m 54^s$ zu groß.

20) Die Periode faßt $4 \cdot 235$ Monate $= 940$ Monate oder $4 \cdot 6940^d - 1^d = 27759^d$. Der Mondmonat wurde dadurch $= 29^d 12^h 44^m 25^s,5$.

*kallipp*ische Reihen zu einer Periode von $4 \cdot 76 = 304$ Jahren kombinierte, und zwar sei dieselbe um einen Tag zu verkleinern, demnach[21]) kam hierdurch der synodische Monat auf $29^d 12^h 44^m 2^s{,}55$, das tropische Jahr auf $365^d 5^h 55^m 15^s{,}47$, wodurch die beste Übereinstimmung des Mondjahrs mit der Sonne erreicht war. — Die Römer bedienten sich seit des 3. Jahrh. v. Chr. eines 24jährigen Schaltzyklus, welcher aber im Lauf der Zeit mißverstanden und zu willkürlichen Schaltungen benutzt wurde; die hieraus entstandene Kalenderverwirrung beseitigte *Julius Caesar* durch Einführung des festen Sonnenjahres. Das freie Mondjahr hat sich bei den Mohammedanern erhalten.

7. Besondere Jahrformen und Zyklen.

a) *Sothisperiode.* Der Sirius (Isis-Sothis der Ägypter) ging im Altertum für die mittlere Breite Ägyptens am 1. Thoth (20. Juli) heliakisch[22]) auf; da um dieselbe Zeit der Beginn der Nilschwelle fiel, wurde dieses Datum für die Ägypter bestimmend, ihr Wandeljahr um diese Zeit anzufangen. Die Periode faßt 1460 julianische Jahre, das Wandeljahr kehrt, da es alle vier Jahre um einen Tag zu kurz ist, nach Ablauf der Sothisperiode wieder zum selben Datum zurück. Wenn die Angabe *Censorins*, daß am 20. Juli 139 n. Chr. ein heliakischer Aufgang des Sirius stattfand, richtig ist, müßten 1322 v. Chr. und 2782 v. Chr. ebensolche Aufgänge stattgefunden haben; *Oppolzer* hat aber die Verkürzung der Sothisperiode nachgewiesen[23]). Die Existenz der Sothisperiode als Rechnungszyklus läßt sich bisher aus den ägyptischen Inschriften nicht erhärten, dagegen sind etwa vier Dateu inschriftlich bekannt, welche zu heliakischen Siriusaufgängen das gleichzeitige Datum des Wandeljahrs angeben.

b) *Setperiode* (von 30 Jahren), eine in ägyptischen Inschriften öfters nachweisbare Periode, *Apis-Zyklus* (25 Jahre), *Phönix-Periode* (nach *Herodot*[24]) 500 Jahre), alle drei ohne chronologische Verwertung.

c) *Saren* und *Sossen* der Babylonier, früher einseitig als Multipla von 60 Jahren (600 resp. 3600 Jahre) verstanden, nach den neueren Forschungen aber überhaupt als terminologische Ausdrücke gewisser Stufen in sexagesimalen Systemen zu betrachten. — Der 60jährige Jahreszyklus der *Chinesen* (auch zur Zählung der Tage und Monate gebraucht) ist der Rest einer solchen Sexagesimalteilung. Jedes Jahr

21) $4 \cdot 940$ Monate $= 3760$ Monate $= 4 \cdot 27\,759^d - 1^d = 111\,035^d$.

22) Der *heliakische Aufgang (jährliche Aufgang)* eines Gestirns ist derjenige Tag im Jahre, an dem das Gestirn erstmalig in der Morgendämmerung dem bloßen Auge erkennbar wird. Vgl. *Ginzel*, Handb. d. Chron. I (1906), p. 186.

23) *Th. v. Oppolzer*, Wien Ber. 90 1884^2.

24) *Herodot*, II 73.

dieses Zyklus, welcher gewissermaßen die Epoche der Zählung vertritt, hat einen besonderen Namen. Der Ursprung des 12-teiligen Tierzyklus der Ostasiaten ist noch nicht befriedigend aufgeklärt.

d) *Große Jahre.* Bei den klassischen Schriftstellern (*Diodor, Plutarch, Solinus* und vielen anderen) und inschriftlich (bei den Ägyptern als *heh-* und *hunti*-Perioden) auftretende Zyklen von 216, 12954, 36000 und anderen Jahren, die in ihrer Entstehung größtenteils auf Kombinationen von sexagesimalem Aufbau und Schaltungen, und auf Mond- und Sonnenjahren (in manchen Fällen auch auf Planetenjahren, d. h. Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne) beruhen (*Platonische Jahre*).

e) *Jupiterjahre.* Speziell auf Indien beschränkt, aber wahrscheinlich von babylonischer Herkunft[25]). Fünf Jupiterumläufe machen ungefähr einen 60jährigen Zyklus ($59^1/_3$ Jahre). Der Gebrauch dieses 60jährigen Zyklus beschränkt sich auf Nordindien; die einzelnen Jahre desselben haben (wie der 60jährige Zyklus der Chinesen) besondere Namen. Noch älter in Indien scheint ein 12jähriges Jupiterjahr zu sein (Jupiter nimmt etwa alle 12 Jahre dieselben Stellungen am Sternhimmel ein), welches sich vorzugsweise nach den heliakischen[22]) Aufgängen des Jupiter richtet.

f) Sonst vorkommende Jahrzyklen: *Lustrum* (ursprünglich 4-, dann 5jährig), *Yuga* (5jährig), *Sabbathjahr* (alle 7 Jahre), *Jubeljahre, goldene Jahre* (bei den Christen und Juden) und andere.

g) *Indiktionen, Sonnen-* und *Mondzirkel.* Der erstere Zyklus ist eine künstlich (aus Schatzungs- oder Steuerperioden?) gebildete Reihe von 15 Jahren, die gegen Ende des 3. Jahrh. n. Chr. in chronologischen Gebrauch gekommen ist. Es gibt dreierlei Arten der Indiktionen (*Römerzinszahl, kaiserliche Zahl*, a. Zeichen): Die griechische *(byzantinische)* [mit 1. September anfangend], die *konstantinische (kaiserliche)* [beginnend mit 24. September] und die *römische (päpstliche) Indiktion* [mit 1. Januar beginnend]. — *Sonnenzirkel* heißt im julianischen Kalender die Periode von 28 Jahren (7 vierjährigen Schaltkreisen), nach deren Ablauf die Wochentage wieder auf denselben Monatstag zurückkommen. — Da 19 tropische Sonnenjahre nahe gleich 235 synodischen Mondmonaten sind[16]), so gehen die Mondphasen nach 19 Sonnenjahren ungefähr auf dieselben Jahrestage zurück; dies ist der *Mondzirkel*, die Stellung eines Jahres in demselben wird durch die *güldene Zahl*

25) Den Babyloniern waren, wie aus aufgefundenen astronomischen Tafeln derselben hervorgeht, die Perioden der Rückkehr der Planeten in dieselben Himmelsstellungen gut bekannt.

(numerus aureus) bezeichnet (im gregorianischen Kalender wird die goldene Zahl durch die *Epakte* ersetzt).

h) *Osterzyklen.* Nach 28 Mondzirkeln (zu 19 Jahren), also nach 532 Jahren, fallen im julianischen Kalender die Mondphasen wieder auf dieselben Wochentage, diese Periode *(Osterperiode, cyclus paschalis)* eignet sich daher zur Bestimmung des christlichen Osterfestes, welches am ersten Sonntage nach dem ersten Frühjahrsvollmonde zu feiern ist[26]). Es gibt mehrere Osterzyklen, die sich durch den Anfang der Periode voneinander unterscheiden *(Anianus, Victorius, Dionysius, Exiguus).*

8. Epochen (Aeren). Die Anfangspunkte, von denen die Jahre gezählt werden, sind überaus verschieden und zahlreich; wir können hier nur einige Andeutungen geben. — *Olympiaden* (4jährig, Epoche Sommer 776 v. Chr.), mit Varianten. — *Jahre der Stadt* (Rom), u. c. (urbis conditae) [*varronisch* gerechnet vom 1. Januar 753 v. Chr., *capitolinisch* ein Jahr später]. — *Weltaeren* (des Panodors, die Alexandrina und Byzantina), die *konstantinopolitanische* [Epoche 1. September 5509 v. Chr.], die *jüdische* Weltaera [3761 v. Chr.], Aera *Nabonassars* [747 v. Chr.]. — Die altpersische Aera *Jezdegird* und die neuere *Dschelaleddins.* Die *Hedschra* [Epoche 16. Juli 622 n. Chr. (Volkskalender)] — *Julianische Periode* [Epoche 1. Januar 4713 v. Chr.]. — Die *christliche* (nach Jahren von der Geburt Christi ab zählende) Zeitrechnung kam durch die Ostertafel des Dionysius im 6. Jahrh. in Gebrauch. Bis 1582 n. Chr. wurde die julianische Schaltung gebraucht, und da um diese Zeit das julianische Datum schon um 10 Tage gegen das wahre zurückgeblieben war, durch Gregor XIII. eine Schaltungsreform eingeführt (alter oder griechischer, *julianischer Stil,* neuer oder *gregorianischer Stil*).

26) Eine Regel zur Berechnung des gregorianischen Osterfestes gab *C. F. Gauß,* Monatl. Corr. 2 (1800), p. 121 = Werke 6 (1874), p. 73, dazu Nachtrag in Tübinger Z. für Astr. 1 (1816), p. 158. Vgl. *Wolf,* Handb. 1, p. 622.

(Abgeschlossen im Juli 1910.)

B. MECHANIK DES HIMMELS.

VI 2, 9. BAHNBESTIMMUNG DER PLANETEN UND KOMETEN.

Von

G. HERGLOTZ

IN LEIPZIG.

Inhaltsübersicht.

I. Keplersche Bewegung.

1. Keplersche Gesetze.
2. Elemente der Bahn.
3. Koordinaten eines Ortes.
4. Bestimmung der wahren Anomalie.
5. Lambertsches Theorem.
6. Verhalten der Koordinaten im komplexen Gebiet.

II. Vorläufige Bahnbestimmung.

a) Planetenbahnen.

7. Formulierung der Aufgabe.
8. Grundgleichungen.
9. Herstellung der Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse. Erforderliche Genauigkeit.
10. Näherungsausdrücke der Dreiecksverhältnisse.
11. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen.
12. Methode von Laplace. Satz von Lambert.
13. Bestimmung der Elemente aus zwei vollständigen Orten.
14. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen.
15. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen.
16. Bestimmung einer Kreisbahn.

b) Kometenbahnen.

17. Formulierung der Aufgabe. Grundgleichungen.
18. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen nach der Methode von W. Olbers.
19. Bestimmung der Elemente aus den Distanzen.
20. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen.
21. Ausnahmefälle. Methode von Gauß.

22. Korrektionen wegen Parallaxe und Aberration.

III. Definitive Bahnbestimmung.

23. Allgemeine Formulierung der Aufgabe.
24. Methoden mit gleichmäßiger Berücksichtigung aller Orte.
25. Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen.
26. Methoden mit Bevorzugung zweier Orte.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.

C. F. Gauß, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamburgi 1809 = *C. F. Gauß*, Werke 7. Deutsch von *C. Haase*, Gotha 1877 (*Gauß*, Theoria motus).

J. Frischauf, Theorie der Bewegung der Himmelskörper, Graz 1868. 2. Aufl. unter dem Titel: Grundriß der theoretischen Astronomie, Graz 1871.

J. Frischauf, Die Gauß-Gibbssche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen; mit einem Anhang zum „Grundriß der theoretischen Astronomie", Leipzig 1905.

J. C. Watson, Theoretical astronomy, Philadelphia 1868. 2. ed. 1877. 3. ed. 1881 (*Watson*, Theor. astr.).

W. Klinkerfues, Theoretische Astronomie, Braunschweig 1871. 2. Aufl. bearb. von *H. Buchholz*, 1899. (*Klinkerfues-Buchholz*, Theor. Astr.).

Th. von Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Band 1, Leipzig 1870. 2. Aufl. Leipzig 1882 (2. Aufl. *Oppolzer*, Bahnb. 1). Französisch von *E. Pasquier*, Paris 1886. Band 2, Leipzig 1880 (*Oppolzer*, Bahnb. 2).

F. Tisserand, Leçons sur la détermination des orbites, red. par *J. Perchot*, avec une préface de *H. Poincaré*, Paris 1899.

J. Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig 1901 (*Bauschinger*, Tafeln).

J. Bauschinger, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906.

Journal-Literatur und anderes.

J. H. Lambert, Insigniores orbitae cometarum proprietates, Aug. Vindel. 1761. Deutsch hrsg. v. *J. Bauschinger* in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 133, Leipzig 1902 (*Lambert*, Insign. propr. 1761).

J. L. Lagrange, Sur la détermination des orbites des comètes d'après trois observations, Drei Abhandlungen in Berlin Mém. 1778, p. 111, 124; 1783, p. 296 = Oeuvres 4, p. 439, 451, 496.

P. S. Laplace, Mémoire sur la détermination des orbites des comètes, Paris Hist. (1780) Mém. p. 13 = Oeuvres 10, p. 93.

W. Olbers, Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen zu bestimmen, hrsg. v. *F. v. Zach*, Weimar 1797. 2. Aufl. v. *J. F. Encke*, Weimar 1847. 3. Aufl. v. *J. Galle*, Leipzig 1864 = *W. Olbers*, Werke 1, p. 3—56 (*Olbers*, Abh. über Kometenbahnen).

J. F. Encke, Bestimmung einer elliptischen Bahn, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1854. Hrsg. von *J. Bauschinger* in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 141, Leipzig 1903.

P. A. Hansen, Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers. Leipzig Berichte 1863, Bd. 15, p. 83. Hrsg. von *J. Bauschinger* in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 141, Leipzig 1903.

E. Weiß, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, Wien Denkschr., Band 60, Wien 1893, p. 345.

K. Zelbr, Artikel „Bahnbestimmung" in *W. Valentiner*, Handwörterbuch der Astronomie (Enzyklopädie der Naturwissenschaften 3 (2)), Breslau 1897, p. 452.

O. Callandreau, Aperçues des méthodes pour la détérmination des orbites, Paris Ann. de l'Obs., mém. 23, Paris 1902.

P. Harzer, Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern. Publicationen der Sternwarte zu Kiel, Nr. 11, Kiel 1901.

Bibliographie in *W. Valentiner*, Handwörterbuch der Astronomie, Artikel „Bahnbestimmung" von *K. Zelbr.* Ferner bei *R. Radau*, Paris Bull. astr. 16 (1899), p. 432.

I. Keplersche Bewegung.

1. Keplersche Gesetze. Werden durchgehends die Massen der Planeten und Kometen gegenüber derjenigen der Sonne als sehr klein vernachlässigt, so wird die dadurch idealisierte Bewegung eines solchen Himmelskörpers bezüglich eines zur Sonne festen Koordinatensystems, die Keplersche Bewegung, vollständig durch die folgenden drei „Keplerschen Gesetze" beschrieben:

1. Die Bewegung erfolgt in einer durch die Sonne gelegten Ebene so, daß die vom Radiusvektor überstrichene Sektorfläche der Zeit proportional wächst.

2. Die Bahn ist ein Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkt sich die Sonne befindet (bei der Hyperbel in jenem, gegen welchen zu die Bahnkurve konkav ist).

3. Der Quotient der vom Radiusvektor in der Zeiteinheit überstrichenen Sektorfläche durch die Quadratwurzel aus der Länge des Parameters des Kegelschnittes hat für alle Himmelskörper denselben Wert.

Das Doppelte der durch das dritte Gesetz gegebenen, dem Sonnensystem eigentümlichen Zahl, die sogenannte Gaußsche Konstante k, hat in astronomischen Einheiten ausgedrückt den Wert $k = 0{,}0172021$. Vgl. den Artikel V 2 (*Zenneck*).

2. Elemente der Bahn. Um mit Hilfe dieser drei Gesetze den Ort des Planeten für eine beliebige Zeit zu bestimmen, ist die Kenntnis der Lage und Gestalt des Kegelschnittes sowie die Kenntnis des Ortes in der Bahn zu einer bestimmten Zeit (Epoche) erforderlich, also die Angabe von $2 + 3 + 1 = 6$ Größen, den sechs Bahnelementen. Die Lage der Bahnebene wird bei der üblichen Wahl des ekliptikalen

Koordinatensystems festgelegt durch ihre Neigung i gegen die Ekliptik und den Winkel Ω ihrer Schnittgeraden mit der Ekliptik (Knotenlinie) gegen die Frühlingsnachtgleichenlinie, die Knotenlänge Ω. Hierauf ist die Lage des Kegelschnittes in seiner Ebene gegeben durch den Winkel π, welchen der kürzeste Radiusvektor (Apsidenlinie) mit der Knotenlinie einschließt, statt dessen mitunter der gebrochene Winkel $\varpi = \pi + \Omega$, die Perihellänge, eingeführt wird. Die Gestalt des Kegelschnittes ist charakterisiert durch die Länge $|a|$ der großen Halbachse, und die (numerische) Exzentrizität e, mit denen der Parameter p und der kürzeste Radiusvektor q (Periheldistanz) zusammenhängen durch:

$$p = a(1-e^2), \quad q = a(1-e). \tag{1}$$

Hiebei möge, um Ellipse und Hyperbel durch die gleichen Formeln zu beherrschen, für erstere $a > 0$, für letztere $a < 0$ genommen werden. Die Angabe des Ortes zu einer bestimmten Zeit wird geleistet durch Angabe des Zeitpunktes t_0, zu welchem sich der Himmelskörper gerade im Perihel befindet, der Perihelzeit.

Aus den Koordinaten x, y, z und Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ zu irgend einem Zeitpunkt berechnen sich die Elemente sofort vermöge der Flächensätze und der Laplaceschen[1]) Integrale:

$$\begin{aligned} c_1 &= y\dot{z} - z\dot{y}, & f_1 &= x\dot{u} - u\dot{x}, \\ c_2 &= z\dot{x} - x\dot{z}, & f_2 &= y\dot{u} - u\dot{y}, \\ c_3 &= x\dot{y} - y\dot{x}, & f_3 &= z\dot{u} - u\dot{z}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u = r\dot{r}, \qquad \dot{u} = V^2 - \frac{k^2}{r},$$

in denen c_1, c_2, c_3 die Komponenten eines zur Bahnebene normalen Vektors der Länge $k\sqrt{p}$ sind, f_1, f_2, f_3 aber diejenigen eines in der Apsidenlinie liegenden Vektors der Länge $k^2 e$.

Den Charakter der Bahn gibt unmittelbar das Vorzeichen der aus der Energiegleichung

$$V^2 = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{a} \tag{3}$$

folgenden Größe a.

3. Koordinaten eines Ortes. Ein beliebiger Ort des Himmelskörpers ist nun fixiert durch den in Richtung der Bewegung gezählten Winkel des Radiusvektors gegen die Apsidenlinie, die wahre Anomalie v, aus welcher der Radius selbst folgt, durch:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v}. \tag{4}$$

1) *P. S. Laplace*, Méc. cél. 1 (= Oeuvres 1), p. 181. Über die geometrische Bedeutung vgl. *G. Darboux*, Paris Bull. Astr. 5 (1888), p. 89.

Ihren Zusammenhang mit der Zeit gibt das erste und dritte Keplersche Gesetz, angewandt auf den Sektor zwischen dem Radiusvektor und der Apsidenlinie, wobei man aber den Sektor nicht direkt durch v, sondern einfacher mittels des vermöge:

$$\text{(5)}\qquad \begin{gathered} \operatorname{tang}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}v, \\ \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin v}{1+e\cos v}, \qquad \cos E = \frac{e+\cos v}{1+e\cos v} \end{gathered}$$

mit v zusammenhängenden Hilfswinkels E, die exzentrische Anomalie ausdrückt, und hiedurch aus dem ersten und dritten Gesetz die Keplersche Gleichung erhält:

$$\text{(6)}\qquad \frac{k(t-t_0)}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e\sin E,$$

nebst:

$$\text{(7)}\qquad r = a(1 - e\cos E).$$

Man pflegt zu setzen:

$$\text{(8)}\qquad \frac{k}{|a|^{\frac{3}{2}}} = n, \quad n(t-t_0) = M, \quad M + \varpi = l$$

und n als mittlere tägliche Bewegung, M als mittlere Anomalie, l als mittlere Länge zu bezeichnen. Bei Planetenbahnen wird ferner statt der Durchgangszeit durch das Perihel t_0 die mittlere Länge zur Epoche ($t = 0$) eingeführt:

$$\text{(9)}\qquad \varepsilon = \varpi - nt_0.$$

Bei der Hyperbel ist, wofern in (5) $\sqrt{1-e} = +i\sqrt{e-1}$ gewählt wird, in (6) $\sqrt{a} = -i\sqrt{-a}$ zu setzen. Da in diesem Fall E rein imaginär wird, empfiehlt es sich einen reellen, durch:

$$\text{(10)}\qquad \operatorname{tang}\frac{F}{2} = -i\operatorname{tang}\frac{E}{2}, \quad \sin F = -i\operatorname{tang}E, \quad \cos F = \frac{1}{\cos E}$$

bestimmten Hilfswinkel F, den sogenannten Lambertschen Winkel[2]) von $\frac{E}{i}$ einzuführen, wonach (6) in:

$$\text{(11)}\qquad n(t-t_0) = e\operatorname{tang}F - \log\operatorname{nat}\operatorname{tang}\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

übergeht.

Für die Parabel ist $\frac{1}{a} = 0$, $1 - e = 0$, aber $a(1-e) = q$ zu setzen, so daß aus (6) folgt:

$$\text{(12)}\qquad \frac{k(t-t_0)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v.$$

2) Vgl. VI 2, 3 (*Wirtz*) Seite 150, Fußnote 330.

E. Halley[3]) wählte $\frac{1}{100}$ des rechtwinkligen Parabelsektors als Flächeneinheit und bezeichnete die in dieser Einheit gerechnete Sektorfläche:

$$M = \frac{75k}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}(t - t_0) \tag{13}$$

als „motus medius" in der Parabel. Zugleich gab er als erster eine Tafel für v mit M als Argument. Diese Definition von M hat sich noch bei einigen späteren Autoren erhalten, während *Th. v. Oppolzer* und *J. Bauschinger* einfach

$$M = \frac{t - t_0}{q^{3/2}} \tag{14}$$

setzen, dessen Logarithmus bereits *J. C. Burckhardt*[4]) als Argument einer entsprechenden Tafel wählt. — Ist v und damit r für den gewünschten Zeitpunkt bestimmt, so sind damit auch die Koordinaten des Himmelkörpers gegeben. Die auf ein beliebiges heliozentrisches System bezogenen rechtwinkligen Koordinaten setzt *C. F. Gauß*[5]), mit $u = v + \pi = v + \varpi - \Omega$ das Argument der Breite bezeichnend, in die Form:

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A + u) \\ y &= r \sin b \sin(B + u) \\ z &= r \sin c \sin(C + u), \end{aligned} \tag{15}$$

worin die Gaußschen Konstanten a, b, c und A, B, C sich bzw. mit den auf die Bahnebene und die Knotenlinie als Anfangsrichtung bezogenen Breiten und Längen der Koordinatenachsen zu 90^0 ergänzen.

4. Bestimmung der wahren Anomalie. a) *Numerische Näherungsmethoden.* Die numerische Auflösung der Gl. (6) geschieht bei Bahnen geringer Exzentrizität am raschesten durch sukzessive Approximation nach der Newtonschen Näherungsmethode. Als Ausgangsnäherung kann M oder der von *J. F. Encke*[6]) vorgeschlagene und von *N. Herz*[7]) verbesserte Wert dienen. Hilfstafeln geben insbesondere *Th. v. Oppolzer*[8]), *J. J. Åstrand*[9]), *F. Tietjen*[10]).

3) *E. Halley,* A synopsis of the astronomy of comets, Lond. Phil. Trans. 1705.

4) *J. C. Burckhardt,* Conn. d. temps pour l'an 1818 (1815), p. 319.

5) *C. F. Gauß,* Monatl. Corr. 9 (1804), p. 385 = Werke 6, p. 94.

6) *J. F. Encke,* Astr. Nachr. 30 (1850), p. 277.

7) *N. Herz,* Astr. Nachr. 99 (1881), p. 31.

8) *Th. v. Oppolzer,* Wien Denkschr. d. k. Akad. 50 (1885), p. 185.

9) *J. J. Åstrand,* Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Keplerschen Problems, Leipzig 1890.

10) *F. Tietjen,* Berlin. Veröff. d. k. Recheninst. n° 1 (1892).

Die Auflösung der bei parabolischen Bahnen auftretenden Gleichung (12) kann direkt der sogen. Barkerschen Tafel[11]) entnommen werden, welche M mit dem Argumente v gibt. Liegt jedoch v nahe an 180°, so wird der großen Interpolationsdifferenzen halber ihr Gebrauch beschwerlich, und man hat sich dann des besonderen von *F. W. Bessel*[12]) und *B. Nicolai*[13]) ausgebildeten Verfahrens zu bedienen; sie ersetzen mit Rücksicht auf den dann sehr kleinen Wert von $\operatorname{ctg}\frac{v}{2}$ die Gl. (12) durch eine einfachere und tabulieren die Korrektion für den so bestimmten Näherungswert als Funktion desselben. Den umgekehrten Weg, v mit dem Argument M zu tabulieren, hat *J. C. Burckhardt*[14]) eingeschlagen, dann *U. J. Leverrier*[15]) und *C. F. Gauß*[16]), der auch besondere Vorschriften[17]) für große v gibt. Ebensolche Tafeln gibt *J. Bauschinger*[18]). Die Verfahren, welche zur Bestimmung der wahren Anomalie für der Einheit benachbarte Exzentrizitäten dienen, sind gleicherweise gültig, mag e wenig kleiner oder größer als 1 sein, und umfassen daher auch die nahe parabolischen Hyperbelbahnen, welche die einzigen bei Kometen auftretenden Hyperbelbahnen sind. Das jenen Verfahren zugrunde liegende Prinzip ist, die mit einem passend gewählten Faktor versehene mittlere Anomalie als das M der Gleichung (12) zu nehmen, und dann die Korrektion, welche dem aus ihr folgenden Werte von v hinzuzufügen ist, nach Potenzen einer mit $1 - e$ verschwindenden Größe zu entwickeln. Die Berechnung der Korrektion wird dann wieder durch Tafeln erleichtert. Das zuerst von *L. Euler*[19]) angegebene Verfahren wurde von *W. Bessel*[20]) weiter durchgeführt, eine von *Th.*

11) *Th. Barker,* Account of the discoveries concerning comets, London 1757. *R. Luther* hat das Intervall von 5′ auf 100″ reduziert, und die Tafel wurde der *F. Encke*schen Ausgabe (Weimar 1847) von *Olbers,* Abh. über Kometenbahnen angehängt. Auch in *Watson,* Theor. astr. (Intervall 1′) (Tafel 6) und von *J. Strobel* neu berechnet in *Oppolzer,* Bahnb. 1 (1882) (Intervall 10″) (Tafel 4).

12) *F. W. Bessel,* Astr. Nachr. 22 (1845), p. 253 = Ges. Abh. 1, p. 12. Vgl. *Oppolzer,* Bahnb. 1, wo von *A. Palisa* berechnete Tafeln (a. a. O. Tafel 5a und 5b) zu Bessels Methode abgedruckt sind. (Zuerst veröffentlicht Berlin Ber. 1880, p. 511.)

13) *B. Nicolai,* Astr. Nachr. 21 (1844), p. 77.

14) *P. S. Laplace,* Méc. cél. trans. b. Bowditch, vol. 3.

15) *U. J. Leverrier,* Paris Ann. de l'obs. 1, (1885), p. 226, auch in C. F. Gauß Theoria motus, dtsch. v. Haase, p. 24.

16) *C. F. Gauß,* Werke 7, p. 351 (Nachlaß).

17) *C. F. Gauß,* Astr. Nachr. 20 (1843), p. 299 = Werke 6, p. 191.

18) *J. Bauschinger,* Tafeln, Nr. 15.

19) *L. Euler,* Misc. Berol. 7 (1743), p. 1 (Determ. orb. com. A. 1742 obs).

20) *W. Bessel,* Monatl. Corr. 12 (1805), p. 197 = Ges. Abh. 1, p. 9.

v. Oppolzer[21]) herrührende veränderte Form desselben von *R. Schramm* und *F. K. Ginzel*[22]) ausgearbeitet. Ein ähnliches Verfahren gibt *F. Brünnow*[23]).

Das Gaußsche Verfahren[24]) bestimmt die Korrektion nicht durch Reihenentwicklung, sondern durch sukzessive Approximation, deren Konvergenz auf der Kleinheit von E beruht. Eine vergleichende Betrachtung verschiedener Verfahren gibt *R. Radau*[25]).

Betreffs der numerischen Näherungsmethoden vergleiche man neben den Kompendien der Bahnbestimmung vor allem die „Tafeln zur theoretischen Astronomie" von *J. Bauschinger*. Eine Bibliographie des Keplerschen Problems gibt *R. Radau*[25a]).

b) *Allgemeine Reihenentwicklungen. Lagrange*[26]) hat, die nach ihm benannte Reihe auf die Gleichung (6) anwendend, verschiedene Ausdrücke in der elliptischen Bewegung (z. B. E, r, $r\cos v$, $r\sin v$) nach Potenzen von e entwickelt, wobei die Koeffizienten endliche trigonometrische Reihen in M werden. Diese Potenzreihen konvergieren für alle reellen Werte von M nur, so lange e kleiner ist als der für reelles $t - t_0$ genommene Minimalwert ϱ des aus Gl. (23) berechneten $|e|$. Für diesen folgt nun:

$$\frac{\varrho E^{\sqrt{1+\varrho^2}}}{1+\sqrt{1+\varrho^2}} = 1, \qquad \varrho = 0{,}6627434\,[27]). \tag{16}$$

Diese Grenze wurde zuerst von *P. S. Laplace*[28]) aus den asymptotischen Werten der Koeffizienten hergeleitet. Von den Autoren, welche sie dann aus allgemeinen funktionentheoretischen Gesichtspunkten herleiteten, seien hier neben den in II B 1 Nr. **15** (*Osgood*) aufgeführten Arbeiten über die Lagrangesche Reihe noch *V. Puiseux*[29]) und

---

21) *Th. von Oppolzer,* Über die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen, München Abh. 13 (1878), p. 139.

22) *Th. v. Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 65.

23) *F. Brünnow,* Astr. Notices 1 (1861), p. 12, 177.

24) *Gauß,* Theoria motus, art. 37 ff. Weitere Hilfstafeln und Zusätze siehe *A. Marth,* Astr. Nachr. 43 (1856), p. 115 = Gauß Theoria motus, dtsch. v. Haase (Anhang), p. 28.

25) *R. Radau,* Paris Bull. astr. 2 (1885), p. 509.

25a) *R. Radau,* Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 37.

26) *J. L. Lagrange,* Berlin Mem. 25 (1771) = Oeuvres 3, p. 113.

27) Bezüglich dieses Wertes vgl. Correspondance *d'Hermite et de Stieltjes* 1 (1905), p. 433. Mit E wird die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

28) *P. S. Laplace,* Paris Mém. de l'acad. 6 (1823), p. 61 = Oeuvres 12, p. 549.

29) *V. Puiseux,* Journal d. math. 14 (1849), p. 33 und Note 1 zu Lagranges Méc. analyt. 2 éd. 4 = Oeuvres 12, p. 341.

J. A. Serret[30]) genannt. Ist $\varrho < e < 1$, so konvergieren die Reihen bloß in gewissen Intervallen um $M = 0$ und $M = 180^0$. Rascher konvergierende Umformungen dieser Reihen gibt *E. Weiß*[31]), und *T. Levi-Civita*[32]) bemerkt, daß die Potenzentwicklungen nach $\eta = \frac{e E\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}$ für alle reellen M und $|\eta| < 1$, also insbesondere alle reellen $e < 1$ konvergieren.

Ordnet man aber, was bereits Lagrange tat, jene Potenzentwicklungen nach den Cos und Sin der Vielfachen von M, so erhält man die für alle reellen M und $e < 1$ konvergenten trigonometrischen Entwicklungen, mit denen sich zuerst insbesondere *W. Bessel*[33]) eingehend beschäftigte. Verschiedene dieser Reihen haben einfach Besselsche Funktionen von e zu Koeffizienten. In großer Allgemeinheit hat *P. A. Hansen*[34]) die Entwicklungen einer ganzen Reihe von Ausdrücken behandelt.

Explizite Angaben der Reihenentwicklungen verschiedener Größen findet man bei *U. J. Leverrier*[35]) und *A. Cayley*[36]).

Betreffs der weiteren Literatur über beide Arten von Reihen und die asymptotischen Werte ihrer Koeffizienten vergleiche man das diesbezügliche Referat auf p. 93—122 von *H. Burckhardt*, „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen" im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 10.

5. Das Lambertsche Theorem besagt, daß die zum Durchlaufen eines Bahnstückes MM' nötige Zeit T bloß von der Summe $r + r'$ der äußeren Radienvektoren, der Sehne s und der großen Halbachse a der Bahn abhängt, woraus der fertige Ausdruck von T selbst durch Spezialisation auf die geradlinige Bewegung, also unmittelbar aus den Formeln von Nr. **3** für $e = 1$ folgt.

Es folgt im besondern für die *Ellipse* $(a > 0)$:

$$\frac{k}{a^{3/2}} T = (\varepsilon - \sin\varepsilon) - (\delta - \sin\delta),$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r+r'+s}{4a}}, \quad \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r+r'-s}{4a}}, \quad 0 < \delta < \varepsilon < \pi. \tag{17}$$

30) *J. A. Serret*, Paris. annal. de l'observ. 5 (1859), p. 337.

31) *E. Weiß*, Wien. Denkschr. d. k. Akad. 49 (1885), p. 133; Auszug Wien Berichte 90 (1884), p. 785.

32) *T. Levi-Civita*, Lincei Rend. d. R. Accad. 13 (1904), p. 260.

33) *W. Bessel*, Berl. Abh. 1816, p. 49 = Ges. Abh. 1, p. 17; Berl. Abh. 1824, p. 1 = Ges. Abh. 1, p. 92.

34) *P. A. Hansen*, Leipzig Ber. 1853, p. 7.

35) *U. J. Leverrier*, Paris Ann. de l'observ. 1 (1855), p. 182.

36) *A. Cayley*, Lond. Ast. Soc. Mem. 28 (1860), p. 187; 29 (1861), p. 191 = Works 3, p. 319, 360.

Sind S, S' die beiden Brennpunkte, und zwar S jener, in welchem die Sonne sich befindet, so ist dieser Ausdruck zunächst gültig, wenn das von Bogen und Sehne begrenzte Segment weder S noch S' in seinem Innern enthält, während man nach *A. Cayley*[37]) in demselben ε und δ zu ersetzen hat bzw. durch: $2\pi - \varepsilon$ und $-\delta$, ε und $-\delta$, $2\pi - \varepsilon$ und δ, je nachdem das Segment S und S', oder bloß S oder bloß S' in seinem Innern enthält.

Für die *Hyperbel* ($a < 0$) ergibt sich

$$\frac{k}{(-a)^{3/2}}\, T = (\operatorname{snh}\varepsilon - \varepsilon) \mp (\operatorname{snh}\delta - \delta),$$

$$\operatorname{snh}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r+r'+s}{-4a}},\quad \operatorname{snh}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r+r'-s}{-4a}},\quad 0 < \delta < \varepsilon, \tag{18}$$

und für die *Parabel* $\left(\frac{1}{a} = 0\right)$:

$$6kT = (r + r' + s)^{3/2} \mp (r + r' - s)^{3/2}, \tag{19}$$

wo in beiden Fällen das untere oder obere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem das Segment S in seinem Innern enthält oder nicht. Das Theorem wurde zuerst von *L. Euler*[38]) für die Parabel bewiesen, dann von *J. Lambert*[39]) durch geometrische Betrachtung auf beliebige Kegelschnitte ausgedehnt, der analytische Beweis von *J. L. Lagrange*[40]) nachgetragen.

In enger Beziehung steht das Theorem zum Prinzip der kleinsten Wirkung, nach welchem das Bahnstück MM' Extremale des Integrales:

$$J = \int_M^{M'} V\sqrt{dx^2 + dy^2} = k\int_M^{M'} \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}\,\sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{20}$$

ist, indem unter $W(r, r', s, a)$ sein Extremalwert verstanden

$$k^2 T = 2a^2 \frac{\partial W}{\partial a} \tag{21}$$

wird. Es kommt das Theorem also darauf hinaus, daß W r, r' nur in der Verbindung $r + r'$ enthält, was *C. G. Jacobi*[41]) mit Hilfe der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, und in besonders einfacher Weise *N. Joukoffski*[42]) zeigt. Da weiter die den verschiedenen

37) *A. Cayley,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 29 (1869), p. 318 = Works 7, p. 387.

38) *L. Euler,* Misc. Berol. 7 (1743), p. 1.

39) *J. Lambert,* Insign prop. 1761 probl. 41.

40) *J. L. Lagrange,* Berl. Mém. 1778, p. 181 = Oeuvres 4, p. 559.

41) *C. G. J. Jacobi,* Vorlesungen über Dynamik (= Werke Suppbd.) 25. Vorl.

42) *N. Joukoffski,* Nouv. annal. d. math. (3) III (1884), p. 90.

Vorzeichen entsprechenden Werte von T stets gleichzeitig durch die verschiedenen zwischen MM' möglichen Bahnen realisiert werden, erhellt der Zusammenhang der Vorzeichenregeln mit der Lage der „konjugierten" Punkte. Daß $\frac{\sqrt{|1-e^2|}}{2n} W$ die vom Leitstrahl $S'M$ überstrichene Fläche darstellt, bemerkt T[43]).

Weitere Beweise des Theorems geben noch *J. J. Sylvester*[44]), *A. Cayley*[45]), *J. C. Adams*[46]), *E. Catalan*[47]).

6. Das Verhalten der Koordinaten im komplexen Gebiete, ist, im Falle der Ellipse und Hyperbel, weil dieselben da ganze lineare Funktionen von $\sin E$ und $\cos E$ sind, durch jenes von E bestimmt. E selbst aber ist nach (6) eine unendlich vieldeutige Funktion von den beiden Variablen t und e, die im Endlichen nur singulär wird an den algebraischen durch

$$r = 0 \tag{22}$$

ausgeschnittenen Verzweigungsstellen:

$$\frac{k(t-t_0)}{a^{3/2}} = i \lg \frac{e E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}. \tag{23}$$

Daraus folgen sofort einerseits die Konvergenzverhältnisse der Potenzreihen nach e bei der Ellipse (Nr. 4), andererseits die Konvergenzradien für Potenzentwicklungen nach $t - t_1$, welche *F. R. Moulton*[48]) diskutiert. Die Beziehung (23) wird eingehender Weise geometrisch veranschaulicht von *C. V. Charlier*[49]) (Ellipse) und *H. G. Block*[50]) (Hyperbel). Die betreffenden Untersuchungen (auch in Nr. 4) sind im allgemeinen insofern unstreng, als sie von vornherein die singulären Stellen der inversen Funktion von $f(x)$ durch die Nullstellen von $f'(x)$ vollständig gegeben annehmen (wogegen man die Sätze von *A. Hurwitz*[51]) vergleiche), welche so entstehende Lücke sich indess an Hand der Differentialgleichungen der Bewegung ausfüllen läßt.

43) *T.* Quarterly Journ. of math. 7 (1866), p. 45.

44) *J. J. Sylvester*, Phil. Mag. 31 (1866), p. 52 = Papers 2, p. 519; Lond. Astr. Soc. Monthly 26 (1865), p. 27 = Papers 2, p. 496.

45) *A. Cayley*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 22 (1862), p. 238 = Works 3, p. 562.

46) *J. C. Adams*, Mess. of math. 7 (1877), p. 97.

47) *E. Catalan*, Nouv. annal. d. math. (3) 3 (1884), p. 506.

48) *F. R. Moulton*, Astron. Journ. 23 (1903), p. 93.

49) *C. V. Charlier*, Lunds Meddel., n° 22 (1904); ferner Mechanik des Himmels (Leipzig 1902—7) 2, p. 255.

50) *H. G. Block*, Lunds Meddel., n° 23 (1904); Arkiv of math. astr. ok fys. 1 (1904), p. 467.

51) *A. Hurwitz*, Paris C. R. 143 (1906), p. 877; 144 (1907), p. 63.

Im Falle der Parabel[52]) sind die Koordinaten ganze quadratische Funktionen von $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$, dieses aber ist nach (12) eine dreiwertige algebraische Funktion von t, welche im Endlichen nur singulär wird an den beiden Verzweigungspunkten:

$$k(t-t_0) = \pm\frac{i}{3}p^{3/2}. \tag{24}$$

II. Vorläufige Bahnbestimmung.

a) Planetenbahnen.

7. Formulierung der Aufgabe. Das Auftauchen von Kometen und die Entdeckungen der kleinen Planeten erfordern nun aber auch die Lösung jener Aufgabe, welche die Umkehrung der bisher besprochenen bildet: die Bahnelemente eines Himmelskörpers aus gegebenen Beobachtungen zu bestimmen. Da die einzelne Beobachtung desselben bloß die Richtung erkennen läßt, in welcher dieser von der Erde aus gesehen wird, also zwei unabhängige Daten, etwa Rektaszension und Deklination, liefert, so reichen drei Beobachtungen mit Angabe der Beobachtungszeiten gerade hin, die sechs Bahnelemente zu bestimmen. Man kann auch sagen, die drei Beobachtungen liefern drei durch die drei Erdorte E, E', E'' gehende Gerade, auf denen sich der Himmelskörper zu den Zeiten t, t', t'' befindet, und demgemäß das Bahnbestimmungsproblem so aussprechen: Einen Kegelschnitt mit gegebenem Brennpunkte S (Sonne) zu finden, der drei gegebene Gerade in den ebenfalls noch zu findenden Punkten H, H', H'' so schneidet, daß:

$$\begin{aligned}
&\text{Sector } (HSH') = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}k(t'-t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\theta'',\\
&\text{Sector } (H'SH'') = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}k(t''-t') = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\theta,\\
&\text{Sector } (HSH'') = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}k(t''-t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\theta'.
\end{aligned} \tag{25}$$

Diese fünf Bedingungen und die Kenntnis des einen Brennpunktes legen den Kegelschnitt völlig fest. — Die älteren Versuche zur Lösung des Problems ließen allmählich erkennen, daß sie am zweckmäßigsten in zwei Schritten erfolgt. Der erste besteht in der Bestimmung der geozentrischen Distanzen:

$$\varrho = EH, \quad \varrho' = E'H', \quad \varrho'' = E''H'', \tag{26}$$

der zweite in der Ermittelung des Kegelschnittes aus den nunmehr bekannten drei vollständigen heliozentrischen Orten.

---

52) *W. A. Hamilton*, Astron. Journ. 23 (1903), p. 49.

Direkt an die obige Formulierung der Aufgabe knüpft *A. Cayley*[53]) seine geometrische Behandlung des Problems an.

8. Grundgleichungen. Die zur Bestimmung von $\varrho, \varrho', \varrho''$ nötigen drei Gleichungen ergeben sich auf dem Wege über die Dreiecksverhältnisse

$$(27) \qquad n = \frac{\text{Dreieck } (H'SH')}{\text{Dreieck } (HSH')}, \quad n'' = \frac{\text{Dreieck } (HSH')}{\text{Dreieck } (HSH'')}.$$

Legt man nämlich durch die Sonne eine beliebige Ebene und bezeichnet mit D, D', D'' die Abstände der drei Orte H, H', H'' von derselben, so muß, da diese mit der Sonne in einer Ebene liegen, sein:

$$(28) \qquad D' = nD + n''D''.$$

Wird jetzt eine zur vorigen parallele Ebene durch die Erde gelegt, welche die scheinbare Himmelskugel in dem größten Kreise K schneiden möge, und nennt man die von der Erde aus gesehenen sphärischen Abstände der Sonne und des Himmelskörpers von diesem größten Kreise K, den Zeiten t, t', t'' entsprechend, bzw. P, p, P', p', P'', p'', so kann statt (28) sofort geschrieben werden:

$$(29) \qquad \varrho' \sin p' - R' \sin P' = n(\varrho \sin p - R \sin P) + n''(\varrho'' \sin p'' - R'' \sin P''),$$

unter R, R', R'' die Entfernungen der Erde von der Sonne zu den Beobachtungszeiten verstanden. Es mag gleich hier bemerkt werden, daß eben diese Relation auch für die Erdbahn selbst, für die $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$ ist, gelten muß, wofern nur statt n, n'' die auf diese bezüglichen Dreiecksverhältnisse N, N'' gesetzt werden:

$$(30) \qquad R' \sin P' = NR \sin P + N''R'' \sin P''.$$

Es repräsentiert nun (29) bei Wahl von drei verschiedenen Bezugskreisen $K: K_1, K_2, K_3$, ein System von drei Gleichungen, welche, da $R, P, p, \ldots$ durch Sonnentafeln und Beobachtungen bekannte Größen sind, die geozentrischen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ linear mit den Dreiecksverhältnissen n, n'' verknüpfen. Die einer beliebigen Wahl von K entsprechende Gleichung wird eine lineare Kombination der obigen drei, welchen Umstand man zur Elimination einer oder zweier geozentrischer Distanzen benutzen wird, wobei die hiezu nötige Lage von K sofort durch die Anschauung gegeben ist. Insbesondere erhält man so durch Wahl der drei Seiten des durch die drei scheinbaren, geozentrischen Orte des Himmelskörpers bestimmten sphärischen Dreieckes als Bezugskreise K_1, K_2, K_3 das für Planetenbahnbestimmungen vorteilhafteste System, in welchem die geozentrischen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$,

53) *A. Cayley*, Lond. Astr. Soc. Mem. 38 (1870), p. 17 = Papers 7, p. 400.

soweit sie explizite auftreten, getrennt sind:

$$
\begin{aligned}
n\varrho \sin p &= nR \sin P_1 + n''R'' \sin P_1'' - R' \sin P_1', \\
-\varrho' \sin p' &= nR \sin P_2 + n''R'' \sin P_2'' - R' \sin P_2', \\
n''\varrho'' \sin p'' &= nR \sin P_3 + n''R'' \sin P_3'' - R' \sin P_3',
\end{aligned} \tag{31}
$$

wobei aber nunmehr p, p', p'' die drei Höhen jenes Dreieckes und P_i, P_i', P_i'' die sphärischen Abstände der drei scheinbaren Sonnenorte von der i^{ten} Seite desselben bezeichnen.

Wäre man nun im Stande n, n'' irgendwie durch die geozentrischen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ auszudrücken, so erhielte man durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (29) die gewünschten drei Gleichungen für $\varrho, \varrho', \varrho''$. Nun gelingt dies in der Tat, indem man auf die Kenntnis der bisher noch nicht benutzten Zwischenzeiten $\theta, \theta', \theta''$ basiert. Wie nämlich aus einer Abzählung der Unbekannten folgt, ist der Kegelschnitt durch die drei heliozentrischen Distanzen und die entsprechenden Zwischenzeiten:

$$r = SH, \quad r' = SH', \quad r'' = SH'', \quad \theta = k(t''-t'), \quad \theta'' = k(t'-t) \tag{32}$$

festgelegt, so daß also auch die Dreiecksverhältnisse n, n'' sich notwendig durch diese fünf Größen ausdrücken lassen müssen. Auf der anderen Seite läßt sich jede heliozentrische Distanz r aus der gleichzeitigen geozentrischen Distanz ϱ sofort berechnen, da im Dreieck HSE, die Seite $SE = R$ der Erdephemeride, der Winkel bei E der Beobachtung entnommen werden kann. So kann man schließlich die Dreiecksverhältnisse n, n'' selbst durch die $\varrho, \varrho', \varrho'', \theta, \theta''$ ausdrücken, und erhält in (29) tatsächlich die drei zur Bestimmung der drei geozentrischen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ nötigen Gleichungen.

9. Herstellung der Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse. Erforderliche Genauigkeit. Da jedoch die Dreiecksverhältnisse in äußerst verwickelter Weise von $r, r', r'', \theta, \theta''$ abhängen, so müssen diese Gleichungen erst dadurch traktabel gemacht werden, daß man die Funktionen $n(r, r', r'', \theta, \theta'')$ und $n''(r, r', r'', \theta, \theta'')$ durch einfach gebaute Näherungsausdrücke ersetzt. Als Grundlage der Näherung bietet sich sofort die Kleinheit der Zwischenzeiten dar, denn in praxi tritt dieses Problem der ersten Bahnbestimmung nur in den ersten Wochen nach Entdeckung eines neuen Himmelskörpers auf. Man wird daher n, n'' zuerst nach Potenzen einer Größe ε von der Ordnung der Zwischenzeiten entwickeln, indem man vorher etwa, unter λ, μ, f, g endliche Größen verstehend, setzt:

$$
\begin{aligned}
\theta &= f\varepsilon, \quad \theta'' = g\varepsilon, \\
r &= r' - \theta''(\lambda - \mu\theta''), \quad r'' = r' + \theta(\lambda + \mu\theta),
\end{aligned} \tag{33}
$$

wodurch dann:

$$(34) \qquad n = \Phi(f, g, \lambda, \mu, \varepsilon), \quad n'' = \Phi(g, f, \lambda, \mu, -\varepsilon)$$

wird, und nun bloß die ersten Glieder dieser Reihen in (29) einführt. Die Methode, nach welcher diese Entwicklung erlangt wird, ist wesentlich diese: Man sieht zunächst außer r' auch noch $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$ als bekannt an und drückt durch diese drei Größen und θ, θ'' die Dreiecksverhältnisse n, n'' aus, indem man erst vermöge der beiden Differentialgleichungen:

$$(35) \qquad \frac{d^2D}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3} D = 0, \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k^2}{r^3} u = 0, \quad u = r\frac{dr}{dt}$$

den Abstand $D(\tau)$ zur Zeit $t' + \frac{\tau}{k}$ in der Form darstellt:

$$(36) \qquad D(\tau) = \varphi(\tau) D' + \psi(\tau) \frac{dD'}{dt'},$$

wo $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ Potenzreihen nach τ mit in r', $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{d^2r'}{dt^2}$ rationalen Koeffizienten sind. Nach Elimination von $\frac{dD'}{dt'}$ aus den beiden für $\tau = -\theta''$ und $\tau = \theta$ aus (36) zu erhaltenden Gleichungen gibt der Vergleich des Eliminationsresultates mit (28):

$$(37) \quad n : n'' : 1 = \psi(\theta) : -\psi(-\theta'') : \psi(\theta)\varphi(-\theta'') - \varphi(\theta)\psi(-\theta'').$$

Die Konvergenzverhältnisse der Reihen φ, ψ sind durch die singulären Punkte der Koordinaten (vgl. Nr. 6) bestimmt, die der Reihen für n, n'' noch außerdem durch die Nullstellen der Dreiecksfläche $\frac{1}{2} rr'' \sin(v'' - v)$, welche aber, wie *F. R. Moulton*[48]) bemerkt, nur verschwindet, wenn r oder $r'' = 0$, d. h. t oder t'' ein singulärer Punkt der Koordinaten ist oder der Zwischenwinkel $v'' - v$ ein Multiplum von 180^0 wird. Die endlichen Ausdrücke für φ, ψ gibt *F. Kühnert*[54]).

Um dann $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{d^2r'}{dt^2}$ mit Hilfe der noch unbenutzten r, r'' zu eliminieren, entwickelt man von der zweiten Differentialgleichung (35) ausgehend r und r'' bzw. nach Potenzen von θ'' und θ, wobei in den Koeffizienten $\frac{dr'}{dt}$ und $\frac{d^2r'}{dt^2}$ auftreten, und leitet aus der Vergleichung dieser beiden Reihen mit r und r'' die Werte jener Größen in Form von Potenzreihen nach ε her.

Noch vorteilhafter wird man n, n'' durch Oskulationsausdrücke ersetzen, d. h. Funktionen von r, r', r'', θ, θ'', die einerseits möglichst einfach gebaut sind, und deren Entwicklungen nach ε andererseits noch in Termen möglichst hoher Ordnung mit denen von n und n'' über-

54) *F. Kühnert*, Astr. Nachr. 95 (1879), p. 145, 203.

einstimmen. Die Wahl derselben bildet den wesentlichsten Unterschied der im letzten Jahrhundert aufgestellten Methoden.

Von besonderer Wichtigkeit ist es festzustellen, wie genau n, n'' zu nehmen sind, damit die Grundgleichungen (29) die Distanzen ϱ, ϱ', ϱ'' mit einer vorgegebenen Genauigkeit liefern. Es zeigt sich in dieser Hinsicht: sind n, n'' bis $\varepsilon^{\nu+2}$ exklusive genau, so werden ϱ, ϱ', ϱ'' bis ε^{ν}, $\varrho - \varrho'$, $\varrho'' - \varrho'$ bis $\varepsilon^{\nu+1}$ und $\frac{\theta}{\theta''}\varrho + \frac{\theta''}{\theta}\varrho'' - \varrho'$ bis $\varepsilon^{\nu+2}$ exklusive genau sein. Gleiches findet aber auch dann noch statt, wenn n, n'' bloß bis $\varepsilon^{\nu+1}$, aber doch $n + n''$ bis $\varepsilon^{\nu+2}$ exklusive genau sind.

Berechnet man dann weiter unter Benutzung solcher Werte der Dreiecksverhältnisse und Distanzen nach irgend welchem der unter Nr. **11** genannten Verfahren die heliozentrischen Zwischenwinkel:

$$(38)\qquad 2f = \sphericalangle H'SH'', \quad 2f' = \sphericalangle HSH'', \quad 2f'' = \sphericalangle HSH',$$

so erhält man diese allemal bis $\varepsilon^{\nu+1}$ exklusive genau.

Für die Funktionaldeterminante der drei Grundgleichungen nach ϱ, ϱ', ϱ'' findet man angenähert etwa durch Verwendung der Ausdrücke (41):

$$(39)\qquad D + \frac{3\theta\theta''}{2r'^4} R'\Delta\cos z',$$

wobei D den Eckensinus des durch die drei scheinbaren geozentrischen Orte des Himmelskörpers, Δ jenen des durch die äußeren Orte des Himmelskörpers und den mittleren Sonnenort gebildeten sphärischen Dreiecks bezeichnet. Hier ist im allgemeinen das erste Glied von der Ordnung ε^2 das zweite von der Ordnung ε^3, so daß D oder nach *Th. v. Oppolzer*[55]) der nahe halb so große Flächeninhalt des Dreiecks ein Maß für die Sicherheit der zu gewinnenden Werte der Distanzen ϱ, ϱ', ϱ'' abgibt. Wird $D = 0$, in welchem Falle die obigen Genauigkeitsangaben in Frage gestellt sind, so fallen entweder zwei der scheinbaren geozentrischen Orte des Himmelskörpers zusammen, oder es liegen alle drei in einem größten Kreise. Tritt letzteres ein, so ist entweder r' nahe $= R'$, oder der mittlere Sonnenort, nach *F. Tietjen*[56]) genauer der zur Zeit $\frac{1}{3}(t + t' + t'')$ liegt nahe in demselben größten Kreis.

10. Näherungsausdrücke der Dreiecksverhältnisse. Ein bis ε^{ν} exklusive genauer Wert irgend einer Größe möge allgemein im folgenden ein ν^{ter} Näherungswert derselben genannt werden.

Die Ersetzung der Dreiecke durch die zugehörigen Sektoren er-

55) *Th. v. Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 367; Astr. Nachr. 92 (1878), p. 97.
56) *F. Tietjen*, Astr. Nachr. 73 (1869), p. 353.

gibt zunächst für n, n'' die 2ten Näherungswerte:

$$n = \frac{\theta}{\theta'}, \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'}. \tag{40}$$

Ebenfalls 2te Näherungswerte, bei denen aber $n + n''$ bis ε^3 exklusive genau ist, sind die bereits bei *J. L. Lagrange*[57]) und in der Folge insbesondere bei *C. F. Gauß* auftretenden Ausdrücke:

$$n = \frac{\theta}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^3}\right), \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^3}\right), \tag{41}$$

welche im speziellen bei gleichen Zwischenzeiten, $\theta = \theta''$, 3te Näherungswerte liefern, bei denen überdies wieder $n + n''$ bis ε^4 exklusive genau ist[58]). Allgemein 3te Näherungswerte sind:

$$n = \frac{\theta}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6r'^3}\right), \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'}\left(1 + \frac{\theta'^2 - \theta''^2}{6r'^3}\right). \tag{42}$$

4te Näherungswerte stellen die von *Th. v. Oppolzer*[59]) angegebenen Ausdrücke dar:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\theta}{\theta'}\left(1 + 4\frac{\theta'^2 - \theta^2}{3}x + 4\frac{\theta^2\theta''}{\theta'}xy\right), \\ n'' &= \frac{\theta''}{\theta'}\left(1 + 4\frac{\theta'^2 - \theta''^2}{3}x - 4\frac{\theta\theta''^2}{\theta'}xy\right), \\ x &= \frac{1}{(r + r'')^3}, \quad y = \frac{r'' - r}{r'' + r}. \end{aligned} \tag{43}$$

Ebensolche von etwas anderer Form gibt *R. Radau*[60]), gelegentlich einer zusammenfassenden Behandlung der verschiedenen Näherungsausdrücke.

Desgleichen sind 4te Näherungswerte, bei denen aber wieder $n + n''$ bis ε^5 exklusive genau ist, die von *J. W. Gibbs*[61]) durch Interpolation der Koordinaten mittels eines Polynoms 4ten Grades in $t - t'$ abgeleiteten Ausdrucke:

$$n = \frac{\theta}{\theta'}\frac{1 + \frac{\theta'\theta'' - \theta^2}{12r^3}}{1 - \frac{\theta\theta'' + \theta'^2}{12r'^3}}, \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'}\frac{1 + \frac{\theta\theta' - \theta''^2}{12r'^3}}{1 - \frac{\theta\theta'' + \theta'^2}{12r'^3}}, \tag{44}$$

57) *J. L. Lagrange,* Berlin Mém. 1783, p. 296 = Oeuvres 4, p. 451.

58) Letzteres folgt daraus, daß $n + n''$ bei gleichen Zwischenzeiten nach (34) bloß gerade ε-Potenzen enthält.

59) *Th. v. Oppolzer,* Bahnb., p. 100 (1. Aufl., p. 231). Bezüglich der geometrischen Bedeutung der Zusatzglieder in diesen und den früheren Ausdrücken vgl. die Vorrede von *H. Poincaré* in *Tisserand-Perchot.* Leçons.

60) *R. Radau,* Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 401.

61) *J. W. Gibbs,* National academy of sciences 4 (1888) = Papers 2, p. 118, 149. Das erwähnte Verhalten der *Gibbs*schen Ausdrücke rücksichtlich ihrer Genauigkeit hat *E. Weiß* in den Denkschriften der Wiener Akademie 60 (1893), p. 345, klargelegt.

welche im speziellen bei gleichen Zwischenzeiten $\theta = \theta''$ 5te Näherungswerte liefern, bei denen überdies wieder $n + n''$ bis ε^6 exklusive genau ist. Schon früher hatte *A. de Gasparis*[62]) Glieder höherer Ordnung in n, n'' mitzunehmen versucht, aber ziemlich komplizierte Formen erhalten.

Bei verschwindender Exzentrizität stellen die von *W. Ebert*[63]) angegebenen Ausdrücke:

$$(45) \qquad n = \frac{\theta}{\theta'} \frac{1 + \frac{3\theta'^2 - 8\theta^2}{48 r'^3}}{1 - \frac{5\theta'^2}{48 r'^3}}, \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \frac{1 + \frac{3\theta'^2 - 8\theta''^2}{48 r'^3}}{1 - \frac{5\theta'^2}{48 r'^3}}$$

4te Näherungswerte dar, bei denen aber der Fehler von $n + n''$ den Faktor $(\theta - \theta'')^2$ enthält, so daß bei gleichen Zwischenzeiten $n + n''$ bis ε^6 exklusive genau ist.

P. Harzer[64]) hat die allgemeinen Reihenentwicklungen von n, n'' nach ε bis ε^{10} durchgeführt, indem er dabei die einer Kreisbahn entsprechenden Werte von n, n'' als Faktoren abspaltete, und hat die Verwendung der erhaltenen Ausdrücke bei numerischer Rechnung durch mehrere Tafeln erleichtert.

11. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen. Der in Nr. 9 angegebene Zusammenhang zwischen dem Genauigkeitsgrade der n, n'' und demjenigen der ϱ, ϱ', ϱ'' läßt erkennen, daß die Näherungsausdrücke (40) der Dreiecksverhältnisse, durch welche zwar das System (29) überhaupt linear in den geozentrischen Distanzen würde, gar keine Näherung für diese gewähren, was bereits *J. L. Lagrange*[65]) hervorhebt. Mit ihrer Verwendung fallen wesentlich die Versuche der Kometenbahnbestimmung jener älteren Autoren zusammen (*Kepler*, *P. Bouguer*[66])), welche den Kometen als in gerader Linie sich gleichförmig bewegend annehmen.

J. L. Lagrange selbst wählte nicht r, r', r'', sondern r', $\frac{dr'}{dt}$, $\frac{d^2r'}{dt^2}$ als Unbekannte, drückt also nach Nr. 9 n, n'', r, r'' durch eben diese Größen aus, wobei unter Vernachlässigung von ε^3 im wesentlichen die Gleichung (51) für r' folgt.

---

62) *A. de Gasparis,* Astr. Nachr. 42, 43, 46, 47 (1856—58); siehe hierüber auch *G. Lorenzoni* Astr. Nachr. 132 (1893), p. 225.

63) *W. Ebert,* Wien Denkschr. 78 (1906), p. 645.

64) *P. Harzer,* Kiel Sternw. Publ. 11 (1901).

65) *J. L. Lagrange,* Berlin Mém. 1778, p. 124; 1783, p. 296 = Oeuvres 4, p. 451, 496 und Méc. analyt. 2 (= Oeuvres 12), p. 41.

66) *P. Bouguer,* Paris hist. 1733 mém., p. 331.

a) *Methode von Gauß.* Die niedrigste überhaupt zulässige Näherung für n, n'' bilden vielmehr die Ausdrücke (41), welche im allgemeinen erste, bei gleichen Zwischenzeiten aber zweite Näherungswerte der geozentrischen Distanzen finden lassen.

Auf ihnen basiert die von *Gauß* in der *Theoria motus* ausführlich entwickelte Methode, welche indess in wesentlichen Punkten (vgl. Nr. **13**, **14**) von den Verfahren abweicht, deren sich *Gauß*[67]) bei seinen ersten Bahnbestimmungen der Ceres und Pallas bedient hat. Da diese Ausdrücke (41) bloß r' enthalten, so hat man in der zweiten Gleichung des Systems (31), wenn r' unter Bezugnahme auf das Dreieck $SH'E'$ durch ϱ' ausgedrückt gedacht wird, eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten ϱ', nach deren Bestimmung ϱ, ϱ'' sofort aus der ersten und dritten Gleichung des Systems (31) sich ergeben.

Statt ϱ' führt *Gauß* als Unbekannte den Winkel $z' = \sphericalangle SH'E'$ am Planeten ein, durch den sich ϱ' und r' ihrerseits in der Form darstellen

$$\varrho' : r' : R' = \sin(z' + \psi') : \sin\psi' : \sin z', \tag{46}$$

wofern mit ψ' der durch die Beobachtung bekannte Winkel $\sphericalangle SE'H'$ an der Erde bezeichnet wird. Hiedurch erhält *Gauß* für z' eine Gleichung (8ten Grades in $\sin z'$) der einfachen Gestalt:

$$M \sin^4 z' = \sin(z' + \omega), \tag{47}$$

welche nun durch sukzessive Näherung leicht zu lösen ist.

Da die Erdbahn selbst eine Lösung der Aufgabe bildet und für sie $z' = 180^0 - \psi'$ ist, so muß diese Gleichung, weil selbst nur näherungsweise richtig, eine dem Werte $180^0 - \psi'$ mindestens nahe gleiche Wurzel z' besitzen, die also beiseite zu lassen ist. Von den übrigen Wurzeln sind, da z' und ψ' Winkel desselben Dreiecks $SH'E'$ sein sollen, bloß jene brauchbar, für die $0 < z' < 180^0 - \psi'$ ist. Solcher gibt es aber stets nur eine oder zwei, und zwar je nachdem $1 + \frac{3\theta\theta''}{2R'^3} \frac{\sin P_2'}{\sin p'} \cos\psi' < 0$ oder > 0 ist. In letzterem Falle haben weitere Beobachtungen über die zu treffende Wahl zu entscheiden. Mit der Diskussion der Wurzeln der Gleichung (47) hat sich zuerst *J. F. Encke*[68]) näher befaßt und eine Tafel zum raschen Erkennen des gerade vorliegenden Falles entworfen. Später sind *G. W. Hill*[69]),

---

67) *C. F. Gauß,* Monatl. Corr. 20 (1809), p. 197 = Werke 6, p. 148.

68) *J. F. Encke,* Astr. Nachr. 27 (1848), p. 241, 257; *J. F. Encke,* Berlin Abh. 1848, p. 1.

69) *G. W. Hill*, Runkles Math. Monthly. 3 (1860), p. 26 = Works 1, p. 2.

Th. v. Oppolzer[70]), *N. Herz*[71]) und *W. H. Young*[72]) hierauf zurückgekommen.

Zur Berechnung von ϱ, ϱ'' aus dem bekannt gewordenen ϱ' kann man sich statt (31) auch irgend zweier in (29) enthaltenen Gleichungen bedienen, in denen bloß ϱ, ϱ' bzw. ϱ'', ϱ' auftreten, was dann der Fall ist, wenn man den Bezugskreis K durch den dritten bzw. ersten scheinbaren Planetenort gehen läßt. Die hiebei restierende Willkür in der Wahl von K kann zur Vereinfachung der beiden Gleichungen benutzt werden, was meist dadurch geschieht, daß man K noch durch den dritten, bzw. ersten scheinbaren Sonnenort hindurch gehen läßt, was $P'' = 0$ bzw. $P = 0$ ergibt. Nur wenn hiebei die Koeffizienten von ϱ und ϱ'' sehr klein werden, was eintritt, wenn die drei Sonnenorte mit dem ersten oder dritten Planetenort nahe in einem größten Kreise liegen, wird man, um die dadurch bedingte Unsicherheit in der Bestimmung von ϱ, ϱ'' zu vermeiden, anders über K verfügen.

Sind so die drei vollständigen heliozentrischen Orte des Himmelskörpers mit ihren geozentrischen und heliozentrischen Distanzen bekannt geworden, so könnten die für das Weitere wichtigen heliozentrischen Zwischenwinkel (38) direkt vermöge:

$$\begin{gathered} \sin 2f : \sin 2f' : \sin 2f'' = nr : r' : n''r'', \\ f' = f + f'', \end{gathered} \tag{48}$$

bestimmt werden, da hienach $2f$, $180^0 - 2f'$, $2f''$ die Winkel eines Dreiecks der gegebenen Seiten nr, r', $n''r''$ sind. Doch wird numerisch eine größere Sicherheit erlangt, wenn man nach *Gauß* f' trigonometrisch aus den beiden äußeren heliozentrischen Orten des Himmelskörpers, und dann bloß f, f'' aus (48) berechnet.

Für den Zwischenwinkel f' gilt hiebei:

$$\begin{gathered} \sin^2 f' = \cos^2 \frac{J}{2} \sin^2 \frac{\alpha - \alpha''}{2} + \sin^2 \frac{J}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \alpha''}{2}, \\ \alpha = \varphi + \psi + z, \qquad \alpha'' = \varphi'' + \psi'' + z'', \end{gathered} \tag{49}$$

worin J den Winkel der Ebenen SEH und $SE''H''$, φ, φ'' die Winkel ihrer Schnittlinie mit SE bzw. SE'' bedeuten und ψ, z und ψ'', z'' die zu ψ', z' analogen Größen für die erste und dritte Beobachtung sind, also alle diese Winkel bis auf z, z'' direkt durch die Beobachtungen bestimmt sind.

Nach Bekanntwerden der *Gauß*schen Methode haben insbesondere

---

70) *Th. von Oppolzer,* Astr. Nachr. 92 (1878), p. 97; *Th. von Oppolzer,* Wien Ber. 86 (1882), p. 885.

71) *N. Herz,* Wien Ber. 86 (1882), p. 1125.

72) *W. H. Young,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 57 (1897), p. 379.

J.F.Encke[73]), *P.A.Hansen*[74]) und *F.Tietjen*[75]) eingehende Darstellungen derselben geliefert, und für die numerische Rechnung weitere spezielle Vorschriften und weitere Umformungen der einzelnen zu berechnenden Ausdrücke angegeben.

Die Verwendung der Näherungswerte (42) der Dreiecksverhältnisse, welche bloß die Werte von M und ω in der *Gauß*schen Schlußgleichung (47) abändert, hat *J. F. Encke* in einem Zusatze zu seiner ebengenannten Arbeit im Berliner Jahrbuch vorgeschlagen.

b) *Methode von Th. v. Oppolzer.* Die dieser Methode zugrunde liegenden Ausdrücke (43) der Dreiecksverhältnisse liefern in allen Fällen zweite Näherungswerte für die geozentrischen Distanzen. Da dieselben bloß r und r'' enthalten, so hat man in der ersten und dritten Gleichung des Systems (31), wenn r und r'' unter Bezugnahme auf die Dreiecke SHE und $SH''E''$ durch ϱ und ϱ'' ausgedrückt gedacht sind, zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten ϱ, ϱ'', die aber keiner weiteren Reduktion auf eine so einfache Form, wie *Gauß*' Schlußgleichung fähig sind, sondern in ihrer ursprünglichen Gestalt durch sukzessive Näherung gelöst werden müssen.

Statt hierauf ϱ' etwa aus der zweiten Gleichung des Systems (31) abzuleiten, schreitet *v. Oppolzer* zuvörderst zur trigonometrischen Berechnung des Zwischenwinkels f' aus den beiden durch ϱ, ϱ'' bekannt gewordenen äußeren heliozentrischen Orten des Himmelskörpers, und bestimmt dann r' gleichzeitig mit f und f'' aus (48). Ausführlich dargestellt findet sich diese Methode in *v. Oppolzer*s Lehrbuch der Bahnbestimmung 1. (1882) (zuerst 1869 in der 1. Auflage), auch gab *F. Tietjen*[76]) ein vereinfachtes vollständiges Rechenschema für dieselbe an.

c) *Methode von J. W. Gibbs.* Die ihr zugrunde liegenden Ausdrücke (44) der Dreiecksverhältnisse liefern im allgemeinen dritte, bei gleichen Zwischenzeiten aber vierte Näherungswerte für die geozentrischen Distanzen. Da in jenen Ausdrücken die drei heliozentrischen Distanzen gleichzeitig auftreten, ist eine unmittelbare Reduktion auf weniger als drei Unbekannte nicht möglich, weshalb *J. W. Gibbs* auch nicht das besondere System (31) benutzt, sondern jene drei Gleichungen, welche aus (29) hervorgehen, wenn der Bezugskreis K der Reihe nach in die drei Ebenen des geozentrischen Ekliptikal-

73) *J.F.Encke,* Berlin astr. Jahrb. für 1854, p. 316; *J.F.Encke,* Astr. Nachr. 30 (1850), p. 33 und 49; Berlin Ber. 1848, p. 60; 1849, p. 167; Berlin Abh. 1849, p. 1.

74) *P. A. Hansen,* Leipzig Ber. 15 (1863), p. 83.

75) *F. Tietjen,* Berlin astr. Jahrb. für 1879.

76) *F. Tietjen,* Berlin astr. Jahrb. für 1887.

koordinatensystems gelegt wird, weil die dann auftretenden Koeffizienten rascher zu bilden sind. Als Unbekannte wählt *Gibbs* die Projektionen der drei heliozentrischen Distanzen auf die zugehörigen geozentrischen und erzielt hiedurch eine gewisse Vereinfachung der differentiellen Korrektionsformeln des *Newton*schen Näherungsverfahrens, nach welchem er sein System auflöst. Außer in der Originalarbeit[77]) von *Gibbs* findet sich seine Methode auch in *Klinkerfues-Buchholz*, Theoretische Astronomie, ausführlich dargestellt.

W. Fabritius[78]) hat ein besonderes Approximationsverfahren zur Lösung der drei *Gibbs*schen Gleichungen in Vorschlag gebracht, welches immer nur die wiederholte Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten erfordert. Desgleichen hat *R. Vogel*[79]) weitere Vereinfachungen angegeben.

d) Die von *P. Harzer*[80]) auf Grund seiner bis ε^{10} gehenden Reihen für n, n'' ausführlich entwickelte Methode bildet das Endglied jener Reihe von Untersuchungen, welche vor allem Glieder möglichst hoher Ordnung in den Zwischenzeiten gleich beim ersten Schritt zu berücksichtigen trachten.

Nach anderer Richtung ist *E. Weiß*[81]) gegangen, welcher sich das Ziel stellte, die für die Praxis gerade ausreichende Genauigkeit auf dem kürzesten Wege zu erlangen. Er hat hiezu den Einfluß der einzelnen Glieder 3ter und 4ter Ordnung von n, n'' auf die Grundgleichungen einer eingehenden numerischen Abschätzung mit Rücksicht auf die speziell bei Asteroiden vorliegenden Bahnverhältnisse unterworfen und wurde dadurch zu einer von der *Gauß*schen wenig verschiedenen Grundgleichung, als der für Asteroiden einfachsten und zweckmäßigsten geführt.

Gleicherweise ist die von *W. Ebert*[82]) auf den Näherungsausdrücken (45) aufgebaute Methode speziell für nahe kreisförmige Bahnen zugerichtet, läßt aber bei diesen im allgemeinen bessere Werte der Distanzen erwarten als die *Gauß*sche Gleichung (47), wiewohl sie auf eine ähnliche, nicht kompliziertere Schlußgleichung führt.

12. Methode von Laplace. Satz von Lambert. Auf einem von dem früheren verschiedenen Gedankengang beruht die von *P. S. Laplace*[83])

---

77) *J. W. Gibbs,* National acad. of sciences 4 (1888) = Papers 2, p. 118, 149.

78) *W. Fabritius,* Astr. Nachr. 128 (1891), p. 225.

79) *R. Vogel,* Astr. Nachr. 129 (1892), p. 37.

80) *P. Harzer,* Kiel Sternw. Publ. 11 (1901).

81) *E. Weiß,* Wien Denkschr. 60 (1893), p. 345.

82) *W. Ebert,* Wien Denkschr. 78 (1906), p. 645; Paris Bull. astr. 23 (1906), p. 209.

entwickelte Methode der Bahnbestimmung. Bei dieser werden zuerst aus den beobachteten drei oder eventuell mehreren Orten die beiden Winkelkoordinaten des geozentrischen Ortes mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten nach der Zeit für einen passend zu wählenden Zeitpunkt interpolatorisch berechnet, und dann als Unbekannte die geozentrische Distanz mit ihren beiden ersten Differentialquotienten nach der Zeit: ϱ, $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$ für eben diesen Zeitpunkt gewählt. Die Bestimmungsgleichungen für diese hat man direkt in den drei Bewegungsgleichungen des Himmelskörpers relativ zur Erde, welche bei Wahl des Visionsradius, der relativen Geschwindigkeit normal zu diesem und der zu beiden normalen Richtung als Bezugsachsen lauten:

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

$$Kv^2\varrho = k^2 R \sin\alpha \sin\psi \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right).$$

$$2v\frac{d\varrho}{dt} + \frac{dv}{dt}\varrho = -k^2 R \cos\alpha \sin\varphi \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right). \tag{50}$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} - v^2\varrho = -k^2\left(\frac{\cos\psi}{R^2} + \frac{\cos z}{r^2}\right).$$

Hierin bedeuten K die geodätische Krümmung der auf die Einheitskugel übertragenen scheinbaren geozentrischen Bahn des Himmelskörpers (positiv gezählt, wenn die Bahn gegen den scheinbaren Sonnenort zu konvex ist), v die scheinbare Geschwindigkeit desselben senkrecht zum Visionsradius, und α den Winkel, welchen diese mit dem den Planetenort und den gleichzeitigen Sonnenort verbindenden größten Kreise bildet. Bemerkt sei, daß die früheren Grundgleichungen (29) bei verschwindenden Zwischenzeiten gerade in dieses System (50) übergehen.

In der ersten Gleichung hat man, die geometrische Beziehung zwischen r und ϱ hinzugedacht, eine Gleichung 8ten Grades für ϱ allein, welche sich aber wegen der Wurzel $\varrho = 0$ auf den 7ten Grad erniedrigt, und nach deren Lösung $\frac{d\varrho}{dt}$ und $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$ linear aus der zweiten und dritten folgen. Durch ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ ist dann Lage und Geschwindigkeit des Himmelskörpers für den gewählten Zeitpunkt gegeben, woraus nach Gl. (2) die Elemente selbst abgeleitet werden können. Auf der gleichen Methode basieren *J. W. Lubbock*[84]), *G. B. Airy*[85]), *A. Cauchy*[86])

83) *P. S. Laplace*, Paris Hist. de l'acad. 1780, p. 13 = Oeuvres 10, p. 93 und Méc. cél. 1 (= Oeuvres 1), p. 218.

84) *J. W. Lubbock*, Lond. Astr. Soc. Mem. 4 (1830), p. 39.

85) *G. B. Airy*, Lond. Astr. Soc. Mem. 11 (1840), p. 181.

86) *A. Cauchy*, Zahlreiche Abhandlungen in: Paris C. R. 23 (1846), 25 (1847), 26 (1848) = Oeuvres ser. 1, t. 10.

und *Y. Villarceau*[87]). Später haben *H. Bruns*[88]), *K. Schwarzschild*[89]) und *P. Harzer*[90]) weitere Ausführungen zu derselben gegeben. Die Genauigkeit der *Laplace*schen Methode untersuchte *H. Poincaré*[91]) und zeigte, daß man bei Interpolation der scheinbaren Bahn aus drei beobachteten Orten und Wahl des arithmetischen Mittels der drei Beobachtungszeiten als Epoche der Bahnbestimmung stets gleich zweite Näherungswerte der den drei Orten zugehörigen geozentrischen Distanzen durch Interpolation aus ϱ, $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$ erhält.

Aus der ersten Gleichung des Systems (50) liest man, wie dies *E. Vicaire*[92]) tut, unmittelbar den *Lambert*schen Satz ab, daß $r < R$ oder $r > R$ ist, je nachdem die scheinbare Bahn des Himmelskörpers ihre konkave oder konvexe Seite dem scheinbaren Sonnenorte zukehrt. Dieser Satz wurde zuerst von *J. H. Lambert*[93]) aus geometrischen Betrachtungen hergeleitet, welche analytisch gefaßt zu der mit der *Gauß*schen Gleichung (47) im wesentlichen identischen, aber erst von *Lagrange*[94]) aufgestellten und zur Bahnbestimmung verwandten approximativen Relation:

$$\varrho' \frac{\sin p'}{\sin P_2'} = \frac{1}{2} R\,\theta\,\theta'' \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \tag{51}$$

überleiten, so daß bei *Lambert* der erste Keim der *Gauß*schen Methode zu suchen ist, was des näheren *J. Glauser*[95]) und *H. Bruns*[96]) erörtert haben. Bei der ersten Bahnbestimmung der Ceres und Pallas hat sich *Gauß* noch direkt der Gleichung (51) bedient. Auf ihren geometrischen Inhalt sind *R. Lehmann-Filhés*[97]) und *G. Sidler*[98]) näher eingegangen. Soll die scheinbare geozentrische Bahn einen Wendepunkt zeigen, also $K = 0$ sein, so muß nach (50) entweder $r = R$ sein, oder der jene tangierende größte Kreis den scheinbaren Sonnenort enthalten. Damit letzteres eintritt, muß die Relativgeschwindigkeit des Himmelskörpers gegen die Erde in die durch diese beiden und die

87) *Y. Villarceau,* Paris Ann. de l'obs. 3 (1857), p. 1.
88) *H. Bruns,* Astr. Nachr. 118 (1888), p. 241.
89) *K. Schwarzschild,* Astr. Nachr. 124 (1890), p. 211.
90) *P. Harzer,* Astr. Nachr. 141 (1896), p. 177.
91) *H. Poincaré,* Paris Bull. astr. 23 (1906), p. 161.
92) *E. Vicaire,* Paris C. R. 100 (1885), p. 778, 842.
93) *J. H Lambert,* Berlin Nouv. Mém. 1771, p. 352.
94) *J. L. Lagrange,* Berlin Mém. 1778 = Oeuvres 4, p. 451.
95) *J. Glauser,* Astr. Nachr. 121 (1889), p. 65.
96) *H. Bruns,* Astr. Nachr. 118 (1888), p. 241.
97) *R. Lehmann-Filhés,* Astr. Nachr. 98 (1881), p. 307.
98) *G. Sidler,* Astr. Nachr. 99 (1881), p. 139.

Sonne gelegte Ebene fallen, wofür *C. F. Gauß*[99]) die Bedingung:

$$\frac{r \sin u}{\sqrt{p}} = \frac{R \sin(L - \Omega)}{\sqrt{P}} \tag{52}$$

angibt.

13. Bestimmung der Elemente aus zwei vollständigen heliozentrischen Orten. Mit den geozentrischen Distanzen ϱ, ϱ', ϱ'' sind drei vollständige heliozentrische Planetenorte bekannt geworden, und es erübrigt nun, den zweiten Schritt zu tun, aus diesen die sechs Bahnelemente herzuleiten, wozu offenbar bereits zwei Orte gerade ausreichen. Man wird den ersten und dritten, H und H'', hiezu wählen, um durch Ausdehnung des Intervalls möglichste Schärfe zu erlangen, und wird dann den mittleren Ort H' zur Probe der Richtigkeit der Rechnung verwenden. Da die Ebene HSH'' die Bahnebene ist, so sind i und Ω trigonometrisch sofort zu berechnen. Die Gestalt des Kegelschnittes, also die Elemente a und e, lassen sich aus den zwei Radienvektoren r und r'' und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $2f' = v'' - v$ ermitteln. *Gauß* führt ihre Bestimmung auf diejenige der Differenz der zu beiden Orten gehörigen exzentrischen Anomalien $2g = E'' - E$ zurück. Zunächst nämlich folgt aus den Formeln der elliptischen Bewegung:

$$a = \frac{2\sqrt{rr''}\cos f'}{\sin^2 g}\left(l + \sin^2\frac{g}{2}\right), \qquad b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{rr''}\sin f'}{\sin g}, \tag{53}$$

$$e \cos\frac{E+E''}{2} = \frac{l\cos g - \sin^2\frac{g}{2}}{l + \sin^2\frac{g}{2}}, \tag{54}$$

wobei zur Abkürzung:

$$l = \frac{r + r'' - 2\sqrt{rr''}\cos f'}{4\sqrt{rr''}\cos f'} \tag{55}$$

gesetzt ist.

Auf der anderen Seite wird der Flächeninhalt des Segmentes, das durch die Sehne HH'' von der Ellipse abgetrennt wird, durch den Ausdruck $\frac{1}{2}ab(2g - \sin 2g)$ dargestellt. Daher ergibt die Bedingung:

$$\text{Sektor} = \text{Dreieck} + \text{Segment} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\theta' \tag{56}$$

unmittelbar die zur Bestimmung von $x = \sin^2\frac{g}{2}$ dienende transzendente

---

99) *C. F. Gauß*, Werke 7, p. 303. Es bedeuten P den Parameter der Erdbahn, L die wahre Länge der Erde.

Gleichung:

$$1 + \tfrac{4}{3}(l+x)Q(x) = \frac{m}{\sqrt{l+x}}.$$

(57)
$$Q(x) = Q\left(\sin^2\frac{g}{2}\right) = \frac{3}{4}\,\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}, \qquad m = \frac{\theta'}{(2\sqrt{rr''}\cos f')^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist g gefunden, so folgen aus (53) die Elemente a, e, und dann mit Hilfe von (54) E, also auch u. Da nun der Ort H völlig bekannt ist, so wird durch v die Richtung der Apsidenlinie, also π gegeben. Die Beobachtungszeit t liefert schließlich das letzte Element t_0 oder ε. Die Formeln (53—55) sind übrigens von *Gauß* noch weiterer Umgestaltungen zwecks numerischer Rechnung unterzogen worden.

Die Auflösung der Gleichung (57) durch sukzessive Näherung oder Reihenentwicklung stützt sich darauf, daß vermöge der Kleinheit der Zwischenzeit x eine Größe 2ter Ordnung in den Zwischenzeiten ist. Aus einem später (Nr. **14**) ersichtlichen Grunde führt *Gauß* das Verhältnis Sektor : Dreieck:

(58)
$$\eta' = \frac{m}{\sqrt{l+x}}, \qquad x = \frac{m^2}{\eta'^2} - l$$

statt x als Unbekannte ein, und setzt dann die Gl. (57) mit Rücksicht darauf, daß $\dfrac{1}{1-\frac{6}{5}x}$ ein Näherungswert von $Q(x)$ ist, in der Form an:

(59)
$$\eta'^3 - \eta'^2 = \frac{m^2}{\frac{5}{6}+l+\xi(x)}\left(\eta' + \frac{1}{9}\right), \qquad \xi(x) = x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{Q(x)} - 1\right),$$

wo zwar $\xi(x)$ durch x noch von η' abhängt, aber von 2ter Ordnung in x ist. Die Berechnung einer fortlaufenden Kette von η'- und x-Werten nach (58) und (59), ausgehend von $x = 0$, bildet daher ein rasch konvergentes Verfahren zur Bestimmung dieser Größen, das durch die von *Gauß* gegebenen Tafeln noch wesentlich vereinfacht wird. Eine weitere Modifikation desselben gibt *F. Tietjen*[100]) und die Gaußischen Tafeln auch *J. Bauschinger*[101]). Der Umstand, daß $Q(x)$ eine hypergeometrische Funktion ist:

(60)
$$Q(x) = F\left(1, 3, \tfrac{5}{2}, x\right),$$

bildet die Quelle verschiedener von *Gauß* angegebener Kettenbruch- und Reihendarstellungen von $\xi(x)$. Später sind *P. A. Hansen*[102]) und neuerdings *W. Fabritius*[103]) und *L. de Ball*[103]) auf solche zurückgekommen.

100) *F. Tietjen*, Berl. astr. Jahrb. für 1879.
101) *J. Bauschinger*, Tafeln, Nr. 19 und 20.
102) *P. A. Hansen*, Leipzig Ber. 15 (1863), p. 83.

Reihenentwicklungen für die Lösung der Gl. (59) haben *P. A. Hansen*[102]) und *C. F. Encke*[104]) aufgestellt, und zwar entwickelt ersterer η' nach Potenzen von l und einer mit m^2 verschwindenden Größe, während letzterer $\lg \eta'$ nach Potenzen von $\frac{\theta'}{(r+r'')^{\frac{3}{2}}}$ und $\sin \frac{\gamma}{2}$ (vgl. Gl. (85)) entwickelt.

Besonders bemerkenswert ist die große Unempfindlichkeit des durch (57) und (58) berechneten Wertes von η' gegenüber von Veränderungen des Zwischenwinkels f'. Da nämlich angenähert:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial f'} = \frac{\theta'^3 \sqrt{p}}{5 r'^5} \tag{61}$$

ist, so erzeugen Fehler von f' immer in η' Fehler einer um drei Einheiten höheren Ordnung bezüglich ε. Die zu erwartende Genauigkeit der Elemente untersucht *P. Harzer*[105]).

Ein anderes bereits von *Gauß*[106]) angedeutetes Verfahren zur Bestimmung der Bahn aus zwei vollständigen heliozentrischen Orten besteht darin, die Gl. (57) durch die *Lambert*sche Gl. (17) zu ersetzen, indem man zunächst aus dieser den Wert von a bestimmt. Mit diesem folgt dann x aus (53) und hierauf die übrigen Elemente ebenso wie früher. Es empfiehlt sich dieses Verfahren, von welchem neuerdings auch *O. Callandreau*[107]) eingehend handelt, bei nahe parabolischen Bahnen und größeren Zwischenzeiten.

Da für diese wegen der Kleinheit von $\frac{1}{a}$ auch ε, δ klein und daher ihre Differenz gegen den Sinus durch trigonometrische Tafeln schlecht bestimmbar werden, so setzt man hier die *Lambert*sche Gleichung in die Form:

$$\begin{gathered} 6\theta' = (r+r''+s)^{\frac{3}{2}} Q\left(\sin^2 \frac{\varepsilon}{4}\right) - (r+r''-s)^{\frac{3}{2}} Q\left(\sin^2 \frac{\delta}{4}\right), \\ \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{r+r''+s}{4a}, \qquad \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{r+r''-s}{4a} \end{gathered} \tag{62}$$

und legt vermittels der erwähnten hypergeometrischen Reihen oder Kettenbrüche für $Q(x)$ Tafeln an, wie dies *J. G. Watson*[108]), *Th. v. Oppolzer*[109]) und *J. Bauschinger*[110]) tun. Die wieder für kleine Zwischen-

103) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 129 (1892), p. 49. Hierzu *L. de Ball*, Astr. Nachr. 129 (1892), p. 283.

104) *J. F. Encke*, Berlin astr. Jahrb. für 1854, p. 316.

105) *P. Harzer*, Publik. d. Sternwarte Kiel 11 (1901).

106) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 109 (Schluß).

107) *O. Callandreau*, Determ. d. orbites. Paris. ann. de l'obs. 23 (1902), p. G. 1.

108) *J. C. Watson*, Theor. astr., Tafel 15 und 16.

109) *Th. v. Oppolzer*, Bahnbest. 2, Tafel 17.

110) *J. Bauschinger*, Tafeln Nr. 23.

zeiten entstehende Schwierigkeit, daß θ' sich nach (62) als Differenz nahe gleicher Größen bestimmt, zu beheben, gibt *A. Marth*[111]) unter Einführung des Hilfswinkels $\sin\gamma = \frac{s}{r+r''}$ eine andere Umformung und Reihenentwicklung, deren Benutzung er durch besondere Tafeln erleichtert. Eine für kleine Exzentrizitäten und Zwischenzeiten rasch konvergierende Reihenentwicklung gibt *M. Kowalski*[112]).

J. W. Gibbs endlich zieht zur Bestimmung der Bahn alle drei heliozentrischen Orte jedoch mit Weglassung der Beobachtungszeiten, heran. Das hiedurch erlangte überzählige Datum gestattet die Lösung von (57) zu umgehen, indem der Parameter der Bahn aus:

$$p = \frac{nr + n''r'' - r'}{n + n'' - 1} \tag{63}$$

folgt, welche Relation unmittelbar aus (28) erhalten wird, wenn man die Ebene normal zur Apsidenlinie wählt. Indessen erscheint p als Quotient von Größen 2ter Ordnung unsicher bestimmt, ein Umstand, den *Gauß* vermieden wissen wollte, obzwar er auch dieses Verfahrens zur Herleitung der Elemente ausführlich gedacht hat[113a]). Gleiches gilt auch von den zu (63) analogen Ausdrücken für e, v, v', v'', welche *W. Fabritius*[114]) hergeleitet hat.

Es kann nach *Gauß*[113]) aber auch bei Verwendung von nur zwei Orten p direkt zu mindest sehr angenähert bestimmt werden, indem aus $\theta'\sqrt{p} = \int_v^{v''} r^2 dv$ mittels der *Cotes*schen Formeln als erste Näherung folgt:

$$\theta'\sqrt{p} = f'(r^2 + r''^2), \tag{64}$$

mit welcher der den Winkel (rr'') halbierende Radius r_0 berechnet werden kann:

$$\frac{\cos\frac{f'}{2}}{r_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r''}\right) - \frac{2}{p}\sin^2\frac{f'}{2}, \tag{65}$$

mit dem nun wieder nach den *Cotes*schen Formeln als zweite Näherung folgt:

$$\theta'\sqrt{p} = \tfrac{1}{3}f'(r^2 + r''^2 + 4r_0^2). \tag{66}$$

---

111) *A. Marth*, Astr. Nachr. 65 (1865), p. 321. Vgl. hierzu noch *O. Callandreau*, Paris Bull. astr. 18 (1902), p. 127 und analoge Tafeln bei *J. Bauschinger*, Tafeln.

112) *M. Kowalski*, St. Petersburg. Bull. de l'acad. 20 (1875), p. 559.

113) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 86.

113a) *C. F. Gauß*, Theoria motus art. 82, 83.

114) *W. Fabritius*, Über die Berechnung der richtigen Distanzen, Kiew 1877 und Astr. Nachr. 90 (1877), p. 217, 225.

Diesen auf *L. Euler* zurückgehenden Weg hat *Gauß* bei seinen ersten Bahnbestimmungen der Ceres und Pallas wirklich eingeschlagen. Wird aber in (66) r_0^2 aus r^2, r'^2, r''^2 interpoliert:

$$4r_0^2 = \left(1 - \frac{f}{f'''}\right) r^2 + \frac{f'^2}{ff'''} r'^2 + \left(1 - \frac{f''}{f}\right) r''^2, \tag{67}$$

so resultiert der von *F. R. Moulton*[115]) zugrunde gelegte Näherungsausdruck.

14. Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen. Die vorigen Verfahren der Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen müssen, um als wirkliche Bahnbestimmungsmethoden bezeichnet werden zu können, durch ein weiteres Approximationsverfahren ergänzt werden, das die geozentrischen Distanzen und damit die Elemente mit beliebiger Genauigkeit zu finden gestattet. Die Auffindung eines solchen Verfahrens von praktisch leichter Durchführbarkeit ist, zumindest was nicht parabolische Bahnen angeht, ein ganz wesentlicher Fortschritt, den *Gauß* seinen Vorgängern gegenüber erzielt hat. Der Kern desselben mag gleich unter spezieller Bezugnahme auf die *Gauß*schen Näherungsausdrücke (41) der Dreiecksverhältnisse, die hier kurz durch (n) und (n'') bezeichnet werden sollen, angegeben werden. Will man $\nu + 1^{\text{te}}$ Näherungswerte der Distanzen ermitteln, so genügt es, für n, n'' in das System (29) einzuführen:

$$n = (n) + R, \qquad n'' = (n'') + R'', \tag{68}$$

unter R, R'' die auf $(n), (n'')$ in den Reihenentwicklungen (34) folgenden Glieder bis mindestens $\varepsilon^{\nu+2}$ inklusive verstanden. Hat nun eine vorhergehende Näherung für die heliozentrischen Distanzen ν^{te} Näherungswerte r_*, r_*', r_*'' ergeben, so wird man in n, n'' bzw. $n + n''$ Fehler der erlaubten Ordnungen $\varepsilon^{\nu+2}$ bzw. $\varepsilon^{\nu+3}$ begehen, wenn man in R, R'' eben diese Werte für die heliozentrischen Distanzen einsetzt, und also auch statt (68) in dem System (29) einführen können:

$$n = (n) + R_*, \qquad n'' = (n'') + R_*''. \tag{69}$$

Hier sind nun R_*, R_*'' numerisch bekannte kleine Größen, daher die Ermittlung $\nu + 1^{\text{ter}}$ Näherungswerte aus ν^{ten} durch formal genau ebendieselben Gleichungen geschieht, wie unter (Nr. 11 a) diejenige erster.

Dies wäre im Grunde noch das von *Lagrange* vorgeschlagene Verfahren.

Der Schwerpunkt des *Gauß*schen Verfahrens ruht aber nun weiter in seiner von den umständlichen Reihenentwicklungen der n, n''

115) *F. R. Moulton*, Astr. Journ. 22 (1902), p. 43.

unabhängigen Methode der Berechnung dieser numerischen Korrektionen R_*, R_*''. Sie sind die Überschüsse der mit den Werten r_*, r_*', r_*'' bis mindestens $\varepsilon^{\nu+2}$ inklusive genau gebildeten n, n'' über die mit den gleichen Werten berechneten Näherungsausdrücke (n), (n''):

$$R_* = n_* - (n)_*, \qquad R_*'' = n_*'' - (n'')_*. \tag{70}$$

Berechnet man aber nach Nr. **13**) aus r_*, r_*', r_*'' und den zugleich mit diesen bei der vorhergehenden Näherung bekannt gewordenen $\nu + 1^{\text{ten}}$ Näherungswerten f_*, f_*', f_*'' der Zwischenwinkel die Verhältnisse η_*, η_*', η_*'' der drei Sektorflächen zu den zugehörigen Dreiecksflächen, so kann man in (70) nehmen:

$$n_* = \frac{\theta}{\theta'}\frac{\eta_*'}{\eta_*}, \qquad n_*'' = \frac{\theta''}{\theta'}\frac{\eta_*'}{\eta_*''}. \tag{71}$$

Denn der hiebei begangene Fehler rührt allein von der Ersetzung der zu r_*, r_*', r_*'' exakt gehörenden Werte der Zwischenwinkel durch die Werte f_*, f_*', f_*'' her, welche voneinander um Größen der Ordnung $\varepsilon^{\nu+1}$ verschieden sind, da beide von den wirklichen Werten derselben bloß um solche abweichen, und dies ergibt in den η_*, η_*', η_*'' Fehler der Ordnung $\varepsilon^{\nu+4}$, so daß n_*, n_*'' sogar um eine Einheit genauer folgen als fürs erste nötig ist[116]). Die so der $\nu + 1^{\text{ten}}$ Näherung zugrunde zu legenden Ausdrücke (69) lassen sich noch leicht, ohne die erforderliche Genauigkeit zu unterschreiten, in die von *Gauß* verwandte Form bringen:

$$n = \frac{1}{1+P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right), \qquad n'' = \frac{P}{1+P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right), \tag{72}$$

$$P = \frac{n_*''}{n_*} = \frac{\theta''\eta_*}{\theta\eta_*''},$$
$$Q = 2r_*'^3(n_* + n_*'' - 1) = r_*'^2\frac{\theta\theta''}{\eta_*\eta_*''r_*r_*''\cos f_*\cos f_*'\cos f_*''}, \tag{73}$$

welche überdies den Vorteil besitzt, die Berechnung bloß von η_*, η_*'' zu erfordern.

Dies Verfahren wird erst in der „Theoria motus" auseinandergesetzt, während bei den ersten Bahnbestimmungen der Ceres und Pallas *Gauß* sich entweder der Methode der Variation der geozentrischen Distanzen (Nr. **26**) bediente oder auch nach Hinzufügung der Differenz Beob.-Rechn. zum beobachteten mittleren Orte zu einer neuen Bahnrechnung schritt.

---

116) Ein Verfahren aber, welches bei den folgenden Näherungen direkt die numerischen Werte n_*, n_*'' in die Grundgleichungen einführt, worauf im wesentlichen *W. Fabritius* Berechnung der richtigen Distanzen, Kiew 1877 und Astr. Nachr. 90 (1877), p. 127 hinauskommt, entbehrt hienach der theoretischen Grundlage seiner Konvergenz.

Aus der Tatsache, daß die auf obigem Wege ermittelten n_*, n_*'', bis $\varepsilon^{\nu+3}$ inklusive genau sind, erhellt die Möglichkeit, bei Ersetzung der Näherungsausdrücke (n), (n'') durch genauere bei jedem Schritt immer gleich um zwei Einheiten in der Genauigkeit zu steigen. Bei gleichen Zwischenzeiten ist dies bei der geschilderten *Gauß*schen Methode von selbst der Fall, bei beliebigen Zwischenzeiten aber, wenn man mit *v. Oppolzer* obiges Approximationsverfahren an seine Methode anschließt. Aus der gleichen Tatsache erhellt aber auch die Unmöglichkeit, auf dem gleichen Wege etwa bei Verwendung der *Gibbs*schen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse um mehr als zwei Einheiten in der Genauigkeit bei jedem Schritt zu steigen.

Übrigens geht *Gibbs* auch hier einen anderen Weg. Da er die Elemente aus allen drei heliozentrischen Orten ohne Heranziehung der Zwischenzeiten bestimmt, so ist die Bedingung, der die strengen Werte der Distanzen genügen müssen, diese, daß die umgekehrt aus den Elementen und heliozentrischen Orten berechneten Zwischenzeiten $\bar{\theta}$, $\bar{\theta}''$ den gegebenen θ, θ'' gleich sind. Dies mit beliebiger Genauigkeit zu erreichen, ersetzt er in den Ausdrücken (44) der n, n'' die θ, θ'' durch so zu bestimmende unbekannte Größen τ, τ'', daß $\bar{\theta}$, $\bar{\theta}''$, die jetzt bestimmte Funktionen von τ, τ'' sind, gerade gleich θ, θ'' werden. Da nun allgemein sehr nahe $\bar{\theta} = \tau$, $\bar{\theta}'' = \tau''$ ist, so werden die τ, τ'' einfach durch sukzessive Iteration erhalten, indem man immer beim folgenden Schritt τ, τ'' ersetzt durch $\tau + \theta - \bar{\theta}$, $\tau'' + \theta'' - \bar{\theta}''$ und beim ersten natürlich wie vorhin $\tau = \theta$, $\tau = \theta''$ nimmt.

15. Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen. Fällt die Bahnebene des Planeten mit der Ekliptik zusammen, so sind alle geozentrischen Breiten Null, und da aus dem Verschwinden zweier Breiten bereits das jeder anderen folgt, so liefern hier drei Beobachtungen bloß fünf unabhängige Daten und lassen also die Bahn unbestimmt. Daher werden bei sehr geringer Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik die Elemente durch drei Beobachtungen sehr unsicher bestimmt sein. Diesen Übelstand zu beseitigen ersetzt man nach *Gauß*[117]) die Angabe der einen geozentrischen Breite durch jene der geozentrischen Länge einer vierten Beobachtung, oder man zieht allgemeiner gesprochen (*Oppolzer*)[118]) die acht Daten von vier Beobachtungen (der Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4) dadurch in sechs unabhängige zusammen, daß man die Angabe zweier der scheinbaren Orte (t_2, t_3) ersetzt durch die zweier, je einen der beiden Orte enthaltender größter Kreise K_2, K_3

117) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 164 ff.
118) *Th. v. Oppolzer*, Bahnb. 1, p. 413.

und stellt so die neue Aufgabe: jene Bahn zu finden, welche zwei Gerade und zwei Ebenen zu gegebenen Zeiten t_1, t_4 und t_2, t_3 schneidet. Die Grundgleichungen der auf den Prinzipien von Nr. 8 beruhenden Methode ihrer Bestimmung sind die aus der Anwendung der Relation (29) auf die Orte t_1, t_i, t_4 mit K_i $(i = 2, 3)$ als Bezugkreis und der Relation (48) auf eben diese Orte folgenden Beziehungen[119]):

$$(74\text{a,b}) \quad \frac{\Delta_{4i}}{\Delta_{14}}(\varrho_1 \sin p_{1i} - R_1 \sin P_{1i}) + \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_{14}}(\varrho_4 \sin p_{4i} - R_4 \sin P_{4i}) + R_i \sin P_{ii} = 0, \quad (i = 2, 3),$$

$$(75\text{a,b}) \quad r_1 \frac{\Delta_{4i}}{\Delta_{14}} : r_i : r_4 \frac{\Delta_{1i}}{\Delta_{14}} = \sin 2f_{4i} : \sin 2f_{14} : \sin 2f_{1i}, \quad (i = 2, 3),$$

nebst einer zu (49) analogen Gleichung (75c), welche den heliozentrischen Zwischenwinkel f_{14} trigonometrisch durch ϱ_1, ϱ_4 ausdrückt.

Sie reichen in der Tat, den Zusammenhang zwischen r_h und ϱ_h bemerkt, gerade aus die Distanzen r_h samt den Zwischenwinkeln f_{hk} zu ermitteln, falls noch die Dreiecksverhältnisse wie früher durch ihre Ausdrücke in den r_h ersetzt werden. Hiezu hat man aber einerseits festzustellen, daß abweichend gegen früher bei Verwendung ν^{ter} Näherungswerte der Dreiecksverhältnisse bloß $\nu - 3^{\text{te}}$ Näherungswerte der Distanzen folgen, und andererseits zu beachten, daß bloß jene Näherungsausdrücke, die r_1, r_4 allein enthalten, praktikabel sind, weil bei diesen dann (74a, b) bloß die beiden Unbekannten r_1, r_4 enthalten, und sich so die numerische Rechenarbeit auf die durch Versuche zu erfolgende Auflösung dieser zwei Gleichungen reduziert, während die übrigen Unbekannten sich nachher aus (75a, b, c) direkt bestimmen. Obwohl hienach vierte Näherungswerte der Dreiecksverhältnisse die niedrigst zulässigen wären, so langt *Gauß*[117]) doch, wenigstens bei mäßiger Exzentrizität und nahe gleichen Zwischenzeiten, mit seinen Ausdrücken aus, weil die Glieder dritter Ordnung in ihnen für Kreisbahnen allgemein, für gleiche Zwischenzeiten aber vermöge seiner Vorschrift, die äußeren Orte als unvollständig zu wählen $(t_3 < t_4 < t_1 < t_2)$, verschwinden. Die gleiche Methode gibt auch *J. C. Watson*[120]).

Th. v. Oppolzer[118]) wählt zur Erhöhung der Genauigkeit der Bestimmung der Bahnlage die beiden inneren Orte als unvollständig $(t_1 < t_2 < t_3 < t_4)$ und hat in den von ihm aufgestellten Ausdrücken (43) nun unmittelbar bloß r_1, r_4 enthaltende vierte Näherungswerte der Dreiecksverhältnisse, denen er übrigens noch die mit der Exzentrizität nicht

119) Unter Δ_{hk}, $2f_{hk}$ ist das Dreieck und der Winkel zwischen r_h, r_k, unter p_{ki}, P_{ki} der sphärische Abstand des Planeten und der Sonne zur Zeit t_k von K_i verstanden.

120) *J. C. Watson*, Theor. astr., p. 282.

verschwindenden Glieder vierter Ordnung hinzufügt, die ebenfalls durch r_1, r_4 allein ausdrückbar sind. Die Ermittlung beliebig genauer Werte der Distanzen erfolgt jedesmal genau so wie in Nr. **14**, indem man immer mit den zuletzt gefundenen Näherungswerten der r_h, f_{hk} die η-Größen und aus diesen die numerischen Korrektionen der angewandten Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse bestimmt, durch deren Verwendung dann die nächsten Näherungswerte der Distanzen folgen. Die Elemente ergeben sich dann nach Nr. **13** aus zweien, am besten den beiden äußeren, der durch die Distanzen bekannt gewordenen heliozentrischen Orte.

Die *Gibbs*schen Ausdrücke der Dreiecksflächen zieht *W. Fabritius*[121]) heran.

Unter numerischer Diskussion der einzelnen Glieder der Reihenentwicklungen der Dreiecksflächen sucht *E. Coddington*[122]) ein vereinfachtes Verfahren aufzustellen, bei dem insbesondere die Korrektion der Dreiecksflächen statt durch Berechnung der η-Größen einfach durch Berechnung weiterer Glieder ihrer Reihenentwicklung erfolgt. Zur Ermittlung beiläufiger Näherungswerte der Distanzen gibt *A. Berberich*[123]) ein abgekürztes Verfahren. Verschiedene zweckdienliche Winke auch bei *Klinkerfues-Buchholz*[124]).

16. Bestimmung einer Kreisbahn. Im Falle die zu bestimmende Bahn von vornherein als kreisförmig vorausgesetzt wird, wie dies zur Erlangung einer allerersten Orientierung über die Bahnlage eines neuentdeckten kleinen Planeten bisweilen geschieht, sinkt die Zahl der zu ermittelnden Elemente auf vier, indem mit der Exzentrizität auch die Perihellänge in Wegfall kommt, und es reichen also zu ihrer Bestimmung die vier Daten von zwei vollständigen Beobachtungen gerade aus. Da diese jetzt wieder zwei Gerade liefern, auf denen der Planet sich zu den Beobachtungszeiten befinden muß, und seine gleichzeitigen heliozentrischen Entfernungen immer gleich dem Radius der Bahn sind: $r = r'' = a$, erscheint die Lage der beiden Orte im Raum von der einzigen Unbekannten a abhängig, zu deren Bestimmung man nun die Bedingung heranzuziehen hat, daß der von den Radienvektoren der beiden Orte eingeschlossene Winkel $2f''$ den vom zweiten *Kepler*schen Gesetz geforderten Wert $\frac{\theta'}{a^{3/2}}$ hat. Dies liefert

121) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 128 (1891), p. 321.
122) *E. Coddington*, Dissertation, Berlin 1902.
123) *A. Berberich*, Veröffentl. d. kgl. Recheninst. Nr. 20 (1902), p. 81.
124) *W. Klinkerfues-H. Buchholz*, Theor. Astr., p. 460.

nach Nr. 11 Gl. (49) die Gleichung:

$$\sin^2 \frac{\theta'}{2a^{3/2}} = \sin^2 \frac{\alpha - \alpha''}{2} \cos^2 \frac{J}{2} + \sin^2 \frac{\alpha + \alpha''}{2} \sin^2 \frac{J}{2},$$

$$\alpha = \varphi + \psi + z, \qquad \alpha'' = \varphi'' + \psi'' + z'', \tag{76}$$

$$\sin z = \frac{R}{a} \sin \psi, \qquad \sin z'' = \frac{R''}{a} \sin \psi'',$$

welche durch Versuche nach a aufzulösen ist, worauf die übrigen Elemente Ω, i, ε aus den jetzt bekannt gewordenen beiden heliozentrischen Orten folgen[125]). Die Frage, wann den beiden Beobachtungen durch eine Kreisbahn nicht genügt werden kann, also (76) keine reelle Lösung zuläßt, behandelte unter der Voraussetzung, daß die Beobachtungen nahe der Ekliptik gelegen und der Opposition zeitlich benachbart sind, *F. Tisserand*[126]) und zeigte, daß dies dann eintritt, wenn die Bewegung in Breite eine gewisse Grenze übersteigt. Seine Darlegung vereinfachte *H. Bourget*[127]).

Die Aufgabe, aus drei Beobachtungen eines in der Ekliptik sich bewegenden Planeten eine Kreisbahn und gleichzeitig die Konstante k zu bestimmen, behandelt *G. W. Hill*[128]).

b) Kometenbahnen.

17. Formulierung der Aufgabe. Grundgleichungen. Im Falle die zu bestimmende Bahn von vornherein als Parabel vorausgesetzt wird, wie dies bei einer ersten Kometenbahnbestimmung ausnahmslos geschieht, erscheinen die noch übrigen fünf Elemente durch die sechs Daten dreier Beobachtungen überbestimmt, und man zieht deshalb die beiden Angaben der mittleren Beobachtung dadurch in eine einzige zusammen, daß man einen noch beliebig zu fixierenden größten Kreis K durch den mittleren Kometenort auf der scheinbaren Himmelskugel legt, und dann allein die Bedingung benutzt, daß der mittlere Ort auf K liegen soll — mit anderen Worten, man ersetzt in der Formulierung von Nr. 7 der allgemeinen Bahnbestimmungsaufgabe die Gerade $E'H'$ durch eine sie enthaltende Ebene. Dies hat zur Folge, daß man von den drei in (29) enthaltenen Grundgleichungen bloß die eine bei Wahl von K als Bezugskreis resultierende bilden kann; also mit den Bezeichnungen von Gl. (29) und Berücksichtigung

125) *Klinkerfues-Buchholz*, Theor. Astr., p. 237 (nach mündl. Mitt. v. *Gauß*).
126) *F. Tisserand*, Paris C. R. 119 (1894), p. 881. Paris Bull. astr. 12 (1895), p. 53.
127) *H. Bourget*, Paris Bull. astr. 23 (1906), p. 81.
128) *G. W. Hill*, Proc. of the Amer. Acad. 3 (1870), p. 201 = Works 1, p. 77; The Analyst. 1 (1874), p. 43 = Works 1, p. 170.

daß $p' = 0$ ist:

$$\varrho'' = M\varrho + m, \tag{77}$$

$$M = -\frac{n \sin p}{n'' \sin p''},$$

$$m = \frac{1}{n'' \sin p''}(nR \sin P + n''R'' \sin P'' - R' \sin P'). \tag{78}$$

Diese erste Grundgleichung enthält nun bloß ϱ, ϱ'' oder die mit diesen in einfacher geometrischer Beziehung stehenden r, r'' als Unbekannte. Denn hier bei der Parabel sind, wie eine Konstantenzählung lehrt, oder aus Nr. 9 wegen $\frac{1}{a} = 0$ hervorgeht, n, n'' durch r, r'', θ, θ'' allein, ohne Heranziehung von r' ausdrückbar.

In endlicher Form sind hier die Dreiecksverhältnisse in ihrer Abhängigkeit von den beiden äußeren Radien und den Zwischenzeiten durch die von *F. W. Bessel*[129]) hergeleiteten beiden kubischen Gleichungen gegeben:

$$4x^3 - 3(r + r'')x + \theta + \theta'' = 0$$

$$y^3 - \tfrac{3}{4}\frac{r'' - r}{x}y^2 + \tfrac{3}{2}(r + r'' - 2x^2)y + \tfrac{3}{4}(r'' - r)x - \tfrac{1}{2}(\theta'' - \theta) = 0, \tag{79}$$

$$n = x - y, \quad n'' = x + y.$$

Die zur Bestimmung von r, r'' nötige zweite Grundgleichung bildet dann der *Euler*sche Satz:

$$6\theta' = (r + r'' + s)^{3/2} - (r + r'' - s)^{3/2}, \tag{80}$$

da die Sehne $s = HH''$ ebenfalls mit r, r'' in einfacher trigonometrischer Beziehung steht.

Diese beiden Gleichungen müssen nun wieder dadurch erst traktabel gemacht werden, daß man in der ersten für n, n'' passende Näherungsausdrücke verwendet, wobei man überdies aus der noch willkürlichen Lage von K wird Nutzen zu ziehen haben. In dieser Richtung hin ist es wesentlich festzustellen, daß, wie zuerst *Th. Clausen*[130]) klargelegt hat, es hier, um r, r'' bis Größen der Ordnung ε^ν exklusive genau zu erhalten, genügt für M, m bis Größen der Ordnung $\varepsilon^{\nu+1}$ exklusive genaue Werte einzuführen. Solche zu erhalten, genügt es bei allgemeiner Lage von K für n, n'' bis $\varepsilon^{\nu+1}$ exklusive genaue Werte zu verwenden, wofern diese nur $n + n''$ bis $\varepsilon^{\nu+2}$ exklusive genau geben; bei der *Olbers*schen Wahl von K aber genügt hiezu, daß n/n'' bis $\varepsilon^{\nu+1}$ exklusive genau ist.

---

129) *F. W. Bessel* in der Zeitschrift: „Astronomische Abhandlungen", hrsg. v. *Schumacher*, Heft 2, Altona 1823. Abgedruckt in *Bessel*, Abh. 1, p. 13.

130) *Th. Clausen*, St. Pétersb. bull. (phys.) 10 (1852), p. 175; vgl. auch *J. F. Encke*, Berlin astr. Jahrb. für 1856, p. 362.

18. Ermittlung von Näherungswerten der Distanzen nach der Methode von W. Olbers[131]. Diese liefert im allgemeinen erste, bei gleichen Zwischenzeiten, $\theta = \theta''$, aber zweite Näherungswerte der Distanzen.

Bei ihr wird zunächst der größte Kreis K durch den mittleren Sonnenort gelegt, wonach p, p'', P, P'' im allgemeinen Größen der Ordnung ε sind und $P' = 0$ wird, so daß nach (30) aus (78):

$$(81).\quad M = -\frac{n \sin p}{n'' \sin p''},\quad m = \frac{n}{n''}\frac{\sin P}{\sin p''}R + \frac{\sin P''}{\sin p''}R'' = \left(\frac{n}{n''} - \frac{N}{N''}\right)\frac{\sin P}{\sin p''}R$$

folgt. Für M, m werden nun niedrigst zulässige, also zweite Näherungsausdrücke verwendet. Solche sind aber, da m durch die besondere Wahl von K von der Ordnung ε^2 bei gleichen Zwischenzeiten von der Ordnung ε^3 geworden ist:

$$(82)\qquad M = -\frac{\theta \sin p}{\theta'' \sin p''},\quad m = 0,$$

welche Ausdrücke im besondern bei gleichen Zwischenzeiten dritte Näherungswerte repräsentieren. Die Bestimmung von r, r'' aus den durch die geometrischen Beziehungen zwischen r, r'' und ϱ, ϱ'', s zu ergänzenden Gleichungen (77) und (80) wird dann von *Gauß*[132]) auf die Ermittlung einer einzigen mit ϱ linear zusammenhängenden Unbekannten u zurückgebracht, durch die sich s und $r + r''$ in der Form darstellen:

$$(83)\quad s = \sqrt{u^2 + A^2},\quad r = \sqrt{\alpha(u+\beta)^2 + \gamma^2},\quad r'' = \sqrt{\alpha''(u+\beta'')^2 + \gamma''^2}$$

und die nun so zu bestimmen ist, daß diese Werte die *Euler*sche Gleichung (80) erfüllen. Dies geschieht durch Anwendung der regula falsi oder eine Art fortgesetzter Iteration. Auch kann die *Encke*sche Behandlung der *Euler*schen Gleichung (vgl. Nr. **19**) hiebei mit Vorteil benutzt werden.

Eine der *Olbers*schen im wesentlichen gleiche Methode hat, worauf *W. Fabritius*[133]) aufmerksam machte, bereits *A. Du Séjour*[134]) vorgeschlagen. Auch *J. Lambert*[135]) kam derselben äußerst nahe und benutzte später[136]) direkt die *Olbers*sche Gleichung (77) mit den Werten (82), was des näheren *R. Vogel*[137]) und *J. Bauschinger*[138]) erörtern.

---

131) *W. Olbers,* Abh. über Kometenbahnen = Werke 1, p. 3.

132) *C. F. Gauß,* Monatl. Corr. 28 (1813), p. 501; Gött. Com. soc. reg. 2 (1813) = Werke 6, p. 25.

133) *W. Fabritius,* Astr. Nachr. 106 (1883), p. 87.

134) *A. P. Dionis du Séjour,* Paris Hist. 1779, Mém. p. 51.

135) *J. Lambert,* Insign. propr. 1761, probl. 31.

136) *J. Lambert,* Berlin Mém. 1771, p. 352.

137) *R. Vogel,* Astr. Nachr. 136 (1894), p. 83.

Läßt man ferner insbesondere die Zwischenzeiten θ, θ'' nach Null konvergieren, so gehen die Grundgleichungen der *Olbers*schen Methode in diejenigen der auf parabolische Bahnen zugeschnittenen *Laplace*schen Methode (vgl. Nr. **12**) über:

$$\varrho \frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{d\varrho}{dt}\frac{dp}{dt} = 0, \qquad V^2 = \frac{2k^2}{r}, \tag{84}$$

in denen V die Geschwindigkeit des Kometen in seiner Bahn, p aber den jeweiligen sphärischen Abstand des scheinbaren geozentrischen Kometenortes von jenem größten Kreise bezeichnet, der zur „Beobachtungszeit" diesen mit dem gleichzeitigen Sonnenort verbindet. Die erste Gleichung kann auch unmittelbar als Ausdruck der Tatsache gefunden werden, daß die Relativbeschleunigung des Kometen gegen die Erde in der Ebene von Sonne—Erde—Komet liegt. Aus beiden Gleichungen folgt, die kinematische Beziehung zwischen $\frac{d\varrho}{dt}$ und V hinzugedacht, eine Gleichung 6ten Grades für ϱ, welches wieder der niedrigste Grad ist, auf den das Kometenproblem reduzierbar ist. Sind indessen die ersten und die zweiten Differentialquotienten der beiden Koordinaten des scheinbaren Ortes vollständig gegeben, so kann durch Hinzunahme der Relation $V^2 = \frac{2k^2}{r}$ zu dem System (50) ϱ im Prinzip rational gefunden werden, worauf neuerdings *L. Picart*[139]) zurückkommt. Das Verhältnis der *Laplace*schen zur *Olbers*schen Methode erörtert *R. Radau*[140]). Die mehrfachen Lösungen des Kometenproblems untersucht *Th. v. Oppolzer*[141]), indem er die Eulersche Relation näherungsweise durch $s^2 = \frac{2\theta'^2}{r''}$ ersetzt und zeigt, daß die dann resultierende Gleichung 6ten Grades für ϱ immer nur eine oder drei reelle positive Wurzeln besitzt. Dieselbe Frage behandelt dann *E. Pasquier*[142]).

19. Bestimmung der Elemente aus den Distanzen. Die die Bahnlage fixierenden Elemente i, Ω ergeben sich wie bei Planetenbahnen sofort trigonometrisch aus den durch ϱ, ϱ'' bekannt gewordenen heliozentrischen Orten. Den Weg zur Bestimmung der übrigen Elemente eröffnet die Ermittlung der Gestalt der Parabel, also des Parameters p, welche hier abweichend von Nr. **13**[143]) durch die beiden

138) *J. Bauschinger,* Veröffentl. d. Kgl. Recheninstitutes Nr. 20, (1902), p. 1.

139) *L. Picart,* Paris. Bull. astr. 16 (1899), p. 412; Paris C. R. 129 (1899), p. 17.

140) *R. Radau,* Paris. Bull. astr. 4 (1887, p. 409; Paris C. R. 105 (1887), p. 457.

141) *Th. v. Oppolzer,* Wien Ber. 86 (1882), p. 885; *Oppolzer,* Bahnb. 1, p. 308.

142) *E. Pasquier,* Belg. Bull. (3) 32 (1896), p. 111.

143) Die dortigen Formeln auf die Parabel anzuwenden, hat man bloß zu bemerken, daß für diese stets $x = 0$ ist.

Radien r, r'' und die Zwischenzeit θ' allein bestimmt erscheint, da der dort unter Zuhilfenahme der Beobachtungen abgeleitete Zwischenwinkel $2f'$ hier vermöge der Sehne s gefunden werden kann, welche selbst wieder aus (80) zu berechnen ist. Letzteres geschieht nach *J. F. Encke*[144]) praktisch durch:

$$(85)\qquad s = (r + r'') \sin\gamma, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{3}, \quad \sin\vartheta = \frac{3\theta'}{\sqrt{2}(r + r'')^{3/2}}$$

oder durch Benutzung der ebenfalls von *J. F. Encke*[153]) entworfenen μ-Tafel, welche mit dem Argument $\frac{2\theta'}{(r + r'')^{3/2}}$ den Wert von

$$(86)\qquad \mu = \frac{3\cos\frac{\gamma}{2}}{2 + \cos\gamma}$$ gibt, mit welchem $$s = \frac{2\theta'}{\sqrt{r + r''}}\mu$$

folgt.

Da sich weiter das Verhältnis von Sektor zu Dreieck in der Form darstellt:

$$(87)\qquad \eta' = \frac{2 + \cos\gamma}{3\cos\gamma} = \frac{1}{\sqrt{9 - 8\mu^2}},$$

so ist hienach auch der Parameter:

$$(88)\qquad \sqrt{p} = \frac{\eta' r r'' \sin 2f'}{\theta'} = \sqrt[4]{r r''}\,\frac{\sin f'}{\sin\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\cos\gamma}{2\cos f'}}$$

gegeben. Nach dessen Bestimmung aber folgen Perihellänge ϖ und Perihelzeit t_0 ohne weiteres aus den Gleichungen der parabolischen Bewegung.

20. Ermittelung beliebig genauer Werte der Distanzen. Auch für das weitere auf den Prinzipien von Nr. **14** beruhende Approximationsverfahren zur Auffindung beliebig genauer Werte der Distanzen gestalten sich bei der *Olbers*schen Wahl von K die Verhältnisse besonders günstig. Um $\nu + 1^{\text{te}}$ Näherungswerte der Distanzen zu erhalten, genügt es, für $\frac{n}{n''}$ einen $\nu + 2^{\text{ten}}$ Näherungswert in M und m einzuführen. Hat nun eine vorhergehende Näherung ν^{te} Näherungswerte r_*, r_*'' der Distanzen ergeben, so wird man einen Fehler der erlaubten Ordnung $\varepsilon^{\nu+2}$ (bei gleichen Zwischenzeiten der Ordnung $\varepsilon^{\nu+3}$) begehen, wenn man ebendiese in den Ausdruck von $\frac{n}{n''}$ durch r, r'', θ, θ''

144) *J. F. Encke,* Berl. astr. Jahrb. für 1833, p. 264. Eben diese Umformung bei *A. P. Dionis du Séjour* Paris Hist. 1779, Mém. p. 51; ferner in *Gauß* Nachlaß Werke 7, p. 327, früher von *Klinkerfues* mitgeteilt Gött. Abh. 10, p. 196 unter Beifügung einer Tafel für μ und η'. Eine ebensolche bei *B. Nicolai,* Astr. Nachr. 10 (1833), p. 233 und *J. Bauschinger*, Tafeln, Nr. 22 und 24.

einsetzt, und man wird also für M und m die numerischen Werte:

$$(89) \qquad M_* = -\frac{n_*}{n_*''}\frac{\sin p}{\sin p''}, \quad m_* = \frac{n_*}{n_*''}\frac{\sin P}{\sin p''}R + \frac{\sin P''}{\sin p''}R''$$

verwenden können. Einen Fehler ebenderselben Ordnung begehend, kann man aber weiter m_* auch durch $\frac{\varrho}{\varrho_*}m_*$ ersetzen, was darauf hinauskommt, die Grundgleichungen mit den Werten:

$$(90) \qquad M = M_* + \frac{m_*}{\varrho_*}, \qquad m = 0,$$

anzusetzen, so daß die Ermittelung $\nu + 1^{\text{ter}}$ Näherungswerte aus ν^{ten} wieder durch formal genau ebendieselben Gleichungen geschieht wie unter Nr. **18** die erster. Gleichzeitig erhellt aus den angegebenen Fehlerordnungen, daß bei gleichen Zwischenzeiten dies Verfahren bei jedem Schritt stets um zwei Einheiten genauere Werte der Distanzen liefert.

Die Berechnung von $\frac{n_*}{n_*''}$ aus r_*, r_*'', θ, θ'' kann hier streng entweder durch die *Bessel*schen Gleichungen (79) geschehen, oder dadurch, daß man auf Nr. **19** basierend noch r_*' und damit η_*, η_*'' ermittelt. Mit einer wenigstens für die ersten Schritte, die aber in der Praxis stets ausreichen, genügenden Genauigkeit kann man sich nach *E. Weiß*[145]) und *W. Fabritius*[146]) hiezu auch mit Vorteil des *Gibbs*schen Ausdruckes bedienen:

$$(91) \qquad \frac{n_*}{n_*''} = \frac{\theta}{\theta''}\frac{1 + \frac{\theta'\theta'' - \theta^2}{12 r_*^3}}{1 + \frac{\theta\theta' - \theta''^2}{12 r_*''^3}},$$

welcher im allgemeinen bis zu dritten Näherungswerten der Distanzen in drei Schritten, bei gleichen Zwischenzeiten aber bis zu vierten Näherungswerten in zwei Schritten führt. Endlich kann auch bei den weiteren Näherungen die Auflösung der mit dem verbesserten M gebildeten Grundgleichungen dadurch umgangen werden, daß man die Änderung von M als differentiell betrachtet und den Differentialquotienten $\frac{d\varrho}{dM}$ aus (77), (80) bildet. Den Ausdruck für $\frac{d^2\varrho}{dM^2}$ leitet *A. O. Leuschner*[147]) ab und gibt gleichzeitig Formeln für die differentiellen Änderungen der Elemente bei Variation von ϱ, ϱ''. Ein von obigem verschiedenes sukzessives Näherungsverfahren hat *Carlini* in Vorschlag gebracht. Man kann nämlich auch die strengen

145) *E. Weiß*, Wien Ber. 100 (1891), p. 1132.
146) *W. Fabritius*, Astr. Nachr. 128 (1891), p. 225.
147) *A. O. Leuschner*, Berlin. Dissertation 1897.

Werte der Distanzen mit der Annahme (82) bestimmt denken, wofern man bloß den Bezugskreis K nicht mehr durch den mittleren Kometenort gehen läßt, sondern unter Festhaltung seines Knotens seine Neigung τ abändert. Und zwar wird dieses τ so zu bestimmen sein, daß wenn man mit den aus ϱ, ϱ'' folgenden Elementen, den Ort für die Zeit der mittleren Beobachtung berechnet, die Neigung $\bar{\vartheta}$ des durch ihn und den mittleren Sonnenort gelegten Kreises der beobachteten ϑ gleich ist: $\bar{\vartheta} = \vartheta$. Da nun wieder allgemein bis auf Größen höherer Ordnung $\bar{\vartheta} = \tau$ ist, so findet man τ durch sukzessive Iteration, indem man immer beim folgenden Schritt τ ersetzt durch $\tau + \vartheta - \bar{\vartheta}$ und beim ersten natürlich wie vorhin $\tau = \vartheta$ setzt.

21. Ausnahmefälle. Methode von Gauß. Die Konvergenz der *Olbers*schen Methode erscheint in dem Falle zunächst wenigstens fraglich, in welchem p, p'' von höherer als erster Ordnung in ε sind, also die drei scheinbaren Kometenorte und der mittlere scheinbare Sonnenort sehr nahe auf einem größten Kreise liegen. Einerseits wird dann nämlich m von niedrigerer als zweiter Ordnung in ε, also nicht zu vernachlässigen sein, andererseits erscheint auch M numerisch recht unsicher bestimmt. Nun läßt sich durch andere Wahl von K, etwa normal zu dem die beiden äußeren Kometenorte verbindenden größten Kreise, oder nach *E. Weiß*[148]) so, daß sein Knoten in der Ekliptik um 90^0 von der Mitte zwischen den beiden äußeren Sonnenorten absteht, sofort erreichen, daß p, p'' von erster Ordnung, also M numerisch sicher bestimmbar ist. Dagegen bleibt m auch dann noch, wie (30) lehrt, von erster Ordnung, wird aber doch durch den in seinen Gliedern niederster Ordnung auftretenden Faktor $\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3}$ in den meisten Fällen erheblich verkleinert, da die Kometen zumeist in Erdnähe entdeckt werden. *Th. v. Oppolzer*[149]) behält in solchen Fällen m bei und ersetzt n, n'' durch die beiden ersten bloß von $r + r''$ abhängigen Glieder seiner Näherungsausdrücke (43), wonach seine Grundgleichungen freilich nicht mehr auf die einfache *Olbers-Gauß*sche Form reduzierbar sind. Sie liefern wie diese im allgemeinen erste, bei gleichen Zwischenzeiten aber zweite Näherungswerte der Distanzen.

Indessen findet sich im Nachlasse von *C. F. Gauß*[150]) eine Methode ausgearbeitet, der die gleiche Genauigkeit wie der *Olbers*schen

148) *E. Weiß*, Wien. Ber. 92 (1885), p. 1456, wo auch ein weiterer Kunstgriff zur genaueren Berechnung von M angegeben wird.

149) *Th. v. Oppolzer*, Wien. Ber. 57 (1868), p. 219; 60 (1870), p. 918; 64 (1871). p. 676.

150) *C. F. Gauß*, Werke 7, p. 332—350.

zukommt, aber bei beliebiger Wahl von K und einem ebenso einfachen Rechenschema. *Gauß* setzt in der Grundgleichung:

$$\frac{n}{n''} = \frac{\theta}{\theta''}, \qquad n + n'' = \frac{1}{1 - \frac{4\theta\theta''}{(r+r'')^3}}, \tag{92}$$

was im allgemeinen n, n'' bis ε^2 und $n + n''$ bis ε^3 exklusive genau wiedergibt, bei gleichen Zwischenzeiten $\theta = \theta'$ aber bis ε^3 bzw. ε^4 exklusive, und erhält damit aus (29) statt der *Olbers*schen Relation $\varrho'' = M\varrho$:

$$M\varrho + M''\varrho'' + \mu = \frac{1}{(r+r'')^3} \tag{93}$$

und hiemit bei Einführung einer Hilfsgröße u analog zu (83):

$$s^2 = u^2 + A^2 + \left(\frac{B}{(r+r'')^3} + C\right)^2, \tag{94}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \alpha\left(u + \beta + \frac{\delta}{(r+r'')^3}\right)^2 + \gamma^2, \\ r''^2 &= \alpha''\left(u + \beta'' + \frac{\delta''}{(r+r'')^3}\right)^2 + \gamma''^2. \end{aligned} \tag{95}$$

Die *Euler*sche Relation (80) aber ersetzt nun *Gauß* mit großer Annäherung durch:

$$s = \frac{2\theta'}{\sqrt{r+r''}\sqrt[14]{1 - \frac{7\theta'^2}{3(r+r'')^3}}} \tag{96}$$

und geht nun zur Auffindung von r, r'', s, u in der Weise vor, daß zu einem angenommenen Werte von $r + r''$ aus (96) s, damit aus (94) u, und damit aus (95) r, r'' berechnet werden, wobei dann $r + r''$ dem angenommenen Werte gleichkommen muß, was durch Iteration oder Anwendung der regula falsi sehr rasch erreicht wird. Statt (96) werden übrigens noch verschiedene andere Formen benutzt und auch ein besonderes Verfahren[151]) zur Herleitung der Elemente aus r, r'', s gegeben.

22. Korrektionen wegen Parallaxe und Aberration. Da die durch die Beobachtung gelieferten Visionsstrahlen nicht unmittelbar die in Nr. 7 zugrunde gelegten Verbindungsgeraden zwischen Erdmittelpunkt und Himmelskörper darstellen, sondern die noch durch die Aberration verfälschten Verbindungsgeraden zwischen dem Beobachtungsorte und dem Himmelskörper, so müßten noch durch Anbringung der Korrektionen wegen Parallaxe und Aberration jene aus diesen hergeleitet werden. Da nun einerseits die zur Reduk-

151) *C. F. Gauß*, Werke 7, p. 327.

tion des beobachteten Ortes auf den Erdmittelpunkt nötige geozentrische Distanz des Himmelskörpers von vornherein unbekannt ist, und sich andererseits die Rechnungen zur Ermittlung der Bahn etwas vereinfachen, wenn die drei Erdorte mit der Sonne in einer Ebene liegen, so legt man nach *Gauß*[152]) zur Elimination der Parallaxe die Durchschnittspunkte der Visionsstrahlen mit der Ekliptik als fiktive Erdorte (locus fictus) der Bahnbestimmung zugrunde, bringt also eine entsprechende Korrektion an den den Tafeln entnommenen Koordinaten der Erde an. Der Einfluß der Aberration[153]) dagegen muß zunächst unberücksichtigt bleiben, und erst nach Erlangung der ersten Näherungswerte der geozentrischen Distanzen können die diesbezüglich korrigierten Beobachtungsdaten gewonnen werden, welche dann der Ermittlung der nächsten Näherung zugrunde zu legen sind. Hiebei handelt es sich noch darum, diese Korrektion in einer solchen Weise anzubringen, daß möglichst wenige von den schon für die erste Näherung aus den Beobachtungen abgeleiteten Hilfsgrößen geändert werden. Dies wird erreicht, indem man ausgehend von der Bemerkung, daß der von der Fixsternaberration befreite, beobachtete Ort gleich dem vom selben Erdort aus gesehenen, wirklichen Ort zur Zeit $t - \frac{\varrho}{c}$ ist, die von ϱ unabhängige Fixsternaberration gleich von vornherein an den Beobachtungen anbringt, und nach Erlangung der ersten Näherungswerte der Distanzen jede Beobachtungszeit um die zugehörige Lichtzeit verringert, und so mit alleiniger Abänderung der Zwischenzeiten zur nächsten Näherung schreitet.

III. Definitive Bahnbestimmung.

23. Allgemeine Formulierung der Aufgabe. Die für die Konvergenz der Bahnbestimmungsmethoden aus drei Beobachtungen notwendige Voraussetzung kleiner Zwischenzeiten hat zur Folge, daß die den Beobachtungen anhaftenden Fehler solche von erheblich größerem Betrage in den Elementen erzeugen, die sich dann in den mit der Zeit anwachsenden Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Orten zu erkennen geben. Es wird durch diese Elemente also nur eine erste vorläufige Bahn festgelegt und aus weiteren Beobachtungen eine genauere definitive Bahn zu ermitteln sein. Hiebei wird man einerseits sich durch die Kenntnis der genäherten ersten Bahn von der Beschränkung auf zeitlich benachbarte Beobachtungen befreien, andrerseits zur Erreichung möglichster Genauig-

152) *C. F. Gauß,* Theoria motus, art. 117.
153) *C. F. Gauß,* Theoria motus, art. 118.

keit gleich sämtliche bekannten Beobachtungen heranziehen, indem man die definitive Bahnbestimmung als Bahnverbesserungsaufgabe im Anschluß an die Ausgleichungsrechnung so formuliert: eine bekannte vorläufige Bahn so zu korrigieren, daß die Quadratsumme der scheinbaren geozentrischen Abstände der beobachteten Orte von den gleichzeitigen berechneten Orten ein Minimum wird. Die Grundlage ihrer Behandlung bildet die Voraussetzung, daß die an den vorläufigen Elementen oder irgend sechs Bestimmungsstücken der Bahn anzubringenden Korrektionen genügend klein sind, um ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen zu können.

24. Methoden mit gleichmäßiger Berücksichtigung aller Orte. Sind daher in einem beliebigen geozentrischen Koordinatensystem zu irgend einer der Beobachtungszeiten Länge und Breite des aus der vorläufigen bzw. definitiven Bahn berechneten und des beobachteten Ortes: L, B, bzw. $L + \delta L$, $B + \delta B$ und $L + \delta' L$, $B + \delta' B$, und führt man die kleinen sphärischen Abstände der beiden letzten Orte von dem durch den ersten gehenden Längen- und Breitenkreis ein:

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= \cos B\,\delta L, & \delta'\sigma &= \cos B\,\delta' L, \\ \delta\tau &= \delta B, & \delta'\tau &= \delta' B, \end{aligned} \tag{97}$$

so wird zuvörderst sein sollen:

$$\Delta = \Sigma[(\delta\sigma - \delta'\sigma)^2 + (\delta\tau - \delta'\tau)^2] = \text{Minimum}. \tag{98}$$

Hier sind jetzt $\delta'\sigma$, $\delta'\tau$ bekannte numerische Größen, $\delta\sigma$, $\delta\tau$ aber nach Voraussetzung homogene, ganze lineare Verbindungen mit bekannten numerischen Koeffizienten der unbekannten sechs Korrektionen irgend welcher sechs Bestimmungsstücke der Bahn, die sich sonach aus sechs linearen Gleichungen bestimmen. Die Wahl dieser Bestimmungsstücke und die Entwicklung der analytischen Ausdrücke der $\delta\sigma$, $\delta\tau$, also die Bildung der Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach jenen, ist nun Sache der speziellen Methode. Am unmittelbarsten bieten sich hier als Bestimmungsstücke die Elemente selbst dar, welche Wahl der bereits von *C. F. Gauß*[154]) verwandten und seither am meisten benutzten und bearbeiteten Methode der Variation der Elemente zugrunde liegt. (Über die Ausdrücke der $\delta\sigma$, $\delta\tau$ bei dieser vgl. Nr. 25.) *U. J. Leverrier*[155]) brachte die Wahl der dreien der Beobachtungszeiten entsprechenden geozentrischen

154) *C. F. Gauß*, Theoria motus, art. 187 und *C. F. Gauß*, De elementis ellipticis Palladis, Gött. Com. soc. reg. 1 (1811) = Werke 6, p. 3, abgedr. in *Börsch-Simon*, Gauß' Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, Berlin 1887.

155) *U. J. Leverrier*, Paris C. R. 20 (1845), p. 1071. Astr. Nachr. 23 (1846), p. 183.

Orte in Vorschlag, derart, daß die diesen Zeiten zugehörigen $\delta\sigma$, $\delta\tau$ die Unbekannten der Aufgabe werden, was den Vorteil gewährt, bei den Koeffizienten in den Ausdrücken der übrigen $\delta\sigma$, $\delta\tau$ mit wenig Ziffern auszureichen. Seither ist nur *R. Radau*[156]) auf diese Methode kurz zurückgekommen. *Th. v. Oppolzer*[157]) wählte die einer mittleren Epoche zugehörigen rechtwinkligen, heliozentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten des Himmelskörpers als Bestimmungsstücke. Da nämlich von diesen die heliozentrischen Koordinaten zu einem benachbarten Zeitpunkte nahe linear abhängen, so wird, wenn das Beobachtungsmaterial einen mäßigen Zeitraum (etwa eine Opposition) umspannt, bei dieser Wahl der Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Korrektionen eine erhöhte Genauigkeit zukommen. Ergänzungen zu dieser Methode hat *F. Kühnert*[158]) gegeben.

Den gleichen Vorteil zu erreichen hat *F. Tietjen*[159]) die vollständigen, zweien der Beobachtungszeiten zugehörigen geozentrischen Koordinaten als Bestimmungsstücke gewählt, die $\delta\sigma$, $\delta\tau$ aber wegen der Kompliziertheit ihrer Ausdrücke nur für zeitlich benachbarte Beobachtungen entwickelt.

25. Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen. Um für die Methode der Variation der Elemente die Größen $\delta\sigma$, $\delta\tau$ oder gleich vollständiger $\delta\varrho$, $\delta\sigma$, $\delta\tau$ durch die Änderungen der sechs Bahnelemente auszudrücken, hat man nach dem Vorgange von *Th. Clausen*[160]) und *W. Goetze*[161]) die Bemerkung zu benutzen, daß $\delta\varrho$, $\varrho\,\delta\sigma$, $\varrho\,\delta\tau$ die Komponenten der Verrückung δs sind, welche der Planetenort im Raume durch die Variation der Elemente bei festgehaltenem t erfährt, und zwar genommen nach den drei zueinander normalen Richtungen ϱ, σ, τ, gebildet vom Visionsstrahl ϱ und den Tangente nσ bzw. τ, welche in dem scheinbaren, geozentrischen Orte des Himmelskörpers an den durch ihn gehenden Breiten-, bzw. Längenkreis gelegt werden. Die Verrückung δs selbst aber wird, wenn R die Richtung des Radiusvektors des Himmelskörpers, T die Normale seiner Bahnebene und S die zu diesen beiden normale Richtung bedeutet, in einfachster Weise durch ihre nach diesen drei Richtungen genommenen Komponenten δR, δS, δT

156) *R. Radau,* Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 401.
157) *Th. von Oppolzer,* Berlin Ber. 1878, p. 583; *Oppolzer,* Bahnb. 2, p. 428.
158) *F. Kühnert,* Astr. Nachr. 95 (1879), p. 145.
159) *F. Tietjen,* Berlin astr. Jahrb. für 1878.
160) *Th. Clausen,* J. f. Math. 7 (1831), p. 108.
161) *W. C. Goetze,* Astr. Nachr. 28 (1849), p. 97, 113 und 32 (1851), p. 113.

festgelegt:

$$\begin{aligned}
&\delta R = \delta r, && \delta\alpha = \sin\pi\sin i\,\delta\Omega + \cos\pi\,\delta i,\\
(99)\quad &\delta S = r(\delta v + \delta\gamma) = r(\delta u + \cos i\,\delta\Omega), && \delta\beta = \cos\pi\sin i\,\delta\Omega - \sin\pi\,\delta i,\\
&\delta T = r(\sin v\,\delta\alpha - \cos v\,\delta\beta) && \delta\gamma = \cos i\,\delta\Omega + \delta\pi,\\
&\quad = r(\sin u\,\delta i - \cos u\sin i\,\delta\Omega),
\end{aligned}$$

wobei $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ die kleinen Drehungen sind, welche das Dreikant R, S, T bei Variation von i, Ω, π um seine Achsen ausführt, und δr, δv endlich sich aus den Gleichungen von Nr. 3 ergeben zu:

$$\begin{aligned}
\delta r &= \frac{a\,e\sin v}{\sqrt{1-e^2}}(\delta M_0 + t\delta n) - a\cos v\,\delta e - \frac{2r}{3n}\delta n,\\
(100)\qquad & \\
r\delta v &= \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r}(\delta M_0 + t\delta n) + a\sin v\left(1 + \frac{r}{p}\right)\delta e,
\end{aligned}$$

unter M_0 die mittlere Anomalie zur Epoche $t = 0$ verstanden. Bei hyperbolischen Bahnen hat man in diesen Formeln M_0, n, $\sqrt{1-e^2}$, bzw. durch $\frac{1}{i}M_0$, $\frac{1}{i}n$, $i\sqrt{e^2-1}$ zu ersetzen.

Hienach können nun sofort $\delta\varrho$, $\varrho\delta\sigma$, $\varrho\delta\tau$ aus δR, δS, δT vermöge der leicht trigonometrisch zu berechnenden Richtungskosinusse zwischen den Achsen ϱ, σ, τ und R, S, T zusammengesetzt werden, welche Ausdrücke sich dann nach *E. Schönfeld*[162]) durch Einführung der Gaußschen Hilfsgrößen des Achsensystems ϱ, σ, τ (siehe Nr. 3) noch erheblich zusammenziehen lassen. Mit der Herstellung der Differentialquotienten beschäftigen sich noch *M. Kowalski*[163]) und *Th. v. Oppolzer*[164]) Eine Vereinfachung auf anderem Wege zu erreichen bezieht *F. Tietjen*[165]) Länge und Breite, L, B auf ein geozentrisches System, dessen Achsen den Richtungen R, S, T parallel sind, wodurch wegen $\sphericalangle(\sigma, T) = 90^0$ δT aus $\delta\sigma$ herausfällt, während, wie *J. Bauschinger*[166]) anmerkt, sein Koeffizient $\cos(\tau, T)$ in $\delta\tau$ wegen

$$\cos^2(\sigma, T) + \cos^2(\tau, T) = \sin^2(\varrho, T) \tag{101}$$

seinen maximalen Wert $\sin(\varrho, T) = \cos B$ erreicht. Dies gewährt den Vorteil, daß sehr angenäherte Werte der Elementenkorrektionen einfacher so zu erlangen sind, daß man erst $\Sigma(\delta\sigma - \delta'\sigma)^2$, welches jetzt bloß von δM_0, δn, δe, $\delta\gamma$ abhängt, zu einem Minimum macht

162) *E. Schönfeld,* Astr. Nachr. 113 (1886), p. 65.

163) *M. Kowalski,* Rech. astr. de l'obs. de Kasan 1859, p. 91.

164) *Th. v. Oppolzer,* Wien. Ber. d. k. Akad. 49 (1864), p. 271.

165) *F. Tietjen,* Astr. Nachr. 67 (1866), p. 91; *F. Tietjen,* Berlin astr. Jahrb. für 1878. Im wesentlichen das gleiche früher bei *T. H. Safford,* Mem. Am. Akad. 6 (1858), p. 461; vgl. die histor. Angaben bei *R. Radau,* Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 401.

166) *J. Bauschinger,* Berl. Rechen-Inst. Veröff. Nr. 23, 1903.

und dann noch $\delta\alpha$, $\delta\beta$ so bestimmt, daß unter Einführung der gefundenen Werte jener vier Korrektionen $\Sigma(\delta\tau - \delta'\tau)^2$ ein Minimum wird.

R. Radau[167]) erzielt eine Trennung der Unbekannten dadurch, daß er die Komponenten von δs in Richtung der Schnittgeraden der Ebene $\overline{\sigma\tau}$ mit den Ebenen $\overline{ST}$, $\overline{TR}$, $\overline{RS}$ bildet, in denen bzw. δR, δS, δT nicht auftritt, und die dritte in Verbindung mit der ersten oder zweiten statt $\delta\sigma$, $\delta\tau$ der entsprechenden Minimalbedingung unterwirft. Eine ähnliche Vereinfachung sucht *A. Orloff*[168]) zu erzielen, während *V. Cerulli*[169]) hiezu die Bildung der Bedingungsgleichungen für den Zeitpunkt der Opposition oder des Knotendurchgangs des Planeten vorschlägt. Auf die Tietjenschen Formeln ist neuerdings *G. Boccardi*[170]) zurückgekommen. Bei nahe kreisförmigen Bahnen wird der Natur der Sache nach $\delta\pi$ nur unsicher erhalten werden können, weshalb sich in diesem Falle die Einführung von $e\cos\pi$, $e\sin\pi$, oder nach *K. Bohlin*[171]) von $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\begin{Bmatrix}\cos\pi\\ \sin\pi\end{Bmatrix}$ an Stelle von e, π empfiehlt; *P. V. Neugebauer*[172]) ersetzt im gleichen Falle $\delta\pi$ durch $e\delta\gamma$. Bei nahe parabolischen Bahnen, wird durch Einführung der Elemente e, q, t_0 statt e, n, M_0:

$$\delta r = \left[r - q\cos v - \frac{3k(t-t_0)}{2\sqrt{p}}e\sin v\right]\left(\frac{\delta e}{1-e} + \frac{\delta q}{q}\right) + \cos v\,\delta q - \frac{ke\sin v}{\sqrt{p}}\delta t_0,$$

$$r\delta v = \left[q\sin v\left(1+\frac{r}{p}\right) - \frac{3k(t-t_0)}{2r}\sqrt{p}\right]\left(\frac{\delta e}{1-e} + \frac{\delta q}{q}\right) - \sin v\left(1+\frac{r}{p}\right)\delta q - \frac{k\sqrt{p}}{r}\delta t_0, \tag{102}$$

wo nun zwar die Koeffizienten von δe für parabolische Bahnen bestimmte Werte erlangen, aber für nahe parabolische Bahnen numerisch unsicher bestimmt sind, und daher so umgeformt werden müssen, daß sich der Nenner $1 - e$ kürzen läßt. Dies zu erreichen entwickelte bereits *C. W. Goetze*[173]) in ziemlich umständlicher Weise dieselben nach Potenzen von $1 - e$, unter Hinzufügung diesbezüglicher Hilfstafeln. In einfacher Weise gelangten dann *E. Weiß*[174]) und

167) *R. Radau,* Paris Bull. astr. 5 (1888), p. 5; Paris C. R. 105 (1887), p. 432.
168) *A. Orloff,* Paris Bull. astr. 22 (1905), p. 291.
169) *V. Cerulli,* Catania Mem. soc. spett. 34 (1905), p. 175.
170) *G. Boccardi,* Publ. d. Os. di Collurania Nr. 2 (1900), p. 37.
171) *K. Bohlin,* Astr. Nachr. 159 (1902), p. 165.
172) *P. V. Neugebauer,* Astr. Nachr. 157 (1902), p. 21.
173) *C. W. Goetze,* Erg.-Heft d. Astr. Nachr. (1849), p. 159.
174) *E. Weiß,* Wien Ber. 83, (1881), p. 466. Tafel v. *J. v. Hepperger.*

Th. v. Oppolzer[175]) durch Entwicklung nach Potenzen von $\mathrm{tg}^2 \frac{E}{2}$ und *E. Schönfeld*[176]) durch Heranziehung der Gaußschen Methode der Bestimmung der wahren Anomalie in nahe parabolischen Bahnen zum Ziele. — Gewährt die Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Korrektionen der Elemente noch keine genügende Annäherung, so muß das ganze Verbesserungsverfahren ein zweites Mal mit Zugrundelegung der das erste Mal gefundenen verbesserten Bahn wiederholt werden. Die Bildung der neuen $\delta\sigma$, $\delta\tau$ kann hiebei in leicht zu ersehender Weise durch Benützung der zweiten Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den Elementen, welche *L. Schulhof*[177]) entwickelte, durchgeführt werden.

26. Methoden mit Bevorzugung zweier Orte. Weniger streng vom Standpunkte der Ausgleichungsrechnung aus, aber mit geringerer Rechenarbeit verbunden sind jene Verfahren, welche die Zahl der Unbekannten dadurch verringern, daß sie gewisse Bestimmungsstücke der Bahn, als welche insbesondere zwei der beobachteten geozentrischen Orte gewählt werden, als nicht zu verändernd festhalten. Als zu korrigierende Bestimmungsstücke werden dann bei der bereits von *Gauß*[178]) besprochenen und seither vielfach angewandten Methode der Variation der geozentrischen Distanzen ϱ, ϱ'' genommen, deren Korrektionen $\delta\varrho$, $\delta\varrho''$ nun die beiden Unbekannten der Aufgabe sind. Die Bestimmung der numerischen Werte der vier Koeffizienten von $\delta\varrho$, $\delta\varrho''$ in den einer der Beobachtungszeiten zugehörigen Größen $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$ geschieht in der Praxis meist einfach dadurch, daß auf dem Wege über die Elemente, welche aus den passend zu wählenden Wertepaaren η, o und o, η'' von $\delta\varrho$, $\delta\varrho''$ folgen, die entsprechenden Wertepaare für $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$ berechnet werden. Mit den weitläufigen analytischen Ausdrücken derselben haben sich *C. W. Goetze*[179]) und *N. Herz*[180]) beschäftigt. Zu einfacheren genäherten Ausdrücken ist *J. Bauschinger*[181]) gelangt, welcher nach dem Vorgang von *F. Tietjen*[182]) von der Bemerkung ausgeht, daß nach Gl. (28), zwischen den durch

175) *Th. von Oppolzer,* Berlin Ber. 1878, p. 852; Astr. Nachr. 95 (1879), p. 13. Tafeln v. *F. K. Ginzel* in *Oppolzer,* Bahnb. 2, Tafel 16.

176) *E. Schönfeld,* Astr. Nachr. 113 (1886), p. 65.

177) *L. Schulhof,* Paris Bull. astr. 6 (1889), p. 151, 192.

178) *C. F. Gauß,* Theoria motus, art. 188.

179) *C. W. Goetze,* Astr. Nachr. 32 (1851), p. 113 und Erg.-Heft (1849), p. 159.

180) *N. Herz,* Wien Ber. 92 (1885), p. 590.

181) *J. Bauschinger,* Berl. Rechen-Inst. Veröff. Nr. 23 (1903).

182) *F. Tietjen,* Berl. astr. Jahrb. für 1878.

eine Bahnänderung erzeugten Verrückungen δs, $\delta s'$, $\delta s''$ dreier Orte die vektorielle Gleichung besteht:

$$\delta s' = n\delta s + n''\delta s'' + (r\delta n) + (r''\delta n''), \tag{103}$$

wenn die beiden eingeklammerten Größen Verrückungen dieses Betrages in Richtung der beiden Radienvektoren bedeuten. Hienach sind, wenn für n, n'' bloß r, r'' enthaltende Näherungsausdrücke (vgl. diesbez. Nr. **10**) gesetzt werden, $\delta s'$ und dadurch auch $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$ gegeben, da sich δs, δr und $\delta s''$, $\delta r''$ unmittelbar durch $\delta\varrho$ bzw. $\delta\varrho''$ ausdrücken lassen. Für eine zu verbessernde parabolische Bahn werden als zu korrigierende Bestimmungsstücke bei *C. Hornsteins*[183]) Methode des Übergangs von parabolischen auf nahe parabolische Bahnen das Verhältnis $M = \frac{\varrho''}{\varrho}$ der den beiden festgehaltenen Orten zugehörigen geozentrischen Distanzen und der reziproke Wert der großen Halbachse $\alpha = \frac{1}{a}$ gewählt, und die Ausdrücke $\delta\sigma'$, $\delta\tau'$ wie früher aus zwei speziellen Annahmen über δM und $\delta\alpha = \frac{1}{a}$ gewonnen. Aus den verbesserten Werten von M, a folgen dann ϱ, ϱ'' mittels eines unmittelbar aus der *Olbers*schen Methode durch Einführung der *Lambert*schen Relation an Stelle der *Euler*schen hervorgehenden Verfahrens, worauf aus den bekannt gewordenen zwei heliozentrischen Orten die Elemente in verschiedener Weise gefunden werden können, je nachdem man hiebei auf den bekannten Wert von a rekurriert oder nicht. Die Methode der Variation des Verhältnisses der geozentrischen Distanzen geht aus diesem Verfahren hervor, wenn auch die verbesserte Bahn als parabolisch vorausgesetzt, also an dem Werte $\alpha = 0$ unverändert festgehalten wird. Die analytischen Ausdrücke der Differentialquotienten gibt für letztere *O. Leuschner*[184]).

183) *C. Hornstein,* Wien Ber. 38 (1854); *C. Hornstein,* Astr. Nachr. 38 (1854), p. 323.

184) *O. Leuschner,* Berl. Diss. 1897.

(Abgeschlossen im Dezember 1906.)

VI 2, 10. DIE BESTIMMUNG DER METEORBAHNEN IM SONNENSYSTEM.

Von

G. v. NIESSL

in Wien.

Inhaltsübersicht.

Literatur.
Allgemeines.

I. Ermittelung des Radiationspunktes und der geozentrischen Geschwindigkeit.

1. Mehrfache Beobachtungen aus verschiedenen Orten.
   a) Bestimmung des Endpunktes der Bahn.
   b) Bestimmung des scheinbaren Radianten.
   c) Lage der Bahn, Bahnlänge, Höhe des Aufleuchtens.
   d) Geozentrische Geschwindigkeit.
   e) Zenitattraktion.
2. Einseitige Beobachtung verschiedener Körper desselben Stromes.

II. Ableitung der Bahn im Sonnensystem.

III. Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse.

1. Mittlere Genauigkeit der Beobachtungen und der Rechnungsergebnisse.
2. Ergebnisse für die Höhen des Aufleuchtens und der Hemmung, und ihre Beziehungen zu anderen Faktoren (Massen, Geschwindigkeit). Vergleich mit der Theorie des Luftwiderstands.
3. Masse der Sternschnuppen.
4. Durchschnittliche und außergewöhnliche Bahnlängen.
5. Die heliozentrische Geschwindigkeit und Bahnform.

Literatur.

H. W. Brandes in *J. F. Benzenberg:* Über die Bestimmung der geographischen Längen durch Sternschnuppen. Hamburg 1802. (Methoden der Höhenbestimmung von *Brandes* und *Olbers.*)

— Unterhaltungen für Freunde der Physik und Astronomie. Leipzig 1826 u. f., dann in Gehlers phys. Wörterb. IV, 1827.

A. Quetelet, Sur les étoiles filantes. Corresp. mathématique et physique. Brüssel T. IX, 1837.

Fr. W. Bessel, Über Sternschnuppen. Astr. Nachr. 16 (1839), p. 321.

A. Erman, Über die Sternschnuppen der Augustperiode etc. Astr. Nachr. 17 (1840), p. 3.

J. G. Grunert, Über eine geometrische Aufgabe. (Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche vier gerade Linien im Raume, deren Gleichungen gegeben sind, schneidet. Mit Anwendung auf die Bestimmung der Cometenbahnen.) Archiv Math. Phys. I. 1841.

— Die verschiedenen Auflösungen des Sternschnuppen-Problems aus einem allgemeinen Gesichtspunkte dargestellt. Arch. Math. Phys.

J. C. Houzeau, Sur les étoiles filantes périodiques du mois d'Août etc. Mém. de l'Acad. de Bruxelles. T. XVIII. 1844.

F. Petit, Méthode pour déterminer la parallaxe et le mouvement des bolides. Mém. de l'Acad. de Toulouse V. 1849.

— Recherches analytiques pour la trajectoire et la parallaxe des bolides. Paris C. R. 32 (1851).

E. Heis, Die periodischen Sternschnuppen etc. Köln 1849.

A. Laussedat, Sur la méthode employée pour déterminer la trajectoire du bolide du 14. Mai 1864. Paris C. R. 58 (1864), p. 1222, 59 (1864), p. 74.

A. S. Herschel, Method of determining the path of a meteor. Proceed. of the Brit. Meteorol. Soc. II. 1866.

E. Weiß, Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen. Wien Ber. 57 II (1868), p. 281 und 62 II (1870), p. 277, sowie Astr. Nachr. 72 (1868), p. 81 und 76 (1870), p. 194 (Weiß, Beiträge).

J. V. Schiaparelli, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Autorisierte deutsche Ausgabe der Note e Riflessioni sulla teoria astronomica delle stelle cadenti von *G. v. Boguslawski*, Stettin 1871 *(Schiaparelli).*

E. Reimann, Die Höhenbestimmung der Sternschnuppen. Breslau 1870. (Enthält u. a. eine kritische Darstellung der bis dahin bekannt gewordenen älteren Methoden.)

J. G. Galle, Über die Berechnung der Bahnen heller, an vielen Orten beobachteter Meteore etc. Astr. Nachr. 83 (1874), p. 321.

H. Bruns, Bemerkung über die Berechnung der Höhe von Sternschnuppen aus korrespondierenden Beobachtungen. Astr. Nachr. 84 (1874), p. 379.

R. Lehmann Filhés, Zur Theorie der Sternschnuppen. Inaug. Dissert. Berlin 1878.

— Über die Bestimmung des Radiationspunktes eines Sternschnuppenschwarms mit Hilfe eines neuen Meteoroskops. Astr. Nachr. 96 (1880) p. 241.

— Die Bestimmung von Meteorbahnen nebst verwandten Aufgaben. Berlin 1883.

G. v. Nießl, Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme. Wien Ber. 83 (1881), p. 96. Dann des Verfassers zahlreiche Bestimmungen von Meteorbahnen, ebenda.

K. Necker, Zur Ausgleichung von Massenbeobachtungen atmosphärischer Lichterscheinungen. Inaug.-Dissertation. Wien 1894.

E. Weiß, Höhenberechnung der Sternschnuppen Wien Denkschr. 1905.

P. Moschick, Eine neue Methode zur Bahnbestimmung von Meteoren. Mitteilungen der Sternwarte zu Heidelberg V. Karlsruhe 1905.

H. Rosenberg, Über eine Methode zur Bestimmung der Meteorbahnen. Astr. Nachr. 167 (1905).

Bibliographie.

J. C. Houzeau — A. Lancaster, Bibliographie générale de l'Astronomie, tome II, Brüssel 1882, p. 714.

Allgemeines. Die Bahnen der Körper, welche durch ihr Eindringen in die Atmosphäre Feuermeteore hervorrufen, haben im Sonnensystem planetarischen Charakter. Sie sind Kegelschnittslinien, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Der durch die Beobachtungen nachgewiesene Teil derselben ist jedoch so klein, daß er selbst für die genauesten Bestimmungen nur geradlinig angenommen werden kann. Unregelmäßige Bewegungen, welche, durch besondere Gestalten dieser Körper bedingt, zuweilen vorkommen, bleiben hier außer Betracht.

Für alle auf diese Weise sichtbar werdenden Bahnen ist die kleinste Entfernung vom Erdmittelpunkt, oder in geozentrischer Beziehung das Perigeum, im Vergleiche mit der Entfernung von der Sonne oder dem betreffenden Radiusvektor der Erdbahn verschwindend klein und gegen letzteren stets zu vernachlässigen. Es wird somit für die Fallepoche der heliozentrische Radiusvektor der Meteorbahn als identisch mit dem der Erdbahn angenommen. Weil ferner aus demselben Grunde das Zusammentreffen mit der Erde als gleichbedeutend mit dem Durchgange des Meteors durch den einen Bahnknoten gelten kann, so findet man aus der Sonnenephemeride für das Falldatum direkt stets die Länge und den Radiusvektor eines Bahnknotens.

Die *scheinbare* Lage der Lichtbahn am Himmel hängt parallaktisch mit der Lage des Beobachtungsortes zusammen. Sie wird daher für die näheren Bahnpunkte größere scheinbare Verschiebungen zeigen als für die entfernteren. Ein Punkt der geradlinigen Bahn oder ihrer Verlängerung nach rückwärts, welcher von allen Beobachtungsorten schon so weit entlegen ist, daß deren gegenseitige Entfernung nicht mehr in Betracht kommt, würde von allen Orten an derselben Stelle des Himmels gesehen werden. Dieser perspektivische Divergenzpunkt aller an den verschiedenen Erdorten statt der wahren Bahn aufgefaßten scheinbaren Bahnen ist der *scheinbare Strahlungs-* oder *Radiationspunkt.* Er bestimmt die geozentrische Richtung der nachgewiesenen geraden Bahnstrecke. Diese ist jedoch, abgesehen von der Wirkung der Erdschwere, welche leicht in Abrechnung gebracht wird, zusammengesetzt aus der Bewegung der Erde und aus der wahren heliozentrischen Meteorbewegung. Der projektivische Richtpunkt der

letzteren am Himmel ist der *wahre* Radiationspunkt, welcher also die *wahre Bahnrichtung am Knoten* der Meteorbahn bestimmt.

Da die Sonne sich in der Bahnebene des Meteors befinden muß, so ist diese bestimmt durch den Radiusvektor und die Bahnrichtung am Knoten, oder auf der Kugel durch den Großkreis, welcher den Ort der Sonne und den wahren Radianten enthält.

Durch letzteren ist aber auch der Winkel, welchen die wahre Bahnrichtung mit dem Radiusvektor am Knoten bildet, gegeben, und es sind dann alle weiteren Bahnelemente nur mehr von der Geschwindigkeit in diesem Teile der Bahn abhängig, welche entweder aus den Beobachtungen abgeleitet wird, oder aus theoretischen Folgerungen hervorgeht.

Die vorliegende Aufgabe besteht demnach aus zwei voneinander ziemlich strenge gesonderten Teilen, von welchen gewissermaßen der erste die geozentrischen, der zweite die heliozentrischen Beziehungen behandelt. Diese sind:

I. *Die Ermittlung des Radiationspunktes* und jener Größen, welche zur Abschätzung der relativen Geschwindigkeit nötig sind.

II. *Die Ableitung der Bahn im Sonnensystem.*

Hinsichtlich des ersten Teiles, welcher die schwierigeren und verwickelteren Arbeiten umfaßt, dessen Resultate aber zugleich auch für die Ergebnisse des zweiten ganz entscheidend sind, können die Ausgangspunkte und Ziele verschieden sein. Die wichtigsten Fälle der Radiantenbestimmung sind folgende:

1. Ermittlung der Bahnlage gegen die Erde und des Radianten durch *mehrfache* Beobachtungen *desselben* Meteors aus *verschiedenen* Erdorten (korrespondierende Beobachtungen im weitesten Sinne).

2. Nachweisung des Radianten durch Beobachtung *mehrerer* zu *demselben* Radianten (Meteorstrom) gehörigen scheinbaren Bahnen aus *einem* Erdorte (einseitige Beobachtungen).

I. Ermittlung des Radianten und der geozentrischen Geschwindigkeit.

1. Mehrfache Beobachtungen aus verschiedenen Erdorten. Reichliche Erfahrungen lehren, daß, je nach der Lage der Bahn gegen die einzelnen Beobachtungsorte, der Anfang der wahrgenommenen leuchtenden Strecke (Aufleuchten) gewöhnlich nicht identisch aufgefaßt wird, ja, daß in dieser Hinsicht Unterschiede bis zur Länge großer Bogen und, im linearen Maß, bis zu Hunderten von Kilometern vorkommen können. Ausgenommen hiervon sind die Fälle

mit lang anhaltender, scharf markierter Spur, wenn sich Beobachtungen speziell auf diese — nicht auf die ganze Bahn — beziehen.

In der Regel darf die Ableitung der Bahn von der Annahme der Identität für die bezeichneten Aufleuchtungspunkte *nicht* ausgehen.

Da die wahre Bahn von der Geraden nicht merklich abweicht, so bestimmt sie mit dem Auge des Beobachters eine Ebene, welche im Schnitt mit der gedachten Kugel einen größten Kreis liefert. Die an verschiedenen Orten beobachteten „scheinbaren Bahnen" können daher als Bogen größten Kreises betrachtet werden, welche in ihrer Verlängerung nach rückwärts (nämlich entgegen dem Lauf des Meteors) als Schnittpunkt den „scheinbaren Radianten" bezeichnen.

Die Ermittlung dieses scheinbaren Strahlungspunktes kommt also darauf hinaus, den einen Schnittpunkt (der andere ist dann selbstverständlich) mehrerer durch die Beobachtung derselben Meteorbahn an verschiedenen Orten gegebenen, nicht zusammenfallenden größten Kreise zu bestimmen.

Liegen nur zwei solcher Bahnbogen vor, so ist die Lösung rechnerisch oder graphisch so einfach, daß sie einer weiteren Erörterung hier nicht bedarf. Verwickelter wird die Aufgabe, wenn viele überzählige Beobachtungen zu vereinigen sind; und doch ist es gerade zur Ermittlung der Bahnverhältnisse großer Feuerkugeln wie auch der Meteoriten, für welche oft nur minder genaues, teilweise auch unvollständiges Material zur Verfügung steht, besonders erwünscht, ja notwendig, eine große Überzahl von Beobachtungen verwenden zu können. Dies sind die typischen Fälle, auf welche sich nachstehende Erörterungen vornehmlich beziehen.

Die Stelle, an welcher der planetarische Lauf eines größeren Meteors durch den Widerstand der irdischen Atmosphäre gehemmt wird („Hemmungspunkt", „Endpunkt" der Bahn) ist fast immer durch besondere Erscheinungen so ausgezeichnet, daß über die Identität hinsichtlich dieses Punktes selten Zweifel bestehen. Gewöhnlich ist es auch der einzige Bahnpunkt, von dem dies mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann. Überdies ist in Bezug auf denselben die nähere Verständigung mit den Beobachtern ziemlich sicher und zuweilen dessen Erforschung auch durch Schallwahrnehmung, wenn nicht gar durch Auffindung von Fallstücken begünstigt.

Die möglichst genaue Festlegung der Lage und Höhe des *Endpunktes* bildet daher in der Regel eine sehr wichtige, manchmal unentbehrliche Grundlage aller weiteren Untersuchungen.

Es hat zwar keine großen geometrischen Schwierigkeiten, die Aufgabe allgemeiner so zu lösen, daß die drei Raumkoordinaten des

Endpunktes zusammen mit den sphärischen Koordinaten des Radianten aus *einem* Ausgleichssystem hervorgehen. Allein eine solche Lösung würde, abgesehen davon, daß sie sich äußerst langwierig und wenig lohnend gestaltet, nur selten zu brauchbaren Resultaten führen. Sie wird daher hier weiter nicht berücksichtigt, sondern es wird die Ausmittlung des Endpunktes als wesentlichste Vorarbeit abgesondert erörtert.

a) *Bestimmung der geographischen Koordinaten und der Höhe des Endpunktes.* Aus guten Gründen wird auch bei dieser Aufgabe in der Regel eine Teilung nützlich sein, indem man vorerst die geographische Lage und hierauf die lineare Höhe ermittelt. In einzelnen Fällen wird allerdings die allgemeine Behandlung notwendig oder doch zweckmäßig. Um alle drei Unbekannten zu bestimmen, müssen die Beobachtungen drei geeignete Stücke aus mindestens zwei Orten liefern, unter welchen sich ein Höhenwinkel (scheinbare Höhe) befinden muß. Die beiden anderen können Richtungsangaben (Azimute) sein, und es ist meist zweckmäßig, wenn dies der Fall ist. Drei Azimute reichen offenbar nicht aus, um auch die lineare Höhe zu finden, wogegen die Aufgabe durch drei scheinbare Höhen im allgemeinen bestimmt sein kann. Die Ausmittlung der geographischen Lage bloß durch die Parallaxe in Höhe wird sogar die einzig mögliche, wenn die Azimutalparallaxe versagt, also z. B., wenn die Beobachtungsorte zugleich mit dem Endpunkt nahezu in demselben Vertikalschnitt angeordnet sind.

Zuweilen sind die beobachteten Höhen so unsicher, daß durch ihre Verbindung mit den Richtungsbeobachtungen das Resultat ungünstig beeinflußt wird. Hat man brauchbare Azimute bei ausreichender Parallaxe, so ist es vorzuziehen, die Lage des Endpunktes aus diesen allein zu ermitteln, wobei völlig ausreichend dem Erdsphäroid eine Kugel von entsprechendem Radius substituiert wird. Man kann sich mit Vorteil folgenden Näherungsverfahrens bedienen.

An den Orten O_i ($i = 1, 2, 3 \ldots n$) der Erdoberfläche, bestimmt durch die geographischen Koordinaten L_i, φ_i seien die Azimute A_{ie} des Endpunktes E (L_e, φ_e) der Meteorbahn beobachtet worden.

Nach irgend einem kurzen, auch graphischen Verfahren werden zunächst Näherungswerte L_0, φ_0 für L_e, φ_e, dann auch ein solcher H_0 für die lineare Höhe H_e gesucht. Gewöhnlich ergeben sich diese schon sozusagen von selbst vor Beginn des eigentlichen Rechnungsvorganges, da man beim allmählichen Einlangen der Beobachtungen über die Lage des Endpunktes sich ein beiläufiges Urteil bilden muß, um danach weiteren Nachforschungen nützliche Richtung zu geben.

In allen bedeutenderen Fällen, welche eine eingehendere rechnerische Behandlung verdienen, wird man über diese Größen beiläufig bald orientiert sein.

Mit diesen Näherungswerten berechnet man nun genäherte Azimute von O_i gegen E, die hier mit A_{ie} und auch die leicht hieraus zu findenden Gegenrichtungen $E \rightarrow O_i$, die mit A_{ei} bezeichnet werden, ferner genäherte Distanzen $O_i E$ oder die sphärischen Amplituden ε_i und beiläufige scheinbare Höhen h_{ie}. Letztere beeinflussen diese Bestimmung nur soweit, daß auch ganz rohe Näherungen genügen, wenn man die beobachteten Größen nicht verwenden will.

Endlich sind die Zahlenwerte für alle Unterschiede

$$A_{ie} - \mathrm{A}_{ie} = \omega_i$$

zu bilden. Wird nun

$$L_e = L_0 + \Delta L_0, \quad \varphi_e = \varphi_0 + \Delta\varphi_0$$

genommen, wobei also ΔL_0 und $\Delta\varphi_0$ die zu bestimmenden Verbesserungen für die vorläufigen Koordinaten des Endpunktes bezeichnen, so erhält man aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi_e \cos\varphi_i = \operatorname{cotg} A_{ie} \sin(L_e - L_i) + \sin\varphi_i \cos(L_e - L_i)$$

für die Fehlergleichungen im bekannten Sinne:

$$v_i = o_i + a_i x + b_i y, \tag{1}$$

worin

$$x = \Delta L_0 \cos\varphi_0, \quad y = \Delta\varphi_0,$$

$$\begin{cases} o_i = \omega_i \cos h_{ie}, \\ a_i = \dfrac{\cos h_{ie}}{\sin \varepsilon_i} \cdot \cos A_{ei}, \\ b_i = -\dfrac{\cos h_{ie}}{\sin \varepsilon_i} \cdot \sin A_{ei} = -a_i \operatorname{tang} A_{ei}. \end{cases} \tag{2}$$

Der allgemeine Faktor $\cos h_{ie}$ ist um so notwendiger, je ungleicher die Entfernungen, also auch die h_{ie} sind, weil die solchen Beobachtungen gewöhnlich anhaftenden Richtungsfehler nicht eigentliche Azimutdifferenzen, sondern kleine sphärische Bogen sind, welchen je nach der Zenitdistanz sehr verschiedene Azimutwerte entsprechen.

Aus den Gleichungen (1) gehen — eventuell unter Erteilung verschiedener Gewichte an die einzelnen Beobachtungen — nach der Methode der kleinsten Quadrate ΔL_0 und $\Delta\varphi_0$, also auch L_e und φ_e mit ihren mittleren Fehlern hervor.

Die endgültigen Azimute sind dann

$$A_{ie} = \mathrm{A}_{ie} + v_i \sec h_{ie}.$$

Fallen die v_i groß aus, so ist es zu empfehlen, die A_{ie} nochmals direkt aus dem endgültigen L_e, φ_e zu berechnen.

x und y erhält man selbstverständlich in der Einheit des Absolutgliedes o_i. In dieser Hinsicht kann man je nach Umständen verschiedene Modifikationen bevorzugen.

Bezeichnet μ_i den *sphärischen* Abstand des genäherten Endpunktes $E_0(L_0, \varphi_0)$ von der *beobachteten* durch A_{ie} bezeichneten Richtung, so ist genähert: $\omega_i = \frac{\mu_i}{\sin \varepsilon_i}$.

Wird dann gesetzt:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos h_{ie}}{\sin \varepsilon_i} = \sqrt{\gamma_i}, \\ \cos A_{ei} = a_i, \ \sin A_{ei} = -b_i, \end{cases}$$

so ist

$$(4) \qquad v_i = \sqrt{\gamma_i}\,(\mu_i + a_i x + b_i y)$$

und $\sqrt{\gamma_i}$ ist ein Gewichtsfaktor für die ganze Gleichung.

Wünscht man z. B. bei Abnahme aus der Karte für μ_i als Einheit ein Längenmaß, welches dann auch für x und y gilt, während die v im Gradmaß hervorgehen sollen, daß also allenfalls die Einheiten 1 km und 1^0 (für die Azimute und Höhen) zu nehmen seien, so wird die frühere Gleichung für $\sqrt{\gamma_i}$ noch mit

$$\frac{1}{R \cdot \text{arc } 1^0} = \frac{1}{111.35} = 0.0089807$$

zu multiplizieren sein, wenn der Erdradius $R = 6380$ km gesetzt wird.

Es können dann, wie leicht einzusehen, auch die Koeffizienten a_i und b_i mit Vorteil graphisch abgenommen werden, namentlich, wenn die Beobachtungen nicht die äußersten rechnerischen Rücksichten verdienen.

Findet man es rätlich, zur Bestimmung der Lage des Endpunktes (L_e, φ_e) auch die Parallaxe in Höhe einzubeziehen, was, wie schon erwähnt, manchmal kaum zu vermeiden ist, so wird man den Näherungswert H_0 genauer aufzusuchen und die daraus für die vorläufigen Entfernungen D_{ie} geltenden scheinbaren Höhen h_{ie} sorgfältiger zu rechnen haben.

Ist $H_e = H_0 + \Delta H_0$, ferner $\Delta L_0 \cos \varphi_0 = x$, $\Delta \varphi_0 = y$, $\Delta H_0 = z$ im Längenmaß, während die Verbesserungen der beobachteten Richtungen und der beobachteten Höhen $\mathfrak{h}_{ie}$ im Gradmaß hervorgehen sollen, und wird gesetzt:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} (\operatorname{tang} h_{ie} + \sin \varepsilon_i) \cos \varepsilon_i &= K_i, \\ \frac{\cos^2 h_{ie}}{R \cdot \operatorname{arc} 1^\circ \sin \varepsilon_i} &= \sqrt{\gamma_i} \cdot \cos h_{ie} = F_i, \\ h_{ie} - \mathrm{h}_{ie} &= n_i, \\ - F_i K_i \sin A_{ei} &= a_i, \\ - F_i K_i \cos A_{ei} &= b_i, \\ F_i &= c_i, \end{aligned}\right.$$

so sind die Fehlergleichungen

$$(6)\quad v_i = n_i + a_i x + b_i y + c_i z$$

denjenigen beizufügen, welche man bloß aus den Richtungen erhalten hat. Hieraus ergeben sich wieder die Normalgleichungen und die Unbekannten.

Das Verfahren soll jedoch nur mit verläßlichen Höhen und dann angewendet werden, wenn solche aus Orten in der Nähe des Endpunktes mit weiter entfernten zu verbinden wären.

Soll die *lineare Höhe* des Endpunktes *abgesondert*, auf Grund der bereits endgültig ermittelten geographischen Lage desselben bestimmt werden, so pflegt man gewöhnlich die einzelnen, auf den verbesserten Endpunkt bezüglichen Entfernungen D_{ie} mit den zugehörigen beobachteten scheinbaren Höhen h_{ie} zu verbinden, um Einzelwerte für H_e zu erhalten, aus welchen dann ein Mittelwert gebildet wird. Die Entfernungen brauchen, wenn sie in bezug auf den vorläufigen Endpunkt aus den früheren Arbeiten bekannt sind, nicht neuerdings berechnet zu werden, da sie aus den ermittelten Verbesserungen $\Delta L_0 \cos \varphi_0$ und $\Delta \varphi_0$ namentlich mit Hilfe der Azimute A_{ei} leicht auf den definitiven Punkt L_e, φ_e ergänzt werden können, denn

$$\Delta D = - \frac{\Delta L \cos \varphi_0}{\sin A_{ie}} = - \frac{\Delta \varphi_0}{\cos A_{ie}}.$$

Da die Reduktion der Distanz auf die Sehne für derartige Höhenbestimmungen meist überflüssig ist, kann man nehmen:

$$(7)\quad H_i = D_{ie} \frac{\sin\left(\mathrm{h}_i + \frac{\varepsilon_i}{2}\right)}{\cos\left(\mathrm{h}_i + \varepsilon_i\right)}.$$

Wird $\mathrm{h}_i + \frac{\varepsilon_i}{2} = \mathrm{h}_i'$ gesetzt, so gilt noch bis ungefähr 1000 km Entfernung die Näherung

$$(8)\quad H_i = D_{ie} \operatorname{tang} \mathrm{h}_i' + \frac{(D_{ie} \operatorname{tg} \mathrm{h}_i')^2}{2R},$$

für einige hundert Kilometer genügt auch das erste Glied. Die Anbringung der Refraktion wird gegenüber den übrigen Unsicherheiten

selten besondere Vorteile gewähren, doch kann sie bei besonders großen Entfernungen immerhin erfolgen.

Wenn man bei Vereinigung der einzelnen Bestimmungen H_i zu einem Mittelwert die Gewichte derselben berücksichtigen will, so muß man dabei mit Vorsicht die Gewichte der angewendeten beobachteten $\mathbf{h}_i$ auch mit berücksichtigen, welche man gewöhnlich nicht ganz leicht abschätzen kann.

Größere Unterschiede in den Seehöhen der einzelnen Beobachtungsorte sind leicht anzubringen.

b) *Bestimmung des scheinbaren Radiationspunktes.* Die hierzu brauchbaren Angaben können in verschiedener Form gegeben sein, nämlich:

1) Koordinaten vom Anfang und Ende der scheinbaren Bahn (A, h oder α, δ).
2) Zwei andere Punkte der Bahn oder auch nur einer, wenn er dem, als bereits sichergestellt, vorausgesetzten Endpunkt nicht zu nahe liegt. Hierher gehört auch die Richtungsbezeichnung durch entferntere Sterne.
3) Die scheinbare Neigung des Bahnteiles am Endpunkt gegen den Vertikal desselben, gewissermaßen der Positionswinkel gegen den Vertikal. Dieser kann auch für eine andere gut bezeichnete Bahnstelle gegeben sein. Bei Bahnen, welche einen Kulminationspunkt zeigen, ist die scheinbare Höhe desselben oft ausreichend, minder das Azimut. Eine mehr als beiläufige Angabe des scheinbaren Bahnknotens am Horizont (scheinbare Bewegungsrichtung gegen einen Horizontpunkt) ist zuweilen gut verwendbar.

Auch die Benutzung der unter 3) angeführten Stücke setzt voraus, daß der Endpunkt bereits aus anderen bestimmt werden konnte. Sie sind zuweilen, namentlich bei sehr kurzen Bahnen, besser verwendbar als die Koordinaten für Anfang und Ende der Bahn. Graphische Beobachtungsskizzen sind in solchen Fällen stets eine erwünschte Beigabe.

Zunächst werden nun aus der bekannten Lage und Höhe des Endpunktes dessen scheinbare äquatoreale Koordinaten (α_i'', δ_i'') für die einzelnen Beobachtungsorte berechnet und im Falle 1) *statt* der *beobachteten*, im Falle 2) *für* den nicht bezeichneten Endpunkt genommen.

Auch in den unter 3) erwähnten Fällen dienen diese berechneten Koordinaten für den Anschluß der angegebenen scheinbaren Bahnbogen. Ist nämlich N' die in der unvollständigen Beobachtung angegebene Neigung der scheinbaren Bahn gegen den Vertikal des End-

punktes (A_e, h_e) dagegen N die Neigung gegen den *Horizont* im scheinbaren Bahnknoten und A_k das Azimut dieses Knotens, so ist

$$(9) \qquad \begin{cases} \cos N = \sin N' \cos h_e, \\ \operatorname{tang} f = \operatorname{tang} N' \sin h_e, \\ A_k = A_e \pm f, \end{cases}$$

$\pm f$, je nachdem die Bewegung des Meteors im Sinne der Zählung des Azimuts oder entgegengesetzt erfolgte.

In ähnlicher Weise wird die Verbindung hergestellt, wenn der Winkel mit dem Vertikal an einem anderen Punkt des Bahnbogens, für den entweder Azimut oder Höhe oder Bogenabstand vom Endpunkt mitgegeben sein muß, beobachtet wurde.

In den Fällen 1) und 2) wird aus den Koordinaten α_i', δ_i' und α_i'', δ_i'' der beiden gegebenen Bahnpunkte sodann für den hierdurch bestimmten Großkreis die Rektaszension α_k des aufsteigenden äquatorealen Knotens und die Neigung J gegen den Äquator gerechnet.

Mit $\frac{\operatorname{tg} \delta'}{\operatorname{tg} \delta''} = s$ wird

$$(10) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} (\alpha' - \alpha_k) = \dfrac{s \sin (\alpha'' - \alpha')}{1 - s \cos (\alpha'' - \alpha')}, \\ \operatorname{tg} J = \dfrac{\operatorname{tg} \delta'}{\sin (\alpha' - \alpha_k)} = \dfrac{\operatorname{tg} \delta''}{\sin (\alpha'' - \alpha_k)}; \end{cases}$$

α_k ist so zu nehmen, daß beide Gleichungen für J erfüllt sind.

Diese Bestimmungen können mit Benutzung eines Kartennetzes gnonomischer Projektion, bei entsprechend großem Maßstab auch graphisch, rasch und hinreichend genau vorgenommen werden.

Hiernach ergibt sich auch das Verfahren im Falle 3). Es wird also schließlich jeder Beobachtungsort, welcher brauchbare Angaben lieferte, einen durch α_k und J mit der zugehörigen Bewegungsrichtung bestimmten Großkreis für die Ermittlung des Radianten darbieten. Wären diese scheinbaren Bahnen fehlerfrei, so müßten sie nach rückwärts verlängert sich sämtlich im Radiationspunkt a, d schneiden, d. h. die Gleichung

$$(11) \qquad \sin (a - \alpha_{ki}) \operatorname{tang} J_i = \operatorname{tang} d$$

müßte dann für $i = 1, 2, 3 \ldots, n$ erfüllt werden.

Da dies der Beobachtungsfehler wegen nicht der Fall ist, müssen an den beobachteten Bahnbogen die entsprechenden Verbesserungen angebracht werden. Abgesehen von einigen Ausnahmefällen wird dabei angenommen, daß die Koordinaten α'', δ'' unverändert bleiben, daß also die Verbesserungen nur auf α', δ' (Anfangspunkt) oder auf α_k und J entfallen, was durch eine Drehung um den scheinbaren End-

punkt α'', δ'' bewirkt wird. Diese Drehung hätte demnach so zu erfolgen, daß für die nötigen Verbesserungen $\cos\delta_i'$, $\Delta\alpha_i'$ und $\Delta\delta_i'$ mit Rücksicht auf die etwaigen Gewichte p_i

$$[p\,(\Delta\alpha'^2\cdot\cos^2\delta' + \Delta\delta'^2)] = \text{Minimum} \tag{9}$$

wird.

Zu diesem Zweck wird wieder (wie bei der Ermittlung der geographischen Koordinaten des Endpunktes) — am einfachsten graphisch — ein vorläufiger Wert für a, d, welcher hier mit a_0, d_0 bezeichnet ist, angenommen und der normale Abstand Δ_i desselben von jedem scheinbaren Bahnbogen α_{ki}, J_i berechnet, oder auch graphisch entnommen.

Bezeichnet man Δ als positiv, wenn a_0, d_0 innerhalb des nördlichen Polraumes von α_{ki} J_i liegt, so findet man diesen Abstand, wenn er streng berechnet werden soll, aus

$$\sin\Delta_i = -\cos J_i \sin d_0 + \sin J_i \cos d_0 \sin(a_0 - \alpha_{ki}). \tag{12}$$

Da nun die Δ_i die Widersprüche vorstellen, so sind die Verbesserungen $\Delta a_0 \cos d_0$ und Δd_0 so zu bestimmen, daß jene Null werden.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \sin J_i \cos(a_0 - \alpha_{ki}) &= \cos P_i, \\ \cos J_i \sec d_0 &= \sin P_i', \\ \Delta a_0 \cos d_0 = x, \quad \Delta d_0 &= y, \\ \sin\Delta_i &= \Delta_i, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

so besteht die Bedingung:

$$0 = \Delta_i - \cos P_i \cdot x + \sin P_i' y. \tag{14}$$

Um die Fehlergleichungen richtig anzusetzen, muß jedoch noch berücksichtigt werden, daß Δ_i die Verschiebung, welche der vorläufig angenommene Radiant erleiden müßte, um in den beobachteten Bahnbogen zu kommen, *keine beobachtete* Größe ist, denn der durch die Drehung zu verbessernde Ort ist α', δ'. Bezeichnet ζ die Veränderung, welche dieser dabei erleiden muß, so ist

$$\frac{\sin\zeta}{\sin\Delta} \doteq \frac{\zeta}{\Delta} = \frac{\sin l}{\sin l'}, \tag{11}$$

wenn die Bogenlänge von α', δ' bis α'', δ'' mit l, jene von a_0, d_0 bis α'', δ'' mit l' bezeichnet wird.

Der Faktor $\frac{\sin l}{\sin l'} = \sqrt{g}$ ist daher als Gewichtsfaktor der ganzen Gleichung anzuhängen. Unterläßt man dies, so wird den kurzen Bahnbogen, für welche dieses Sinusverhältnis ein kleiner Bruch ist, ein viel zu großes Gewicht beigelegt.

Ist die betreffende scheinbare Bahn nicht durch α', δ', sondern durch die scheinbare Neigung am Endpunkt bezeichnet, so kommt man der richtigen Bewertung am nächsten, wenn man $\sin l = 1$ nimmt.

Selbstverständlich ist überdies auch noch in allen besonderen Fällen das etwa nachweisbare Gewicht der beobachteten Größe anzubringen.

Das hier erörterte Verfahren stützt sich, wie erwähnt, auf die Voraussetzung, daß der Endpunkt sicher genug ermittelt wurde, um die aus demselben berechneten scheinbaren Positionen α_i'', δ_i'' auch bei der Bestimmung des Radianten unverändert zu lassen. Wäre dies nicht zulässig, so müßte man die Gewichte der einzelnen α_i'', δ_i'' aus den mittleren Fehlern bei der Bestimmung der Lage und Höhe des Endpunktes ableiten und dann auch das Gewicht für den ersten Punkt der Bahn α_i', δ_i' abschätzen. Die Verbesserungen der beiden Punkte müssen dann den Gewichten p' und p'' verkehrt proportional bestimmt werden, d. h. die Drehung der scheinbaren Bahn hat nicht um den Punkt α'', δ'', sondern um jenen Bahnpunkt zu erfolgen, welcher von diesem um die Größe $\frac{p'}{p'+p''} \cdot l$ und von α', δ' um $\frac{p''}{p'+p''} \cdot l$ absteht. Bezeichnet l'' die sphärische Entfernung dieses Teilungspunktes vom vorläufigen Radianten $a_0 d_0$, so wäre der Faktor

$$\sqrt{g} = \frac{\sin \frac{p''}{p'+p''} \cdot l}{\sin l''}.$$

Kann oder will man den Endpunkt der Bahn gar nicht vorher bestimmen, so wird man in der Regel den beiden Punkten $\alpha'\delta'$ und $\alpha''\delta''$ gleiches Gewicht beimessen, so daß $\sqrt{g} = \frac{\sin \frac{l}{2}}{\sin l''}$ zu nehmen wäre.[1])

Ist der Radiant durch die endgiltigen Koordinaten a, d bestimmt, so wird für jeden Beobachtungsort der Bogen von a, d bis α_i'', δ_i'' der Lage nach die verbesserte scheinbare Bahn bezeichnen. Die normale Projektion des Punktes α', δ' auf diesen Bogen liefert einerseits die verbesserte *scheinbare Bahnlänge*, andererseits die auf die Bahnrichtung normale Komponente des Beobachtungsfehlers. Die in der Bahnrichtung gelegene ist selbstverständlich wegen der Ungleichheit der Auffassung unbestimmbar. Die nach dieser Andeutung leicht vorzunehmende Verbesserung von α', δ' ist jedoch nur dann notwendig, wenn die

1) Über die Ermittlung des Radianten aus überzähligen Beobachtungen ohne vorhergegangene Endpunktbestimmung vgl. auch *R. Lehmann-Filhés.* Zur Theorie der Sternschnuppen. Berlin 1878.

Angabe verläßlich genug ist, um sie noch zur Bestimmung der Aufleuchtungshöhe und der reellen Bahnlänge zu verwenden.

c) *Lage der Bahn gegen die Erde; Bahnlänge; Höhe des Aufleuchtens.* Werden für den endgültig ermittelten Hemmungspunkt (L_e, φ_e) mit der diesem Meridian entsprechenden Fallzeit des Meteors aus den äquatorealen Koordinaten des definitiv bestimmten Radianten a, d die auf den Horizont des Hemmungspunktes bezogenen Werte für Azimut und Höhe des Radianten berechnet, so entspricht ersteres zugleich dem Azimut der linearen Meteorbahn und letztere der Neigung derselben gegen den Horizont des Endpunktes. Dem Azimut, welches die Projektion der Bahn auf die Erdoberfläche bezeichnet, kann man in der Karte oder rechnerisch diejenigen Orte entnehmen, über deren Scheitel das Meteor hingezogen, und die Neigung in Verbindung mit der Höhe des Endpunktes gibt die lineare Höhe, welche es an irgend einer Stelle dieser Bahn über der Erdoberfläche hatte.

Man kann weder von der wirklichen Bahnlänge des Meteors in der Atmosphäre noch von der Höhe des Aufleuchtens im allgemeinen sprechen, weil, wie schon einmal erwähnt, die Beobachter sehr häufig verschiedene Bewegungsphasen auffassen. Da die linearen Bahnlängen in Verbindung mit den Dauerschätzungen ungefähr auf die geozentrische Geschwindigkeit schließen lassen, so müssen die reellen Bahnlängen insbesondere für jene Beobachtungen ermittelt werden, welche auch Abschätzungen der Dauer liefern. Als Höhe des ersten Aufleuchtens kann dann immerhin diejenige genommen werden, welche aus der längsten noch sicher ermittelten Bahn hervorgeht.

Zur Bestimmung dieser Größen sind aber, sobald die oben erwähnte Projektion der reellen Bahn auf die Erdoberfläche und die Neigung sichergestellt sind, alle Behelfe gegeben. Für jeden einzelnen Beobachtungsort wird nun die verbesserte Position α', δ' des frühest gesehenen Bahnpunktes in Betracht kommen. Das entsprechende Azimut liefert dann den Richtungseinschnitt in die Bahntrajektorie, woraus mit Benutzung der Bahnneigung gegen den Horizont sowohl die entsprechende Bahnlänge als auch die Höhe des Meteors über diesem Punkt sich ergibt.

d) *Geozentrische oder relative Geschwindigkeit.* Sind L_i und t_i *zusammengehörige* Werte einer aus den Beobachtungen gerechneten wirklichen Bahnlänge und des durch Schätzung ermittelten Zeitintervalles für die Zurücklegung derselben Strecke in Zeitsekunden, so ist

$$\mathfrak{V}_i = \frac{L_i}{t_i}$$

der aus *dieser* Beobachtung hervorgehende *Durchschnittswert* der relativen Geschwindigkeit des Meteors, behaftet namentlich mit der großen Unsicherheit, welche die Dauerschätzung fast unvermeidlich mit sich bringt. Ein Durchschnittswert, weil man annehmen muß, daß die Geschwindigkeit im Verlauf der Bewegung durch die atmosphärischen Schichten nicht völlig konstant geblieben sein kann.

Liegen mehrfache, zusammengehörige Angaben L_1, t_1, . . . vor, so wird man sorgfältig zu erwägen haben, ob etwa eine einzige anscheinend sehr verläßliche Schätzung von t mit dem dieser Beobachtung entsprechenden Werte L *allein* beizubehalten oder ein Mittel abzuleiten wäre, immer nur im Hinblick auf Zusammengehöriges. Die aus dem *frühesten* Aufleuchten hervorgehende *größte* Bahnlänge mit dem Mittel aller Dauerschätzungen zu verbinden, was zuweilen geschieht, ist nicht zu empfehlen, weil unter diesen gewöhnlich viele Schätzungen vorkommen, die sich nur auf kürzere Bahnteile beziehen.

Am besten ist es in der Regel, die Geschwindigkeit aus jedem Paare L, t für sich zu bestimmen und dann das Mittel mit oder ohne Rücksicht auf Gewichte zu nehmen. Die häufig vorkommenden starken Überschätzungen der Dauer — also stets einseitige Fehlerquellen — machen jedoch den Erfolg einer scharfen Gewichtsbemessung sehr oft fraglich.

Findet sich in keiner Beobachtung die zur bezeichneten Bahnlänge gehörige Dauerschätzung, so mag etwa das Mittel sämtlicher L mit dem Mittel der t verbunden werden.

Nicht selten liefern lange, größtenteils die höheren Schichten der Atmosphäre durchschneidende und auch schon in größerer Höhe endigende Bahnen wesentlich größere Werte für die Geschwindigkeit als solche, welche erst in den tieferen Schichten in geringer Länge nachgewiesen wurden. Die Beantwortung der Frage, ob solche Erfahrungen den verzögernden Einfluß des Luftwiderstandes auch quantitativ darstellen, oder mehr in der Überschätzung der Dauer begründet sind, durch welche bei kurzen Bahnen das Resultat merklicher entstellt wird als bei langen, bedarf noch weiterer Studien. Der Fall, daß sich einzelne Angaben der Beobachtungen mit Sicherheit auf besondere, bestimmt begrenzte höher oder tiefer gelegene Bahnteile beziehen, ist also immer sehr wichtig und deshalb für sich eingehender zu untersuchen.

e) *Zenitattraktion.* Geschwindigkeit und Radiant sollen für die weitere planetarische Rechnung noch von dem *Einflusse der Erdschwere*, welche erstere vergrößert und letzteren dem Zenit näher bringt, befreit werden.

Ist z die Zenitdistanz des nachgewiesenen scheinbaren Radianten im Endpunkt $L_e \varphi_e$ und v' die von der Erdschwere befreite relative oder geozentrische Geschwindigkeit, dann z' die im selben Sinne verbesserte Zenitdistanz, so wird[2]) (g Schwerebeschleunigung)

$$v' = \sqrt{\mathfrak{V}^2 - 2gR},$$

worin, wenn alles in Kilometern gilt,

$$(18) \quad \begin{cases} 2gR = 125.18, \\ \operatorname{tang} \frac{\Delta z}{2} = \frac{\mathfrak{V} - v'}{\mathfrak{V} + v'} \operatorname{tang} \frac{z}{2}, \\ z' = z + \Delta z. \end{cases}$$

Das Azimut des Radianten erleidet hierdurch keine Änderung. Die äquatorealen Koordinaten des letzteren sind mit diesem und der verbesserten Zenitdistanz neuerdings zu rechnen. Wo sie im folgenden für die Berechnung der planetarischen Bahn benutzt werden, sind sie nun mit a', d' bezeichnet.

2. Beobachtungen verschiedener Körper desselben Stromes aus einem Erdorte. Wenn mehrere, demselben Strahlungspunkte angehörige scheinbare Bahnen vorliegen, welche innerhalb eines nicht zu langen Intervalles nur an *einem* Orte beobachtet wurden, und wenn die während dieser Zeit eingetretenen Änderungen in den Koordinaten des Radianten unbedeutend sind[3]) oder berücksichtigt werden, können diese Koordinaten auch wieder nach dem Grundsatze bestimmt werden, daß sie den *wahrscheinlichsten* Schnittpunkt der betreffenden größten Kreise bezeichnen. Indessen hat man bei einseitigen Beobachtungen nie die volle Sicherheit, daß die in Betracht gezogenen Bahnen *wirklich zum gleichen* Strahlungspunkt gehören, wodurch die Anwendung strengerer Methoden etwas an Wert verliert.

Bei einseitigen Beobachtungen kann auch die geographische Lage und Höhe des Endpunktes irgend einer Bahn nicht angegeben werden.

---

2) Schiaparelli p. 251

3) Die Zenitattraktion bewirkt eine mehr oder weniger merkliche eben mit der Zenitdistanz zusammenhängende Änderung im Orte des Radianten. Bei Meteoren, welche die Erde mit geringer Geschwindigkeit treffen, kann diese immerhin recht merklich werden. Man sollte daher bei solchen Strömen (zu welchen u. a. die „Bieliden" gehören) nur solche Beobachtungen in eine Bestimmungsgruppe vereinigen, welche hinsichtlich der Zenitdistanz des Radianten nicht allzuweit auseinander liegen. Die mit der Sonnenlänge vor sich gehende Verschiebung bleibt aber zumeist für mehrere Tage innerhalb der Grenzen, welche durch die Beobachtungsfehler gezogen sind. Die Vereinigung von Beobachtungen, welche sich auf mehrere Wochen erstrecken, wird in der Regel nur beiläufige Resultate liefern können.

Es entfällt somit die im betreffenden Teile des vorigen Abschnittes erörterte Verbesserung der Endposition α'', δ'', welche also nur ungefähr gleichwertig sein wird mit α', δ'. Demnach wird es naheliegend sein, die Verbesserungen gleichmäßig zu verteilen und die nötige Drehung des Bogens um die Bahnmitte vorzunehmen. Der Faktor der Fehlergleichung wird also $\frac{\sin\frac{l}{2}}{\sin l'}$ sein, wenn l' den Abstand der Bahnmitte vom vorläufigen Radianten bezeichnet. Sonst wird man das gleiche Verfahren wie dort anwenden können und zwar auch bei der in solchen Fällen gewöhnlich bevorzugten graphischen Bestimmung durch die Eintragung in Kartennetze.

R. Lehmann-Filhés[4]) erörtert die Methode, den scheinbaren Radianten bei einseitigen Sternschnuppenbeobachtungen aus scheinbaren Bahnen abzuleiten, welche je durch einen beliebigen Punkt α, δ derselben und ihren Positionswinkel gegen den Deklinationskreis dieses Punktes bestimmt sind. Hat der Beobachter die Wahl dieses Punktes frei, so wird er ihn häufig durch die Nähe eines ihm bekannten Sternes sicherstellen können, und wenn die Aufmerksamkeit nicht allzusehr durch die genaue Fixierung von Anfang und Ende der Bahn in Anspruch genommen ist, dürfte die Bahnrichtung, also auch der Positionswinkel vermutlich genauer erhalten werden als durch Festlegung jener beiden Punkte, die bei einseitigen Beobachtungen nur beiläufig angedeutet zu werden brauchen, wenn man sie überhaupt berücksichtigen will.

Die Gleichungen (14) bis (17) in welchen der Positionswinkel P am Stundenkreis des vorläufigen Radianten a_0, d_0, also nicht der in einem beliebigen anderen Bahnpunkte α, δ bestimmte, vorkommt, lassen sich ganz leicht auf diese Art der Lösung anwenden.

Bezeichnet W den in α, δ bestimmten Positionswinkel, wo diese Koordinaten also bezeichnet sein müssen, so ergibt sich sofort α_k aus

$$(19)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_k) = \operatorname{tang} W \sin\delta \\ \text{und} \quad \sin P = \dfrac{\cos\delta}{\cos\delta_0}\sin W, \\ \cos P = \dfrac{\cos(a_0 - \alpha_k)}{\cos(\alpha - \alpha_k)}\cos W. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die erwähnten Gleichungen, so sind sie für die vorstehende Lösung modifiziert.

Endlich mag noch erwähnt werden, daß bei einseitigen Beob-

4) *R. Lehmann-Filhés,* Astr. Nachr. 96 (1880) p. 241.

achtungen die Zenitattraktion für die Verbesserung des Radianten nur hypothetisch bestimmt werden kann, denn man muß dazu das Zenit des Bahnendpunktes, der unbekannt ist und die relative Geschwindigkeit kennen. Für den letzteren kann der Beobachtungsort genommen werden, woraus große Fehler nicht entstehen können. Statt der unbekannten Geschwindigkeit wird gewöhnlich die aus der parabolischen Bahn sich ergebende geozentrische Geschwindigkeit genommen.

II. Ableitung der Bahn im Sonnensystem.

Die von der Zenitattraktion befreiten Koordinaten des *scheinbaren* Radianten a', d' sollen in der Beziehung auf die Ekliptik mit λ', β' bezeichnet werden. Diese und die geozentrische (relative) Geschwindigkeit v' entstehen durch die Zusammensetzung der heliozentrischen Bewegung des Meteors mit der Geschwindigkeit v aus der durch die analogen Koordinaten λ, β bezeichneten Richtung mit der Größe und Richtung der heliozentrischen Erdbewegung am Knoten der Meteorbahn. λ, β bestimmen den *wahren* Radiationspunkt und v ist die *heliozentrische* Geschwindigkeit an dieser Stelle. Der viel zu unbedeutende Einfluß der Erdrotation kann hier außer Betracht bleiben.

Als Einheit zur Bezeichnung von v und v' soll nun wie üblich, wenn nichts anderes bemerkt ist, die Geschwindigkeit der Erde in der mittleren Entfernung von der Sonne genommen werden. Die in Kilometern ausgedrückten Größen werden auf diese Einheit hinreichend genau zurückgeführt, indem man durch 29.59 dividiert.

Für den Radiusvektor, oder die Entfernung der Erde von der Sonne, gilt als Einheit die mittlere Entfernung oder die große Halbachse der Erdbahn. Für jene Stelle der Erdbahn, an welcher die Sonnenlänge $\odot$ ist, beträgt die zugehörige Entfernung in dieser Einheit:

$$r = 1 + e' \cos (\odot - \Pi).$$

Hierin kann noch für lange Zeit hinreichend $e' = 0.01676$ und, wenn T die Jahreszahl bezeichnet,

$$\Pi = 101^0\, 12.8' + 1.03' (T - 1900)$$

genommen werden. Übrigens ist r für alle Tage in jedem astronomischen Jahrbuch gegeben.

Bezeichnet $\odot'$ die Länge der Normalenrichtung an dem Punkt der Erdbahn, für welchen die Sonnenlänge $\odot$ beträgt, so ist

$$\odot' = \odot + \frac{e'}{\text{arc } 1'} \sin (\odot - \Pi) = \odot + 57'.6 \cdot \sin (\odot - \Pi)$$

und demnach ist die Länge des in der Ekliptik liegenden jedesmaligen Zielpunktes oder *Apex* der Erdbewegung $= \odot' - 90^0$.

Endlich ist die *heliozentrische* Geschwindigkeit der Erde in der Entfernung r von der Sonne gegeben durch $\sqrt{\frac{2}{r} - 1}$.

Zwischen λ', β', v' und λ, β, v bestehen die drei Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} v\cos\beta\sin(\odot' - \lambda) = v'\cos\beta'\sin(\odot' - \lambda') - \sqrt{\frac{2}{r} - 1}, \\ v\cos\beta\cos(\odot' - \lambda) = v'\cos\beta'\cos(\odot' - \lambda'), \\ v\sin\beta = v'\sin\beta', \end{cases}$$

woraus man λ, β und v findet.

Will man allein die Größe der heliozentrischen Geschwindigkeit kennen lernen, so erhält man hieraus

$$(21)\quad v^2 = v'^2 + \left(\frac{2}{r} - 1\right) - 2v'\sqrt{\frac{2}{r} - 1}\cdot\cos\beta'\sin(\odot' - \lambda')$$

und die halbe große Achse der betreffenden Meteorbahn

$$(22)\quad a = \frac{r}{2 - rv^2}.$$

Diese Bahn ist also eine *Ellipse* oder eine *Hyperbel*, je nachdem a positiv oder negativ ausfällt, je nachdem $v^2 \lessgtr \frac{2}{r}$ ist.

Der Parabel für $a = \infty$ entspricht daher der besondere Grenzfall $v^2 = \frac{2}{r}$.

Zuweilen wird aus der periodischen Wiederkehr besonders reichlich auftretender Meteore eines bekannten Radianten λ', β' (z. B. der „Leoniden") auf die Umlaufszeit U eines dichtern Meteorschwarmes geschlossen und diese danach als gegeben betrachtet. Um die übrigen Bahnelemente in einem solchen Falle zu berechnen, erhält man

$$(23)\quad a = U^{\frac{2}{3}}$$

und hiernach auch v. Dann liefern die drei Gleichungen (20) v', λ und β, aus welchen die Bahnelemente des Stromes nach dem Folgenden abgeleitet werden können.

Bezeichnen: i die Neigung der heliozentrischen Meteorbahn gegen die Ekliptik, τ den Winkel der Tangente an diese Bahn mit dem Radiusvektor r der Erdbahn im Knoten der Meteorbahn, p den halben Parameter, e die Exzentrizität, q die Periheldistanz derselben und w deren wahre Anomalie für den Radiusvektor r, so erhält man diese Größen aus nachstehenden Gleichungen:

$$(24)\quad \begin{cases} \sin i\sin\tau = \sin\beta, \\ \cos i\sin\tau = -\cos\beta\sin(\odot - \lambda), \\ \cos\tau = -\cos\beta\cos(\odot - \lambda), \end{cases}$$

$$(25)\qquad \begin{cases} p = r^2 v^2 \sin^2 \tau, \\ e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}, \quad q = \frac{p}{1+e} = a\,(1-e), \\ \cos w = -\frac{1 - \frac{p}{r}}{e}. \end{cases}$$

Wegen Ermittlung der weiteren Elemente kann auf die Bahnberechnung der Kometen und Planeten verwiesen werden, da nunmehr alle hierzu nötigen Stücke gegeben sind. Die Größen i und τ müssen stets in gegenseitiger Beziehung gezählt werden. Rechnet man τ von der gegen $180 + \odot$ hinausgehenden Verlängerung des Radiusvektor r gegen die Sonne hin stets nur im 1. oder 2. Quadranten, so erhält $\sin i$ immer das Vorzeichen von $\sin \beta$. Für nördliche Radianten ist daher der betreffende Knoten stets der absteigende und es ist dann $\Omega = \odot$. Die Bewegung ist unter dieser Voraussetzung (nämlich für positive β) recht- oder rückläufig, je nachdem i im 1. oder 2. Quadranten liegt. Für Radianten in südlicher Breite wird $\Omega = 180 + \odot$ und die Bewegung recht- oder rückläufig, je nachdem i aus den Gleichungen im 3. oder 4. Quadranten hervorgeht. Bei der späteren Darstellung der Elemente wird aber i für den betreffenden aufsteigenden Knoten mit dem Beisatze recht- oder rückläufig angegeben.

Da für eine erhebliche Anzahl großer (auch sogenannter detonierender und selbst auch mit dem Niederfallen von Massen verbundener) Meteorerscheinungen durch sorgfältige Benutzung des Beobachtungsmaterials festgestellt ist, daß deren heliozentrische Geschwindigkeit v die oben bezeichnete parabolische Grenze wesentlich überschreitet, so daß a negativ, $e > 1$, die heliozentrische Bahn demnach eine ausgesprochene Hyperbel darstellt, welche schon der Lage nach unmöglich im Sonnensystem erzeugt worden sein konnte, so muß angenommen werden, daß solche Körper aus dem Weltraum in das Sonnensystem eingedrungen sind.

Körper, welche im Weltraume nahezu parallele Bahnen in großen lateralen Abständen mit identischer Geschwindigkeit beschreiben, also gleichsam einem *siderischen Strome* von bedeutender Ausdehnung angehören, können die Erdbahn in so verschiedenen Knotenlängen treffen, daß außer a, welches von der ursprünglichen kosmischen Geschwindigkeit abhängt, alle anderen gleichnamigen Bahnelemente und danach auch die Koordinaten der scheinbaren Radianten gänzlich verschieden ausfallen können.

Was unter solchen Umständen eine Vergleichung verschiedener

Fälle ermöglicht, ist nicht *der Komplex jener Elemente*, welche für die Bahnen der Planeten und Kometen charakteristisch sind, sondern nach dem hier Gesagten ausschließlich die Größe und Richtung der Bewegung für so große Werte des Radiusvektor ϱ, gegen welche selbst r nahezu als verschwindend klein angesehen werden kann. Da ein solcher Bahnteil der Asymptote sehr nahe kommt, kann man für diese Entfernung $\varrho = \infty$ nehmen.

Der Richtpunkt dieser Asymptote an der scheinbaren Himmelskugel, dessen Länge und Breite hier l, b heißen sollen, kann als der *siderische* oder *kosmische Ausgangspunkt* des Meteors bezeichnet werden. Die Bestimmung desselben, für verschiedene Annahmen von $a(v)$, bei gegebenem Strahlungspunkt $\lambda' \beta'$, ist hinsichtlich der hyperbolischen Meteore eigentlich das *wichtigste Ziel.*

Ist w' die wahre Anomalie der Meteorbahn für den Radiusvektor $\varrho = \infty$ und σ der Winkel, welchen die Richtung der Asymptote (aus dem Punkt l, b) mit dem Radiusvektor r am Bahnknoten der Erdbahn bildet, völlig in analoger Zählung und Bedeutung wie τ, so erhält man

$$\cos w' = -\frac{1}{e}, \qquad \sigma = w' - w, \tag{26}$$

oder, wenn

$$\sqrt{\frac{rv^2}{rv^2 - 2}} = m, \tag{27}$$

$$\operatorname{tang} \frac{\sigma}{2} = \frac{m \sin \tau}{1 + m \cos \tau}; \tag{28}$$

für umgekehrte Bestimmungen bequemer, auch

$$\cos (2\tau - \sigma) = \frac{2 + (rv^2 - 2) \cos \sigma}{rv^2}, \tag{29}$$

l, b erhält man dann aus:

$$\begin{cases} \sin (\odot - l) \cos b = -\sin \sigma \cos i, \\ \cos (\odot - l) \cos b = -\cos \sigma, \\ \sin b = \sin \sigma \sin i. \end{cases} \tag{30}$$

Die Geschwindigkeit für den Eintritt in das Sonnensystem ($\varrho = \infty$) gibt

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{v^2 - \frac{2}{r}}. \tag{31}$$

Für parabolische Bahnen wäre $rv^2 - 2 = 0$, also $a = \infty$, hiernach:

$$\begin{cases} p = 2r \sin^2 \tau, & e = 1 \quad w = 180^0 - 2\tau, \\ q = \frac{p}{2} = r \sin^2 \tau, & w' = 180^0, \\ \sigma = 2\tau, & v_0 = 0 \quad \pi = 180^0 + \odot \pm w. \end{cases} \tag{32}$$

Es kann zuweilen von großem Interesse sein, die Aufgabe in umgekehrter Ordnung zu lösen, d h. also den scheinbaren Radianten λ', β' für einen bestimmten Tag des Jahres ($\odot$) zu bestimmen, wenn als gegeben vorausgesetzt werden:

a) die nötigen Elemente der elliptischen Meteorbahn, oder
b) das parabolische Aphel durch l, b oder endlich
c) der hyperbolische kosmische Ausgangspunkt, auch wieder durch l, b mit v_0 oder v.

Es ist dann nach dem Früheren bei den elliptischen Bahnen a, wenn nicht ohnehin direkt durch das Elementensystem, durch die Umlaufszeit U, bei den hyperbolischen durch die Gleichungen (31) oder (22) gegeben.

Ferner

$$v = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}. \tag{33}$$

Unter den elliptischen Elementen sind auch e^2 und i gegeben. Man kann also berechnen:

$$p = a(1 - e^2), \quad \sin \tau = \frac{\sqrt{p}}{rv}; \tag{34}$$

dann aus System (24) den Ort λ, β des wahren und aus (20) λ', β', v' für den scheinbaren Radianten. Die Zenitattraktion kann nur für eine bestimmte Polhöhe und Sternzeit angebracht werden.

Bei hyperbolischen Bahnen ist in der Gleichung für v a negativ, bei parabolischen unendlich zu nehmen.

Das System (30) liefert mit $\odot$, l und b, dann i und σ, ferner erhält man aus (29) τ, aus (24) λ, β und zuletzt auch wieder λ', β' und v'.

Gleichung (29) liefert für jede Ausgangsrichtung l,b ein zusammengehöriges *Radiantenpaar*. Umgekehrt gibt es daher auch für jede $\odot$ stets *zwei* zusammengehörige und mit *einem* l,b konjugierte scheinbare Radianten an weit voneinander entfernten Stellen des scheinbaren Himmelsgewölbes. Man findet beide leicht, wenn man bedenkt, daß $\cos(2\tau - \sigma)$ auch bei feststehendem Vorzeichen stets zweierlei Werte für $2\tau - \sigma$, also für ein bestimmtes σ zweierlei τ, entsprechend den in jeder Ebene und für identischen Brennpunkt möglichen Hyperbeln, welche nach einer Seite hin parallele Asymptoten besitzen. Dabei ist die eine Bahn rechtläufig, die andere rückläufig, und ihre Perihele liegen auf entgegengesetzten Seiten des Radiusvektor. Da eine der beiden Periheldistanzen gewöhnlich sehr klein ist, fällt der zugehörige Radiant meist noch in den vom Sonnenlicht beherrschten Himmelsraum. Für die parabolischen Bahnen müßten die *wahren* Orte der

beiden zusammengehörigen Radianten einander diametral gegenüber liegen.

Die im vorstehenden angegebenen Ausdrücke für die Bahnbestimmung gehen bei dem gegenwärtigen Stande der Beobachtungstechnik hinsichtlich der rechnerischen Genauigkeit über das erforderliche Maß hinaus. Sie werden daher zweckmäßig nur dann anzuwenden sein, wenn es sich um die Weiterentwicklung von bestimmten theoretischen Annahmen handelt. Bei der Verwertung von Beobachtungen aber wird man schneller und doch ohne merklichen Genauigkeitsverlust ans Ziel gelangen, wenn man überall hinsichtlich der Erdbahn $e = 0$, $r = 1$, $\odot' = \odot$ und auch die Geschwindigkeit der Erde durchweg $= 1$, kurz die Erdbahn als kreisförmig nimmt.

Es ist leicht, die vorhin angeführten Ausdrücke durch diese Substitutionen zu vereinfachen, nur wäre zu erwähnen, daß es nicht notwendig ist, den wahren Radianten aufzusuchen, wenn man auf dem kürzesten Wege zu den gewöhnlichen Elementen gelangen will.

Man rechnet nämlich

$$(35)\quad \begin{cases} v^2 = v'^2 + 1 - 2v' \cos\beta' \sin(\odot - \lambda'), \\ \cos\tau = -\dfrac{v'}{v} \cos\beta' \cos(\odot - \lambda'), \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{aligned} \sin i &= -\operatorname{tang}\beta' \operatorname{cotg}\tau \sec(\odot - \lambda'), \\ \cos i &= \frac{1 + v\cos\tau \operatorname{tang}(\odot - \lambda')}{v \sin\tau}. \end{aligned}$$

Das Weitere ergibt sich durch die angeführte Substitution in die bekannten Formeln.

Für die Bestimmung des siderischen Ausgangspunktes l, b wird

$$(37)\quad \begin{cases} \text{mit } \dfrac{v}{\sqrt{v^2 - 2}} = m \qquad \operatorname{tang}\dfrac{\sigma}{2} = \dfrac{m \sin\tau}{1 + m\cos\tau}, \\ \cos(2\tau - \sigma) = \dfrac{2 + (v^2 - 2)\cos\sigma}{v^2}, \end{cases}$$

worauf man aus System (30) l und b findet. Die Geschwindigkeit für $\varrho = \infty$ wird $v_0 = \sqrt{v^2 - 2}$.

Die Vereinfachung der umgekehrten Aufgabe, aus l, b den Radianten λ', β' zu finden, bedarf hiernach keiner weiteren Ausführung. Rechnungsergebnisse für die Bahnelemente aus der *den Beobachtungen* entnommenen Geschwindigkeit sind fast wertlos, weil die Grundlage für diesen Zweck zu unsicher ist. Die *möglichst sorgfältige* Ableitung der Geschwindigkeit ist allerdings *sehr wichtig*, um wenigstens den Grad der Wahrscheinlichkeit kenntlich zu machen, daß die betreffende planetarische Bahn von der Parabel nach der einen oder anderen

Seite abweicht. Die Berechnung der Elemente jedoch, wenn man sich damit befassen will, soll mit verschiedenen *angenommenen, zweckmäßig gewählten* Werten für die Geschwindigkeit durchgeführt werden, wodurch die Gesamtergebnisse zur Vergleichung mit anderen Fällen anschaulicher gestaltet werden.

III. Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse aus Meteorbeobachtungen.

1. Mittlere Genauigkeit der Beobachtungen und der Rechnungsergebnisse.

a) *Am End- oder Hemmungspunkt der Bahn. Der mittlere Fehler einer Richtung* (eines Azimuts) ergab sich im Durchschnitt aus 351 benutzten Beobachtungen zu $\pm$ 5.8°.

Die Feststellungen erfolgten nur in 12 % durch sogleiche Beziehung auf Gestirne, in etwa 20 % auf Grund späterer Messungen, in den übrigen Fällen durch Bezeichnung irdischer Objekte der Umgebung nach Plänen und Karten usw.

Der *mittlere Fehler* einer Bezeichnung der *scheinbaren Höhe* oder Zenitdistanz kann aus 235 Angaben zu $\pm$ 4.1° angenommen werden. Es wurden in der Regel nur Beziehungen auf Gestirne oder doch nachträgliche Messungen berücksichtigt. Rohe „Abschätzungen" liefern bekanntlich fast immer *viel zu große* scheinbare Höhen. Wo solche ausnahmsweise in Verwendung kamen, wurden sie in der Regel auf $^2/_3$ bis $^3/_5$ des angegebenen Betrages reduziert.

Die Azimute, bei welchen solche einseitige Fehler minder zu besorgen sind, wurden nicht so streng gesichtet, was auch an dem größeren mittleren Fehler einer Beobachtung zu erkennen ist.

Der *mittlere Fehler* in der Bestimmung der *geographischen Lage* des *Endpunktes* ergab sich aus 42 Fällen zu $\pm$ 8.3 km. Die besten Bestimmungen blieben noch bis $3^1/_2$—4 km ungenau. Der *mittlere Fehler* der abgeleiteten *linearen Höhen* beträgt durchschnittlich $\pm$ 3.4 km.

b) *Am Anfangspunkt der beobachteten Bahn.* Die Umstände der Beobachtungen verursachen es, daß ein Meteor von mehreren Beobachtern an ganz verschiedenen Stellen seiner Bahn zuerst aufgefaßt werden kann. Dies sind Unterschiede, welche ganz und gar nicht den Charakter von Beobachtungsfehlern tragen. Als solche können nur die transversalen Abweichungen von der verbesserten scheinbaren Bahn betrachtet werden.

Diese betrugen für den Anfangspunkt aus 217 Angaben im Mittel $\pm$ 4.2°. Sie wurden in ähnlicher Weise wie für den Endpunkt erhalten, jedoch gröbere Angaben häufiger als dort ausgeschlossen.

Bei *Beziehungen auf Gestirne*, wenn sie sogleich nach der Beobachtung hergestellt wurden, ergab sich der mittlere Fehler einer solchen für den Anfangs- oder Endpunkt im Durchschnitt zu $\pm$ 3½°.

c) *Schätzungen der scheinbaren Neigung der beobachteten Lichtbahn* wiesen in 250 benutzten Fällen durchschnittlich einen mittleren Fehler von $\pm$ 6.5° auf. Solche Schätzungen bezogen sich gewöhnlich auf den Vertikal des gesehenen Endpunktes oder eines sonst bezeichneten Bahnpunktes und wurden zumeist durch graphische Skizzen geliefert. Radianten, welche nicht weit über dem Horizonte liegen, werden gewöhnlich nur durch einen geringen Teil dieser Unsicherheit beeinflußt.

d) *Erreichte Genauigkeit in der Ableitung der Radianten.* Bei 43 verläßlichen Bestimmungen von Radianten großer, zumeist detonierender Feuerkugeln aus 537 scheinbaren Bahnen (also durchschnittlich aus 12—13 Beobachtungen für je einen Fall) stellte sich der mittlere Fehler in der Lage dieses Punktes am Himmel im Durchschnitt auf $\pm$ 3.3°.

Die Anzahl der in den einzelnen Fällen verwendbaren Bahnbogen war aber sehr ungleich und betrug manchmal über 40, aber oft auch nur 3—4.

Gegenwärtig sind mehr als 420 Feuerkugel-Radianten nachgewiesen, von welchen jedoch ungefähr 30% mit anderen identisch sein dürften. Viel größer ist die Anzahl der in den letzten Katalogen verzeichneten Radianten von Sternschnuppen. *Denning*[5]) führt aus der betreffenden Literatur, sowie nach eigenen Beobachtungen 4367 solcher Strahlungspunkte an, von denen indessen wahrscheinlich mehr als die Hälfte mit andern zusammenfällt.

Wenn er dabei[6]) bemerkt, daß durchschnittlich in jeder Nacht mehr als 50 Radianten wirksam sind, so ist dies sicher richtig, nur können wegen zu geringer Frequenz an einzelnen Meteoren viele davon nicht jedesmal am selben Ort und in jedem Jahre nachgewiesen werden.

Die reichen Sternschnuppen-Ströme liefern so viel Beobachtungsmaterial, daß ihre Radiationspunkte zumeist genauer als jene der Feuerkugeln bestimmt werden konnten, wie nachstehende Beispiele, in welchen die mittlern Fehler angesetzt sind, zeigen:

---

5) *W. F. Denning*, General-Catalog (1899).
6) *W. F. Denning*, Ebenda p. 203.

	Ort des scheinb. Radianten: Rectasc.	Declinat.	Maximum
Leoniden	150.1° (± 0.3°)	+ 23.0° (± 0.2°)	November 14
Perseiden	44.0° —	+ 56.9° —	August 10
Lyriden	271.5° (± 0.7°)	+ 33.4° (± 0.4°)	April 20
Andromediden	23.8° (± 0.9°)	+ 44.0° (± 0.2°)	November 26—28
Quadrantiden	230.9° (± 0.7°)	+ 51.3° (± 0.4°)	Jänner 2
Geminiden	108.3° (± 0.5°)	+ 33.6° (± 0.4°)	Dezember 10—12
Orioniden	89.7° (± 0.5°)	+ 15.6° (± 0.3°)	Oktober 10—16
	91.5° (± 0.3°)	+ 15.7° (± 0.3°)	Oktober 16—22

für die „Perseiden" glaubt *Denning*[7]) die Wirksamkeit von Juli 11 bis August 19 annehmen zu sollen, wobei der Radiant eine Verschiebung von $\alpha = 11.5^0$ $\delta = 47.7^0$ bis $\alpha = 56.6^0$ $\delta = 59.1^0$ erfährt.

Alle diese Ströme führen längs ihrer ganzen bisher bekannt gewordenen Bahnen mehr oder weniger dicht verbreitete Partikel, aber nur die „Leoniden" überdies einen in sichergestellter *Periode* von $33^1/_4$ Jahren zur Sonnennähe wiederkehrenden besonders reichen Schwarm.

2. Ergebnisse für die Höhe des Aufleuchtens und der Hemmung, und ihre Beziehungen zu anderen Faktoren. In dieser Hinsicht muß unterschieden werden zwischen den kleineren Erscheinungen, welche man gewöhnlich als „Sternschnuppen" bezeichnet, und den großen Meteoren, die als „Feuerkugeln" häufig mit außerordentlicher Lichtentwicklung, oft auch bedeutenden Schallimpulsen, zuweilen nachweisbar von Meteoritenfällen gefolgt, ihren Lauf in der Atmosphäre beschließen.

Hinsichtlich der *Sternschnuppen* des sogenannten *Perseidenstroms* im August fand *Weiß*[8]) in Wien aus der Bearbeitung von 49 verläßlichen korrespondierenden Beobachtungen als Mittelwerte für die *Höhen:*

Beim *Aufleuchten*: 115 km,
„ *Erlöschen*: 88 „ .

Unabhängig davon wurden von *H. A. Newton*[9]) ebenfalls für die *„Perseiden"* aus 39 Beobachtungen durchschnittlich folgende Höhenmittel abgeleitet:

Beim *Aufleuchten*: 112 km,
„ *Erlöschen*: 90 „ .

Eine vortreffliche Übereinstimmung.

7) *W. F. Denning,* Astr. Nachr. 148 (1899) p. 283.
8) *E. Weiß,* Wien. Ber. 1868.
9) *H. A. Newton,* American Journal of Science and Arts. 2. Serie. 40.

Für die Sternschnuppen der „*Leoniden*“ im November dagegen berechnete *Newton*[10]) aus 78 Bestimmungen die Höhenmittel:

Für das *Aufleuchten*: 155 km,
„ „ *Erlöschen*: 98 „ .

Danach liegt für diese durchschnittlich die ganze Lichtbahn *höher* als für die „Perseiden“, was offenbar damit zusammenhängt (s. unten), daß die „Leoniden“ mit rund 70 km und die „Perseiden“ nur mit 60 km relativer Geschwindigkeit in die Atmosphäre eintreten. Übrigens scheinen die Massen des Novemberstroms auch chemisch besonders charakterisiert zu sein.[11])

159 Höhenbestimmungen von Sternschnuppen (5. bis 1. Größe) der *verschiedensten Radianten*[12]), wobei also auch geringere Geschwindigkeiten vertreten sind, geben im Durchschnitt

für das Aufleuchten: 108.5 km,
„ „ Erlöschen: 86.3 „ ,

also eine nur geringe Abweichung von den für die „Perseiden“ erlangten Resultaten.

Für die *großen Meteore*, einschließlich jener mit Detonationen und Meteoritenfällen, fand ich aus besonders sichern Bestimmungen *ohne* Auswahl der größten Erscheinungen:

für das Aufleuchten (121 Fälle): 138.6 km,
„ „ Erlöschen (213 „): 49.7 „ .

Diese Zusammenstellung zeigt, insbesondere wegen der vergleichsweise geringern Höhe des Hemmungspunktes, also des tieferen Eindringens in die Atmosphäre, den Einfluß größerer Massen. Dieser drückt sich noch deutlicher aus bei weitergehender Unterscheidung. Ich fand[13]) die Höhe des Hemmungspunktes im Durchschnitte:

für 147 Feuerkugeln ohne Detonation: 60 km,
„ 57 detonierende Meteore: 31 „ ,
„ 16 Meteoritenfälle: 22 „ .

Hiernach dürfte es wohl begründet sein, diese verschiedenen Typen durch graduelle Massenunterschiede zu erklären, da größere Massen einen relativ geringeren Widerstand in der Atmosphäre erfahren und daher tiefer herabsteigen können als die kleineren.

10) *H. A. Newton*, Ebenda.

11) Die „Leoniden“ liefern unter allen Sternschnuppen die meisten lange nachleuchtenden Rückstände in der Atmosphäre.

12) Memoirs of the British Astronomical Association. Bd. 9, 12. Part. I (1900—1903).

13) *G. v. Niessl*, Über die Periheldistanzen und andere Bahnelemente jener Meteoriten, deren Fallerscheinungen mit einiger Sicherheit beobachtet werden konnten. Brünn 1891.

Noch wichtiger sind die Beziehungen der *Höhen des Endpunktes* zu den Werten der *geozentrischen Geschwindigkeiten*, welche man aus den Beobachtungen erhält. Um einseitige Auffassungen möglichst zu vermeiden, habe ich in dieser Hinsicht sehr verschiedenes Material untersucht und ich führe die wesentlichsten Ergebnisse in den Zusammenstellungen I bis IV mit der Vorbemerkung an, daß die Gruppen unter I und II sich hauptsächlich auf kleinere Erscheinungen (Sternschnuppen), III und IV überwiegend auf Feuerkugeln beziehen.

Höhenlage des *Endes*	*Zahl* der Fälle	Mittel der beobachteten geozentrischen *Durchschnittsgeschwindigkeiten*	Mittel der *Endhöhen*
		I.[14])	
Über 100 km	23	67.7 km	106.6 km
80—100 „	48	51.5 „	88.8 „
60—80 „	33	35.5 „	73.0 „
30—60 „	17	30.1 „	46.2 „
unter 30 „	2	23.2 „	28.8 „
		II.[15])	
Über 100 km	10	72.3 km	112.2 km
80—100 „	11	43.0 „	88.3 „
60—80 „	13	40.5 „	74.2 „
50—60 „	6	35.4 „	59.2 „
unter 50 „	14	27.4 „	33.9 „
		III.[16])	
Über 60 km	12 (1 deton.)	51.8 km	86.4 km
50—60 „	19 (3 deton.)	55.0 „	54.2 „
30—50 „	43 (16 deton.)	40.6 „	39.0 „
unter 30 „	28 (13 deton.)	37.6 „	24.0 „

14) Die Fälle unter I sind den vorerwähnten „Memoirs of the Br. Assoc. (Fußnote 12) entnommen. Es sind 78% Sternschnuppen, 11% Meteore von 1 bis 4facher Venusgröße, 11% Feuerkugeln bis Mondgröße ohne Detonations-Angaben.

15) II bezieht sich auf ältere von *Denning* veröffentlichte Bearbeitungen. (*W. F. Denning*, 107 Real paths of Fireballs and Shooting-Stars observed in England from 1886 to 1896. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 57, p. 161, worunter 74% Sternschnuppen wie oben, 6% Meteore von Venusgröße oder etwas mehr, 20% Feuerkugeln, einschließlich *einer* detonierenden.

16) III ist entnommen einer Liste von zumeist sehr großen Meteoren, welche ich selbst im gleichen Hefte der Monthly Notices p. 170 veröffentlicht habe. Von den dort angeführten 100 Fällen konnte jedoch nicht überall die Geschwindigkeit

IV.[17])

Über 100 km	9	76.8 km	116.8 km
80—100 „	9	72.0 „	89.3 „
60—80 „	16	49.4 „	72.5 „
50—60 „	21	49.1 „	58.9 „
30—50 „	35	42.7 „	39.0 „
unter 30 „	21	36.6 „	22.1 „

Alle vier Zusammenstellungen zeigen völlig deutlich *einen gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen der aus Beobachtungen abgeleiteten geozentrischen Geschwindigkeit und der Höhe des Hemmungspunktes in dem Sinne, daß die eine mit der anderen abnimmt.*

Es liegt nahe, hieraus zu schließen, daß ein Meteor um so tiefer in die Atmosphäre eindringen kann, mit je geringerer Geschwindigkeit es auftrifft. Daß dieser Schluß zu Recht besteht, wird noch durch folgende Tatsachen erhärtet.

1) Die rascheren Leoniden erlöschen in größeren Höhen, als die langsameren Perseiden, wie oben erwähnt wurde.

2) Unter Voraussetzung gleicher heliozentrischer Geschwindigkeit müssen Meteore, welche der Erde in ihrem Laufe direkt (vom Apex her) *begegnen*, mit einer relativen Geschwindigkeit in die Atmosphäre eintreten, welche rund 56 km größer ist, als jene der Meteore von der entgegengesetzten Seite (vom Antiapex). Ordnet man die Meteore nach der Elongation ihres Radianten vom Apex, so findet man folgende Ergebnisse:

1. Aus dem Material Fußnote [15]).

Scheinbare Elongation der Radianten	Anzahl der Fälle	Durchschnittliche Höhe des Endpunktes
zwischen 0^0 und 40^0	12	95.6 km
„ 40 „ 70	12	84.5 „
„ 70 „ 90	12	61.6 „
„ 90 „ 110	10	59.8 „
„ 110 „ 180	10	52.1 „

bestimmt werden; mit den seitherigen Ergänzungen ergaben sich aber 102 zusammengehörige Bestimmungen von Endhöhe und Geschwindigkeit.

Dieses Material enthält nur 8% Sternschnuppen 1. bis über 4. Größe und 27% Meteore von ein- bis mehrfacher Venusgröße. Dagegen sind 65% große Feuerkugeln mit Mond- oder Sonnengröße verglichen, darunter 30% detonierend und 7 Meteoritenfälle.

17) IV entstammt einer Analyse von 111 Fällen, die ich nach Materialien der älteren Literatur bearbeitet habe. Da früher die Größenbezeichnungen minder bestimmt lauteten, kann ich nur sagen, daß diese Daten sich ebenfalls mehr auf große Meteore (darunter 22% detonierende) beziehen.

2. Aus dem Material Fußnote [16]).

Scheinbare Elongation der Radianten	Anzahl der Fälle	Durchschnittliche Höhe des Endpunktes
zwischen 0^0 und 80^0	13	54.2 km
„ 80 „ 90	9	50.5 „
„ 90 „ 100	10	44.5 „
„ 100 „ 110	11	40.2 „
„ 110 „ 120	7	38.6 „
„ 120 „ 150	13	38.6 „
„ 150 „ 180	7	36.4 „

Abgesehen von Details, welche für diese Feststellung unwesentlich sind, zeigen beide Reihen den erwarteten Zusammenhang zwischen Elongation und Endhöhen. Daß letztere in der ersten Liste überhaupt größer sind als in der zweiten, ist wohl gewiß darin begründet, daß sich jene überwiegend auf kleine, schon in großen Höhen erlöschende, meine dagegen fast nur auf große Meteore bezieht. In dieser Hinsicht bildet daher letztere gewissermaßen eine ergänzende Fortsetzung der ersteren. Zum Teil muß die geringere beobachtete Geschwindigkeit der tieferen Meteore selbstverständlich auch auf der Abnahme der Geschwindigkeit während des Laufes durch die Atmosphäre beruhen. Die schließliche Hemmung ist fast momentan, doch liegen auch einzelne Erfahrungen vor, daß aus Beobachtungen, die sich nur auf die *untersten* Bahnteile in den tieferen atmosphärischen Schichten beziehen, *geringere* Geschwindigkeiten erhalten werden, als die durchschnittliche, welche bei Berücksichtigung der *ganzen* Bahnlänge in *demselben Falle* hervorgeht[18]). Freilich erschweren die Fehler in der Schätzung kurzer Zeitdauern hier ein abschließendes Urteil.

Vergleich mit der Theorie des Luftwiderstandes. Zur Berechnung des Luftwiderstandes, welchen die Meteore in den einzelnen Phasen erleiden, hat man versucht, die Erfahrungen zu benutzen, welche aus Experimenten mit sphärischen Geschossen der Artillerie abgeleitet wurden. Die nachstehenden Zusammenstellungen sind auf die *Robert*sche[19]) Widerstandsformel gegründet. Sie setzen vertikale Bewegung eines 118 Gramm schweren kugelförmigen Körpers von 3.5 Dichte und 2 cm Halbmesser voraus. Die beiden Annahmen über die Geschwindigkeit, mit der jener in die Atmosphäre eintritt, bezeichnen für eine parabolische Bahn die Extreme (vom Apex und Antiapex

18) Vgl. *G. v. Niessl*, Wien. Ber. 114 (1905), p. 1511.

19) *Schiaparelli* p. 23 und 24 nach *S. Robert*, Del moto dei Projettili nei mezzi resistenti. Torino 1855. (Memorie dell' Academia delle scienze di Torino, II 9 16.)

her). Wäre bei derselben Dichte der Halbmesser $2r$ cm und die Neigung der Bahn gegen den Horizont h, so können in der Spalte für die Geschwindigkeit die Werte ungeändert bleiben, wenn der zugehörige Luftdruck mit $r \sin h$ multipliziert wird.

I			II		
Eintrittsgeschwindigkeit: 72 km			Eintrittsgeschwindigkeit: 16 km		
Luftdruck mm	Höhe km	Geschwindigkeit km	Luftdruck mm	Höhe km	Geschwindigkeit km
—	—	72	—	—	16
0.00007	129	70	0.006	94	14
0.00014	125	68	0.016	86	12
0.0005	114	60	0.032	80	10
0.0013	106	48	0.062	75	8
0.0031	99	36	0.128	69	6
0.0082	91	24	0.305	62	4
0.036	80	12	1.229	51	2
0.082	73	8	4.299	41	1
0.315	62	4	11.619	33	0.5
1.249	51	2			
4.318	41	1			
11.639	32	0.5			

In beiden Fällen kommt die Höhe (33 km), in welcher die planetarische Geschwindigkeit nahezu aufgebraucht erscheint, der für detonierende Meteore im frühern angeführten durchschnittlichen Hemmungshöhe fast gleich. Die Art der Geschwindigkeits-Abnahme widerspricht jedoch allen sonstigen Erfahrungen. So würde z. B. die durch Abschätzung der Dauer für den Fall I aus 129 km bis 33 km erhaltene Durchschnittsgeschwindigkeit nur $^1/_{18}$ der Eintrittsgeschwindigkeit und bei Meteoren, welche erst in tieferen Regionen, z. B. zwischen 80 km und 33 km beobachtet wurden, was nicht selten vorkommt, gar nur $^1/_{36}$ derselben betragen. Tatsächlich erhält man für Meteore, welche nur im untersten Bahnteil beobachtet wurden, allerdings fast immer viel geringere Geschwindigkeiten, aber bei weitem nicht in dem hier angeführten Maße.

Für 16 km Eintrittsgeschwindigkeit würde (II) die beobachtete Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen 94 und 33 km Höhe auch nur $^1/_7$ der ursprünglichen, also immer noch viel zu wenig betragen. An diesen Umständen ändert sich auch nichts Wesentliches, wenn man andere Annahmen unterlegt.

Die wirkliche geozentrische Geschwindigkeit der „*Leoniden*", unter welchen besonders viele helle Sternschnuppen vorkommen, ist uns aus

der bekannten Umlaufszeit sicher gegeben und beträgt nicht viel weniger als 72 km. Für ein Körperchen dieses Stromes von 2 mm Halbmesser und 0.12 Gramm Gewicht, dessen Bahn die Atmosphäre in 30° Neigung gegen den Horizont durchschneidet, hätte man die oben unter I angeführten Luftdrucke durch 20 zu dividieren, woraus sich dann die zugehörigen Höhen wie folgt ergeben:

III.

Höhe km	Geschwindigkeit km	Höhe km	Geschwindigkeit km
153	70	103	12
147	68	97	8
138	60	86	4
130	48	75	2
123	36	65	1
115	24	57	0.5

Für die ganze Bahn aus 153 km bis 57 km würde sich als Durchschnittsgeschwindigkeit auch hier nur ungefähr 4 km oder $^1/_{18}$ der Eintrittsgeschwindigkeit ergeben. Wie früher mitgeteilt wurde, liegen die Bahnen der Leoniden im Mittel zwischen 155 und 98 km, vermutlich, weil die Partikel durch die bedeutende Wärmesteigerung gänzlich aufgelöst werden, ehe sie tiefer herabkommen können. In der Tat hinterlassen die Körper dieses Stromes unter allen Sternschnuppen die meisten anhaltenden Schweifrückstände. Es scheint daher zweckmäßig, das vorstehende Schema nur innerhalb ähnlicher Grenzen, also zwischen 153 und 97 km zu betrachten. Dabei erhält man dann im Durchschnitt etwa 27 km oder $^3/_8$ der ursprünglichen Geschwindigkeit, während aus den Beobachtungen die Differenz gegenüber der theoretischen im Mittel viel geringer ausfällt.

Direkte Beobachtungen, so lückenhaft ihre Ergebnisse auch noch sind, machen es überhaupt wahrscheinlich, daß die Verminderung der Geschwindigkeit in den höheren atmosphärischen Regionen geringer, dagegen in dem letzten, untersten Teil der Bahnen, welche tiefer herabreichen, größer sein müsse, als sie nach den vorstehenden theoretischen Ansätzen erscheint. Auch so manche optische Wahrnehmungen bei der Hemmung von Feuerkugeln sprechen dafür.

Die Abhängigkeit der Höhe des Endpunktes der Lichtbahn von der Eintrittsgeschwindigkeit erfordert noch eine Aufklärung. Es ist unter wahrscheinlicher Annahme nachgewiesen (vergl. *Schiaparelli* 231 u. w.), daß die großen, aber sehr verschiedenen Geschwindigkeiten zweier Körper, welche unter sonst ganz gleichen Umständen in die Atmosphäre eintreten und sie in geradliniger Bahn durchlaufen, durch

den Widerstand derart vermindert werden, daß sie in irgendeiner Höhe fast genau den gleichen Betrag erreichen. In den Beispielen I und II ist dies bei rund 62 km schon der Fall.

Man darf daraus jedoch nicht schließen, daß die Endhöhen von der Eintrittsgeschwindigkeit unabhängig sind. Denn das mit der größeren Geschwindigkeit eintreffende Meteor setzt bis zum Abstieg auf 62 km viel mehr kinetische Energie in Wärme um und wird dadurch viel rascher verbraucht.

3. Masse der Sternschnuppen. *A. Herschel* folgerte[20]) aus der Vergleichung der Leuchtkraft von Sternschnuppen in bekannter Entfernung mit jener einer gegebenen Menge Gases, daß die Meteore „1. Größe" durchschnittlich höchstens wenige Gramme und die kleinern nur Bruchteile eines Gramms wiegen.

Durch ähnliche Vergleichungen mit dem Drummond-Licht gelangte *B. F. Sands*[21]) hinsichtlich der „Leoniden" von 1867 zu nachstehenden Gewichtsschätzungen für Sternschnuppen verschiedener „Größenklassen".

Scheinb. Helligk.:	Jupiters	Sirius	1. Gr.	2. Gr.	3. Gr.	4. Gr.	5. Gr.
Gewicht (Gramm):	0.67	0.45	0.06	0.02	0.01	0.006	0.004.

Wenn auch derartige Schätzungen nur beiläufige Ergebnisse liefern können, so bekräftigen sie doch die Annahme, daß als Substrat des Sternschnuppen-Phänomens nur sehr geringe Massen in Frage kommen, die vermutlich im ursprünglichen Zusammenhange die Erdoberfläche kaum erreichen können.

Nach *Buchner*[22]) wiegt der kleinste unter den aufgefundenen *Aeroliten*, von denen man vermuten kann, daß sie als *einzelne* Körper herabgekommen sind, noch immer 24 Gramm. Viel geringere Partikel, welche im Lauf unter dem Schutz vorangehender größerer Stücke die Atmosphäre in kleinen Aggregaten durchziehen und „Steinregen" verursachen, sind in dieser Hinsicht mit den Sternschnuppen nicht vergleichbar. Sie bilden mit den größern *zusammen* eine Feuerkugel. Erfahrene Beobachter der Sternschnuppen sprachen sich wiederholt dahin aus, daß ihr äußerer Anblick notwendig auf große Verschiedenheiten in ihrer Zusammensetzung schließen läßt[23]). Einiges mögen die beträchtlichen Unterschiede der Geschwindigkeit dazu wohl auch beitragen. Solange man über die physische Natur der Sternschnuppen-Materie nichts Genaueres kennt, wird man beim Vergleiche mit den

---

20) *A. Herschel,* Proc. Brit. meteor. Soc. II 19.
21) *F. Sands,* Wash. Obs. 1867, p. 19—30.
22) *Schiaparelli* p. 203.
23) *Weiß,* Beiträge p. 303.

Meteoriten hauptsächlich die Massenunterschiede zu berücksichtigen haben.

4. Durchschnittliche und außergewöhnliche Bahnlängen. Aus 185 berechneten Bahnen von Sternschnuppen 5. bis 1. Größe der letzten englischen Materialien fand ich im Mittel für die Länge der sichtbar gewordenen Lichtbahn 57 km, dagegen für 120 große und in etwa 30% detonierende Meteore aus meinen eigenen und anderen Bearbeitungen durchschnittlich eine Bahnlänge von 319 km. In einigen Fällen, besonders wenn die betreffenden Radianten sich in der Nähe des Horizontes befinden, kommen noch *weit* längere Bahnen vor. Ein solches Beispiel soll hier angeführt werden.

Das Meteor vom 7. Juli 1892[24]) wurde sichtbar, als es 74 km hoch über der Gegend von *Slobozia* in *Rumänien* sich befand und konnte ununterbrochen verfolgt werden bis 158 km hoch, etwa 70 km WNW der *Tiber*mündung über dem tyrrhenischen Meer. Dort entzog es sich der Beobachtung nicht sowohl durch eine „Explosion", als durch anscheinend allmähliche Entfernung. Bei dieser großen Höhe ist es nicht unwahrscheinlich, daß die noch übrig gebliebenen Massen die Atmosphäre wirklich wieder verlassen haben. Die nachgewiesene Bahnlänge beträgt 1350 km. Es ist der erste und bisher auch einzige mir bekannt gewordene Fall einer zweifellos aufsteigenden Bahn. Da der Punkt in 74 km ungefähr das Perigäum darstellt, so muß weiter gegen Osten hin ein mindestens ebenso langer Bahnteil in der Atmosphäre angenommen werden.

Bemerkenswert ist ein am *18. Oktober 1892 in Niederösterreich* und Böhmen beobachtetes Meteor[25]) besonders durch den ganz ungewöhnlich langen Streifen, in welchem die Residuen zurückblieben. Soweit die Bahnstrecke mit einiger Sicherheit nachgewiesen werden konnte, verlief sie in etwa 1630 km Länge von 257 km über der Gegend 70 km östlich von *Königsberg* in Preußen bis etwa 43 km hoch, etwas südlich der Insel *Elba*. Der Lichtstreifen, „gerade und horizontal wie mit dem Lineal gezogen", war mindestens 634 km lang und blieb durch etwa 3 Minuten sichtbar, so daß sein Verlauf zwischen den Sternen bequem festgestellt werden konnte.

5. Die heliozentrische Geschwindigkeit, welche aus der beobachteten geozentrischen hervorgeht, überschreitet weitaus in den meisten Fällen ganz erheblich den parabolischen Grenzwert und führt

---

24) *G. v. Niessl,* Wien. Ber. 102 (1893), p. 265.

25) *G. v. Niessl,* Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Brünn 1901. 39, p. 220.

zur notwendigen Annahme ausgeprägt hyperbolischer Bahnen. Es ist gewiß bemerkenswert, daß dies fast immer gerade bei denjenigen Bahnen am entschiedensten zu Tage tritt, welche für die möglichst genaue Ausmittlung der Geschwindigkeit die günstigste Lage haben, nämlich bei den aus der Umgebung des Antiapex her gerichteten, wie z. B. bei den Meteoriten von *Pultusk*, für deren Bahn *J. G. Galle*[26]) die Exzentrizität $e = 2.277$ als Minimalwert nachgewiesen hat.

Das Mittel aus 26 der sichersten Bahnbestimmungen, zumeist detonierende große Feuerkugeln betreffend, gibt für die heliozentrische Geschwindigkeit 59.05 km, also sehr nahe $a = -\frac{1}{2}$. Bei den wenigen Meteoritenfällen, für welche hinreichende Beobachtungen vorliegen, um einen Schluß auf die Bahnform zu ziehen, ist die hyperbolische außer jedem Zweifel.

Für 154 große Meteore, deren Bahnverhältnisse älterem Material entnommen oder auch von mir erst bearbeitet wurden, ergab sich die heliozentrische Geschwindigkeit im Mittel zu 59.8 km.

Schiaparelli[27]) *hat schon vor mehr als 36 Jahren* erklärt, es sei „in der Tat bemerkenswert, daß man allemal, wenn man mit irgendwelcher Annäherung die Geschwindigkeit, mit welcher ein Meteorit oder eine Gruppe von Meteoriten in die Atmosphäre eingedrungen ist, hat untersuchen können, auch gefunden hat, daß die entsprechende absolute Geschwindigkeit *größer als die parabolische* war".

Die großen Meteore sind also zweifellos im allgemeinen interstellaren Ursprungs. Dem steht gegenüber, daß Sternschnuppenströme in denselben Bahnen laufen, wie einige Kometen bekannter Umlaufszeit, also gegenwärtig interplanetar sind. Hiernach würde man zunächst geneigt sein, die großen Meteore für interstellar, die kleineren Sternschnuppen für interplanetar zu halten. Doch muß die unleugbare Tatsache hervorgehoben werden, daß die meisten Radiationspunkte von Meteoriten und detonierenden, sowie auch anderen großen Meteoren, sofern sie sichergestellt werden konnten, mit *bekannten Sternschnuppenradianten zusammenfallen.* Es ist schwer, in solchen Fällen den zugehörigen kleinen Erscheinungen interplanetarische Bahnen zuzuschreiben, wenn die gestreckten Hyperbeln der großen Meteore aus denselben Radianten in den Weltraum hinaus weisen.

Zur Lösung dieser anscheinenden Widersprüche wird man viel-

---

26) *J. G. Galle,* Über die Bahn des am 30. Januar 1868 beobachteten und bei Pultusk im Königreiche Polen als Steinregen niedergefallenen Meteors. Breslau 1868.

27) *Schiaparelli* p. 207 und 209.

leicht annehmen können, daß unter dem Namen der „Sternschnuppen" verschiedene, äußerlich ähnliche Erscheinungen zusammengefaßt werden, deren dynamische Grundlagen und kosmische Bedeutung vermutlich nicht gleichartig sind. Aus den vielen Erfahrungen der letzten Jahrzehnte wird man wenigstens zunächst den Schluß ziehen müssen, daß sich in dem Gesamtphänomen neben den begrenzteren *interplanetarischen* auch ausgedehnte *interstellare* Meteorströme durch Partikel verschiedenster Grade geltend machen.

(Abgeschlossen im November 1907.)

VI 2, 11. BAHNBESTIMMUNG DER DOPPELSTERNE UND SATELLITEN.

Von

J. v. HEPPERGER.

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

1. Beobachtung von Doppelsternen.
2. Einleitung zur Bahnbestimmung von Doppelsternen.
3. Bahnbestimmung visueller Doppelsterne.
   a) Benutzung einzelner Örter.
   b) Benutzung der vollständigen scheinbaren Ellipse.
   c) Bahnverbesserung.
   d) Bemerkungen über die bekannten Doppelsternbahnen.
4. Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne.
5. Einige Ergebnisse der Beobachtung und der Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne.
6. Bestimmung der Bahn, Figur und Dichte veränderlicher Sterne.
   a) Algolsterne.
   b) Veränderliche von kontinuierlicher Lichtschwankung.
7. Bahnbestimmung der Satelliten.

Literatur.

I. Bahnbestimmung visueller Doppelsterne.

F. Savary, Sur la Détermination des orbites, que décrivent autour de leur centre de gravité deux étoiles très rapprochées l'une de l'autre. Conn. des Temps pour 1830.

J. F. Encke, Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne, Berl. astr. Jahrb. für 1832.

J. Herschel, On the Investigation of the Orbits of revolving Double Stars, Lond. Astr. Soc. Mem. V, 1833.

— On the Determination of the most probable Orbit of a Binary Star, Lond. Astr. Soc. Mem. XVIII, 1850.

A. J. F. Yvon-Villarceau, Mémoires et Notes sur les étoiles doubles, Conn. des Temps pour 1852.

— Méthode pour calculer les orbites des étoiles doubles, déduite de considerations géométriques, Conn. des Temps pour 1877.

W. Klinkerfues, Über eine neue Methode die Bahnen der Doppelsterne zu berechnen, Diss. Göttingen 1855.

— Über die Berechnung der Bahnen der Doppelsterne. Astr. Nachr. 42 (1856).

— Allgemeine Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen Astr. Nachr. 47 (1858).

H. Seeliger, Zur Theorie der Doppelsternbewegungen, Diss. Leipzig 1872. Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri, Wien. Denkschr. 44 (1881). Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri Münch. Abh. 17 (1892). Über den vierfachen Stern ζ Cancri, München Ber. 24 (1894). Über optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne, München Ber. 19 (1889). Artikel Doppelsterne in Valentiner, Handwörterbuch I, Breslau 1897.

Th. Thiele, Neue Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. 104 (1883).

S. v. Glasenapp, On a graphical Method for determining the Orbit of a Binary Star, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889).

K. Schwarzschild, Methode zur Bahnbestimmung der Doppelsterne. Astr. Nachr. 124 (1890).

T. J. See, On a practical Method of determining double star orbits by a graphical Process, and on the Elements Ω and λ. Astron. and Astroph. J. 12 (1893).

H. Zwiers, Über eine neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. 139 (1896).

H. C. Plummer, An Application of Projective Geometry to Binary Star Orbits, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 60 (1900).

G. Comstock, The Determination of Double Star Orbits, Science 15 (1902).

P. Salet, Détermination des orbites des étoiles doubles. Paris, Bull. Astr. 19 (1902).

R. Jonckheere, Méthode graphique pour déterminer les éléments des orbites des étoiles doubles, Bull. de la Soc. astr. de France 22 (1908).

II. Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne und veränderlicher Sterne.

A. Rambaut, On the Determination of Double Star Orbits from Spectroscopic Observations of the Velocity in the Line of Sight. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 51 (1891).

J. Wilsing, Über die Bestimmung von Bahnelementen enger Doppelsterne aus spektroskopischen Messungen der Geschwindigkeitskomponente. Astr. Nachr. 134 (1894).

R. Lehmann-Filhés, Über die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spektroskopischen Messungen der im Visionsradius liegenden Geschwindigkeitskomponente. Astr. Nachr. 136 (1894).

K. Schwarzschild, Ein Verfahren der Bahnbestimmung bei spektroskopischen Doppelsternen. Astr. Nachr. 152 (1900).

H. N. Russell, An Improved Method of Calculating the Orbit of a Spectroscopic Binary. Astroph. Journ. 15 (1902).

A. Nijland, Zur Bahnbestimmung von spektroskopischen Doppelsternen. Astr. Nachr. 161 (1903).

W. Zurhellen, Bemerkungen zur Bahnbestimmung spektrosk. Doppelsterne. Astr. Nachr. 175 (1907).

K. Laves, A Graphic Determination of the Elements of the Orbits of Spectroscopic Binaries. Astroph. Journ. 26 (1907).
W. F. King, Determination of the Orbits of Spectroscopic Binaries. Astroph. Journ. 27 (1908).
H. C. Plummer, Notes on the Determination of the Orbits of the Spectroscopic Binaries. Astroph. Journ. 28 (1908).
H. D. Curtis, Methods of Determining the Orbits of Spectroscopic Binaries. Publ. of the Astr. Soc. of the Pacific 20 (1908).
F. Schlesinger, The Determination of the Orbit of a Spectroscopic Binary by the Method of Least-Squares, Allegheny Publ. 1 (1908).
M. Mériau, Densité des étoiles variables du type d'Algol, Paris, C. R. 122 (1896).
G. W. Myers, The System of β Lyrae. Astroph. Journ. 7 (1898).
A. Roberts, Density of close Double Stars. Astroph. Journ. 10 (1899).
— On the Relation existing between the Light Changes and the Orbital Elements of a close Binary System. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903); 65 (1905).
J. v. Hepperger, Über den Zusammenhang zwischen der Lichtänderung und den Elementen des Systems β Lyrae. Wien. Ber. 1909.

III. Bahnbestimmung der Satelliten.

F. W. Bessel, Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnsatelliten. Astr. Nachr. 9 (1831).
A. Marth, Researches on Satellites, Astr. Nachr. 44 (1856).
W. Meyer, Bahnbestimmung der Satelliten des Saturn Enceladus, Tethys, Dione und Rhea nach einer neuen Methode. Astr. Nachr. 99 (1881).
— Le Système de Saturne, Mem. Soc. de Phys. et d'Hist. nat. de Genève 1884.
H. Struve, Bestimmung der Elemente von Japetus und Titan aus der Verbindung dieser Satelliten untereinander. Astr. Nachr. 111 (1885).
— Verbindung der Saturntrabanten Titan und Rhea. Astr. Nachr. 111 (1885).
— Vorläufige Resultate aus den Beobachtungen der Saturntrabanten am 30zölligen Refraktor. Astr. Nachr. 123 (1890), 125 (1890).
— Beobachtungen der Saturntrabanten, Poulk. Obs. Centr. Nic. Publ. (2) XI (1898).
W. Klinkerfues, Theoretische Astronomie, Braunschweig I. Aufl. 1871, II. Aufl. (Buchholz) 1899.
J. Bauschinger, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906.
A. O. Leuschner, Versuch der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen. Astr. Ges. Vjs. 43 (1908).

---

1. Beobachtung von Doppelsternen. Schon frühzeitig wurde die Wahrnehmung gemacht, daß einige Sterne, welche das freie Auge einfach sieht, durch das Fernrohr betrachtet doppelt erscheinen, so namentlich α Centauri (*Feuillee* 1709) γ Virginis, Castor, 61 Cygni (*J. Bradley* 1753). Die paarweise Anordnung von Sternen blieb als vermeintliche Wirkung der Perspektive wenig beachtet, bis *Christian Mayer* sie zur Bestimmung der Eigenbewegungen auszunützen gedachte und zu diesem Zwecke emsig nach neuen Paaren suchte. Das Resultat seiner Bemühungen war ein Katalog[1]) (1779) von 72 Doppel-

sternen, unter denen viele weite Paare vorkommen. Ungefähr um diese Zeit hatte *William Herschel* seine erfolgreichen Nachforschungen begonnen, die binnen kurzem zur Entdeckung von 269 Doppelsternen führten. Die Publikation dieser Entdeckungen veranlaßte *J. Michell* der Frage näher zu treten, ob das Vorkommen so vieler Paare mit einiger Wahrscheinlichkeit dem Walten des Zufalls bei der Verteilung der Sterne zugeschrieben werden könne. *Michell*[2]) fand, daß diese Wahrscheinlichkeit äußerst gering ist, und entschied sich für die Annahme, daß in den meisten Fällen die paarweise Anordnung auf Rechnung der Gravitationswirkung zu setzen sei. Schon *W. Herschel* vermochte durch die Beobachtung relativer Bewegung ein wertvolles Argument für die Richtigkeit der Anschauung *Michells* beizubringen. Die Bedeutung der Tätigkeit *W. Herschels* auf dem Gebiete der Doppelsternkunde liegt vor allem in der großen Zahl[3]) (703) der von ihm gefundenen Paare und den vielen, trotz erheblicher Unsicherheit ihres Alters wegen schätzbaren Messungen derselben. Man verdankt ihm auch die Einführung der noch jetzt üblichen Messungsmethode, wonach der Ort des einen Sternes durch Bestimmung des Positionswinkels und der Distanz auf den Ort des andern Sternes bezogen wird. Der Anhaltstern wird Hauptstern, der andere Nebenstern oder Begleiter genannt. Als Hauptstern hat die hellere Komponente zu gelten; ist der Helligkeitsunterschied nicht deutlich markiert, so ist die als Hauptstern gewählte Komponente auf andere Weise kenntlich zu machen. Die Zählung des Positionswinkels ist von *Herschel* nicht immer in derselben Weise vorgenommen worden. *Wilhelm Struve* hat eine einheitliche Zählweise inauguriert durch die Festsetzung, daß der Positionswinkel (θ) der Winkel am Hauptstern ist, um welchen der von diesem zum Nordpol führende Kreisbogen nach der Seite hin, auf welcher die Sterne mit größeren Rektaszensionen liegen, gedreht werden muß, um den Nebenstern in sich aufzunehmen. Distanz (ϱ) ist der in Bogensekunden ausgedrückte scheinbare Abstand des Nebensternes vom Hauptsterne. Hat der Hauptstern die Koordinaten α, δ, der Nebenstern α', δ', so wird

$$(\alpha' - \alpha)\cos\delta = \varrho \sin\theta$$
$$\delta' - \delta = \varrho \cos\theta.$$

1) De novis in coelo sidereo phaenomenis; Mannheim 1779; Berl. astr. Jahrb. für 1784.

2) On the means of discerning the distance ... of fixed stars; Lond. Phil. Trans. 1783.

3) Synopsis of all Sir *W. Herschel's* Microm. Measurements by Sir *J. Herschel*; Lond. Astr. Soc. Mem. 35 (1867).

Die Verdienste, welche *W. Struve* durch die Fülle der Entdeckungen, die Vollständigkeit der Beobachtungen und die Gediegenheit der Messungen sich um die Wissenschaft erworben hat, können kaum überschätzt werden. Seine Mensurae Micrometricae[4]), die Messungen von 2712 doppelt- und mehrfachen Sternen nebst Angaben ihrer Größe und bei helleren auch ihrer Farbe enthalten, sind noch jetzt von hervorragender Bedeutung für die Doppelsternastronomie. In das Beobachtungsprogramm sind nur Paare aufgenommen worden, für welche $\varrho \leqq 32''$; die Astronomen haben sich daran gewöhnt, nur Paare von dieser Beschaffenheit als Doppelsterne (im engeren Sinne) zu betrachten. Auch für die weitesten Paare dürfte das Verhältnis der Zahl der optischen Doppelsterne (konstante Eigenbewegung) zur Zahl der physischen (veränderliche Eigenbewegung) noch durch einen sehr kleinen Bruch dargestellt sein.

Die Arbeiten *W. Herschels* sind durch dessen Sohn *John Herschel* mit großem Erfolge fortgesetzt und durch Ausdehnung des Arbeitsfeldes bis zum Südpol in glücklicher Weise ergänzt worden. *J. Herschel* hatte den Plan gefaßt, eine synoptische Geschichte der Doppelsterne zu schreiben und zu diesem Behufe eine Liste der Positionen aller von ihm selbst und von anderen Astronomen gefundenen Doppelsterne anzulegen unternommen, deren Publikation aber erst nach *Herschels* Tode unter dem Titel „A Catalogue of 10300 Multiple and Double Stars“[5]) erfolgt ist. Durch Festhalten an dieser Ziffer würde man jedoch die Zahl der bis zum Jahre 1874 bekannt gewordenen Doppelsterne sehr überschätzen. *Otto Struve*, Sohn *W. Struves* und ebenfalls durch die Pflege der Doppelsternastronomie zur Berühmtheit gelangt, sagt in einer Besprechung[6]) des Katalogs, den er für einen temporären Arbeitskatalog hält, *J. Herschel* dürfte die geplante synoptische Geschichte nur auf solche Sternpaare ausgedehnt haben, welche innerhalb der von *W. Struve* aufgestellten Grenzen als Doppelsterne zu bezeichnen sind, und dann auch den Katalog revidiert und diesen Grenzen angepaßt haben, womit die Zahl der Sterne auf nicht viel über die Hälfte herabgesunken wäre. Einen großen Fortschritt verdankt die Doppelsternkunde zunächst der unermüdlichen Tätigkeit des Barons *E. Dembowski*, der in den Jahren 1852—1878 etwa 20000 vorzügliche Messungen ausgeführt hat, dann aber auch den Bemühungen vieler Astronomen, unter denen *Dawes*, *Dunèr*, *Schiaparelli*,

4) Stellarum duplicium et multipl. Mensurae Micrometricae; St. Petersburg 1837.

5) Lond. Astr. Soc. Mem. 40 (1874).

6) Astr. Ges. Vjs. XI (1876).

A. Hall, *H. Struve*, *Doberck* als Beobachter, *Burnham*, *Aitken* und *Hussey* als Entdecker hervorragen. Die Zahl der neueren Funde über trifft sicherlich die Zahl der selbst bei strenger Revision aus *Herschels* Kataloge zu streichenden Positionen, so daß von Doppelsternen im engeren Sinne wahrscheinlich mehr als 11000 bekannt sind. *Burnhams* Kataloge[7]) verzeichnen 1336 Doppelsterne, darunter viele sehr enge Paare. Die laufenden Nummern der Kataloge von *G. Aitken*[8]) und *J. Hussey*[9]) reichen bis 2300 bzw. 1337. *Burnhams* Generalkatalog[7]) (1906) verzeichnet 13655 Doppelsterne, wovon, da eine Beschränkung auf die *Struve*sche Grenze nicht stattfand, sehr viele (nach des Autors eigener Schätzung mehrere Tausende) optische Doppelsterne sein dürften. Von älteren Werken möge hier noch erwähnt werden: A Handbook of Double Stars by *E. Crossley*, *G. Gledhill* and *J. Wilson* (London 1829), das von den Methoden der Beobachtung sowie der Bahnbestimmung handelt und eine chronologische Zusammenstellung der Messungen von 1200 Paaren gibt.

Nicht selten scheinen die Komponenten von Doppelsternen Licht von verschiedener Farbe auszustrahlen; das Erkennen der Farbe ist um so schwieriger je höher die Größenklasse der Sterne ist. Die auf 596 Paare ausgedehnten Untersuchungen *W. Struves* ergaben gleiche Farbe der Komponenten bei 476 und verschiedene Farbe bei 120 Paaren[4]). Der beobachtete Farbenunterschied besteht häufig im Vorherrschen von Gelb oder Rot gegen Weiß oder Gelb, aber auch nicht selten in komplementärer Färbung der Komponenten, wovon eine, und zwar gewöhnlich der Hauptstern, rot oder gelb, die andere grün oder blau erscheint. Nach *Struve* nimmt die Zahl der blauen Begleiter rasch mit der Distanz zu, während sehr enge Doppelsterne dieselbe Farbe haben. Im allgemeinen erweist sich auch die Helligkeit um so verschiedener, je verschiedener die Farben sind[10]); der Unterschied in Helligkeit wächst ebenfalls mit der Distanz. Die Farbenschätzungen verschiedener Beobachter stimmen häufig nicht überein. Manchmal, wie es für *W. Herschel* und *W. Struve* einigermaßen zutrifft, genügt eine konstante Verschiebung der Farbenskala zu einer in der Hauptsache befriedigenden Ausgleichung der Differenzen.[4]) Das Vorkommen einer verschiedenen Färbung der Kom-

7) A General Catalogue of Double Stars within 121° of the North Pole; Washington 1906.

8) Lick. Obs. Bull. 188 (1910).

9) Lick. Obs. Bull. 117 (1907).

10) *W. Doberck*, On the colour of revolving Double Stars; Astr. Nachr. 95 (1879).

ponenten in der Farbenfolge weiß-gelb-rot wird wohl von allen Beobachtern zugestanden; daß es aber auch Paare geben soll, in welchen die Komponenten komplementär gefärbt sind, wurde von mehreren erfahrenen Beobachtern lebhaft bestritten und die Empfindung dieser Farben auf Sinnestäuschung durch Kontrastwirkung zurückgeführt. Bei einigen Paaren, deren Spektra untersucht werden konnten, wird diese Wirkung jedenfalls wesentlich unterstützt durch die verschiedenartige Lichtemission, indem der gelbliche Stern ein Spektrum II. Klasse, der bläuliche ein Spektrum I. Klasse besitzt.[11])

Zu den Messungen von Position und Distanz dient ein in Grade geteilter Positionskreis in Verbindung mit dem Fadenmikrometer oder das Heliometer. Auch Interferenzmethoden scheinen mit gutem Erfolge verwendet werden zu können[12]), sowie verschiedene andere Arten von Doppelbildmikrometern.[13])

Die Messungen der Positionswinkel sind im allgemeinen viel genauer und zuverlässiger als die der Distanzen, so daß Änderungen der relativen Lage der Komponenten eines Doppelsternes viel sicherer aus den Positionswinkeln als aus den Distanzen erkannt werden. Unter den Fehlern der Messung sind die von der Eigenart des Beobachters abhängigen persönlichen Fehler[14]) wegen ihres systematischen Charakters von besonderer Bedeutung; sie treten bei Vergleichung der Messungsreihen je zweier Beobachter als persönliche Gleichung mitunter sehr deutlich hervor. Wegen der veränderlichen Natur dieser Fehler empfiehlt es sich, sie stets aus den auf dasselbe Objekt sich beziehenden Messungen abzuleiten und dabei auch die Möglichkeit zu beachten, daß durch große Zeitintervalle getrennte Messungen desselben Beobachters einer verschiedenen Korrektur bedürfen. (Vgl. Artikel VI 2, 6 *Cohn* Seite 263.)

Zur Reduktion der beobachteten relativen Koordinaten des Begleiters auf ein fixes Äquinox t_0 bedarf es, bei der Kleinheit von ϱ, nur der Berücksichtigung der durch Präzession veranlaßten Änderung

11) *E. C. Pickering,* The Discovery of Double Stars by means of their Spectra; Astr. Nachr. 127 (1891).

12) *A. A. Michelson,* Memoirs of the National Acad. of Sciences; Washington 5 (1891); *K. Schwarzschild,* Über Messung von Doppelsternen durch Interferenzen; Astr. Nachr. 139 (1896).

13) *M. Brendel,* Über die Brechung des Lichtes in Prismen aus einachsigen Kristallen und über deren Anwendung zu mikrometrischen Messungen. 1891.

14) *O. Stone,* on personal equation in double star observations; Astr. Nachr. 92 (1878), 94 (1879); *E. Großmann,* Untersuchungen über systematische Fehler bei Doppelst.-Beob. Diss. Göttingen 1892.

des Positionswinkels im Betrage von

$$\theta - \theta_0 = 0^0 \cdot 0056 \sin \alpha \sec \delta (t - t_0),$$

wenn die Zwischenzeit $t - t_0$ in Jahren ausgedrückt ist.

2. Einleitung zur Bahnbestimmung. Nachdem die an Doppelsternen ausgeführten Messungen in vielen Fällen eine krummlinige Bewegung des Begleiters außer Zweifel gestellt und die allgemeine Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes noch wahrscheinlicher gemacht hatten, fing man an nach Methoden zu suchen, welche eine genäherte Bahn des Begleiters aus einigen Örtern desselben nach Analogie einer ersten Bahnbestimmung von Planeten zu berechnen gestatten. Da die Beziehung zwischen mittlerer Bewegung und Halbachse nur durch Einführung einer neuen, von der Masse und der Parallaxe des Doppelsternes abhängigen Unbekannten hergestellt werden kann, so war es klar, daß jede Bahnbestimmung sich auf mindestens 7 voneinander unabhängige Beobachtungsstücke gründen muß. Die ausschließliche Verwendung von Positionswinkeln oder Distanzen genügt zu einer vollständigen Bahnbestimmung nicht, da hierbei entweder die Dimension der Bahn oder die Bahnlage unbestimmt bleibt. Werden mehr als 7 Beobachtungsdata benützt, so wird man eine Ausgleichung vornehmen müssen.

Denken wir uns durch den Hauptstern, der sich in der Entfernung Z von der Erde befinden soll, ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, daß die z-Achse die Fortsetzung des Visionsradius Z bildet, so ist die xy-Ebene die Referenzebene für die durch die visuelle Beobachtung gelieferten Koordinaten des Begleiters. Auf diese oder eine zu ihr parallele Ebene werden auch die von der Bahnlage abhängigen Elemente der Bewegung des Begleiters um den Hauptstern oder den gemeinsamen Schwerpunkt in gleicher Weise bezogen, wie die Elemente eines Planeten auf die Ekliptik, nur mit dem Unterschiede, daß der Positionswinkel an die Stelle der Länge tritt. Dementsprechend hat man die Achsen so zu legen, daß die Koordinaten des bewegten Punktes werden $x = \varrho \cos \theta$, $y = \varrho \sin \theta$; die Koordinaten sind auch gegeben durch:

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)$$
$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i)$$
$$z = r \sin u \sin i.$$

Die Bezeichnungen sind hier und im folgenden in Übereinstimmung mit dem Artikel VI 2, 9 (*Herglotz*) Seite 381—384 gewählt.

Die Zeit t_0 des Periastrons und die Periode $P = \frac{2\pi}{n}$ werden bei visuellen Doppelsternen in Jahren ausgedrückt. Zur Bezeichnung der Bewegungsrichtung dienen die Ausdrücke direkt (Zunahme der Positionswinkel mit der Zeit) und retrograd (Abnahme der Positionswinkel). Bei Angabe dieser Bezeichnung kann für die Neigung stets der spitze Winkel genommen werden. Der aufsteigende Knoten läßt sich vom niedersteigenden aus Messungen von θ und ϱ allein nicht unterscheiden, da, wie auch aus obigen Gleichungen ersichtlich ist, eine Änderung des Vorzeichens der Neigung x und y, mithin auch θ und ϱ ungeändert läßt.

Ist die Neigung von Null verschieden, so beziehen sich infolge der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes die beobachteten Örter der Komponenten eines Doppelsterns im allgemeinen auf verschiedene Zeitpunkte. *F. Savary*[15]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß dieser Umstand zu Aberrationserscheinungen Anlaß geben müsse, aus denen, wie er meinte, die Parallaxe des Doppelsterns bestimmt werden könnte. Dies wäre jedoch nach den grundlegenden Untersuchungen *Villarceaus*[16]) nur dann möglich, wenn das Massenverhältnis der Komponenten bekannt ist. *L. Birkenmeyer*[17]) hat die Ableitung der *Villarceau*schen Formeln etwas vereinfacht und durch deren Anwendung auf die Bahn von ξ Ursae maj. einige interessante Resultate erhalten. *H. Seeliger*[18]) gibt eine sehr einfache und klare Darstellung der wichtigsten Resultate *Villarceaus* und außerdem eine Theorie der optischen Ungleichheiten, die durch die Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Lichtes von seiner Intensität veranlaßt würden. Eine solche Abhängigkeit könnte durch die Bahnbestimmung von Doppelsternen nur dann nachgewiesen werden, wenn die Eigenbewegung sehr groß, die Parallaxe sehr klein und die Helligkeit der Komponenten sehr verschieden ist. Die endliche Geschwindigkeit des Lichtes bewirkt eine konstante, in den Beobachtungen nicht zu erkennende Veränderung von Ω, i, ω und eine periodische, durch Beobachtungen bestimmbare Ungleichheit der Bewegung, die durch Korrektion der Beobachtungszeit um $-\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\tau$ voll-

15) Conn. des Temps pour 1830.

16) Théorie analytique des inégalités de lumière des étoiles doubles. Conn. des Temps additions pour 1878.

17) Über die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten. Wien. Ber. 1886.

18) Über optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. München Ber. 19, 1889.

ständig berücksichtigt wird, wo τ den in Lichtzeit ausgedrückten Unterschied der geozentrischen Entfernungen der Massen m_1 und m_2 bedeutet.

Die Bahn, welche eine Komponente um die andere oder um den gemeinsamen Schwerpunkt im Raume beschreibt, setzen wir als eine *Kepler*sche Ellipse voraus und nennen sie die wahre Bahn oder die wahre Ellipse. Die Projektion der wahren Ellipse oder die scheinbar in einer zur Gesichtslinie senkrechten Ebene beschriebene Bahn, die auch eine Ellipse ist, heißt die scheinbare Bahn (scheinbare Ellipse). Der Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse ist die Projektion des Mittelpunktes der wahren Ellipse. Die Projektionen der Brennpunkte der wahren Ellipse fallen aber (für $i > 0$) nicht mit den Brennpunkten der scheinbaren Ellipse zusammen. Wenn nämlich die durch den Brennpunkt getrennten Teile einer Fokalchorde mit r und r' bezeichnet werden, so ist

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2}{p}; \quad p = a(1 - e^2).$$

Ist ζ der Neigungswinkel der Sehne gegen die xy-Ebene, so sind die Projektionen der Sehnenabschnitte $\varrho = r\cos\zeta$, $\varrho' = r'\cos\zeta$; daraus folgt, daß die Summe $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{p\cos\zeta}$ (wegen der Veränderlichkeit von ζ) nicht konstant, der Punkt $\varrho = 0$ daher kein Brennpunkt ist. Für $r = r' = p$ wird $\varrho = \varrho' = p\cos\zeta$; setzt man $p\cos\zeta = s$, so läßt sich mit Hilfe der Gleichung $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{s}$ für jedes Paar ϱ, ϱ' je ein auf ϱ und ϱ' oder in der Verlängerung dieser Linien gelegener Punkt mit der Entfernung s vom Orte des ruhenden Sternes finden. Der geometrische Ort dieses Punktes ist eine Ellipse (*Thiele*sche Hilfsellipse[19]), welche die Projektion eines in der Ebene der wahren Bahn mit dem Radius p um den Hauptstern beschriebenen Kreises darstellt. s wird ein Maximum für $\zeta = 0$ (Knotenlinie). Die große Halbachse der Hilfsellipse ist daher $= p$ und liegt in der Knotenlinie. Der Minimalwert von s, die kleine Halbachse der Hilfsellipse, stellt den Wert $p\cos i$ dar; es ist daher i gleich dem Exzentrizitätswinkel der Hilfsellipse. In gleicher Weise benützt *H. Zwiers*[28]) eine andere, der Projektion eines mit dem Halbmesser a um den Mittelpunkt der wahren Ellipse beschriebenen Kreises entsprechende Hilfsellipse zur konstruktiven Darstellung der Elemente.

Die Halbachsen der scheinbaren Ellipse sind im folgenden mit

---

19) *Th. Thiele,* Über einen geometrischen Satz zur Berechnung von Doppelsternbahnen; Astr. Nachr. 52 (1860).

α_1, β_1, die Projektionen der Halbachsen a, b auf die Ebene der scheinbaren Bahn mit a_1, b_1 bezeichnet. Die Neigungswinkel der Achsen gegen diese Ebene seien durch die Gleichungen $a_1 = a\cos\xi_0$, $b_1 = b\cos\xi_1$ bestimmt. Den Übergang von der scheinbaren auf die wahre Ellipse vermitteln die Beziehungen, daß jene die Projektion dieser ist, woraus folgt $\alpha_1\beta_1 = ab\cos i$, und daß die konjugierten Durchmesser, von denen einer durch den Ort des ruhenden Sternes geht, die Projektionen der Achsen der wahren Ellipse vorstellen, weshalb auch die Projektion der großen Halbachse durch den Ort des ruhenden Sternes im Verhältnis $e : 1$ geteilt wird. Die Bestimmung von e ist sonach graphisch leicht durchführbar. Die durch den Punkt $\varrho = 0$ gehende und in diesem Punkte halbierte Sehne der Projektionsellipse ist parallel zu b_1.

Die Dimensionen der Bahn und die Koordinaten des bewegten Massenpunktes werden auf die den Messungen zugrundeliegende Einheit des Weges bezogen. Ist diese Einheit die Bogensekunde, so können, wenn f die Anziehung zweier Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung und das Dehnungszeichen — die Wertung der Koordinaten und Halbachsen in linearem Maße bedeuten, Gleichungen von der Form $\bar{x} = Zx\sin 1''$ verwendet werden, um aus jeder der Bewegungsgleichungen z. B. $\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \frac{f(m+m')}{\bar{r}^3}\bar{x} = 0$, die entsprechende $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} = 0$ abzuleiten. Die für jedes System charakteristische Konstante der Gravitation ist daher gegeben durch $k^2 = \frac{f(m+m')}{Z^3\sin^3 1''}$.

Wird die Vertauschung des Doppelsternsystems mit dem System Sonne-Erde durch den Index 0 (m_0 = Sonnenmasse), der Ausdruck $\frac{n_0}{\sqrt{1+\frac{m_0}{m_0'}}}$ durch k_0, die Parallaxe des Sternes durch π bezeichnet, so bestehen die Relationen

$$Z\sin 1'' = \frac{\bar{a}_0}{\pi} = \frac{\bar{a}}{a};\quad f = \frac{\bar{a}^3n^2}{m+m'} = \frac{a_0^{\,3}n_0^{\,2}}{m_0+m_0'};\quad k^2 = a^3n^2 = \frac{m+m'}{m_0}\pi^3k_0^{\,2};$$

$$a = \pi\sqrt[3]{\frac{m+m'}{m_0+m_0'}\cdot\frac{n_0^{\,2}}{n^2}}.$$

k_0 geht in die *Gaußsche* Konstante über, wenn n_0 auf den Tag bezogen wird. Der Annahme $m + m' = m_0 + m_0'$ entspricht die „hypothetische Parallaxe“

$$a\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Bahnbestimmung eines Doppelsternes von bekannter Parallaxe

π vermittelt, indem $n^2a^3 = \frac{m+m'}{m_0}\pi^3 k_0^2$, die Kenntnis der Masse des Systems. Da $\frac{m'}{m}$ gleich ist dem Verhältnis zwischen den Abständen der Komponenten vom gemeinsamen Schwerpunkte und aus den Achsen der Bahn einer Komponente bezüglich des Schwerpunktes und des Ortes der anderen Komponente berechnet werden kann, so wird das Massenverhältnis bekannt, sobald für eine beider Komponenten veränderliche Eigenbewegung konstatiert ist.

Hat man veränderliche Eigenbewegung eines Sterns, ohne daß der Begleiter sichtbar ist, so hat man zunächst aus möglichst entlegenen Beobachtungen die als gleichförmig anzusehende Bewegung des Systemschwerpunktes zu ermitteln und dann die Relativkoordinaten des Sterns gegen den Schwerpunkt wie diejenigen eines Doppelsterns zu behandeln.[20])

Zur Vorbereitung seien noch folgende Formeln angemerkt:

Die Gleichung des Flächensatzes $x\,dy - y\,dx = c\,dt$, in welcher

$$c = k\sqrt{p}\cos i = a^2 n\sqrt{1-e^2}\cos i = abn\cos i = \alpha_1\beta_1 n,$$

läßt sich auch schreiben

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{c\,dt}{x^2} \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-c\,dt}{y^2};$$

die Integration zwischen den durch die Indizes 1 und 2 bezeichneten Grenzen gibt

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = c \cdot x_1 x_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{x^2} = c \cdot y_1 y_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{y^2}.$$

Die doppelte Dreiecksfläche als Funktion der wahren oder der exzentrischen Anomalien (in der wahren Bahn) ist

$$\begin{aligned} x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \varrho_1\varrho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)\cos i \\ &= \frac{c}{n}[\sin(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)] \\ &= \alpha_1\beta_1[\sin(E_2 - E_1) - (E_2 - E_1) + n(t_2 - t_1)]. \end{aligned}$$

3. Bahnbestimmung visueller Doppelsterne.

a) *Benutzung einzelner Örter.* Die älteste, von *Savary*[21]) (1827) ersonnene Methode verwertet vier Positionswinkel mit den zugehörigen Distanzen und Zeiten; sie führt im Wege fortgesetzter Versuche, durch welche die in den Zwischenzeiten erfolgte Änderung der exzentrischen Anomalien bekannt werden soll, zur Bestimmung der schein-

20) *H. Seeliger,* Valentiners Handwörterbuch I; Breslau 1897.

21) *F. Savary,* Conn. des Temps pour 1830.

baren Bahn, aus der dann die wahre abgeleitet wird. Unter Benutzung von Relationen, welche zwischen zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse und den durch die vier Örter parallel zu den Durchmessern gezogenen Sehnen bestehen, erhält man zwei Gleichungen mit

$$E_2 - E_1 = \varphi, \quad E_3 - E_1 = \psi, \quad E_4 - E_1 = \psi'$$

als Unbekannten. Da in den Gleichungen

$$\alpha_1\beta_1 n(t_2 - t_1) - \varrho_1\varrho_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \alpha_1\beta_1(\varphi - \sin\varphi)$$
$$\alpha_1\beta_1 n(t_3 - t_1) - \varrho_1\varrho_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) = \alpha_1\beta_1(\psi - \sin\psi)$$
$$\alpha_1\beta_1 n(t_4 - t_1) - \varrho_1\varrho_4 \sin(\theta_4 - \theta_1) = \alpha_1\beta_1(\psi' - \sin\psi')$$

das Produkt $\alpha_1\beta_1$ sich aus den Werten φ und ψ berechnen läßt, so bleiben nach Elimination von $\alpha_1\beta_1 n$ noch zwei von den Zwischenzeiten abhängige Gleichungen, im ganzen also vier Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Es wird daher im allgemeinen kein Wert von φ angenommen werden können, welcher ohne Änderung der Beobachtungsdaten allen Gleichungen genügt. *J. F. Encke*[22]) glaubt die Übereinstimmung am zweckmäßigsten durch Änderung einer Distanz erreichen zu können. Nach seiner Methode, deren Formeln den Rechner mehr befriedigen, werden die geometrischen Beziehungen zwischen φ, ψ, ψ' durch Gleichungen vermittelt, welche den Flächeninhalt (123) eines durch drei Punkte der scheinbaren Ellipse bestimmten Dreiecks einerseits durch die gegebenen Koordinaten dieser Punkte und andererseits durch die Unbekannten ausdrücken; letztere Gleichungen sind von der Form

$$(1\,2\,3) = 2\alpha_1\beta_1 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi) \sin\tfrac{1}{2}\psi$$

und gestatten eine bequeme Berechnung von φ, ψ, ψ' aus einem angenommenen Werte von $\psi' \mp \psi \mp \varphi$.

H. Seeliger hat in seiner Inauguraldissertation[23]) nach detaillierter Besprechung der Methoden von *Savary* und *Encke* eine neue Methode der Bahnbestimmung aus vier Positionswinkeln und drei Distanzen gegeben, welche die Rechnungsoperationen vereinfacht, indem sie die Dimension der scheinbaren Ellipse zunächst unbestimmt läßt und bis zu deren Ermittlung statt der drei Distanzen nur zwei Verhältnisse derselben benützt. Bezeichnet χ den Winkel zwischen der Richtung Hauptstern — erster Ort und der großen Achse, ξ und η die Koordinaten des Hauptsternes bezüglich der großen und kleinen Achse der scheinbaren Ellipse, so läßt sich der Gang der Rechnung folgender-

22) Berl. astr. Jahrb. für 1832.

23) Zur Theorie der Doppelsternbewegungen. Diss. Leipzig 1872.

maßen darstellen. Die (im Versuchswege zu bestimmenden) Werte von φ und ψ geben mit Hilfe von sechs (nur einmal zu berechnenden) Konstanten χ, woraus E_1, $\frac{\xi}{\alpha_1}$, $\frac{\eta}{\beta_1}$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ und ψ' erhalten werden. Diese φ, ψ, ψ' müssen drei Zeitgleichungen, in denen die Produkte der Distanzen durch deren Verhältnisse ersetzt sind, genügen. α_1 kann dann der Gleichung $\varrho_1 \cos\chi = \alpha_1\left(\cos E_1 - \frac{\xi}{\alpha_1}\right)$ entnommen werden. *Seeliger* gibt noch eine elegante Bestimmung der scheinbaren Ellipse aus den Werten von φ, χ und $\alpha_1\beta_1$, welche auch bei den Methoden von *Savary* und *Encke* anwendbar ist.

Unter den Methoden, welche eine direkte Bestimmung der wahren Bahn bezwecken, ist die Methode von *Yvon-Villarceau*[24]) (1849) die älteste. Sie beruht auf der Entwicklungsfähigkeit von θ, ϱ und der Differentialquotienten dieser Funktionen nach Potenzen der Zeit. Das Wesen der Methode besteht darin, daß durch wiederholte Differentiation von $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, $z = \varrho\,\mathrm{tg}\,\zeta$ und Ersetzung der zweiten Differentialquotienten durch ihre den Bewegungsgleichungen entnommenen, als Funktionen von k^2, θ, ϱ, ζ ausgedrückten Äquivalente eine lineare Gleichung zur Bestimmung von $\mathrm{tg}\,\zeta \cdot \frac{d\zeta}{dt}$ und durch deren Vermittlung nach Elimination von k^2 und $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ eine Gleichung 4ten Grades erhalten wird, in welcher nur $\mathrm{tg}^2\zeta$ und $\mathrm{tg}^4\zeta$ als Unbekannte auftreten. Die Gleichung hat nur zwei reelle, gleich große und entgegengesetzt bezeichnete Wurzeln, wie es dem Mangel eines Kriteriums zur Unterscheidung zwischen auf- und niedersteigendem Knoten entspricht. Nach Auswahl eines ζ und des zugehörigen $\frac{d\zeta}{dt}$ gelangt man zur Kenntnis von k^2, x, y, z $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, welche Daten zur Bestimmung der wahren Bahn genügen. Eine zweite Abhandlung *Villarceaus*[24]) enthält eine Spezialisierung der Methode für den Fall, daß die Gesichtslinie gegen die Bahnebene nur sehr wenig geneigt ist.

K. Schwarzschild[25]) gelangt in einfacher Weise zur Bestimmung der Koordinaten und Geschwindigkeiten, indem er von den Potenzreihen für x und y ausgeht, welche, wenn die Zahl der Striche die Ordnung der Differentialquotienten bezeichnet, der Bedingung genügen müssen

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = -\frac{k^2}{r^3} = \frac{z''}{z}.$$

---

24) Conn. des temps pour 1852.

25) Methode zur Bahnbestimmung der Doppelsterne; Ast. Nachr. 124 (1890).

Es sei

$$\frac{r^3}{k^2} = w^3; \quad \text{dann ist} \quad \frac{r''}{w''} = \frac{r'}{w'} = \frac{r}{w}.$$

Mit Hilfe dieser Relation wird aus der Gleichung $r^2 = \varrho^2 + z^2$ und ihrer ersten und zweiten Ableitung nach der Zeit durch Elimination von r' und r'' die Formel erhalten

$$r^4\left[\frac{w''}{w} + \frac{1}{w^3}\right] - r^2\varrho^2\left[\left(\frac{w''}{w} + \frac{1}{w^3}\right) + \left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{w'}{w}\right)^2 + \left(\frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{1}{w^3}\right)\right] + \varrho^4\left[\frac{\varrho''}{\varrho} + \frac{1}{w^3}\right] = 0.$$

Da ϱ, w und ihre Derivierten ohne weiteres aus x, y und deren Differentialquotienten gefunden werden können, ist dies eine quadratische Gleichung für r^2. Aus r (doppelte Lösung möglich) erhält man $\pm z$, $\pm z'$ und k^2, womit die Aufgabe gelöst erscheint.

Die Zuverlässigkeit der nach diesen Methoden erhaltenen Resultate wird dadurch wesentlich beinträchtigt, daß die Entwicklung der Funktionen nach Potenzen der Zeit nur so lange durchführbar ist, als die Zeit einen gewissen Bruchteil der Periode nicht überschreitet, und daß die Fehler der Beobachtung die Koeffizienten um so stärker beeinflussen, je höher die Potenz der Zeit ist.

Viel leistungsfähiger ist die Methode von *Klinkerfues*[26]), welche davon ausgeht, daß das Verhältnis der Flächen je zweier in der Bahnebene gelegenen Dreiecke gleich ist dem Verhältnisse ihrer Projektionen auf die Ebene der scheinbaren Bahn.

$$\frac{r_1 \sin(v_1 - v)}{r_3 \sin(v_3 - v)} = \frac{\varrho_1 \sin(\theta_1 - \theta)}{\varrho_3 \sin(\theta_3 - \theta)}.$$

Das Verhältnis zweier Gleichungen, welche aus dieser durch Beteilung von v und θ mit dem Index 2 bzw. 4 hervorgehen, ist

$$\frac{\sin(v_1 - v_2)\sin(v_3 - v_4)}{\sin(v_3 - v_2)\sin(v_1 - v_4)} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_3 - \theta_4)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_4)}.$$

Je nachdem ein ϱ und sechs θ, zwei vollständige Örter und drei θ oder drei vollständige Örter und ein θ gegeben sind, hat man unter Bevorzugung der äußersten Positionen drei, zwei oder eine der Gleichungen von der zweiten Form und keine, eine oder zwei Gleichungen von der ersten Form zu bilden. Die rechten Seiten der Gleichungen sind bekannt. Mittels der Formeln, welche v mit t verbinden, ist im Versuchswege auf Grund hypothetischer Werte von n und t_0 die Erfüllung der entsprechenden Gleichungssysteme anzu-

26) Diss. Göttingen 1855, Theoretische Astronomie, Braunschweig 1871 und 1899; Astr. Nachr. 42 (1856), 47 (1858).

streben. Ist dies erreicht, so kennt man e, n, t_0. Die von der Bahnlage abhängigen Elemente werden aus drei Gleichungen von der Form $\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(v + \omega)$ abgeleitet. Zur Bestimmung der Halbachse muß eine Distanz herangezogen werden.

b) *Benutzung der vollständigen scheinbaren Ellipse.*

Da die Elemente der wahren Bahn aus Örtern, die in der Ebene der scheinbaren Bahn liegen, abgeleitet werden müssen, so hängt ihre Verläßlichkeit von der Genauigkeit ab, mit welcher die scheinbare Ellipse durch die Beobachtungen bestimmt wird. Die Fehler der Messung lassen den Charakter dieser Ellipse um so schwieriger erkennen, je kleiner die durch die äußersten Beobachtungen markierte Winkelbewegung des Begleiters ist. Ist sie kleiner als 180°, so darf man erfahrungsgemäß kaum hoffen, einigermaßen genäherte Bahnelemente zu erhalten. Aber auch bei größerer Bewegung werden die bisher besprochenen Methoden, soweit sie überhaupt noch anwendbar sind, je nach Auswahl der Beobachtungsstücke im allgemeinen sehr verschiedene Resultate geben, so daß es geboten erscheint, das vorhandene Beobachtungsmaterial schon zum Zwecke einer provisorischen Bahnbestimmung intensiver auszunützen. Hierzu eignen sich Methoden, nach welchen die scheinbare Ellipse durch Konstruktion oder auf analytischem Wege bestimmt wird und die Ermittlung von Dimension, Form und Lage der wahren Ellipse ohne Inanspruchnahme der Beobachtungszeiten erfolgt.

Die Konstruktion der scheinbaren Ellipse wird auch bei genügender Zahl und günstiger Verteilung der beobachteten Örter häufig Schwierigkeiten begegnen, welche durch Fehler in den Positionswinkeln und noch viel mehr durch Fehler in den beobachteten Distanzen veranlaßt sind. Um diese Schwierigkeiten zu beheben, sucht *J. Herschel*[27]) zunächst die Fehler der Positionswinkel durch graphische Darstellung von θ als Funktion der Zeit auszugleichen, und berechnet dann mit Hilfe der θ-Kurve die Distanzen nach der sich aus dem Flächensatz ergebenden Formel $\varrho = \frac{c}{\sqrt{\frac{d\theta}{dt}}}$, in welcher nur c aus den gemessenen Distanzen bestimmt wird. Da die so berechneten ϱ den elliptischen Charakter der aus zusammengehörigen Werten von θ und ϱ konstruierten scheinbaren Bahn nicht garantieren, muß noch untersucht werden, ob die Bahn sich einer Ellipse genügend nähert, und falls

27) On the Investigation of the Orbits of revolving Double Stars; Lond. Astr. Soc. Mem. V (1833).

dies nicht zutrifft, durch Nachbesserungen die Annäherung an die elliptische Form herbeigeführt werden.

Ist die scheinbare Ellipse mit dem Orte Σ des ruhendes Sternes und der Richtungslinie $\theta = 0$ gezeichnet, so lassen sich der Mittelpunkt O der Ellipse und ihre Achsen $2\alpha_1$, $2\beta_1$ durch Konstruktion finden. Der durch O und Σ gehende Halbmesser ist a_1, der konjugierte b_1. Bezeichnet ω' den Winkel zwischen Knotenlinie und a_1 (vom aufsteigenden Knoten gegen die Projektion des Periastrons hin gezählt), so ist $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\omega' \cdot \sec i$. Die Größen p, i und die Lage der Knotenlinie, mithin auch ein Wert von Ω kann durch Konstruktion der *Thiele*schen Hilfsellipse, deren Zentrum Σ ist, erhalten werden. Nach Messung von ω' gelangt man zur Kenntnis von ω, wodurch, da $e = \frac{\Sigma O}{a_1}$, die Bestimmung der Elemente bis auf die von t_0 und P durchgeführt ist. t_0 ist durch die Zeit gegeben, welche dem Positionswinkel der Projektion des Periastrons entspicht. P kann aus dem Verhältnis der Fläche eines Sektors zur Ellipsenfläche nach der Formel

$$P\int_{t_1}^{t_2} \varrho^2 d\theta = 2\pi\alpha_1\beta_1(t_2 - t_1)$$

oder, wenn $\theta_2 - \theta_1 > 2\pi$, durch Interpolation der Zeiten berechnet werden, welche zu nahe um 2π differierenden Positionswinkeln gehören.

Die graphische Methode von *H. Zwiers*[28]) ermöglicht eine vorteilhaftere Bestimmung von a, Ω, i. Sie beruht auf der Konstruktion einer anderen Hilfsellipse, welche aus der scheinbaren Ellipse durch symmetrische Verlängerung von $2b_1$ und der zu diesem Durchmesser parallelen Sehnen im Verhältnisse $1 : \sqrt{1 - e^2}$ erhalten wird. Diese Hilfsellipse (mit dem Zentrum in O) ist daher die Projektion eines der wahren Ellipse umschriebenen Kreises. Durch die Projektion erleidet nur der parallel zur Knotenlinie liegende Durchmesser des Kreises keine Verkürzung, weshalb die große Achse der Hilfsellipse die Länge $2a$ besitzt und die Richtung der Knotenlinie markiert. Der zur Knotenlinie senkrechte Durchmesser des Kreises erfährt die stärkste, dem Neigungswinkel i entsprechende Verkürzung. Durch Messung der Halbachsen α', β' der Hilfsellipse wird also a und i bekannt, da $a = \alpha'$; $a\cos i = \beta'$. ω' ist der Winkel zwischen α' und a_1; $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\omega' \sec i = \frac{\alpha'}{\beta'} \operatorname{tg}\omega'$.

---

28) Über eine neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen; Astr. Nachr. 139 (1896).

Zur Berechnung von Ω, ω, i aus Bestimmungsstücken der scheinbaren Ellipse sind die Formeln von *Klinkerfues*[26]) sehr geeignet. Sind P_0, P_1 die Positionswinkel der Achsen der wahren Ellipse (entsprechend den Punkten $v = 0$ und $v = 90^0$), so wird

$$a_1 = a\cos\xi_0;\quad \sin\omega\cos i = \cos\xi_0\sin(P_0 - \Omega);\quad \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\cos i = \cos\xi_1\sin(P_1 - \Omega)$$

$$b_1 = b\cos\xi_1;\qquad \cos\omega = \cos\xi_0\cos(P_0 - \Omega);\quad \cos\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\xi_0\cos(P_1 - \Omega).$$

Es ist daher

$$2\sin\omega\cos\omega\cos i = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2\sin 2(P_0 - \Omega) = -\left(\frac{b_1}{b}\right)^2\sin 2(P_1 - \Omega)$$

oder

$$(1 - e^2)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 = -\frac{\sin 2(P_1 - \Omega)}{\sin 2(P_0 - \Omega)}.$$

Aus dieser Gleichung, deren linke Seite als bekannt zu gelten hat, folgt Ω durch Rechnung oder einfache Konstruktion.[26])

Der Bedingung, daß die scheinbare Bahn eine sich den Beobachtungen unter Berücksichtigung ihrer relativen Güte möglichst anschmiegende Ellipse sein soll, kann leichter auf analytischem als auf graphischem Wege entsprochen werden. Schon *J. Herschel*[29]) hat den Vorteil der analytischen Bestimmung der scheinbaren Bahn erkannt und eine Methode angegeben, welche die Elemente aus den Koeffizienten der Ellipsengleichung finden lehrt und in etwas vereinfachter Form hier auseinandergesetzt werden soll.

Fünf Örter bestimmen die Koeffizienten der Ellipsengleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y - 1 = 0$; liegen mehr Örter vor, so wird der günstigste Anschluß der Kurve durch die Berechnung der Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate gesichert.

Es sei

$$\theta - \Omega = \vartheta,$$

dann ist

$$x = \varrho\cos(\vartheta + \Omega)$$
$$y = \varrho\sin(\vartheta + \Omega)$$

oder

$$x\cos\Omega + y\sin\Omega = \varrho\cos\vartheta = r\cos u$$
$$-x\sin\Omega + y\cos\Omega = \varrho\sin\vartheta = r\sin u\cos i.$$

Unter Berücksichtigung dieser Relationen kann die Gleichung der

29) On the Determination of the most probable Orbit of a Binary Star; Lond. Astr. Soc. Mem. 1850.

wahren Ellipse nach Einführung der Substitution

$$e\cos\omega\cdot r\cos u+\frac{e\sin\omega}{\cos i}\cdot r\sin u\cos i=p-r,$$

$$e\cos\omega=g\cos G$$

$$\frac{e\sin\omega}{\cos i}=g\sin G$$

geschrieben werden

$$g\varrho\cos(\vartheta-G)=p-r$$

oder

$$r=p-gx\cos(\Omega+G)-gy\sin(\Omega+G).$$

r ist andererseits gegeben durch die Gleichung

$$r^2=x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\varrho^2\sin^2\vartheta\,\mathrm{tg}^2 i=x^2(1+\mathrm{tg}^2 i\sin^2\Omega)+y^2(1+\mathrm{tg}^2 i\cos^2\Omega)-xy\,\mathrm{tg}^2 i\sin 2\Omega.$$

Die durch Elimination von r^2 hervorgehende Gleichung ist die der scheinbaren Ellipse. Die Identifizierung der Koeffizienten der veränderlichen Größen gibt

$$\alpha p^2=1+\mathrm{tg}^2 i\sin^2\Omega-g^2\cos^2(\Omega+G)$$
$$\beta p^2=1+\mathrm{tg}^2 i\cos^2\Omega-g^2\sin^2(\Omega+G)$$
$$\gamma p^2=-\mathrm{tg}^2 i\sin 2\Omega-g^2\sin 2(\Omega+G)$$
$$\delta p=2g\cos(\Omega+G)$$
$$\varepsilon p=2g\sin(\Omega+G).$$

Hieraus folgen die von *Kowalsky*[30]) aufgestellten Formeln

$$\frac{\mathrm{tg}^2 i}{p^2}\sin 2\Omega=-\gamma-\frac{\delta\varepsilon}{2}$$

$$\frac{\mathrm{tg}^2 i}{p^2}\cos 2\Omega=\beta-\alpha-\frac{\delta^2-\varepsilon^2}{4}$$

$$\frac{2}{p^2}+\frac{\mathrm{tg}^2 i}{p^2}=\beta+\alpha+\frac{\delta^2+\varepsilon^2}{4}$$

$$e\sin\omega=\frac{1}{2}p\cos i(-\delta\sin\Omega+\varepsilon\cos\Omega)$$

$$e\cos\omega=\frac{1}{2}p(\delta\cos\Omega+\varepsilon\sin\Omega).$$

n und t_0 werden am sichersten aus Wertepaaren von θ, t nach der Methode der kleinsten Quadrate erhalten.

Zur Bestimmung von $\alpha, \beta\ldots$ aus der Figur der scheinbaren Ellipse eignet sich die Methode von *S. v. Glasenapp*[31]) sehr gut.

30) Wissenschaftliche Schriften der Kasaner Universität für 1873; *D. Dubjago*, Astr. Nachr. 109 (1884).

31) On a Graphical Method for determining the orbit of a Binary Star; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 49 (1889).

Sie beruht auf der Messung der Koordinaten von fünf Punkten der Ellipse, wovon vier in den Achsen des zur Konstruktion der Ellipse verwendeten Koordinatensystems liegen. Die zwei in der x-Achse gelegenen Punkte haben die Abszissen x_1, x_2; diese müssen der Bedingung genügen $\alpha x^2 + \delta x - 1 = 0$, woraus folgt $\alpha = -\frac{1}{x_1 x_2}$; $\delta = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$. In gleicher Weise erhält man aus den in der y-Achse gelegenen Punkten mit den Ordinaten y_1, y_2

$$\beta = -\frac{1}{y_1 y_2}; \quad \varepsilon = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2}.$$

γ wird durch die Koordinaten x_3, y_3 eines fünften Punktes bestimmt, der so gewählt werden soll, daß das Produkt $x_3 y_3$ möglichst groß sei.

Die Verwertung der Beobachtungszeiten zur Bestimmung aller Elemente gestattet die von *Th. Thiele*[32]) ausgearbeitete, auch bei sehr großen Neigungen anwendbare Methode, welche dadurch, daß sie sich auf ein Integrationsverfahren stützt, den Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Resultate wesentlich vermindert. Nach den in Nr. 2 gegebenen Entwicklungen ist:

$$t_2 - t_1 - x_1 x_2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{n}[E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)],$$

wo x durch y ersetzt werden kann. Indem man einmal an Stelle des ersten Orts, ein anderes Mal an Stelle des zweiten den dritten Ort verwendet, erhält man drei Gleichungen, welche, da die Integrale durch Quadratur erhältlich sein sollen, zur Ermittlung von

$$n,\ E_2 - E_1 = \varphi,\ E_3 - E_1 = \psi$$

ausreichen. Infolge der Bestimmung der Bahn aus acht (in den drei Gleichungen enthaltenen) unabhängigen Größen ist eine scharfe Darstellung der drei Örter nur dann zu erwarten, wenn die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{1}{c}(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)$$

in ihrer Anwendung auf den dritten Ort durch denselben Wert von c befriedigt wird.

Die *Kepler*sche Gleichung bestimmt

$$e\cos\frac{E_2 + E_1}{2} = C \quad \text{und} \quad e\cos\frac{E_3 + E_1}{2} = D$$

---

32) Neue Methode zur Berechnung von Doppelsternbahnen; Astr. Nachr. 104 (1883).

aus den Werten von φ und ψ; e und E_1 werden aus den Gleichungen gefunden

$$C \cos \frac{\psi}{2} - D \cos \frac{\varphi}{2} = e \sin E_1 \sin \frac{E_3 - E_2}{2}$$

$$C \sin \frac{\psi}{2} - D \sin \frac{\varphi}{2} = e \cos E_1 \sin \frac{E_3 - E_2}{2}.$$

t_0 wird durch E bestimmt. *Thiele* führt an Stelle der übrigen Elemente der scheinbaren Bahn a_1, b_1, P_0, P_1 ein, welche mit x, y durch die Gleichungen zusammenhängen

$$x = \varrho \cos \theta = a_1 \cos P_0 (\cos E - e) + b_1 \cos P_1 \sin E$$
$$y = \varrho \sin \theta = a_1 \sin P_0 (\cos E - e) + b_1 \sin P_1 \sin E$$

und aus zwei Örtern berechnet werden können.

c) *Bahnverbesserung.* Zur Verbesserung der nach irgendeiner Methode erhaltenen Elemente einer Doppelsternbahn wird man aus diesen eine Ephemeride rechnen, die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten θ und ϱ bilden und in Normalörter zusammenfassen und dann mittels der Differentialquotienten der Koordinaten des Ortes nach den Elementen die Größen ableiten, welche zu den ursprünglichen Elementen summiert, alle Örter mit Rücksicht auf das jedem einzelnen zukommende Gewicht am besten darstellen. Die Differentialquotienten findet man bei *A. Marth*[33]). Die Bildung der Funktion, die ein Minimum werden soll, aus den Quadraten der Abweichungen in Richtung und Distanz muß dem Takt des Rechners überlassen bleiben.

d) *Bemerkungen über die bekannten Doppelsternbahnen.* Der Umstand, daß eine Bahnbestimmung sich auf Beobachtungen stützen muß, die sich über den größeren Teil eines Umlaufs des Begleiters erstrecken, macht es erklärlich, daß die Zahl der bekannten Doppelsternbahnen noch gering ist. *G. Aitkens*[34]) Katalog enthält die Elemente von 91 Bahnen, wovon 53 gut bestimmt, die übrigen aber unsicher sein sollen. Darf man behaupten, daß die Bewegung der Doppelsterne, deren Bahnen gut bestimmt sind, durch das *Newton*sche Gesetz beherrscht werden? Die Behandlung des *Bertrand*schen Problems[35]), die Form der mit den Bedingungen, daß die Flächengeschwindigkeit in der wahren Bahn konstant und daß die scheinbare Bahn eine Ellipse sei, verträglichen

---

33) *A. Marth,* On the formulae for correcting Approximate Elements of the Orbits of Binary Stars; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 47 (1887).

34) Lick Obs. Bull. 84 (1905).

35) *J. B. Bertrand, G. Darboux, G. H. Halphén,* Paris C. R. 84 1877; *F. Tisserand,* Paris Bull. astr. IV 1887.

Kraftgesetze zu bestimmen, läßt bei einigen an sich sehr wahrscheinlichen Annahmen das *Newton*sche Gesetz als die einzige Lösung erscheinen. Die Unvollkommenheit der Doppelsternmessungen erschwert jedoch die Prüfung des elliptischen Charakters der scheinbaren Bahn so sehr, daß das Urteil *Dunèr*s[36]): „Es wäre kaum zu rechtfertigen, irgendeine der bisherigen Bahnbestimmungen als Bestätigung der Gültigkeit des *Newton*schen Gesetzes außerhalb des Sonnensystems anzuführen" auch jetzt noch als zutreffend anzusehen ist, wenn man eine Bestätigung von einiger numerischer Exaktheit fordert. Die kleinste Periode, wahrscheinlich 5, 7 Jahre, besitzt δ *Equulei*. Unter den Exzentrizitäten kommen fast alle Werte vor; doch sind wenige so klein, wie bei den Planeten, oder so groß, wie bei den Kometen. Die kleinste Exzentrizität (0,13) hat ξ Scorpii, die größte (0,90) γ Virginis. Der aus den Exzentrizitäten von 40 Bahnen abgeleitete mittlere Wert $e = 0{,}48$ dürfte, da die Häufigkeit der Bahnen, welche auf gleiche Änderungen von e entfallen, in der Nähe dieses Wertes ein klar ausgesprochenes Maximum besitzt, den Bahnen visueller Doppelsterne im allgemeinen ungefähr entsprechen.[37]) Je größer P ist, desto größer ist im Durchschnitt auch e. Durch Einteilung von 45 nach der Länge der Periode geordneten Bahnen in drei Gruppen: $P < 50$, $50 < P < 120$ und $P > 120$ fand *G. Doberck*[38]) für die mittleren Exzentrizitäten die Werte 0,37, 0,50 und 0,62. Die nahe liegende Schlußfolgerung, daß die Exzentrizitäten mit der Entfernung der Komponenten zunehmen, ist aber vielleicht doch zu weitgehend, da *Doberck*s[39]) Untersuchungen über die Werte von n^2a^3 andeuten, daß enge Doppelsterne entweder eine kleinere Parallaxe oder eine kleinere Masse besitzen als weite. Die Neigung der Bahnen zeigt keinen Zusammenhang mit irgendeinem größten Kreise der Sphäre, wohl aber die Verteilung der Doppelsterne. Nach *Doberck*[40]) findet eine Anhäufung der Paare gegen den Kreis hin statt, dessen nördlicher Pol die Koordinaten hat $\alpha = 11^h40^m$; $\delta = +22^0$, und daher dem Pole des *Gould*schen Kreises[41]) sehr nahe liegt. Die Dichte der Paare in der Nähe des Kreises ergab sich ungefähr dreimal so groß als in der Nähe seiner Pole. Die in Betracht gezogenen Paare sind,

---

36) Einige Bemerkungen über verschiedene Berechnungen von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. 132 (1893).

37) *T. J. See,* Researches on the Evolution of the Stellar Systems Vol. I, 1896.

38) On Double Star Orbits. Astr. Nachr. 147 (1898).

39) On the Axes and Periods of Double Stars. Astr. Nachr. 138 (1895).

40) On the Distribution of Binary Stars. Astr. Nachr. 158 (1902).

41) *H. Kobold,* Der Bau des Fixsternhimmels (Seite 154) Braunschweig 1906.

um optische Doppelsterne nach Tunlichkeit fern zu halten, so ausgewählt worden, daß der Abstand der Komponenten und die Größenklasse der helleren Komponente die Grenzen 2″,0 bzw. 7,5 nicht überstiegen.

Daß ein Fixstern, dessen Eigenbewegung im Laufe eines Jahrhunderts sich als veränderlich erweist, mit einem oder mehreren anderen Sternen zu einem physischen Systeme verbunden sein muß, hat *Bessel* bewiesen. *Pond* glaubte in den Eigenbewegungen einiger Sterne Veränderungen zu bemerken, die aber durch spätere Beobachtungen nicht bestätigt worden sind. *H. W. Bessel*[42]) dagegen konnte aus den Rektaszensionen des Sirius und den Deklinationen des Procyon eine Veränderlichkeit der Eigenbewegung konstatieren. Die Bahn des Sirius ist von *Peters*[43]) und später von *A. Auwers*[44]) bestimmt worden, noch bevor *A. Clark* (1862) gelegentlich der Prüfung des Washingtoner 26-Zöllers den Begleiter (Stern 10ter Größe) entdeckt hat. Messungen der Distanz gaben die noch unbekannte Halbachse der Doppelsternbahn. Nach *Zwiers*[45]) ist $P = 48{,}8$, $a = 7''{,}59$, $e = 0{,}59$, $\frac{m + m'}{m_0} = 3{,}3$; $\frac{m'}{m} = \frac{1{,}04}{2{,}20}$ (*Auwers*). Procyon beschreibt nach *Auwers*[46]) eine Kreisbahn mit dem Radius 0″98 (nach *L. Struve*: 0″74) in nahe 40 Jahren. *Schäberle*[47]) hat (1896) einen Begleiter 13ter Größe entdeckt ($\theta = 319^0$, $\varrho = 4''{,}6$); der berechnete Wert von θ ist 284^0. *A. Auwers*[48]) hält die Identität des entdeckten Begleiters mit dem störenden Körper in dem System des Sirius für sicher, in dem des Procyon aber, besonders mit Rücksicht auf die beobachtete Änderung der Distanz, für sehr zweifelhaft. Mehrere Sterne scheinen dunkle Begleiter zu besitzen; die Bewegungen der Komponenten des dreifachen Sternes ξ Cancri[49]) und des Doppelsternes 70 Ophiuchi[50]) machen zu ihrer Erklärung die Annahme unsichtbarer Begleiter notwendig.

---

42) Über Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Fixsterne. Astr. Nachr. 22 (1845); Bessel Abhdl. I.

43) *C. A. F. Peters*, Astr. Nachr. 32 (1851).

44) Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen, I. Teil, nigsberg 1862, II. Teil, Leipzig 1868.

45) *W. W. Campbell*, Variable Radial Velocity of Sirius. Astrophys. Journal 21 (1905).

46) Berl. Ber. 1873.

47) Astr. Nachr. 142 (1897).

48) Astr. Nachr. 164 (1904).

49) *H. Seeliger*, Wien. Denkschr. 44 (1881); Münch. Abhdl. 17 (1892); Münch. Ber. 24 (1894); *P. Harzer*, Astr. Nachr. 116 (1887).

50) *A. Prey*, Wien. Denkschr. 72 (1901).

4. Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne. Die zuerst von *Huggins* im Jahre 1867 angewandte Methode der Bestimmung der Radialgeschwindigkeit von Fixsternen durch direkte Messung der Verschiebung von Linien des Sternspektrums gegen die Linien eines Vergleichsspektrums ist durch die von *H. C. Vogel* und *J. Scheiner* 1888 eingeführte und seither immer mehr vervollkommnete spektrographische Methode schon seit Jahren vollständig verdrängt worden, da es sich gezeigt hatte, daß die Linienverschiebung in den Spektrogrammen viel sicherer gemessen werden kann als in dem sich dem Auge darbietenden vibrierenden und fluktuierenden Spektralbande. Die Vergleichung der aus mehreren Beobachtungen eines einfachen Sternes abgeleiteten, auf die Sonne reduzierten Radialgeschwindigkeiten gibt ein Maß für die Sicherheit ihrer Bestimmung. Diese ist gegenwärtig so groß, daß unter besonders günstigen Umständen (starke Zerstreuung, scharfe Linien) die Abweichungen nur Bruchteile eines Kilometers betragen. Die hohe Leistungsfähigkeit der neuen Methode wurde schon im Jahre 1889 bewiesen, indem *Vogel*[51]) aus den beobachteten Radialgeschwindigkeiten *Algols* eine Veränderlichkeit derselben im Höchstausmaße von 80 Kilometern konstatieren und den Nachweis erbringen konnte, daß der Lichtwechsel dieses Sternes in dessen zeitweiliger Bedeckung durch einen relativ dunklen Begleiter begründet ist. Einige Jahre darnach hat die Lick-Sternwarte die systematische Beobachtung der Radialgeschwindigkeiten der Fixsterne und namentlich auch der Sterne mit veränderlicher Radialgeschwindigkeit (spektroskopische Doppelsterne) in ihr Arbeitsprogramm aufgenommen, welchem Beispiele dann auch die Yerkes-Sternwarte folgte. Das rasche Anwachsen der Zahl der Entdeckungen spektroskopischer Doppelsterne ist vornehmlich dem Beobachtungsdienste an diesen Instituten zu danken.

W. W. Campbells Second Catalogue (Lick Obs. Bull. 181, 1910) verzeichnet bereits 306 spektroskopische Doppelsterne und darunter mehr als 70, wovon ziemlich verläßliche Bahnbestimmungen vorliegen. Die Duplizität von Sternen, deren Geschwindigkeitsänderung weniger als 6 Kilometer beträgt, oder deren Helligkeit geringer ist als die eines Sternes 7ter—8ter Größe, ist zurzeit schwer nachweisbar. Sehr bemerkenswert ist die Häufigkeit einer veränderlichen Geschwindigkeit bei Sternen vom Oriontypus. Wie unter den visuellen Doppelsternen enge Paare viel häufiger vorkommen als weite, so entfallen auf die gleiche Anzahl von Sternen auch weit mehr spektroskopische Doppelsterne als visuelle.[52])

51) Spektrographische Beobachtung an Algol. Astr. Nachr. 123 (1890).

Die Bahn, welche eine Komponente des Doppelsternes um dessen Schwerpunkt beschreibt, wird durch die Radialgeschwindigkeiten dieser Komponente, die Bahn, in der sich eine Komponente um die andere bewegt, durch die Differenzen der Radialgeschwindigkeiten beider Komponenten bestimmt. Der Erfolg einer Bahnbestimmung ist in der Regel nur dann gesichert, wenn die beobachteten Geschwindigkeiten die Periode erkennen lassen und, eventuell durch Änderung der Beobachtungszeiten um ganzzahlige Vielfache von P, innerhalb des ganzen Zeitraumes einer Periode die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit zu bestimmen gestatten. Den Zusammenhang von Geschwindigkeit und Zeit kann man wohl am bequemsten dadurch finden, daß man die auf eine und dieselbe Periode reduzierten Beobachtungszeiten als Abszissen, die zugehörigen Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt und eine regelmäßig verlaufende Kurve zu ziehen versucht, welche sich den Endpunkten der Ordinaten bestmöglich anschließt. Je schärfer die Geschwindigkeitskurve durch die Beobachtungen bestimmt erscheint, desto größer wird auch die Sicherheit der Bahnbestimmung sein.

Die Einheiten der Zeit und des Weges seien mittlerer Tag und Kilometer. Da sich die Radialgeschwindigkeiten der Sterne stets auf die Sekunde beziehen, so wird ihre Reduktion auf die gewählte Zeiteinheit durch den Faktor $\gamma = 86400$ bewerkstelligt.

Der Stern Σ habe die Masse m, Σ' die Masse m'. Der Schwerpunkt des Systems befinde sich in S, die Sonne in O. Es sei

$$\Sigma O = Z \quad Z - Z_0 = \zeta \quad \frac{dZ_0}{dt} = \gamma V_0$$

$$\Sigma' O = Z' \quad Z - Z' = z \quad \frac{dZ}{dt} = \gamma V$$

$$SO = Z_0 \qquad S\Sigma = \varrho \quad \frac{dz}{dt} = \gamma V$$

$$\Sigma\Sigma' = r.$$

$a =$ Halbachse der Bahn von Σ mit Bezug auf S

$a =$ „ „ „ „ Σ „ „ „ Σ'.

Dann findet sich nach den Gesetzen der *Kepler*schen Bewegung:

$$(m + m')\zeta = m'z; \quad \zeta = \frac{\alpha}{a} z; \qquad z = r \sin u \sin i$$

$$(m + m')\alpha = m'a; \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\alpha}{a}\frac{dz}{dt}; \quad r^2 \frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1 - e^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos u + e \cos \omega).$$

52) Lick Obs. Bull. 79 (1903).

Je nachdem die auf die Sonne reduzierten Radialgeschwindigkeiten V des Sternes Σ oder die Differenzen V der Radialgeschwindigkeiten von Σ und Σ' gegeben sind, wird man von den Gleichungen ausgehen

$$V = V_0 + \frac{1}{\gamma}\frac{d\xi}{dt} \quad \text{oder} \quad V = \frac{1}{\gamma}\frac{dz}{dt}.$$

Durch Integration der ersten Gleichung zwischen den Grenzen t und $t+\mathrm{P}$, für welche ξ denselben Wert besitzt und daher $\int d\xi = 0$ ist, erhält man die Radialgeschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$V_0 = \frac{1}{\mathrm{P}}\int V\,dt.$$

Diese Gleichung kann man auch schreiben $\int (V - V_0)dt = 0$ und demnach V_0 aus der Bedingung ableiten, daß eine zur Abszissenachse parallele Gerade, welche die auf entgegengesetzten Seiten liegenden, von ihr und der Geschwindigkeitskurve begrenzten Flächenstücke gleich groß macht, die Ordinate V_0 besitzen muß.

Ist V' die Ordinate eines Kurvenpunktes mit Bezug auf diese Gerade, so wird

$$V' = \Gamma(\cos u + e\cos\omega); \quad \Gamma = \frac{n\,a\sin i}{\gamma\sqrt{1-e^2}}.$$

V' erreicht den größten positiven Wert (A) für $u = 0$, den größten negativen $(-B)$ für $u = \pi$; es ist also:

$$\Gamma = \frac{A+B}{2}; \quad e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B}.$$

Um e zu finden, bestimmte *A. A. Rambaut*[53]), welcher von diesen Gleichungen zuerst Gebrauch gemacht hat, zunächst die Projektion der wahren Ellipse auf eine die Gesichts- und Knotenlinie enthaltende Ebene (ξ, ζ). Für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $\xi = 0$, $V' = \frac{A-B}{2}$.

Ist T einer dieser Zeitpunkte, so folgt aus dem Flächensatz:

$$\xi = c' \cdot \xi \int_T^t \frac{dt}{\zeta^2}.$$

Entsprechen ferner den Momenten, in welchen der Reihe nach $V' = A,\ 0,\ -B,\ 0$ wird, die Zeiten τ_1, t_1, τ_2, t_2, so ist

$$\zeta = \gamma \int_{\tau_1}^{t} V'\,dt.$$

---

53) On the Determination of Double Star Orbits; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 51 (1891).

Damit ist die Projektionsellipse gegeben, aus der sich e leicht ablesen läßt. Da die Projektionsellipse nur zur Ermittlung von e dienen soll, kann c' nach Belieben angenommen werden.

R. Lehmann-Filhés[54]) gibt eine bequemere Lösung durch Aufstellung einer Gleichung für $e \sin \omega$. Besitzt u für t_1, t_2 die Werte u_1, u_2, so ist, da

$$0 < u_1 < \pi \text{ und } \pi < u_2 < 2\pi, \quad \cos u_1 = \cos u_2 = -e \cos \omega = -\frac{A-B}{A+B};$$

$$u_2 = 2\pi - u_1; \quad \sin u_1 = +\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$$

Aus

$$\xi = \varrho \sin u \sin i$$

$$\varrho = \frac{\alpha(1-e^2)}{1+e\cos(u-\omega)}$$

folgt für die Zeiten t_1 und t_2 ...

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -\frac{\sin u_1 - e \sin \omega}{\sin u_1 + e \sin \omega}$$

und daraus

$$e \sin \omega = \frac{\xi_2 + \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \sin u_1.$$

ξ_1, ξ_2 werden durch Quadratur erhalten aus

$$\xi_1 = \gamma \int_{\tau_1}^{t_1} V' dt; \quad \xi_2 = \gamma \int_{\tau_2}^{t_2} V' dt.$$

Nach Bestimmung von e und ω ergibt sich t_0 aus den Formeln

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{u-\omega}{2}; \quad E - e \sin E = n(t - t_0),$$

welche am zweckmäßigsten für t_1 und t_2 zu verwenden sind. Bei großen Exzentrizitäten leistet die Formel $\sqrt{1-e^2} = \pi \operatorname{tg} u_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t_2 - t_1}{P}\right)$ gute Dienste. Die Γ definierenden Gleichungen geben

$$\alpha \sin i = \frac{\gamma}{n} \frac{A+B}{2} \sqrt{1-e^2}.$$

Ω, α, i bleiben unbestimmt, da die Radialgeschwindigkeit von Ω unabhängig ist und die Elemente α und i nur in der Kombination $\alpha \sin i$ enthält.

Sind die relativen Geschwindigkeiten V gegeben, so bleibt V_0 unbestimmt. Die zur Berechnung der Bahnelemente dienenden Formeln bleiben in Gültigkeit, wenn V, r, a an Stelle von V', ϱ, α ge-

54) Über Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spektr. Mess. Astr. Nach. 136 (1894).

setzt werden. Da

$$\frac{m+m'}{m_0} = \frac{n^2}{k_0^2} \cdot \frac{a^3}{a_0^3}, \text{ wird } \frac{m+m'}{m_0} \sin^3 i = \frac{1}{k_0^2 \cdot n} \left[\frac{\gamma (A+B)\sqrt{1-e^2}}{2 a_0}\right]^3,$$

wodurch eine untere Grenze für die Masse des Doppelsternes festgelegt ist. Die Erdbahnhalbachse a_0 ist in Kilometern auszudrücken; $\lg k_0 = 8{,}23558$.

Vorzüge der Methode von *Lehmann-Filhés* sind ihre allgemeine Anwendbarkeit und die Sicherheit der Bestimmung der Elemente durch Quadraturen; die Umständlichkeit der Ausführung von Quadraturen bildet aber einen Nachteil, den *K. Schwarzschild*[55]) durch Verwertung der Koordinaten gewisser Punkte der Geschwindigkeitskurve vermeidet.

Bedeutet M das Maximum, N das Minimum der Radialgeschwindigkeit $\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 + \Gamma(\cos u + e \cos \omega)$ und ist W definiert durch

$$\mathsf{W} = \mathsf{V} - \frac{M+N}{2}, \text{ so wird } \mathsf{W} = \Gamma \cos u; \quad \Gamma = \frac{M-N}{2}.$$

Wenn $\mathsf{W}' = -\mathsf{W}$ ist, wird $\cos u' = -\cos u$ und demnach entweder

$$(1) \qquad u' + u = \begin{cases} \pi \\ 3\pi \end{cases}$$

oder für $u' > u$

$$(2) \qquad u' - u = \pi.$$

Nennt man ein von der größten und kleinsten Ordinate begrenztes Stück der Geschwindigkeitskurve einen Zweig derselben, so ist für einen Zweig $0 < u < \pi$ für den andern $\pi < u < 2\pi$; die Relation (1) drückt daher aus, daß die Punkte W, t und $-\mathsf{W}, t'$ auf gleichen, die Relation (2), daß sie auf verschiedenen Zweigen der Kurve liegen. Für $u' - u = \pi$ wird

$$v' - v = \pi, \ \operatorname{tg}\frac{v'}{2} \operatorname{tg}\frac{v}{2} = -1 = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}\frac{E'}{2} \operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

$$-\operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = \operatorname{cotg}\frac{E'}{2} \operatorname{tg}\frac{E}{2} = -\frac{1-\cos v}{1+\cos v},$$

woraus folgt

$$e \cos\frac{E'+E}{2} = \cos\frac{E'-E}{2}, \quad \sin\frac{E'+E}{2} = \cos v \sin\frac{E'-E}{2}$$

und unter Bezugnahme auf die *Keplers*che Gleichung

$$E' - E - \sin(E' - E) = n(t' - t).$$

Der spezielle Fall, wo die Zeitdifferenz $\frac{1}{2}P$ beträgt, soll hier durch die

55) Ein Verfahren der Bahnbestimmung bei spektr. Doppelsternen. Astr. Nachr. 152 (1900).

Indizes 1 und 2 gekennzeichnet sein. Das Punktepaar, für welches $W_2 = -W_1$, $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}P$, $u_2 - u_1 = \pi$, entspricht, da auch $E_2 - E_1 = \pi$ ist, dem Periastron und Apastron. Die Zeit des Periastrons ist demnach eine der Abszissen t_1, t_2 des auf verschiedenen Zweigen der Kurve gelegenen durch $W_2 = -W_1$ und $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}P$ bestimmten Punktepaares. Das Periastron hat ein positives bzw. negatives W, je nachdem die Kurve der positiven bzw. negativen W rascher durchlaufen wird und in der Nähe des in Frage kommenden Punktes stärker gegen die Abszissenachse geneigt ist.

ω wird bestimmt durch $\Gamma \cos\omega =$ Ordinate W des Periastrons. Die Anwendbarkeit dieser Methode erfährt eine Beschränkung durch die für große Werte von $\cos\omega$ auftretende Unsicherheit der Bestimmung von ω aus $\cos\omega$. Um e zu finden, wähle man einen Kurvenpunkt (W, t) ungefähr in der Mitte zwischen Periastron und Apastron, suche auf dem anderen Zweige der Kurve einen zweiten Punkt (W', t'), so daß $W' = -W$, und bediene sich der oben angesetzten Gleichungen unter Berücksichtigung, daß $v = u - \omega$; $\cos u = \frac{W}{\Gamma}$. Die Auflösung der transformierten *Kepler*schen Gleichung wird durch eine Tafel mit dem Argument $t' - t$ wesentlich erleichert. Die übrigen Unbekannten erhält man aus $V_0 = \frac{M+N}{2} - e\,\Gamma\cos\omega$; $\alpha \sin i = \frac{\gamma}{n}\,\Gamma\sqrt{1-e^2}$.

Sind die Werte von V gegeben, wird, nachdem ω bekannt geworden ist, e aus der Gleichung $\frac{M+N}{M-N} = e\cos\omega$ gefunden.

H. Nijland[56]) empfiehlt zur Bestimmung von e die Wahl der durch ihre symmetrische Lage zum Periastron im allgemeinen leicht bemerklichen Punkte $v = \pm\frac{\pi}{2}$, deren Ordinaten $W = \mp\Gamma\sin\omega$ sind. Die Auffindung dieser Punkte wird bei sehr kleinen Werten von $\sin\omega$ unsicher. Ist Δt ihre Abszissendifferenz, so wird

$$2E - \sin 2E = \Delta t; \quad e = \cos E.$$

Zwei Wertepaare von V, V genügen zur Bestimmung von V_0 und $\frac{m'}{m}$, da $V = V_0 + \frac{\alpha}{a}V$ und $\frac{\alpha}{a} = \frac{m'}{m+m'}$; werden die Radialgeschwindigkeiten von Σ und Σ' mit g und g' bezeichnet, so ist

$$g = V, \quad g' = V - V \quad \text{und} \quad g' + g = 2V_0 + \frac{m-m'}{m+m'}(g' - g).$$

W. Zurhellen[57]) empfiehlt, zunächst aus diesen Gleichungen V_0 und $\frac{m'}{m}$ zu bestimmen.

---

56) Zur Bahnbestimmung von spektr. Doppelsternen. Astr. Nachr. 161 (1903).

57) Bemerkungen zur Bahnbestimmung spektr. Doppelsterne. Astr. Nachr. 175 (1907).

Wenn die anfangs gezeichnete Geschwindigkeitskurve beträchtliche Fehler aufweist, wie dies bei Sternen, deren Spektra schwierig zu messen sind, gewöhnlich vorkommt, werden die wahrscheinlichsten Bahnelemente nur im Wege fortgesetzter Näherungen zu erhalten sein. In solchen Fällen kann man den angestrebten Zweck durch sukzessive Verbesserungen der Geschwindigkeitskurve erreichen, wozu sich die graphische Methode von *W. F. King*[58]) besonders eignet.

Die Bahnelemente eines spektroskopischen Doppelsternes können auch auf *analytischem* Wege erhalten werden, indem man V durch Reihenentwicklung als Funktion der Zeit darstellt und die Koeffizienten aus den Beobachtungsdaten bestimmt. *J. Wilsing*[59]) hat sich auf die Bestimmung von Bahnen mit kleiner Exzentrizität beschränkt; bei größeren Exzentrizitäten kann man sich der Methode von *N. H. Russel*[60]) bedienen, welche die Reihenentwicklung voraussetzt:

$$V = C_0 + C_1 \cos N + C_2 \cos 2N + \cdots + S_1 \sin N + S_2 \sin 2N + \cdots,$$

wo $N = n(t - \tau)$, τ = Epoche; die zu τ gehörige mittlere Anomalie (M) sei mit M_0 bezeichnet. Durch die Substitution $C = G \cos g$; $S = -G \sin g$ erhält man

$$V = G_0 + G_1 \cos(N + g_1) + G_2 \cos(2N + g_2) + \cdots.$$

In eine Reihe von derselben Form läßt sich die Gleichung

$$V = V_0 + \frac{1}{\gamma}\frac{d\zeta}{dt}$$

überführen; es ist nämlich

$$\frac{\varrho}{\alpha}\cos v = \frac{3}{2}e + X_1 \cos M + \frac{1}{2}e X_2 \cos 2M + \cdots$$

$$\frac{\varrho}{\alpha}\sin v = \quad Y_1 \sin M + \frac{1}{2}e Y_2 \sin 2M + \cdots.$$

Die Koeffizienten sind Funktionen der Exzentrizität, die von der Einheit nur um Größen von der Ordnung e^2 verschieden sind.

Setzt man

$$X \sin\omega = b \sin\beta$$

$$Y \cos\omega = b \cos\beta,$$

so ist, da $\zeta = \varrho \sin i \sin(v + \omega)$ und $M = N + M_0$

$$V = V_0 + \frac{\alpha n \sin i}{\gamma}[b_1 \cos(N + M_0 + \beta_1) + e b_2 \cos(2N + 2M_0 + \beta_2) + \cdots].$$

---

58) Determination of the Orbits of Spektroscopic Binaries. Astroph. Journ. 27 (1908).

59) Über die Bestimmung von Bahnelementen enger Doppelsterne aus spektr. Mess. Astr. Nach. 134 (1894).

60) An improved Method of calculating the Orbit of a Spectr. Binary. Astrophys. Journal 15 (1902).

Die Elemente werden auf dem Wege fortgesetzter Näherungen erhalten. Die erste Näherung, bei welcher schon e^2 unberücksichtigt bleibt, ist die *Wilsing*sche Lösung: $X = Y = b = 1$; $\beta = \omega$:

$$V_0 = G_0; \quad a \sin i = \frac{\gamma}{n} G_1; \quad e = \frac{G_2}{G_1}; \quad M_0 = g_2 - g_1; \quad \omega = 2g_1 - g_2.$$

5. Einige Ergebnisse der Beobachtung und der Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne.[61]) Die Änderung der Radialgeschwindigkeit nimmt zugleich mit der Geschwindigkeit der Revolutionsbewegung bei wachsender Entfernung der Komponenten eines Doppelsternes ab und wird demnach, wenn die Entfernung eine gewisse Grenze überschreitet, aufhören, meßbar zu sein. Diese Grenze dürfte, bei ausreichender Lichtstärke der Komponenten, öfters zur Auflösung des Doppelsternes durch das Fernrohr mehr als genügen. Bis jetzt sind aber nur sehr wenige Sterne bekannt, deren Duplizität durch das Fernrohr mit und ohne Spektroskop zu erkennen ist. Hierzu gehören ε Hydrae und δ Equulei, deren Perioden 15,7 bzw 5,7 Jahre betragen. Da man in solchen Fällen die Neigung i der Bahn aus den direkten Messungen der Komponenten, $a \sin i$ dagegen aus den spektrographischen Beobachtungen bestimmen kann, so können die Dimensionen der Bahn in linearem Maße sowie die Parallaxe gefunden werden.

Im allgemeinen entfernen sich aber die Komponenten der spektroskopischen Doppelsterne zu wenig voneinander, als daß es möglich wäre, sie im Fernrohre getrennt wahrzunehmen, und man ist daher bei der Untersuchung dieser Systeme lediglich auf die Messung der Radialgeschwindigkeiten angewiesen. Zurzeit (Ende 1910) sind, wie erwähnt, ungefähr 70 Bahnen spektroskopischer Doppelsterne bekannt, und es ist bereits möglich gewesen, einige allgemeinere Schlüsse über ihre Eigentümlichkeiten zu ziehen. Zusammenfassende Diskussionen des vorhandenen Materials sind gleichzeitig von *F. Schlesinger* und *R. H. Baker*[62]), *H. Ludendorff*[63]) und *W. W. Campbell*[64]) geliefert worden. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeiten sollen hier kurz dargelegt werden.

---

61) Verfaßt von *H. Ludendorff* in Potsdam.

62) *F. Schlesinger* and *R. H. Baker*, A Comparative Study of Spectroscopic Binaries. Publications of the Allegheny Observatory of the University of Pittsburgh. Volume I, No. 21 (1910).

63) *H. Ludendorff*, Zur Statistik der spektr. Doppelsterne. Astr. Nachr. 184 (1910).

64) *W. W. Campbell*, Second Catalogue of Spectroscopic Binary Stars. Lick Obs. Bull. No. 181 (1910).

Was zunächst die Exzentrizitäten angeht, so zeigt es sich, daß die Bahnen der spektroskopischen Doppelsterne durchschnittlich bedeutend weniger exzentrisch sind als die der visuellen Doppelsterne. Sowohl bei den letzteren wie bei den spektroskopischen Doppelsternen verrät sich im Durchschnitt eine deutliche Zunahme der Exzentrizität mit der Periode. Dies erkennt man an der folgenden, von *Schlesinger* und *Baker* gegebenen Tabelle:

	Mittlere Periode	Mittlere Exzentrizität
Spektroskopische Doppelsterne v. kurzer Periode	4 Tage	0,07
„ „ „ langer „	129 „	0,35
Visuelle „ „ kurzer „	36 Jahre	0,45
„ „ „ langer „	136 „	0,54

Für die visuellen Systeme hat übrigens, wie bereits in Nr. 3d erwähnt, *W. Doberck* schon früher auf dieses Verhalten aufmerksam gemacht. Die auffallende Gesetzmäßigkeit ist für die Entwicklungsgeschichte der Sterne von Interesse. Dasselbe gilt von folgender Tatsache: Diejenigen spektroskopischen Doppelsterne, welche Spektra besitzen, wie sie nach den heutigen Anschauungen einer verhältnismäßig frühen Entwicklungsstufe entsprechen (Spektra der *Vogel*schen Spektralklasse Ib und Ia_2) haben im Durchschnitt kürzere Umlaufszeiten und engere Bahnen als diejenigen, deren Spektra weiter entwickelt sind (Spektra der Spektralklassen Ia_3 und IIa). Es ist nämlich für die erste Gruppe im Mittel $P = 30$ Tage, $a \sin i = 16\,500\,000$ km, für die zweite Gruppe $P = 167^d$, $a \sin i = 29\,500\,000$ km. Es ist hierbei allerdings zu beachten, daß man unter den spektroskopischen Doppelsternen der ersten Gruppe bisher hauptsächlich solche mit großen Anderungen der Radialgeschwindigkeit zur Bahnbestimmung ausgewählt hat, so daß das obige Resultat dem Sinne nach reell, numerisch aber etwas übertrieben sein dürfte.

Über die Massen der spektroskopischen Doppelsterne kann man nur dann einigen Aufschluß erhalten, wenn die Radialgeschwindigkeiten beider Komponenten gemessen worden sind. Man kann alsdann die Größen $m \sin^3 i$ und $m' \sin^3 i$ angeben. i ist zwar im allgemeinen unbekannt, immerhin liefern jene beiden Größen aber Minimalwerte für die beiden Massen. Es hat sich nun gezeigt, daß die lichtschwächere Komponente in allen diesen Systemen auch stets die kleinere Masse besitzt. Die numerischen Werte von $m \sin^3 i$ und

$m' \sin^3 i$ variieren innerhalb ziemlich weiter Grenzen. Die bisher beobachteten Extreme sind (in Sonnenmassen ausgedrückt) 0,52 und 0,38 bei ϑ Aquilae, 11,2 und 10,6 bei η Orionis. Im Mittel aus 15 von *Schlesinger* und *Baker* aufgeführten Fällen ist $(m + m') \sin^3 i = 6$ Sonnenmassen, so daß also diese Systeme durchschnittlich weit größere Massen haben als die Sonne. Man wird sich aber vor dem Schlusse hüten müssen, daß große Masse eine allgemeine Eigenschaft der spektroskopischen Doppelsternsysteme ist. Denn es ist zu beachten, daß es sich in jenen 15 Fällen um helle Sterne handelt, für die schon ihrer Helligkeit wegen größere Massen wahrscheinlich sind.

Ist bei einem spektroskopischen Doppelstern nur das Spektrum einer Komponente sichtbar, so kann man nur die Größe $\frac{m'^3 \sin^3 i}{(m + m')^2}$ berechnen, welche proportional $\frac{(a \sin i)^3}{P^2}$ ist. Da sowohl i wie $\frac{m'}{m}$ unbekannt sind, so kann man keinerlei Angaben über die Einzelmassen machen. Immerhin ermöglicht das Verhalten der $a \sin i$ und P bei den verschiedenen Systemen den Schluß, daß die Größe und die Verteilung der Massen in den einzelnen Systemen durchschnittlich recht gleichmäßig ist. Ordnet man nämlich die Bahnen der spektroskopischen Doppelsterne nach der Periode P und bildet aus benachbarten Werten von P und den zugehörigen Werten von $a \sin i$ die Mittel P_0 und $(a \sin i)_0$, so zeigt sich nach *H. Ludendorff*, daß die $(a \sin i)_0^3$ und P_0^2 in einem einigermaßen konstanten Verhältnis stehen, so daß sich also für kurzperiodische Systeme ungefähr derselbe Wert von $\frac{m'^3 \sin^3 i}{(m + m')^2}$ ergibt wie für langperiodische.

Der Fall, daß nur das Spektrum der helleren Komponente sichtbar ist, ist der weitaus häufigere. Immerhin hat man bisher bei ungefähr 60 Systemen mehr oder weniger deutliche Spuren des Spektrums des Begleiters nachweisen oder vermuten können. In mehreren Fällen sind die beiden Komponenten gleich hell und besitzen gleiche Spektra, so daß alsdann infolge der relativen Radialbewegung beider Komponenten periodische Linienverdoppelungen eintreten. Klassische Beispiele für diesen Fall sind die Sterne β Aurigae und ζ_1 Ursae majoris. Für letzteren sind die Elemente der relativen Bahn nach *H. C. Vogel*[65]: $P = 20^d,5$, $A = 128$ km, $B = 149$ km, $e = 0{,}52$, $a \sin i = 33\,000000$ km. Auch der etwa 14″ von ζ_1 Ursae majoris entfernt stehende visuelle Begleiter ζ_2 Ursae majoris ist ein spektroskopischer Doppelstern und ebenso der

65) *H. C. Vogel*, Weitere Untersuchungen über das spektr. Doppelsternsystem Mizar. — Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Série II, Tome VI. 1901, p. 661.

etwa 11′ entfernte Alkor. Da, wie aus der Gleichheit der Eigenbewegungen hervorgeht, Alkor und das visuelle Doppelsternsystem ζ Ursae majoris physisch zusammengehören, so haben wir hier ein aus drei spektroskopischen Doppelsternen bestehendes System vor uns.

Ein visueller Doppelstern, dessen beide Komponenten spektroskopische Doppelsterne sind, ist auch α Geminorum (Castor), dessen durch eine Distanz von 6″ getrennte Komponenten eine Umlaufszeit von mehreren hundert Jahren haben, so daß ihre relative Bahn noch nicht mit Sicherheit hat bestimmt werden können. Beide Komponenten sind nun, wie schon erwähnt, spektroskopische Doppelsterne. Nach *H. D. Curtis*[66]) sind für die hellere Komponente (α_2 Geminorum) die Elemente: $P = 9^d{,}22$, $A = 13{,}0$ km, $B = 14{,}1$ km, $e = 0{,}50$, $a \sin i = 1\,485000$ km, $V_0 = +\,6$ km, für die schwächere (α_1 Geminorum): $P = 2^d{,}93$, $A = 31{,}7$ km, $B = 31{,}8$ km, $e = 0{,}01$, $a \sin i = 1\,279000$ km, $V_0 = -\,1$ km. Die relative Radialgeschwindigkeit von 7 km der beiden Komponenten gegeneinander deutet auf eine ziemlich große Masse des ganzen Systems hin.

Von anderen interessanten spektroskopischen Doppelsternsystemen seien hier noch kurz erwähnt die zwei mit den kürzesten bisher festgestellten Perioden, nämlich β Cephei ($P = 0^d{,}19$) und β Canis majoris ($P = 0^d{,}25$), ferner das System β Arietis mit außerordentlich großer Exzentrizität ($e = 0{,}88$) und einige Systeme, in denen die Amplituden der Radialgeschwindigkeit sehr groß sind, nämlich u Herculis (hellere Komponente $A + B = 199$ km, schwächere Komponente $A + B = 506$ km), η Orionis ($A + B = 290$ km), ψ Orionis ($A + B = 288$ km).

Besonders bemerkenswert sind einige wenige Fälle, in denen die Werte der Radialgeschwindigkeit so verlaufen, daß man zu der Annahme eines dritten Körpers in den betreffenden Systemen gezwungen ist. Das bekannteste Beispiel dieser Art ist der Polarstern, dessen Natur als spektroskopischer Doppelstern von *W. W. Campbell*[67]) entdeckt wurde. Seine Bahnelemente sind $P = 3^d{,}97$, $A + B = 6{,}1$ km, $e = 0{,}13$, $a \sin i = 164\,500$ km. Der Schwerpunkt dieses Systems hat aber, wie *Campbell* bemerkte, keine konstante Radialgeschwindigkeit; vielmehr bewegt er sich in einer Bahn mit den Elementen $P = 11{,}9$ Jahre, $A + B = 6{,}0$ km, $e = 0{,}35$, $a \sin i = 166\,800000$ km. Wir haben uns das System also wie folgt vorzustellen: Ein sehr enges Doppelsternsystem mit viertägiger Umlaufszeit bewegt sich in

66) *H. D. Curtis*, The System of Castor. Astroph. Journ. 23 (1906), p. 351.

67) *W. W. Campbell*, The Variable Velocity of α Ursae Minoris in the Line of Sight. Astroph. Journ. 10 (1899), p. 180.

zwölfjähriger Periode um den Schwerpunkt des aus ihm und einem dritten Körper gebildeten Systems in einer Bahn, deren auf den Visionsradius projizierte große Halbachse etwas größer ist als die große Halbachse der Erdbahn. Auch bei einigen andern spektroskopischen Doppelsternen hat man Abweichungen von der einfachen elliptischen Bahnbewegung bemerkt, die aber zumeist noch nicht näher untersucht sind.[68]) Zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen wird man wohl meist die Existenz eines dritten, störenden Körpers annehmen müssen. Auch ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß in gewissen Fällen die Linienverschiebungen nicht durch Radialbewegung, sondern auf andere Weise, z. B. durch Druckänderungen, zustande kommen.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist eine Klasse von Sternen ganz außer acht gelassen worden, die in gewisser Weise den andern gegenüber eine Sonderstellung einnimmt. Es sind dies diejenigen spektroskopischen Doppelsterne, die zugleich veränderliche Sterne vom δ Cephei- und ζ Geminorum-Typus sind. Die Helligkeitsänderungen dieser Sterne verlaufen mit großer Regelmäßigkeit in Perioden von meist nur wenigen Tagen. Die Radialgeschwindigkeiten erleiden Änderungen von derselben Periode wie die Helligkeit, und das Maximum der Helligkeit fällt sehr nahe mit der größten Annäherungsgeschwindigkeit, das Minimum mit der größten von der Erde fortgerichteten Geschwindigkeit zusammen.[69]) Charakteristisch für die Bahnen ist ziemlich starke Exzentrizität (0,31 im Mittel aus elf bekannten Bahnen) und kleine Werte von $a \sin i$ (856 000 km bis 2 000 000 km). Durchweg ist die Größe $\frac{m'^3 \sin^3 i}{(m+m')^2}$ sehr klein, nämlich gleich durchschnittlich 0,0034 Sonnenmassen. Dies deutet darauf hin, daß m' im Verhältnis zu m ziemlich klein ist, da man sonst sehr geringe Gesamtmassen annehmen müßte. Eine befriedigende Erklärung für den Zusammenhang zwischen den Änderungen der Helligkeit und denen der Radialgeschwindigkeit ist bisher noch nicht gefunden worden. (Vgl. unten Nr. 6 b).) Die Spektra dieser Sterne sind durchweg, von gewissen Eigentümlichkeiten abgesehen, dem Sonnenspektrum ähnlich, und Andeutungen des Spektrums des Begleiters sind nicht wahrzunehmen.

68) Vgl. z. B. *J. S. Plaskett,* The Spectroscopic Binary β Orionis. Astroph. Journ. 30 (1909), p. 26.

69) *J. C. Duncan,* The Orbits of the Cepheid Variables Y Sagittarii and *R T Aurigae*; with a Discussion of the Possible Causes of this Type of Stellar Variation. Lick Obs. Bull. Nr. 151 (1909).

6. Bestimmung der Bahn, Figur und Dichte veränderlicher Sterne. Wenn man den Lichtwechsel eines veränderlichen Sterns auf Verfinsterungserscheinungen zweier umeinander kreisender Körper zurückführen will, so ergibt sich das Problem, aus der Lichtkurve die Bahn und die relativen Dimensionen der beiden Körper zu berechnen. Es zeigt sich, daß sich dabei auch noch interessante Schlüsse auf die Dichte der Körper machen lassen.

a) *Algolsterne.* Besonders klar und zweifellos mit Verfinsterungen hat man es zu tun bei den Algolsternen — so genannt nach dem hellsten dieses Typus Algol (β Persei) —, bei denen in regelmäßigen Intervallen für eine kurze Zeit eine beträchtliche Verminderung der sonst konstanten Normalhelligkeit eintritt. Unter der Voraussetzung, daß beide Körper als Kugeln angenommen werden können, seien R, d, R', d' die Radien und Dichten der Massen m und m'. Die durch die Gleichung $D = \frac{R^3 d + R'^3 d'}{R^3 + R'^3}$ definierte mittlere Dichte des Systems ist (bei Vernachlässigung der Masse Erde + Mond) in Einheiten der mittleren Dichte D_0 der Sonne gegeben durch

$$\frac{D}{D_0} = P_0^2 \left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3 \frac{a^3}{P^2 (R^3 + R'^3)}.$$ [70])

Ist t die Dauer des Lichtwechsels (die Zeit zwischen den beiden äußeren Berührungen der Körper von der Erde aus gesehen), so wird für eine Kreisbahn, wie geometrisch leicht ersichtlich:

$$R + R' = a \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi t}{P} \sin^2 i} = a\sigma.$$

Setzt man

$$\nu = 4 P_0^2 \left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3,$$

so kann geschrieben werden

$$\frac{D}{D_0} = \nu \frac{(R + R')^3}{4(R^3 + R'^3)} \cdot \frac{1}{P^2 \sigma^3}.$$

Da

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{(R + R')^3}{4(R^3 + R'^3)} \leqq 1 \quad \text{und} \quad \sigma \geqq \sin \frac{\pi t}{P},$$

ist auch

$$\frac{D}{D_0} \leqq \frac{\nu}{P^2 \sin^3 \frac{\pi t}{P}}.$$

Das Gleichheitszeichen bezieht sich auf den Fall

$$R = R', \quad i = \frac{\pi}{2};$$

---

70) *M. Mériau,* Densité des étoiles variables du type d'Algol, Paris C. R. 122, 1896.

wird P in Stunden ausgedrückt, so ist $\log v = 1{,}4905$. Für elliptische Bahnen wird σ durch eine sehr komplizierte Formel dargestellt.[70])

Die meisten Algolsterne zeigen nur *ein* Minimum. Nur die Bedeckung des Hauptsterns durch den Begleiter, nicht aber die des Begleiters durch den Hauptstern gibt eine merkliche Lichtabnahme. In diesem Falle muß, wenn von großen Bahnexzentrizitäten abgesehen wird, bei welchen die zweite Bedeckung überhaupt ausfallen kann, die Helligkeit des Begleiters um mindestens 2—3 Größenklassen geringer sein als die des Hauptsternes, so daß der Begleiter als dunkel aufgefaßt werden kann. Sofern sich der Begleiter zur Zeit des Minimums vollständig auf den Hauptstern projiziert und dessen Oberfläche in allen ihren Teilen Licht von gleicher Intensität uns zusendet, läßt sich die Maximaländerung Δm der Sterngröße ausdrücken durch

$$\Delta m = 2{,}5 \log \frac{1}{1-\left(\frac{R'}{R}\right)^2}; \quad R' < R.$$

Aus dieser Gleichung kann $\frac{R'}{R}$ bestimmt werden. Dann tritt in dem Ausdruck für D nur noch $\sin i$ als Unbekannte auf, welche Größe wohl nie sehr weit von der Einheit abweichen dürfte. Da

$$\frac{d}{D_0} = \frac{\left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3}{\left(\frac{R}{a}\right)^3 \left(\frac{P}{P_0}\right)^2} \frac{m}{m+m'}$$ [71])

und die Vertauschung von R, m mit R', m' die Gleichung für $\frac{d'}{D_0}$ gibt, so bedarf man nur der Kenntnis von P, t und $\frac{R'}{R}$, um zu Grenzwerten der Dichten zu gelangen gemäß der Relation

$$\frac{d}{D_0} < \frac{\left(\frac{R_0}{a_0}\right)^3 \left(1+\frac{R'}{R}\right)^3}{\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 \sin^3 \frac{\pi t}{P}}.$$

Hat das Minimum selbst, die Zeit zwischen den beiden inneren Berührungen, eine Dauer t_1, so besteht auch die Gleichung

$$R - R' = a \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi t_1}{P} \sin^2 i},$$

welche die Bestimmung von D, $\frac{R}{a}$, $\frac{R'}{a}$ und i ermöglicht. Die weitere, aus spektroskopischer Beobachtung gewonnene Kenntnis von $\alpha \sin i$, mithin auch von α, kann, wie *Barnard*[72]) gezeigt hat, zur Bestimmung

71) *A Roberts*, Density of close Double Stars. Astroph. Journ. 10 (1899).
72) *R. J. A. Barnard*, Note on the Algol System. Astroph. Journ. 23 (1906).

der Minimalwerte von R, R' und der Maximalwerte von d, d' verwendet werden, indem, wenn $\frac{R'}{R} = \lambda$ und $\frac{d'}{d} = x$ gesetzt wird,

$$R = \alpha \frac{1 + \lambda^3 x}{\lambda^3 x (1 + \lambda)} \cdot \sigma \quad \text{und} \quad d = D \frac{\lambda^3 + 1}{\lambda^3 x + 1}$$

ist. Der kleinste Wert von R ist $\frac{\alpha\sigma}{1+\lambda}$, die größten Werte von d und d' sind $D(\lambda^3 + 1)$ bzw. $D\left(1 + \frac{1}{\lambda^3}\right)$. Für das System Algol ($D = 0{,}13$) fand *Barnard*

x	d	d'	$\frac{m}{m_0}$	$\frac{m'}{m_0}$
4,00	0,07	0,27	0,03	0,05
1,00	0,13	0,13	0,51	0,23
0,25	0,17	0,04	19,20	2,14.

Die Massenwerte werden, wie man sieht, außerordentlich stark von der Annahme über $\frac{d'}{d}$ beeinflußt.

Der Lichtwechsel Algols ist von *A. Pannekoek*[73]) zum Gegenstande eingehender Untersuchung gemacht worden, die zum Ergebnisse führte, daß die Lichtkurve symmetrisch ist und eine periodische Schwankung in der Helligkeit des Minimums oder in der Dauer der Verfinsterungen nicht nachgewiesen werden kann. Es muß deshalb dahingestellt bleiben, ob nicht doch gewisse Ungleichheiten vorkommen, die *S. C. Chandler*[74]) durch eine Bewegung des Doppelsterns um einen dritten Körper, *F. Tisserand*[75]) durch eine Drehung der Apsidenlinie der Doppelsternbahn zu erklären versuchten. *J. Stebbins*[76]) hat durch Verwendung von Selenzellen die Helligkeit Algols und anderer heller Sterne mit einer Genauigkeit zu bestimmen vermocht, die durch visuelle oder photographische Methoden bisher nicht erreicht worden ist. Nach seinen Beobachtungen besitzt die Lichtkurve Algols ein sekundäres Minimum, in dem die Helligkeit des Sterns eine Abnahme um $0^m{,}06$ erfährt. Die aus der Lichtkurve unter der Annahme einer größeren Flächenhelligkeit (J_1') der vom Hauptsterne beschienenen

---

73) Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. Dissertation Leiden (1902).

74) Contributions to the Knowledge of the variable stars, Astronomical Journal XI (1892).

75) Sur l'étoile variable β de Persée (Algol), Paris C. R. 120 (1895)

76) The Measurement of the Light of Stars with a Selenium Photometer, with an Application to the Variations of Algol, Astrophys. Journ. 32 (1910).

Seite des Begleiters erhaltenen Bestimmungsstücke des Systems sind:

$$i = 82^0{,}3 \quad R = 1{,}00 \quad J = 1{,}00 \quad P = 68{,}82 \quad D = 0{,}07\, D_0$$
$$e = 0{,}00 \quad R' = 1{,}14 \quad J_1' = 0{,}09 \quad t = 9{,}80 \quad d < 0.18\, D_0$$
$$a = 4{,}77 \quad J_2' = 0{,}05 \quad d' < 0{,}12\, D_0$$

Die Dichte der Algolsterne ist viel geringer als die der Sonne (1,4). Der Durchschnittswert der oberen Grenze für D dürfte etwa 0,2 sein.

Einige Algolsterne, wie Z Herculis[77]), UZ Cygni[78]) zeigen schon bei roherer Beobachtung *zwei Minima von ungleicher Helligkeit.* Photometrische Beobachtungen des Lichtwechsels dieser Sterne geben der Bahnbestimmung eine sicherere Grundlage als Beobachtungen von Sternen, die nur ein Minimum haben. Unter der Annahme $i = \frac{\pi}{2}$ können die Zeiten des beginnenden und endenden Lichtwechsels in sehr einfacher Weise zur Bestimmung von Bahnelementen verwertet werden. Je nachdem sich die Zeiten auf das Ende und den Wiedereintritt der Maxima oder auf Beginn und Ende der Minima beziehen, sei

$$\frac{R+R'}{a} = d \quad \text{oder} \quad \frac{R-R'}{a} = d.$$

Wenn diese Zeiten, vom Beginne des durch die Verdeckung des Begleiters entstehenden Lichtwechsels an gezählt, der Reihe nach mit t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnet werden, sind die ihnen entsprechenden r und v an die Gleichungen gebunden

$$\frac{r_1}{a}\cos(v_1+\omega) = -\frac{r_2}{a}\cos(v_2+\omega) = -\frac{r_3}{a}\cos(v_3+\omega)$$
$$= \frac{r_4}{a}\cos(v_4+\omega) = d$$

Ersetzt man r, v durch a, E, so ergibt sich hieraus unter Benutzung der Substitutionen

$$E = G - g \text{ und } g_1 = \frac{E_2 - E_1}{2},\ g_2 = \frac{E_3 - E_2}{2}, \text{ usw.}$$

$$\operatorname{tg} G_4 = \operatorname{tg} G_2 = -\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\omega$$
$$\cos g_2 + \cos g_4 = 2e\cos G_2$$
$$\cos g_2 - \cos g_4 = -\frac{2d\cos G_2}{\cos\omega}$$
$$G_2 = G_4;\ g_1 = g_3 = -\frac{g_2+g_4}{2}$$
$$G_1 + G_3 = 2G_2;\ G_1 - G_3 = -g_2 + g_4.$$

77) *E. Hartwig*, Der veränderliche Stern vom Algoltypus *Z Herculis*, Astr. Nachr. 152 (1900).

78) *E. Hartwig*, Ein Zwischenminimum des langperiodischen Algolsterns *U Z Cygni*. Astr. Nachr. 165 (1904).

Aus den vier *Keplers*chen Gleichungen folgt

$$2g_2 - \sin g_2 (\cos g_2 + \cos g_4) = n(t_3 - t_2)$$
$$2g_4 - \sin g_4 (\cos g_2 + \cos g_4) = n(t_1 - t_4)$$
$$2e \sin G_2 (\cos g_2 - \cos g_4) = n(t_4 - t_3 - t_2 + t_1).^{79})$$

Die zwei ersten Gleichungen bestimmen g_2, g_4, woraus e, G und dann ω, d erhalten werden. t_0 wird durch $E_1 = g_4 + G_2$ bestimmt. Je größer der Helligkeitsunterschied der beiden Minima ist, desto unsicherer wird die Beziehung der Zeiten auf gleiche d und daher auch die Bestimmung der Elemente.

Die kleine Distanz und geringe Dichte der Komponenten der Algolsterne bedingen eine elliptische, von der jeweiligen Größe der zerrenden Kräfte abhängige Gestalt dieser Körper. Die Flutbewegung, deren Lebhaftigkeit mit der Bahnexzentrizität wächst, hat gewiß auch Verschiebungen der an und nahe der Oberfläche gelegenen, stark absorbierenden Dämpfe zur Folge, wodurch die Intensität der Lichtemission geändert wird. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn die Annahme einer der scheinbaren Größe der leuchtenden Fläche proportionierten Lichtintensität auch nicht imstande ist, die Lichtänderung der Algolsterne in ganz befriedigender Weise darzustellen. Die Beobachtung zweier Minima läßt die Unverträglichkeit der Annahmen, daß die Körper kugelförmig seien und Licht von konstanter Intensität aussenden, mitunter sofort erkennen. Die analytische Formulierung dieser Annahme führt nämlich, wenn L_1, L_2 die Intensitäten des Vollichtes jedes der Körper, L_0 die Intensität des Maximums, L, L' die des Haupt- und Zwischenminimums bedeuten, und μ_1, μ_2 positive zwischen den Grenzen 0 und 1 liegende Größen ausdrücken, zu den Relationen

$$\mu_1 L_1 + L_2 = L$$
$$L_1 + \mu_2 L_2 = L'$$
$$L_1 + L_2 = L_0,$$

woraus folgt $\frac{L + L'}{L_0} > 1$; die Schwächung des Lichtes von *UZ* Cygni beträgt im Hauptminimum 2,7, im Zwischenminimum 0,4 Größenklassen. Es wird daher $\frac{L + L'}{L_0} = 0{,}78$. Ob dieses Resultat mehr auf Rechnung der Deformation oder der Veränderlichkeit der Lichtemission der Komponenten zu setzen ist, läßt sich vorläufig nicht entscheiden.

---

79) *J. v. Hepperger,* Über den Zusammenhang zwischen der Lichtänderung und den Elementen des Systems β Lyrae. Wien. Ber. 1909.

b) *Veränderliche von kontinuierlicher Lichtschwankung.* Während das Licht der Algolsterne nur zeitweilig veränderlich ist, weist eine andere Klasse von veränderlichen Sternen einen ununterbrochenen Wechsel des Lichtes auf. Wahrscheinlich bestehen alle diese Sterne, von denen mehrere spektroskopische Doppelsterne sind, aus zwei oder mehreren Körpern, deren Konstellation für die zur Erde gelangende Lichtmenge bestimmend ist. Daß der Lichtwechsel auch ohne Verfinsterung einer Komponente durch eine andere erfolgen kann, lehren die spektroskopischen und photometrischen Beobachtungen von δ Cephei[80]), welche wohl dieselbe Periode ($5^d 4$) ergeben, aber mit der Annahme einer Verfinsterung von bemerkenswerter Phase kaum verträglich sind. Die große, diesem Systeme eigene Bahnexzentrizität (0,5) läßt eine von der Flutbewegung abhängige, veränderliche Lichtemission vermuten, doch liegt, wie in Nr. 5 erwähnt, für diese Art des Lichtwechsels noch keine ganz befriedigende Erklärung vor.

Verfinsterungen werden wieder wahrscheinlich, wenn sich die Komponenten eines Doppelsternes in nahe kreisförmigen Bahnen bewegen; dann wird ihre Figur und Lichtemission nur kleine Änderungen erfahren. Eine leicht erkennbare Veränderlichkeit des Lichtes kann in diesem Falle ohne partielle Bedeckung der Körper wohl kaum zustande kommen.

Die Bestimmung der Bahn und der Dimensionen der Komponenten aus der Lichtkurve eines solchen kontinuierlich veränderlichen Sternes, wofür β Lyrae als Typus gelten kann, ist nun, auch wenn man eine nahe kreisförmige Bahn und Bedeckungen voraussetzt, ohne weitere willkürliche Annahmen bezüglich der Form der leuchtenden Flächen und der Helligkeit ihrer Elemente nicht möglich. Da die Lichtschwankungen wegen ihrer, im Verhältnis zur Beobachtungsgenauigkeit geringen Amplitude zur Bestimmung vieler Unbekannten nicht ausreichen und die zu bildenden Annahmen die Lösung der Aufgabe nicht zu schwer machen sollen, werden die vorausgesetzten Eigenschaften des Systems von den wahren in mehrfacher Beziehung und oft beträchtlich abweichen, so daß die gewonnenen Resultate auch bei guter Darstellung der Lichtkurve mit großen Fehlern behaftet sein können. Der Deformation kann einigermaßen durch die Annahme Rechnung getragen werden, daß die Oberflächen der Komponenten unveränderliche gestreckte Rotationsellipsoide seien, deren große Achsen in einer und derselben Geraden liegen und zu

80) *B. Meyermann*, Resultate aus den Beobachtungen von δ Cephei. Astr. Nachr. 167 (1905).

den kleinen Achsen in demselben Verhältnisse stehen. Mit Bezug auf die Lichtemission empfiehlt sich die Annahme, daß die von jeder Komponente herrührende Lichtmenge der scheinbaren Größe ihrer unverfinsterten Oberfläche proportioniert sei.[81])

Das Ellipsoid Σ, dessen Zentrum sich in O befinde, habe die Halbachsen A, B; die größte Intensität des von Σ herrührenden Lichtes sei L_0; für das Ellipsoid Σ' seien die entsprechenden Bestimmungsstücke mit O', λA, λB und $1 - L_0$ bezeichnet. Die Maximalintensität des Systems ist daher der Einheit gleichgesetzt. Bedeutet $\frac{\pi}{2} - \delta$ den Winkel zwischen der Linie OO' und der Gesichtslinie, so sind die Halbachsen α, β der durch Projektion von Σ auf eine zur Gesichtslinie senkrechte Ebene entstehenden Ellipse:

$$\alpha = A \cdot \varkappa, \quad \beta = B, \quad \varkappa = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \delta}, \quad \varepsilon^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2};$$

die Halbachsen der Projektion von Σ' sind $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$. Das Dreieck $OO'C$, in welchem $OO' = r \cos \delta$ ist, und $OC = \alpha$, $O'C = \lambda\alpha$ sein soll, habe bei O bzw. O' den Winkel ψ bzw. χ, so daß

$$\sin \psi = \lambda \sin \chi$$

$$\cos \psi + \lambda \cos \chi = \frac{r \cos \delta}{\alpha} = \nu$$

$$\cos \psi = \frac{1 + \nu^2 - \lambda^2}{2\nu}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$2\psi - \sin 2\psi + \lambda^2(2\chi - \sin 2\chi) = 2(\psi + \lambda^2\chi - \nu \sin \psi) = 2\pi q,$$

so ist der Inhalt F der beiden Ellipsen gemeinschaftlichen Fläche $F = \alpha\beta\pi q$.

Die Intensität L des Systems ist, wenn Σ' vor Σ liegt:

$$L = L_0 \frac{\alpha\beta\pi - F}{AB\pi} + (1 - L_0) \frac{\lambda^2\alpha\beta\pi}{\lambda^2 AB\pi} = \varkappa(1 - qL_0),$$

im entgegengesetzten Falle aber

$$L = \varkappa\left(1 - q\frac{1 - L_0}{\lambda^2}\right).^{82})$$

Die typischen Eigenschaften der Lichtkurven der Gruppe von veränderlichen Sternen, um die es sich hier handelt, nämlich beständiger Wechsel des Lichtes, Gleichheit oder nur geringe Verschiedenheit der Intervalle zwischen den Epochen der Maxima und Minima deuten darauf hin, daß r nur wenig von $A + \lambda A$ verschieden ist und als nahezu konstant gelten kann. Man wird sich daher vorerst mit

81) *G. Myers,* The System of β Lyrae, Astroph. Journ. 7 (1898).

der Näherung $r = A(1 + \lambda)$ begnügen und $r = 1$ setzen, wodurch A in Teilen des Radius der Kreisbahn ausgedrückt erscheint. Da in der Kreisbahn die Änderung von u der Zeit proportioniert ist, und die Minima für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ eintreten, so ist durch die Lichtkurve auch der Zusammenhang von u und $\lfloor$ gegeben. Aus $\sin\delta = \sin u \sin i$ folgt für

$$u = \pm\frac{\pi}{2} \cdots x = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i}; \quad v = \frac{(1+\lambda)\cos i}{x},$$

für

$$u = \pm\frac{\pi}{4} \text{ und } \pm\frac{3\pi}{4} \cdots x = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 i};$$

$$v = \frac{1+\lambda}{x}\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 i}.$$

A. Roberts[82]) geht von den Annahmen $\lfloor_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ aus und bestimmt ε und i aus den zwei mittleren Werten der vom Helligkeitsmaximum an gezählten Größenänderung Δm des Systems für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ und die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$. Die Erzielung eines engeren Anschlusses an die Lichtkurve bleibt der Ausgleichsrechnung vorbehalten. Die Berechnung zweier Tafeln, welche mit den doppelten Argumenten ε^2, i auf Grund der Relationen

$$\lambda = 1, \quad \cos\psi = \tfrac{1}{2}v, \quad \pi q = 2\psi - \sin 2\psi, \quad \lfloor = x\left(1 - \tfrac{1}{2}q\right),$$

$$\Delta m = 2{,}5 \log\frac{1}{\lfloor}$$

die Werte der Funktion Δm für $u = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$ geben, ermöglicht eine rasche Bestimmung von ε und i.

Die dem *Roberts*schen Verfahren zugrunde liegenden Annahmen $\lfloor_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ sind nur bei gleicher Intensität der Minima vereinbar und widersprechen sich um so mehr, je größer der Intensitätsunterschied ist. Wenn dieser mehr als ungefähr 2 bis 3 Zehntel einer Größenklasse beträgt, erscheint es vorteilhafter, die Unbekannten ohne Zuhilfenahme neuer Hypothesen zu bestimmen, was am einfachsten durch Auflösung eines Systems von vier Gleichungen geschehen kann, in denen die Intensitäten der Minima und noch zweier Punkte der

---

82) *A. Roberts,* On the Relation existing between the Light Changes and the Orbital Elements of a close Binary System. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903); On a Method of Determining the Absolute Dimensions of an Algol Variable Star. Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 66 (1906).

Lichtkurve vorkommen, für welche die Summe der δ gleich Null ist. Bei Auswahl der Punkte $u = \pm\frac{\pi}{4}$ können, wenn $\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 i} = \operatorname{tg} w$ gesetzt wird, die Gleichungen geschrieben werden

$$u = -\frac{\pi}{2} \cdots \operatorname{tg} w\,(1 - q\mathsf{L}_0) = \mathsf{L};$$

$$u = -\frac{\pi}{4} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}\cos w}(1 - q'\mathsf{L}_0) = \mathsf{L}';$$

$$u = +\frac{\pi}{2} \cdots \operatorname{tg} w\left(1 - q\frac{1-\mathsf{L}_0}{\lambda^2}\right) = L;$$

$$u = +\frac{\pi}{4} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}\cos w}\left(1 - q'\frac{1-\mathsf{L}_0}{\lambda^2}\right) = L',$$

wo q eine Funktion von λ und $\nu = (1+\lambda)\cos i \operatorname{cotg} w$, q' dieselbe Funktion von λ und $\nu' = \sqrt{(1+\lambda)^2 + \nu^2\sin^2 w}$ ist. Durch Berechnung einer einzigen Tafel, welche mit den Argumenten λ, ν die Größen q gibt, ist man daher in den Stand gesetzt, den einem beliebigen Wertepaare q, λ bzw. q', λ zugehörigen Wert von ν bzw. ν' auf dem Wege der Interpolation zu finden. Zur Bestimmung von w dienen die Gleichungen

$$\sigma\cos s = \frac{L'-\mathsf{L}'}{L-\mathsf{L}}\sqrt{2}; \quad \sigma\sin s = \frac{\mathsf{L}'L - \mathsf{L}L'}{L-\mathsf{L}}\sqrt{2}; \quad \sigma\sin(w+s) = 1.$$

Es ist ferner

$$\lambda^2 = \frac{1-\mathsf{L}_0}{\mathsf{L}_0}\frac{\operatorname{tg} w - \mathsf{L}}{\operatorname{tg} w - L}; \quad q = \frac{1-\mathsf{L}\operatorname{cotg} w}{\mathsf{L}_0}; \quad q' = \frac{1-\mathsf{L}'\sqrt{2}\cos w}{\mathsf{L}_0};$$

L_0 ist versuchsweise so zu bestimmen, daß die zu λ, q, q' gehörigen Argumente ν, ν' die Gleichung erfüllen $\nu'^2 = (1+\lambda)^2 + \nu^2\sin^2 w$; die übrigen Elemente werden durch die Gleichungen

$$\cos i = \frac{\nu}{1+\lambda}\operatorname{tg} w, \quad \varepsilon\sin i = \frac{\sqrt{\cos 2w}}{\cos w}, \quad A = \frac{1}{1+\lambda}, \quad B = A\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

bekannt.[79])

Wenn auch die Zeiten der Maxima und Minima die Annahme einer Kreisbahn rechtfertigen, so kann doch r von $A(1+\lambda)$ um eine Größe η verschieden sein. Sollte es sich zeigen, daß für $\eta = 0$ eine befriedigende Darstellung der beobachteten Intensitäten nicht zu erreichen ist, so wäre η so zu bestimmen, daß die Fehler der Darstellung möglichst klein werden.

Ungleichheit der Intervalle in der Reihenfolge der Maxima und Minima weist auf eine elliptische Bewegung der Komponenten hin, bei welcher im allgemeinen die Lage der Minima nicht mehr genau durch $u = \pm\frac{\pi}{2}$ oder durch die Richtung einer Fokalchorde markiert

ist. Bezeichnen Δt, Δv, $2g$ die Änderungen der Zeit, der wahren und exzentrischen Anomalie vom Hauptminimum zum Nebenminimum, $\Delta' t$, $\Delta' v$, $2g'$ die Änderungen von dem auf das Hauptminimum folgenden Maximum zum nächsten Maximum, so ist

$$\Delta' v = \pi$$

$$2g' - \sin 2g' = n\Delta' t$$

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \omega = \cot g'.$$

Aus $\Delta v \gtrless \pi$ folgt, daß die Relationen $2g - \sin 2g = n\Delta t$ und $\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega = \operatorname{cotg} g$ nur als näherungsweise richtig angenommen werden dürfen. Die zur Berechnung von e, ω aus den Zwischenzeiten gemachte Annahme $\Delta v = \pi$ bedarf daher noch einer Kontrolle durch die nach Bestimmung der übrigen Elemente sich ergebende Lage der Minima.

Der Lichtwechsel des spektroskopischen Doppelsternes β Lyrae ($P = 12^d,91$, Max. $3^m,4$, Min. $3^m,9$, $4^m,5$) wird nach den Untersuchungen von *Myers* durch die Annahme erklärt:

$$a = 1,\ e = 0{,}02,\quad A = 0{,}52,\quad B = 0{,}43,\quad \lambda = 0{,}75,$$

$$i = \frac{\pi}{2},\quad \varepsilon = 0{,}56,\quad L_0 = 0{,}71,$$

er läßt sich aber auch ebensogut durch ein wesentlich anderes Elementensystem darstellen, nach welchem das Hauptminimum durch Abblendung des Lichtes des kleineren Körpers zustande kommt.[79])

Den spektroskopischen Beobachtungen zufolge ist für

$$i = \frac{\pi}{2} : a = 50{,}2 \text{ Mill. Kilometer},\quad \frac{m}{m_0} = 20{,}9,\quad \frac{m'}{m_0} = 9{,}6;$$

hieraus folgt, daß die Komponenten ungefähr dieselbe mittlere Dichte 0,0006 haben und daher weniger dicht sind als die Luft an der Erdoberfläche.

Die Untersuchungen *Roberts* über die veränderlichen Sterne *U* Pegasi ($P = 9^h,0$) und *RR* Centauri ($P = 14^h,5$)[82]) scheinen die Annahmen zu rechtfertigen, daß die Komponenten von gleicher Größe sind und sich bei gegenseitiger Berührung in Kreisbahnen bewegen. Die durch die elliptische Gestalt der zu engen Systemen verbundenen Körper bedingte Zunahme des Radiusvektors und der Bahnexzentrizität und die damit zusammenhängende Drehung der Apsidenlinie bewirken eine Änderung der Form der Lichtkurve, welche jedoch nur aus Beobachtungen, die sich über sehr viele Jahre erstrecken, zu konstatieren sein wird.

7. Bahnbestimmung der Satelliten. Die Methoden der Bahnbestimmung visueller Doppelsterne haben die Unveränderlichkeit der Lage des den Messungen zugrundeliegenden Koordinatensystems zur Voraussetzung und sind daher auf ein System Planet—Satellit nur dann ohne weiteres anwendbar, wenn die Bewegung des Satelliten so rasch erfolgt, daß während eines Umlaufs die Änderung des geozentrischen Ortes des Planeten vernachlässigt werden darf. Wird durch die Beobachtungen die Projektionsellipse hinreichend bestimmt, so empfiehlt sich die Anwendung graphischer Methoden zur Ermittlung genäherter Bahnelemente, die dann auf ein vom scheinbaren Orte des Planeten unabhängiges Koordinatensystem übertragen werden können. Lage und Dimension der Ringe des Saturn[83]) ergeben sich aus Messungen der Richtung und scheinbaren Größe der Achsen der sichtbaren Projektionsellipsen, die für $e = 0$ *Zwiers*sche Hilfsellipsen sind.

Bei verhältnismäßig rascher Bewegung des Planeten kann man versuchen, die Beobachtungen des Satelliten durch eine Kreisbahn darzustellen, welche, wenn die mittlere planetozentrische Bewegung des Satelliten bekannt ist, durch zwei Positionsmessungen bestimmt wird.[84])

Zur Zeit t seien die geozentrischen äquatorialen Koordinaten des Planeten Δ, A, D, die planetozentrischen, äquatorialen Koordinaten des Satelliten r, α, δ, Positionswinkel und Distanz θ, ϱ; die Beziehung auf eine andere Zeit soll durch Beifügung eines Striches angedeutet sein. Bezeichnet $180^0 - \sigma$ den Winkel am Planeten im Dreieck Erde — Planet—Satellit, so ist zur Zeit

$$(1) \qquad \begin{cases} t \ldots \sin(\sigma - \varrho) = \dfrac{\Delta}{r} \sin \varrho \\ t' \ldots \sin(\sigma' - \varrho') = \dfrac{\Delta'}{r'} \sin \varrho' \end{cases}.$$

Der Winkel zwischen den Richtungen r, r' ist die planetozentrische Bewegung des Satelliten und auch gleich dem Winkel, welchen die vom Erdzentrum parallel zu r und r' gezogenen Geraden einschließen. Denkt man sich die Erde im Zentrum einer Sphäre vom Radius 1 und nennt die Punkte der Sphäre, gegen welche diese Linien gerichtet sind, Σ, Σ', die sphärischen Örter des Planeten und Satelliten M, M', S, S', so liegen die Punkte M, S, Σ in einem, M', S', Σ' in einem anderen Bogen größten Kreises. Der nächste Schnittpunkt der

83) *F. W. Bessel,* Abhdgl. I.

84) *A. Marth,* Researches on Satellites. Astr. Nachr. 44 (1856). — *J. Bauschinger,* Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig, 1906.

Bögen MS und $M'S'$ sei C; der Nordpol befinde sich in P. Die Auflösung des sphärischen Dreiecks MCM', in welchem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel $A' - A$ bekannt sind, gibt die Seite MM' und die anliegenden Winkel, woraus mit Hilfe der Positionswinkel θ, θ' von MS und $M'S'$ die Seiten $MC = \xi$, $M'C = \xi'$ und der von ihnen gebildete Winkel ε berechnet werden können. Da $M\Sigma = \sigma$, $M'\Sigma' = \sigma'$, wird

$$\cos \Sigma\Sigma' = \cos(\xi - \sigma)\cos(\xi' - \sigma') + \sin(\xi - \sigma)\sin(\xi' - \sigma')\cos\varepsilon.$$

Durch diese Gleichung und die Gleichungen (1) werden für eine Kreisbahn ($\Sigma\Sigma' = n(t' - t)$; $r = r' = a$) die drei Unbekannten σ, σ', a bestimmt, allerdings nicht in eindeutiger Weise, da nach (1) $\sigma - \varrho$, $\sigma' - \varrho'$ im I. oder II. Quadranten liegen können, was bei der weiteren Rechnung zu beachten ist.

Zur Bestimmung der Länge N des aufsteigenden Knotens und der Neigung J der Satellitenbahn mit Bezug auf den Himmelsäquator bedarf man der α und δ; die Koordinaten des Punktes (E), in dem die Verlängerung der von der Erde zum Planeten gezogenen Geraden die um den Planeten beschriebene Sphäre trifft, sind A, D; die Lage des Punktes (S) mit den Koordinaten α, δ ist dadurch gegeben, daß im sphärischen Dreieck $(E)P(S)$ die Seite $(E)(S) = \sigma$ und der Winkel bei (E) als Neigungswinkel der Ebene EMS und EMP gleich θ ist. Der Winkel bei P ist $\alpha - A$; α', δ' werden durch dieselben Formeln erhalten wie α, δ. N und J ergeben sich aus $\operatorname{tg} J \sin(\alpha - N) = \operatorname{tg}\delta$; $\operatorname{tg} J \sin(\alpha' - N) = \operatorname{tg}\delta'$; das der Zeit t entsprechende Argument der Breite U folgt aus der Formel $\operatorname{tg} U = \operatorname{tg}(\alpha - N)\sec J$. Die analoge Berechnung von U' muß hierfür einen Wert ergeben, welcher die Gleichung erfüllt $U' - U = n(t' - t)$.

Sind N, J und U, a oder allgemeiner U, r gegeben, so werden θ, ϱ mit Hilfe der sich auf denselben Zeitpunkt beziehenden Größen Δ, A, D durch einfache Koordinatentransformation gefunden.

Wie Positionswinkel und Distanz, können auch Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen durch die Elemente ausgedrückt werden.[85]) Genauere Elemente werden mittels der Differentialformeln der Bahnverbesserung erhalten (vgl. Artikel VI 2, 9 *Herglotz* Seite 422).

Sofern Näherungswerte von N und J vorliegen, kann man nach der Methode von *W. Klinkerfues*[86]) aus drei Beobachtungen eines Satelliten

85) *F. W. Bessel,* Abhdlg. I, Astr. Nachr. 9 (1831). — *W. Meyer,* Le Système de Saturne (Mem. de la Soc. de Phys. et d'Histoire nat. de Genève) 1884. — *H. Struve,* Astr. Nachr. 111 (1885), 123, 125 (1890).

86) Theoretische Astronomie (1885), (1890). Braunschweig, I. Aufl. 1871,

genäherte Bahnelemente bestimmen. Für das Datum jeder Beobachtung werden zunächst die Werte i, Ω und $u_0 = u - U$ und dann mittels der Formeln:

$$\operatorname{cotg} \sigma = \sin(\theta - \Omega) \operatorname{tg} i, \quad r \sin(\sigma - \varrho) = \Delta \sin \varrho,$$

$$\operatorname{tg}(u_0 + U) = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \Omega)}{\cos i}$$

die von r, U bekannt.

Aus drei Gleichungen von der Form $a(1 - e^2) = r(1 + e \cos v)$ folgt, da die Differenzen der U denen der wahren Anomalie v gleich sind,

$$a(1 - e^2) = \frac{4 r r' r'' \sin\frac{U' - U}{2} \sin\frac{U'' - U}{2} \sin\frac{U'' - U'}{2}}{r r' \sin(U' - U) - r r'' \sin(U'' - U) + r' r'' \sin(U'' - U')}$$

$$2e \sin\frac{v'' + v}{2} \sin\frac{U'' - U}{2} = a(1 - e^2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}\right)$$

$$2e \cos\frac{v'' + v}{2} \cos\frac{U'' - U}{2} = a(1 - e^2)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r''}\right) - 2,$$

wodurch a, e, $U - v$ und v, v'' daher auch n, t_0 bestimmt werden. Sind die angenommenen Werte von N, J nahe richtig, so wird auch der Unterschied zwischen $n(t' - t_0)$ und der aus v' berechneten mittleren Anomalie klein sein. Zur Bahnverbesserung muß mindestens noch eine Beobachtung verwendet werden. Die Kenntnis von N, J genügt überdies zur Reduktion aller Beobachtungen auf einen und denselben geozentrischen Planetenort, wodurch die für Doppelsterne gegebenen Methoden der Bahnbestimmung auch für Satelliten Geltung erlangen.

A. O. Leuschner[87]) hat auf der Versammlung der Astr. Gesellschaft in Wien (1908) die Grundzüge einer Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen angegeben. Diese Methode, deren vollständige Darlegung im Vol. VII of the Publications of the Lick Observatory erfolgen soll, eignet sich, wie aus der Berechnung der Bahnen des 7ten und 8ten Jupitertrabanten hervorzugehen scheint, sehr gut zur Bahnbestimmung von Satelliten, deren Bewegung durch die Sonne bedeutend gestört wird. Aus den Beobachtungen sind zunächst für eine bestimmte Zeit Rektaszension und Deklination des Satelliten sowie der erste und der zweite Differentialquotient dieser Koordinaten nach der Zeit zu bilden. Hierdurch werden mit Hilfe von drei, durch

---

II. Aufl. 1899 (Die Ableitung der „reduzierten" Positionswinkel P, $P_,$ deren Differenz gleich $v - v'$ sein soll, ist unrichtig gegeben).

87) *A. Leuschner,* Versuch der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen. Astr. Ges. Vjs. 43 (1908); Lick Obs. Bull. 137 (1908).

Transformation der Grundgleichungen für die spezielle Störungsrechnung zu erhaltenden Gleichungen die geozentrische Distanz ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$ als Funktionen der Entfernung des Satelliten vom Planeten und von der Sonne bestimmt, worauf mit Rücksicht auf die für die Dreiecke Erde, Satellit, Planet und Erde, Satellit, Sonne geltenden Beziehungen die Distanzen des Satelliten vom Planeten und von der Sonne, daher auch die Anziehungskräfte bekannt werden. Die Berechnung der Elemente bedarf keiner neuen Entwicklungen.

(Abgeschlossen im Dezember 1910.)

VI 2, 12. PRINZIPIEN DER STÖRUNGSTHEORIE UND ALLGEMEINE THEORIE DER BAHNKURVEN IN DYNAMISCHEN PROBLEMEN.

Von

E. T. WHITTAKER

IN DUBLIN.

(Aus dem Englischen übersetzt von **A. Haar** in Zürich.)

Inhaltsübersicht.

1. Reduktion der Differentialgleichungen des allgemeinen Dreikörperproblems.
2. Die Differentialgleichungen in Spezialfällen des Dreikörperproblems.
3. Die Differentialgleichungen des n-Körperproblems.
4. Die Nichtexistenz bestimmter Klassen von Integralen.
5. Periodische Lösungen; die allgemeine Theorie.
6. Spezielle periodische Lösungen.
7. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der benachbarten Lösungen.
8. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der Bewegung für lange Zeiten.
9. Die Lösung des Dreikörperproblems durch unendliche Reihen; die älteren Untersuchungen.
10. Die Lösung des Problems mit Hilfe der Berührungstransformationen.
11. Die Lösung des Problems durch sukzessive Bildung der Glieder der Reihen.
12. Die Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik.
13. Eigenschaften der Koeffizienten spezieller Glieder in den Reihen der Himmelsmechanik.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.

P. S. de Laplace, Traité de mécanique céleste I—V. Paris 1799—1827.

A. Gautier, Essai historique sur le problème des trois corps. Paris 1817.

P. G. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde I—IV. Paris 1834—56.

U. J. J. le Verrier, Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris, 1855—77.

C. E. Delaunay, Théorie du mouvement de la lune I—II. Paris 1860—67.

A. Cayley, Report on the progress of the solution of certain problems in dynamics. British Association Report., London 1862.
P. A. Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen I—II. Leipzig 1862—64.
O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888.
F. Tisserand, Traité de mécanique céleste I—IV. Paris 1889—96.
H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I—III. Paris 1892—99. *(Poincaré Méth. Nouv.)*
H. Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales I. Stockholm 1893, II. 1909.
E. W. Brown, An introductory treatise on the lunar theory. Cambridge 1896.
N. Herz, Artikel „Mechanik des Himmels" in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie. Breslau 1898.
E. T. Whittaker, Report on the progress of the solution of the Problems of Three Bodies. British Association Report. London 1899.
H. Andoyer, Théorie de la lune. Paris 1901.
F. S. Moulton, An introduction to Celestial Mechanics. New York 1902.
C. V. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels I—II. Leipzig 1902—07.
E. T. Whittaker, A treatise on Dynamics, including the Problem of Three Bodies. Cambridge 1904. *(Whittaker Dynamics.)*
H. Poincaré, Leçons de Mécanique Céleste. Paris 1905—10.
G. W. Hill, Collected Mathematical Works I—IV. Washington 1905—07.

Vorbemerkung.

Das fundamentale Problem der Himmelsmechanik besteht darin, die Bewegungen der Himmelskörper unter dem Einfluß der gegenseitigen Anziehung zu bestimmen, die sie nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz aufeinander ausüben. Dieses Problem kann in geschlossener Form nicht durch bekannte Funktionen gelöst werden, und daher sind für praktische Zwecke eine Anzahl von Methoden unter dem Namen von „Planetentheorien" oder „Mondtheorien" erdacht worden, welche Annäherungen für die Bewegung der verschiedenen Körper geben, die im Sonnensystem wirklich vorkommen, und zwar in einer zur numerischen Berechnung geeigneten Form. Neben diesen Untersuchungen ist die Dynamik eines Systems von Punkten, die sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, vielfach vom rein theoretischen Standpunkt aus betrachtet worden. Was sich hier ergab und was aus der allgemeinen Theorie der Bahnen in dynamischen Systemen bekannt war, wurde verwandt, um über gewisse wichtige Grundfragen der Astronomie Aufklärung zu gewinnen, z. B. über die der Stabilität der Bahn des Mondes und der Planeten.

In gegenwärtigem Artikel wird versucht, den wesentlichen Inhalt aller dieser Untersuchungen von den Anwendungen loszulösen, mit

denen ursprünglich viele von ihnen verknüpft waren, und so unsere Kenntnisse über das Hauptproblem der Himmelsmechanik von allgemeinen theoretischen Gesichtspunkten aus darzustellen.

1. Reduktion der Differentialgleichungen des allgemeinen Dreikörperproblems. Unter *Dreikörperproblem* versteht man die Aufgabe, die Bewegung im Raume von drei Punkten gegebener Masse zu bestimmen, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen.

Seien die Massen der Punkte m_1, m_2, m_3, seien ihre Koordinaten bezogen auf feste rechtwinklige Achsen resp.: (q_1, q_2, q_3), (q_4, q_5, q_6), (q_7, q_8, q_9). Ferner bezeichne man $m_k \frac{dq_r}{dt}$ durch p_r, wo t die Zeit bezeichnet und k die größte in $\frac{1}{3}(r+2)$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Dann wird das Problem analytisch durch die Differentialgleichungen ausgedrückt:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9)$$

wobei

$$H = \sum_{r=1}^{9} \frac{p_r^2}{2m_k} - m_2 m_3 \{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$- m_3 m_1 \{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$- m_1 m_2 \{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist.

Diese Gleichungen bilden ein kanonisches System der 18. Ordnung.

Lagrange[1]) zeigte zuerst, daß die Ordnung des Systems der Bewegungsgleichungen reduziert werden kann, indem man die bekannten Integrale des Systems benutzt. Sechs Integrale werden durch den Umstand geliefert, daß die Bewegung der Teilchen relativ zu ihrem gemeinsamen Schwerpunkt unabhängig von der absoluten Bewegung dieses Schwerpunktes ist. Drei weitere Integrale bedeuten, daß die Komponenten der Flächengeschwindigkeit um die drei Achsen konstant sind. Nimmt man noch den Energiesatz hinzu, so hat man im ganzen zehn bekannte Integrale. Ferner geht die Zeit t in die Differentialgleichungen nur mittels ihres Differentiales dt ein, daher kann die Ordnung der Gleichungen auch noch durch Elimination von dt reduziert werden. Nach der Integration des so reduzierten Systems kann dann die Zeit durch eine einfache Quadratur gefunden werden.

Man denke sich ferner die Anordnung des Systems in irgend einem Augenblick mit Hilfe von Koordinaten ausgedrückt, von denen eine die Orientation des ganzen Systems in bezug auf eine im Raume feste Linie ausdrückt, so daß eine Vergrößerung dieser Koordinate Ω

1) Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'Acad. de Paris 9 (1772).

um einen Betrag α unter Festhaltung der übrigen Koordinaten eine Rotation des ganzen Systems um den Winkel α um jene feste Linie, wie bei einem starren Körper, zur Folge hat. Solch eine Wahl der Koordination läßt sich offenbar für die drei Körper leicht treffen. Dann ist Ω eine sog. verborgene Koordinate, und das entsprechende Integral (welches in diesem Falle eines der Flächensätze ist) setzt uns in den Stand, die Ordnung der Bewegungsgleichungen um zwei Einheiten statt um eine herabzusetzen. Letzteres Faktum ist implizite in Lagranges Arbeit[2]) enthalten, wurde aber erst von *Jacobi*[3]) deutlich ausgesprochen, der es *Elimination der Knoten* nannte.

Mit Hilfe der zehn bekannten Integrale, der Elimination der Zeit und der Elimination der Knoten kann die Ordnung des Systems der Bewegungsgleichungen um zwölf Einheiten reduziert werden, so daß das reduzierte System von der 6. Ordnung wird. *Lagrange*[4]) gelang tatsächlich die Ausführung dieser Reduktion, doch kann seine Reduktionsart jetzt als überholt gelten durch die symmetrischeren Verfahren, die die kanonische Form der Gleichungen erhalten und die nunmehr zu schildern sind.

Wir haben zunächst von den Schwerpunktsätzen Gebrauch zu machen, um das System von der 18. auf die 12. Ordnung zu reduzieren. Dies kann nach einer von *Jacobi*[5]), *Bertrand*[6]), *Radau*[7]) ausgebildeten Methode in folgender Weise geschehen.

Sei $\mathfrak{H}$ der Schwerpunkt von m_1 und m_2. Seien q_1', q_2', q_3' die Projektionen der Strecke $m_1 m_2$ auf feste rechtwinklige Achsen und q_4', q_5', q_6' die Projektionen der Strecke $\mathfrak{H} m_3$ auf dieselben Achsen. Sei ferner:

$$\mu \frac{dq_r'}{dt} = p_r' \quad (r = 1, 2, 3), \qquad \mu' \frac{dq_r'}{dt} = p_r' \quad (r = 4, 5, 6),$$

wobei:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu' = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ist.

Die Variabeln $q_1', q_2', \ldots, q_6', p_1', p_2', \ldots, p_6'$ zusammen mit sechs anderen Variabeln, welche nur von der Bewegung des Schwerpunkts

2) loc. cit.

3) J. f. Math. 26 (1843), p. 115.

4) loc. cit. *Serret* gab in dem Bull. des Sc. Math. 6 (1873), p. 46 eine Darstellung der Lagrangeschen Arbeit, wo auch die Reduktion von *Hesse*, J. f. Math. 74 (1872), p. 97 besprochen wird.

5) J. f. Math. 26 (1843), p. 115.

6) J. de math. 17 (1852), p. 393.

7) Paris C. R. 66, p. 1262; 67, p. 171, 316, 841; Annales de l'École Normale (1808), p. 311.

des Systems abhängen, können aus den Variabeln $q_1, q_2, \ldots, q_9, p_1, p_2, \ldots, p_9$ durch eine Berührungstransformation abgeleitet werden, und daher kann das System der Bewegungsgleichungen als ein System 12. Ordnung in der Form geschrieben werden (unter Weglassung der Akzente von den neuen Variabeln):

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Wie *Bertrand* bemerkte, kommt diese Reduktion auf die Ersetzung dreier Massen durch zwei fiktive Massen μ und μ' hinaus.

Eine entsprechende Reduktion gibt *Poincaré* an.[8]) Seien q_1', q_2', q_3' die Koordinaten von m_1 bezogen auf m_3, q_4', q_5', q_6' die Koordinaten von m_2 relativ zu m_3, q_7', q_8', q_9' die Koordinaten von m_3 selbst. Seien p_1', p_2', p_3' die Impulskomponenten von m_1, p_4', p_5', p_6' diejenigen von m_2 und p_7', p_8', p_9' die Impulskomponenten des ganzen Systems. Der Übergang von den Variabeln $(q_1, q_2, \ldots, q_9, p_1, p_2, \ldots, p_9)$ zu den Variabeln $(q_1', q_2', \ldots, q_9', p_1', p_2', \ldots, p_9')$ wird durch eine Berührungstransformation vermittelt, und infolgedessen behalten die Bewegungsgleichungen in den neuen Variabeln die kanonische Form. Es zeigt sich, daß die Gleichungen für die Variabeln $q_7', q_8', q_9', p_7', p_8', p_9'$ von dem übrigen System abgetrennt werden können, und so erhalten wir wieder ein System der Form von der 12. Ordnung.

Es ist nun weiter das System von der 12. auf die 8. Ordnung zu reduzieren mit Hilfe der Flächensätze und der Elimination der Knoten. *Bour* und *Radau*[9]) gehen zu diesem Zweck aus von dem oben angegebenen System 12. Ordnung von *Jacobi* und *Bertrand*. Seien q_1', q_2' die vom Nullpunkt an gerechneten Radienvektoren der beiden fiktiven Massen μ und μ'. Sei q_3' der Winkel zwischen q_1'

---

8) Paris C. R. 123 (1886), p. 1031; Acta math. 21 (1897), p. 83.

9) *Bour*, Journ. de l'École Polytechnique Paris 21 (1856), p. 35; *Radau*, Annales de l'École Normale 5 (1868), p. 311. Ein Versehen von *Bour* wurde von *Mathieu* bemerkt, J. de math. (3) 2 (1876). Die Variablen von *Bour* sind von denjenigen von *Radau* verschieden. *Bour* mißt die Winkel q_3' und q_4' in der Ebene der Radienvektoren von der Schnittgeraden dieser Ebene mit der veränderlichen Ebene an.

Verschiedene Mathematiker untersuchten die Reduktion des Problems auf ein Problem 8. Ordnung in mehr oder weniger ähnlicher Weise wie *Bour* und *Radau*. *Brioschi*, Paris C. R. 66 (1868), p. 710, leitet *Bours* Gleichungen ab und gibt eine interessante Form der Flächensätze. *Siacci*, Atti di Torino 6 (1871), p. 440; Paris C. R. 78 (1874), p. 110, zeigte, wie man eine Anzahl von Gleichungssystemen konstruieren kann, die den Bourschen analog sind.

Eine Arbeit von *Vernier*, Paris C. R. 119 (1894), p. 451, ist im wesentlichen nur eine Wiedergabe der Arbeit von *Siacci* von 1874.

und der Schnittlinie (Knotenlinie) der unveränderlichen Ebene mit einer Ebene durch zwei aufeinanderfolgende Lagen von q_1'. Die Variable q_4' hat die entsprechende Bedeutung für μ'. Man setze ferner:

$$p_1' = \mu \frac{dq_1'}{dt}, \quad p_2' = \mu' \frac{dq_2'}{dt}.$$

Schließlich mögen p_3' und p_4' die Flächengeschwindigkeiten der beiden Massen μ und μ' in ihren augenblicklichen Bahnebenen bedeuten. Dann lassen sich analog, wie in den obigen Fällen, vier weitere Variable hinzufügen, so daß eine Berührungstransformation zwischen neuen und alten Variablen besteht und die Gleichungen für diese vier weiteren Variablen — eben infolge der Gültigkeit der Flächensätze — von dem übrigen System abgetrennt werden können. Die Bewegungsgleichungen bilden dann (unter Weglassung des Indices der neuen Variablen) das folgende kanonische System 8. Ordnung:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

wobei:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_1^2 + \frac{p_3^2}{q_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu'}\left(p_2^2 + \frac{p_4^2}{q_2^2}\right) - \frac{m_1 m_2}{q_1}$$
$$- m_1 m_3 \left\{q_2^2 - \frac{2 m_2 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cdot \cos q_4 - \frac{\varkappa^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4} \sin q_3 \cdot \sin q_4\right) + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} q_1^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$- m_2 m_3 \left\{q_2^2 + \frac{2 m_1 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cdot \cos q_4 - \frac{\varkappa^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4} \sin q_3 \cdot \sin q_4\right) + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} q_1^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist und noch $\varkappa$ die Gesamtflächengeschwindigkeit des Systems bedeutet.

Entsprechende Reduktionen auf die 8. Ordnung sind von *Scheibner*[10]), *Bruns*[11]) und *Whittaker*[12]) gegeben worden. In den beiden ersteren Fällen figurieren die drei wechselseitigen Abstände der drei Körper unter den Endvariablen, während im letzteren Fall q_1, q_2, q_3, q_4 die rechtwinkligen Koordinaten von m_1 und m_2 sind, bezogen auf bewegliche Achsen durch m_3 in der Ebene der drei Körper.

Die Reduktion der Bewegungsgleichungen des Dreikörperproblems von der 12. Ordnung auf die 8. Ordnung mit Hilfe der Flächensätze und der Elimination des Knotens kann auch durch *Lie's* Methode zur

10) J. f. Math. 68 (1868), p. 390.
11) Acta Math. 11 (1887), p. 25.
12) Dynamics Kap. XIII.

Auflösung partieller Differentialgleichungen vollzogen werden.[13]) Die Lösung des kanonischen Systems 12. Ordnung

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

hängt mit der zugehörigen Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, p_2, \ldots, p_6) = h$$

zusammen, wo

$$p_\nu = \frac{\partial V}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

ist.

Bezeichnen wir mit

$$F_1 = \text{konst.}, \quad F_2 = \text{konst.}, \quad F_3 = \text{konst.}$$

die drei Flächensätze, so daß die Funktionen F_1, F_2, F_3 die Relation $(H, F) = 0$ befriedigen, so sind auch die Gleichungen

$$(F_1, F_2) = F_3, \quad (F_2, F_3) = F_1, \quad (F_3, F_1) = F_2$$

erfüllt (wo das Symbol (μ, ν) den Poissonschen Klammerausdruck bedeutet), und es bilden daher die Funktionen F_1, F_2, F_3 eine Funktionsgruppe. Daraus können wir nach der Lieschen Methode das zugehörige Involutionssystem ableiten, das aus Funktionen besteht, die miteinander und mit H in Involution sind. Im vorliegenden Falle besteht das System aus den Funktionen F_1 und $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$. Mit Hilfe dieser zwei Funktionen kann die partielle Differentialgleichung

$$H(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) = h$$

auf eine partielle Differentialgleichung, mit $6 - 2 = 4$ unabhängigen Variablen zurückgeführt werden; das ist aber die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung eines Hamiltonschen Systems 8. Ordnung, womit die fragliche Reduktion erfolgt ist.

Mit Hilfe des Energiesatzes und der Elimination der Zeit kann man die erhaltenen Systeme auf die 6. Ordnung reduzieren bei Beibehaltung der kanonischen Form. In der Tat, bezeichnen wir das Energieintegral des Systems 8. Ordnung

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

mit

$$H(q_1, \ldots, q_4, p_1, \ldots, p_4) + h = 0$$

und lösen diese Gleichung in bezug auf p_1 auf

$$K(p_2, p_3, p_4, q_1, \ldots, q_4) + p_1 = 0,$$

13) Math. Ann. 8 (1875), p. 215.

so können wir den Zusammenhang zwischen den Veränderlichen $p_2 p_3 p_4$, $q_1, \ldots, q_4$ durch die Gleichungen 6. Ordnung:

$$\frac{dq_\nu}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, 4)$$

darstellen.

2. Die Differentialgleichungen in Spezialfällen des Dreikörperproblems. In gewissen Spezialfällen des Dreikörperproblems vereinfachen sich die Differentialgleichungen. Der wichtigste Fall dieser Art entspringt dem Umstand, daß die drei Körper immer in einer Ebene bleiben, wenn sie selbst und zugleich ihre Bewegungsrichtungen in einem bestimmten Moment in einer Ebene lagen, es ist der Fall des *„ebenen" Dreikörperproblems.*

Das unreduzierte kanonische Gleichungssystem wird hier von der 12. Ordnung. Es existieren vier Integrale für die Bewegung des Schwerpunkts, ein Flächensatz und das Integral der lebendigen Kraft. Die Elimination der Knoten und der Zeit kann, wie früher, ausgeführt werden. Auf diese Weise läßt sich das Problem schließlich auf ein kanonisches System der 4. Ordnung reduzieren.

Viele der im vorigen Paragraphen erwähnten Arbeiten enthalten auch den Übergang vom allgemeinen auf das ebene Dreikörperproblem. Das Gleichungssystem von *Bour* und *Radau* wird:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

wo q_1, q_2, p_1, p_2 die frühere Bedeutung haben, während q_3 jetzt der Winkel zwischen q_1 und q_2 ist und p_3 die Differenz der Flächengeschwindigkeiten von μ und μ' ist.

Scheibner[14]) reduziert das System auf dieselbe Form, wo q_1, q_2, q_3 die wechselseitigen Distanzen der drei Körper bedeuten. *Whittaker*[15]) erhält diese Form, indem er q_1 den Abstand $m_1 m_3$, q_2 und q_3 die Projektionen von $m_2 m_3$ auf $m_1 m_3$ und auf eine dazu Senkrechte bedeuten läßt.

Die fernere Reduktion des Systems auf die 4. Ordnung kann wie in Nr. 1 erfolgen.

Ein andrer Spezialfall des Dreikörperproblems, der in neueren Untersuchungen eine besondere Rolle spielt, ist das *restringierte Dreikörperproblem.* Dasselbe lautet folgendermaßen: Zwei Körper S und J bewegen sich unter ihrer gegenseitigen Anziehung in kreisförmigen

---

14) J. f. Math. 68 (1868), p. 390; vgl. auch *Perchot* und *Ebert,* Bull. Astr. 16 (1899), p. 110.

15) Dynamics. Kap. XIII.

Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt O. Ein dritter Körper P von verschwindender Masse (oft der *Planetoid* genannt), der also die Bewegung von S und J nicht stört, bewegt sich unter der Anziehung dieser beiden Körper. Seine Bewegung ist zu bestimmen.

Dieses Problem wurde zuerst von *Jacobi*[16]) behandelt, der zeigte, daß es von einem Differentialgleichungssystem der 4. Ordnung abhängt, von welchem ein Integral — jetzt allgemein das Jacobische Integral genannt — sofort hingeschrieben werden kann. Seien nämlich x und y die Koordinaten des Planetoiden in einem rotierenden rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Schwerpunkt O und dessen x-Achse stets mit der Linie JS zusammenfällt, dann lautet das System 4. Ordnung:[17])

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

wobei:

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + n(uy - vx) - \frac{m_1}{SP} - \frac{m_2}{JP}$$

ist und m_1, m_2, n resp. die Massen von S und J und die mittlere Bewegung von S und J in ihrer Bahn, SP und JP ihre Abstände von P bedeuten. Das Jacobische Integral lautet:

$$H = \text{konst.}$$

Tisserand[18]) gibt kanonische Variable an, die von den Elementen der oskulierenden Ellipse abhängen, die der Planetoid um einen der beiden anderen Körper beschreibt. *Poincaré*[19]) bringt ähnlich die Bewegungsgleichungen auf die Form:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

wobei die Ellipse zugrunde gelegt wird, die der Planetoid, von seiner augenblicklichen Lage und Geschwindigkeit ausgehend, unter der Anziehung eines Körpers der Masse 1 im Schwerpunkt O beschreiben würde; q_1 bedeutet die mittlere Anomalie des Planeten in dieser Ellipse, q_2 die Perihellänge, p_1 ist gleich $\sqrt{a}$, p_2 gleich $\sqrt{a(1-e^2)}$, wenn a und e die halbe große Achse und die Exzentrizität der Ellipse bedeuten. Setzt man die Massen von S und J gleich $1 - \mu$ resp. μ, so kann man H bei kleinem μ in der Form entwickeln:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \cdots$$

16) Paris C. R. 3 (1836), p. 59.
17) *Scheibner,* J. f. Math. 65 (1866), p. 291.
18) Bull. Astr. 4 (1887), S. 183.
19) Acta Math. 13, p. 1.

wobei:

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - np_2$$

und $H_1, H_2, \ldots$ periodisch in q_1 und q_2 von der Periode 2π sind.

Durch Elimination der Zeit unter Benutzung des Jacobischen Integrales kann das restringierte Dreikörperproblem auf ein kanonisches System der 2. Ordnung reduziert werden.

3. Die Differentialgleichungen des n-Körperproblems. Ist die Zahl der anziehenden Körper größer als drei, so wird die Behandlung verwickelter, ohne sich im Wesen zu ändern. Lagranges Reduktionsart für das Dreikörperproblem wurde von *Seydler*[20]) auf vier Körper übertragen. Das Gleichungssystem wird von der 12. Ordnung.

Das allgemeine n-Körperproblem kann mit Hilfe der zehn bekannten Integrale, der Elimination der Knoten und der Zeit von der $6n^{\text{ten}}$ auf die $6n - 12$. Ordnung reduziert werden. Der Nachweis hierfür stammt von *Radau*[21]), welcher schon früher[22]) eine Reihe von Möglichkeiten angegeben hatte, wie man die Schwerpunktssätze bei der Reduktion benutzen kann. Die tatsächliche Reduktion des n-Körperproblems auf ein kanonisches System der $6n - 10$. Ordnung, welches *Bours* Gleichungssystem 8. Ordnung für das Dreikörperproblem völlig analog ist, wurde von *Mathieu* ausgeführt.[23])

4. Die Nichtexistenz bestimmter Klassen von Integralen. Es wurden viele Versuche unternommen, in dem Dreikörperproblem neue Integrale aufzustellen, die den zehn bekannten analog sind, also nur bekannte Funktionen in geschlossener Form enthalten. Das Mißlingen dieser Versuche legte den Gedanken nahe, daß es keine weiteren Integrale von dieser einfachen Art gibt; diese Vermutung wurde durch ein wichtiges Theorem von *Bruns* bestätigt[24]), das aussagt, daß in dem

---

20) Abhandlungen der k. böhm. Ges. d. Wiss. (7) 1 (1885), Nr. 5.

21) J. de math. (2) 14 (1869), p. 167; die Möglichkeit dieser Reduktion wurde auch von *Allégret* untersucht, J. de math. (3) 1 (1875), p. 277. (Über die Lücken in *Allégrets* Arbeit vgl. *Mathieu*, J. de math. (3) 3, p. 216; 4 (1877), p. 69, und (anknüpfend an *Lagranges* Arbeiten) von *Betti*, Annali di mat. (2) 8 (1877), p. 301.

22) Annales de l'Éc. Norm. 5 (1868), p. 311; *Allégret* gab, Paris C. R. 79 (1874), p. 656, ein von dem Radauschen Theorem nicht wesentlich verschiedenes Resultat. Vgl. auch *Andrade*, Paris C. R. 108 (1889), p. 226, 280, und ein allgemeines Theorem von Sir *R. S. Ball*, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 37 (1877), p. 265.

23) J. de math. (3) 3 (1877), p. 5. Vgl. *Bennett*, Mess. of Math. (2) 34 (1904), p. 113.

24) Berichte der kgl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig (1887), S. 1, 55; Acta

vorgelegten Problem außer den bekannten Integralen kein anderes algebraisches Integral existiert.

Dem Beweis von *Bruns* werden die Differentialgleichungen des n-Körperproblems in der nichtreduzierten Form als ein Gleichungssystem $6n^{ter}$ Ordnung zugrunde gelegt, das man also in der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = y_\nu, \quad \frac{dy_\nu}{dt} = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, s) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3n)$$

schreiben kann, wobei s die Summe aller wechselseitigen Entfernungen der Körper bedeutet; der Grund der Einführung von s ist der, daß die Funktionen f_ν rationale Ausdrücke von $(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, s)$ werden, obwohl sie irrationale Ausdrücke von $(x_1, x_2, \ldots, x_{3n})$ allein sind.

Angenommen, dieses Gleichungssystem besäße ein Integral von der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, y_1, y_2, \ldots, y_{3n}) = \text{konst.},$$

wobei φ eine algebraische Funktion ihrer Argumente ist und also die Wurzel einer algebraischen Gleichung darstellt, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x, y sind. Es wird gezeigt, daß dann entweder alle Koeffizienten dieser Gleichung in φ selbst Integrale sind oder aber φ einer Gleichung von geringerem Grade genügt, deren Koeffizienten rationale Funktionen in x, y, s sind. Auf diese Weise wird bewiesen, daß alle Integrale, die algebraische Funktionen von x, y sind, algebraische Kombinationen von anderen Integralen sind, die selbst rationale Ausdrücke in x, y, s sind. Wir betrachten also nur diese letztere Klasse von Integralen.

Es wird sodann gezeigt, daß die Integrale von der zuletzt betrachteten Gattung aus einer anderen Gattung von Integralen aufgebaut werden können, die *Bruns homogene Integrale* nennt. Wenn ein homogenes Integral in Faktoren zerlegt ist, die Polynome in bezug auf die Größen y sind, so ist jeder Faktor entweder selbst schon ein Integral oder wird durch Hinzufügung bestimmter Faktoren ein Integral. Jedes Integral des n-Körperproblems, das algebraisch in den Variablen x, y und unabhängig von t ist, kann also schließlich auf algebraische Weise aus Integralen einer bestimmten Gattung aufgebaut werden, die Polynome von y, rationale Funktionen von x und s und außerdem homogen sind. Es wird ferner gezeigt, daß, wenn φ ein solches Integral bedeutet und man mit φ_0 diejenigen Glieder bezeichnet, die in bezug auf die Größen y von möglichst hoher

---

math. 11, p. 25. Ein Versehen in *Bruns'* Beweis wurde von *Poincaré*, Paris C. R. 123 (1896), p. 1224 rektifiziert.

Ordnung sind, die Funktion φ_0 die Größen x nur ganz und rational und nur in der Verbindung $(y_1 x_\nu - y_\nu x_1)$ enthält; φ_0 ist von s unabhängig. Wir bezeichnen mit A, B, C die drei Komponenten der Flächengeschwindigkeit des Systems, mit L', M', N' die Komponenten der Geschwindigkeit und mit L, M, N die Koordinaten des Schwerpunktes und setzen

$$A' = MN' - NM', \quad B' = LN' - L'N, \quad C' = LM' - L'M.$$

Wir nehmen an, daß diese Größen durch x, y ausgedrückt sind, so daß jede von ihnen gleich konst. gesetzt ein bekanntes Integral des Problems ist. Es wird bewiesen, daß φ_0 die Variablen x nur in der Verbindung A, B, C, A', B', C' enthält und ein Polynom in A, B, C, A', B', C' und in den y ist. Sodann wird bewiesen, daß φ_0 ein Polynom in $A, B, C, A', B', C', L', M', N', T$ ist (wo T die kinetische Energie bedeutet). Setzen wir

$$\varphi_0 = f(A, B, C; A', B', C'; L', M', N'; T).$$

Bezeichnen wir mit V die potentielle Energie des Systems, so daß $T + V$ ein Integral ist. Der Ausdruck

$$J = f(A, B, C, A', B', C', L', M', N', T + V)$$

ist ein Integral, da er aus Integralen allein aufgebaut ist. Die Differenz

$$\varphi' = \varphi - J$$

ist daher ein Integral von derselben Gattung wie φ, nur ist ihr Grad in den Veränderlichen y mindestens um 1 geringer als der Grad von φ in diesen Variablen. Folglich kann jedes Integral φ in einer Form dargestellt werden, die außer den bekannten Integralen nur noch von einem Integral abhängt, deren Grad in y kleiner ist als der Grad von φ in diesen Veränderlichen; es kann also — durch Fortsetzung dieses Verfahrens — φ dargestellt werden in einer Form, die außer den bekannten Integralen nur von einem Integral von der nullten Ordnung in y abhängt; ein solches Integral ist aber eine Konstante. *Bruns* gelangt also zu dem Theorem: *Alle von der Zeit freien Integrale des n-Körperproblems, die die Koordinaten und Geschwindigkeiten algebraisch enthalten, lassen sich aus dem Schwerpunktsatze, Flächensatze und Energiesatze algebraisch aufbauen.* Eine leichte Erweiterung dieser Überlegung zeigt auch, daß mit Ausnahme der bekannten Integrale keine weiteren Integrale existieren, die die Zeit und die Variablen x, y algebraisch enthalten.

Bruns untersuchte auch noch die Frage, ob Integrale des reduzierten Systems existieren, die die Form von Integralen von totalen alge-

braischen Differentialen haben, sich also aus verallgemeinerten Abelschen Integralen zusammensetzen, wie sie von *Picard* untersucht worden sind. Dies ist gleichfalls unmöglich. Das Resultat kann auf das n-Körperproblem ausgedehnt werden, da man aus einem solchen Integral des n-Körperproblems ein entsprechendes Integral des Dreikörperproblems dadurch erhalten kann, daß man alle Massen mit Ausnahme dreier gleich Null setzt.

Painlevé[25]) hat das Brunssche Theorem verallgemeinert, indem er bewies, daß jedes Integral des n-Körperproblems, das die Geschwindigkeiten algebraisch, die Koordinaten aber beliebig (algebraisch oder nicht) enthält, eine algebraische Kombination der bekannten Integrale ist.

Ein dem Brunsschen Theorem ähnliches, in mancher Hinsicht noch allgemeineres Theorem wurde später von *Poincaré* publiziert.[26]) Wir schreiben die Bewegungsgleichungen des *restringierten* Dreikörperproblems in der Form:

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H_\nu}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2),$$

wobei H nach den Potenzen der Konstanten μ entwickelbar ist:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \cdots;$$

H_0 ist eine Funktion von p_1, p_2 allein, und wir können durch eine einfache Transformation erreichen, daß die Funktionaldeterminante von H_0 in bezug auf p_1, p_2 nicht gleich Null ist. $H_1, H_2, \ldots$ sind periodische Funktionen in bezug auf q_1, q_2 von der Periode 2π.

Sei nun φ eine Funktion von $(q_1, q_2, p_1, p_2, \mu)$, die in bezug auf q_1, q_2 periodisch ist mit der Periode 2π; wir nehmen ferner an, daß diese Funktion eine eindeutige analytische Funktion ist für jedes reelle Wertsystem q_1, q_2, für hinreichend kleine Werte von μ und für solche reelle Wertepaare p_1, p_2, die ein bestimmtes beliebig kleines Gebiet D ausfüllen. Unter diesen Annahmen kann man die Funktion φ in einer Reihe

$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \cdots$$

entwickeln. Poincarés Theorem sagt nun aus, *daß das restringierte Dreikörperproblem außer dem Jacobischen Integral kein anderes Integral von der Form*

$$\varphi = \text{konst.}$$

besitzt, wenn φ eine Funktion dieser Art bedeutet.

---

25) Paris C. R. 124 (1897), p. 173; Bull. Astr. 15 (1898), p. 81.

26) Acta Math. 13 (1890), p. 259; Méth. Nouv. I, chap. 5 (1892).

Angenommen es gebe ein Integral dieser Art; die Bedingung, daß φ ein Integral ist, kann mit Hilfe der Poissonschen Klammern, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$(H_0, \varphi_0) = 0, \quad (H_1, \varphi_0) + (H_0, \varphi_1) = 0, \ldots$$

Man kann leicht zeigen, daß man, wenn φ und H wesentlich verschiedene Integrale sind, und φ_0 eine Funktion von H_0 allein ist, aus φ ein anderes Integral derselben Art ableiten kann, das so beschaffen ist, daß es keine Funktion von H_0 allein wird, wenn man $\mu = 0$ setzt. Wir können daher annehmen, daß φ_0 keine Funktion von H_0 allein ist. Die Annahme, daß φ_0 die Variablen q_1, q_2 wirklich enthält, ist aber unverträglich mit der Gleichung $(H_0, \varphi_0) = 0$; wir können daher φ_0 als eine Funktion von p_1, p_2 allein annehmen.

Da H_1 und φ_1 periodische Funktionen von q_1, q_2 sind, gestatten sie eine Entwicklung

$$H_1 = \sum_{m_1 m_2} B_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)}, \quad \varphi_1 = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)},$$

wobei $m_1 m_2$ ganze Zahlen bedeuten und die Koeffizienten B und C nur von p_1, p_2 abhängen. Die Gleichung

$$(H_1, \varphi_0) + (H_0, \varphi_1) = 0$$

ergibt

$$B_{m_1 m_2}\left(m_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_2}\right) = C_{m_1 m_2}\left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2}\right).$$

Im allgemeinen enthält jedes noch so kleine Gebiet D unendlich viele Brüche $m_1 : m_2$, für die nicht jeder der zugehörigen Koeffizienten $B_{m_1 m_2}$ verschwindet, wenn man p_1, p_2 solche Werte erteilt, daß

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$$

ist. Im allgemeinen Falle (zu dem das restringierte Problem gehört) ist daher die Gleichung

$$m_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_2} = 0$$

eine Folge der Gleichung

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0,$$

woraus wir schließen, daß die Jacobische Determinante $\frac{\partial(H_0, \varphi_0)}{\partial(p_1, p_2)}$ verschwindet. Dieses Resultat hat zur Folge, daß φ_0 eine Funktion von H_0 sein müßte, was, wie wir gesehen haben, nicht der Fall ist; die zugrunde gelegte Annahme über die Existenz von φ muß fallen gelassen werden, womit Poincarés Theorem für das restringierte Dreikörperproblem bewiesen ist. Man kann zeigen, daß das Theorem auch

für das allgemeine Dreikörperproblem richtig bleibt. *Painlevé*[27]) verallgemeinerte dieses Resultat in derselben Weise wie das Brunssche, indem er zeigte, daß außer den bekannten Integralen kein anderes Integral existiert, das eindeutig und analytisch in den Geschwindigkeiten ist, wobei das Auftreten der Koordinaten durch keine Bedingung eingeschränkt ist.

5. Periodische Lösungen; die allgemeine Theorie. Das Dreikörperproblem besitzt Partikularlösungen, bei denen die wechselseitigen Entfernungen periodische Funktionen der Zeit sind. Solche Lösungen bezeichnet man als *periodische Lösungen* oder als *periodische Bahnkurven* des vorgelegten Problems. Man wendet allgemein diese Bezeichnung für Lösungen eines dynamischen Problems an, bei denen die Bahnkurven geschlossen sind. *Stäckel* zeigte[28]), daß in sehr ausgedehnten Fällen der lösbaren dynamischen Probleme in jedem Punkte diejenigen Anfangsrichtungen, die zu periodischen Lösungen führen, in jedem Winkel überall dicht liegen.

Die Theorie der periodischen Lösungen entstand aus der Theorie gewisser spezieller periodischer Lösungen (vgl. die nächste Nummer); die allgemeine Existenztheorie — die später entwickelt wurde — rührt von *Poincaré* her.[29])

Betrachten wir das restringierte Dreikörperproblem, wenn der kleine Parameter μ, der von dem Verhältnis der Massen von J und S abhängt, gleich Null ist, so existieren offenbar periodische Lösungen, denn in diesem Fall wird der Planetoid von J nicht gestört und beschreibt daher um S eine Keplersche Ellipse; die Lösung ist periodisch, wenn die beiden Umlaufszeiten, die von P und die von J um S, kommensurabel sind. Betrachten wir nun ein System von Differentialgleichungen, das noch einen Parameter μ enthält und für $\mu = 0$ periodische Lösungen besitzt; es kann gezeigt werden, daß, wenn eine bestimmte Jacobische Determinante nicht verschwindet, das vorgelegte System auch für von Null verschiedenes μ periodische Lösungen besitzt, die von den vorgelegten nur wenig verschieden sind.[30]) Unglücklicherweise ist in den Problemen der Himmelsmechanik jene Determinante das Produkt zweier anderen Determinanten, von denen die eine — die die Hessesche Determinante der von μ freien Glieder

27) Paris C. R. 130 (1900), p. 1699.

28) Math. Ann. 54 (1901), p. 86.

29) Bull. Astr. 1 (1884), p. 65; Acta Math. 13 (1890), p. 1; Méth. Nouv. I (1892).

30) Die Jacobische Determinante verschwindet, wenn einer der charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung (vgl. No. 7) gleich Null ist.

der Störungsfunktion ist — verschwindet. In dem restringierten Dreikörperproblem kann man diese Schwierigkeit durch einen einfachen Kunstgriff leicht beseitigen[31]), bei dem allgemeinen Dreikörperproblem jedoch ist dies nicht so leicht zu erreichen.[32])

Zu jeder periodischen Lösung gehört ein bestimmtes System von Veränderlichen, von der Beschaffenheit, daß die Gleichung dieser Lösung in bezug auf diese Variable eine besonders einfache Form annimmt.[33]) Betrachten wir z. B. eine periodische Lösung des Systems

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2),$$

wobei H eine Funktion von q_1, q_2, p_1, p_2 ist, die durch die folgenden Gleichungen definiert ist:

$$q_1 = \varphi_1(t), \quad q_2 = \varphi_2(t), \quad p_1 = \psi_1(t), \quad p_2 = \psi_2(t).$$

Durch Elimination von t aus diesen Gleichungen erhalten wir ein Gleichungssystem, das wir in die Form

$$q_1 = \theta_1(p_2), \quad q_2 = \theta_2(p_2), \quad p_1 = \theta_3(p_2)$$

setzen; wenn wir statt der Variablen (q_1, p_1, q_2, p_2) durch die Berührungstransformation

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 - \theta_1(p_2), \\ Q_2 &= q_2 - \theta_2(p_2) + (q_1 - \theta_1(p_1))\theta_3'(p_2) - (p_1 - \theta_3(p_2))\theta_1'(p_2), \\ P_1 &= p_1 - \theta_3(p_2), \\ P_2 &= p_2 \end{aligned}$$

die neuen Variablen Q_1, Q_2, P_1, P_2 einführen, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dQ_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\nu}, \quad \frac{dP_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu},$$

während die periodische Lösung jetzt durch die Gleichungen

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = \psi_2(t)$$

definiert ist.

Ein von *Whittaker*[34]) herrührendes Kriterium zur Auffindung von periodischen Lösungen in dem restringierten Dreikörperproblem lautet wie folgt:

---

31) *Poincaré*, Acta Math. 13, p. 122; Méth. Nouv. I, p. 117.

32) *Poincaré*, Méth. Nouv. I, p. 133; *Kobb*, Öfversigt of K. Sv. Vet-Ak. Förh. 52 (1895), p. 215.

33) *Poincaré*, Méth. Nouv. II, p. 369.

34) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 62 (1902), p. 346. Vgl. auch *Signorini*, Palermo Circ. Rend. 33 (1912).

Wir bilden in den Bezeichnungen von No. 2 die Funktion

$$G(x, y) = \left\{h + \frac{m_1}{SP} + \frac{m_2}{JP} + \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo h die Energiekonstante im Jacobischen Integral bezeichnet; wenn in der Bewegungsebene eine geschlossene Kurve existiert, die ganz innerhalb einer anderen geschlossenen Kurve verläuft, von der Beschaffenheit, daß der Ausdruck

$$\frac{G}{\varrho} + \frac{\partial G}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial G}{\partial y} \sin \varphi + \sqrt{2}\, n$$

(wo ϱ den Krümmungsradius bezeichnet) in jedem Punkte der inneren Kurve negativ, in jedem Punkte der äußeren Kurve positiv ist, *so existiert in dem von beiden Kurven umschlossenen ringförmigen Gebiet eine periodische Bahnkurve des Planetoiden, die die beliebig vorgeschriebene Größe h als Energiekonstante besitzt.*

Poincaré gab nach dem folgenden Prinzip eine Einteilung der verschiedenen periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems: die Lösung wird als eine Lösung der *ersten Klasse* (premier genre) bezeichnet, wenn die relative Bahnkurve des Planetoiden sich schließt, bevor der Planetoid einen einzigen Umlauf um S beendet hat; wenn der Planetoid mehr als einen Umlauf macht, bevor seine Bahnkurve sich schließt, so wird die Lösung als Lösung von der zweiten Klasse (deuxième genre) bezeichnet. Eine Methode, periodische Lösungen von der zweiten Klasse zu erhalten, ist die folgende[35]): man betrachte die Bewegung des Planetoiden in der Nähe einer stabilen periodischen Bahn der ersten Klasse; wenn die Periode kleiner Schwankungen um diese Bahn nahezu kommensurabel ist mit der Periode T der periodischen Bahn selbst, so existiert im allgemeinen unter den Nachbarbewegungen eine periodische Bahn der zweiten Klasse. *Poincaré* teilt ferner die periodischen Bahnen der ersten Klasse, die in der Ebene von S und J verlaufen, in zwei Sorten, je nachdem ihre Exzentrizität gleich Null ist oder nicht, d. h. je nachdem die Bahnen sich einer Kreisbahn nähern oder nicht, wenn die Masse von J unbegrenzt abnimmt.[35a])

Periodische Lösungen jeder Art können leicht bestimmt werden durch geeignete Spezialisierung der unten zu besprechenden Entwick-

---

35) Acta Math. 13 (1890), p. 228; Méth. Nouv. III (1899), p. 201.

35a) In bezug auf die Einteilung der periodischen Lösungen vgl. ferner *Charlier,* Mechanik des Himmels Bd. 2 und *H. von Zeipel,* Upsala Nova Acta (2) 20 (1904).

lungen, die die allgemeinen Lösungen des Dreikörperproblems darstellen[36]), da diese im allgemeinen divergenten Entwicklungen gerade im Fall periodischer Lösungen konvergent werden.

6. Spezielle periodische Lösungen. Die einfachsten periodischen Lösungen des Dreikörperproblems wurden von *Lagrange*[37]) gefunden; er zeigte, daß man die Bewegungsgleichungen durch eine Klasse von Lösungen befriedigen kann, wobei die drei Körper in den Eckpunkten eines bewegten gleichseitigen Dreiecks liegen; bei einer anderen Klasse von Lösungen liegen die drei Körper stets auf einer geraden Linie; wir bezeichnen diese Bewegungen als die *Lagrangesche Bewegung der drei äquidistanten bzw. gradlinig angeordneten Massenpunkte.* Betrachten wir jetzt speziell das restringierte Dreikörperproblem; hier erhält man das Resultat, daß der kleine Planet bei geeigneter Anfangsgeschwindigkeit ständig in einer unveränderten Lage in bezug auf S und J bleibt, wenn er an einer der beiden Stellen steht, wo er mit S und J ein gleichseitiges Dreieck bildet, oder wenn er sich an einer von drei bestimmten Stellen der geraden Linie SJ befindet. Diese fünf Stellen werden *Librationszentra* genannt. Keine dieser Gleichgewichtslagen ist vollständig stabil, es sei denn, daß die Massen von S und J die Ungleichung[38])

$$(m_1 + m_2)^2 > 27 m_1 m_2$$

erfüllen; in diesem Falle ist die Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks stabil; von den zwei normalen Schwingungen um die geradlinige Konfiguration ist die eine stabil, die andere instabil.

Man erhält eine neue Klasse von periodischen Lösungen, wenn man entsprechend der Methode der kleinen Schwingungen die Bewegungen des Planetoiden in der Nähe der Librationszentra betrachtet. Die schwingenden Bewegungen dieser Art in der Nähe der Librationszentra wurden von verschiedenen Autoren untersucht, unter anderen

---

36) *Poincaré,* Bull. Astr. 15 (1898), p. 289.

37) Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'Acad. de Paris 9 (1772). Auf den Fall mehrerer anziehender Körper wurden die Lagrangeschen Resultate von verschiedenen Autoren erweitert; vgl. *Hoppe,* Arch. Math. Phys. 64 (1879), p. 218; *Lehmann-Filhes,* Astr. Nachr. 127 (1891), p. 137; *Sloudsky,* Bull. de la soc. Imp. Natur. Moscow. 1892, p. 437; *Moulton,* Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 17; *Dziobek,* Astr. Nachr. 152 (1900), p. 33; *Pizzetti,* Roma Lincei Rend. 5ª 13 (1904), p. 17; *Lovett,* Quart. Jour. Math. 35 (1904), p. 116.

Eine imaginäre Lösung, die aus der Lagrangeschen Arbeit entsteht, ist von *Whittemore,* Math. Ann. 64 (1907), S. 150 betrachtet worden.

38) *Routh,* London Math. Soc. Proc. 6 (1875), p. 86.

von *Gylden*[39]), von *Burrau*[40]) (der gefunden hat, daß die Reihe der Bahnen durch eine sog. *Ejektionsbahn* abgeschlossen wird, in der der Planetoid von einem Zusammenstoß mit S oder J ausgeht), von *Thiele*[41]), *Perchot* und *Mascart*[42]), (der die Poincarésche Theorie auf die Lösungen anwandte), von *Darwin*[43]), *Charlier*[44]) (der auch Bahnen in der Umgebung der Librationszentra des gleichseitigen Dreiecks betrachtet) und von *Plummer*.[45])

Die Bewegungen der drei äquidistanten Massenpunkte haben dadurch praktisches Interesse gewonnen, daß seit 1906 mehrere Asteroiden (588 Achilles, 617 Patroclus, 624 Hector, 659 Nestor) entdeckt worden sind, deren Bewegung in Schwingungen in der Nähe dieser Konfiguration besteht[45a]).

Für die neuere Entwicklung der Theorie der periodischen Bahnen bilden den Ausgangspunkt die Arbeiten von *Hill*.[46]) *Hill* betrachtet das restringierte Dreikörperproblem (mit einer für uns unwesentlichen Vernachlässigung) und sucht periodische Lösungen, bei denen der Planetoid in einer periodischen Bahn S umkreist. Seine Methode besteht darin, daß er in die Differentialgleichung eine Entwicklung von der gesuchten Form mit unbestimmten Koeffizienten einsetzt; er bestimmt diese Koeffizienten als Funktionen eines Parameters m, der von dem Verhältnis der Periode der Lösung und der Umlaufszeit der Linie SJ abhängt. Bei Änderung von m erhält man verschiedene periodische Lösungen; für kleines m ergibt sich die sehr nahe mit einer Ellipse übereinstimmende „Variationskurve", für wachsendes m erhält *Hill* als letzte Lösung (die Bahn von größter *Lunation*) eine Kurve mit Spitzen in den Quadraturen, an den Stellen, wo der Winkel

39) Öfversigts of K. Sv. Vet.-Ak. Förh. 4 (1884), p. 3; Bull. Astr. 1 (1884), p. 361.

40) Astr. Nachr. 136 (1884), p. 161.

41) Astr. Nachr. 138 (1895), p. 1.

42) Bull. Astr. 12 (1895), p. 329.

43) Acta Math. 21 (1897), p. 99.

44) Meddelanden fran Lunds Obs. No. 18 (1901).

45) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 62 (1901), p. 6; 63 (1903), p. 436; 64 (1904), p. 98.

45a) Vgl. *Linders*, Stockholm Arkiv för Math. 4 (1908), Nr. 20.

46) *Hill* benutzte zuerst periodische Lösungen in einer Arbeit, die in Cambridge. Mass. U. S. A. bei J. Wilson & Sohn 1877 veröffentlicht und in den Acta Math. 8 (1886), p. 1 abgedruckt wurde. In ausführlicher Form ist der Teil über die periodischen Lösungen in Am. Journ. Math. 1 (1878), p. 5, 129, 245 erschienen. Die Konvergenz der Hillschen Reihen im Falle der Mondbewegung wurde von *Liapounoff*, Trans. Imp. Soc. Nat. Mosc. 13 (1896) und *Happel*, Inaug.-Diss. Göttingen 1900 bewiesen.

von SJP ein rechter Winkel ist. *Hill* hielt diese Bahn für den Abschluß seiner Reihe; *Poincaré*[47]) aber wies darauf hin, daß die Fortsetzung durch eine Reihe von Kurven mit Schlingen gegeben wird, und *Kelvin*[48]) zeichnete mittels graphischer Methoden eine solche Lösung.

Darwin[49]) berechnete numerisch eine große Anzahl von periodischen Lösungen in dem restringierten Dreikörperproblem und teilte sie in sechs Klassen; in einer Klasse (Planet A) beschreibt der Planet eine geschlossene Kurve um S, wie bei den Hillschen Bahnen; in zwei anderen Klassen (oszillierende Satelliten a und b) oszilliert der Planetoid um eine der geradlinigen Librationszentra (der Satellit b beschreibt Burraus Bahnen); in den anderen drei Klassen (Satellit A, B, C) beschreibt der Satellit geschlossene Bahnen um J.

Darwin fand, daß in der Klasse des Satelliten A die Bahnen wesentlich von der Wahl der Energiekonstante im Jacobischen Integral abhängen. Für bestimmte Werte der Konstanten sind die Bahnen einfache Ovale und sind stabil; bei anderen Werten dieser Konstante haben die Bahnen die Form einer 8 und sind instabil. *Poincaré*[50]) vermutete, daß die instabilen Lösungen nicht die analytischen Fortsetzungen der stabilen Lösungen sind, und *Hough* bewies[51]) dies durch Betrachtung solcher Bahnen, wo die anfängliche Geschwindigkeit retrograd ist.

Schwarzschild[52]) untersuchte die periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die in die zweite *Sorte* von *Poincaré* gehören. Nimmt man an, daß der Planetoid so in Bewegung gesetzt wird, daß er — bei verschwindender Masse des Planeten J — um S eine Ellipse beschreiben würde, deren Periode kommensurabel mit der Umlaufszeit von S um J ist, so läßt sich mit Hilfe der Poincaréschen Methoden zeigen, daß man auch, wenn die Masse von J klein, aber nicht verschwindend ist, durch Variation der Elemente des Planetoiden eine periodische Bahn erhalten kann.

Besondere Aufmerksamkeit haben in den letzten Jahren diejenigen periodischen Bahnen des Planetoiden gefunden, die in einer einfachen

47) Méth. Nouv. I (1892), p. 106.

48) British Association Report (1892), p. 648; Phil. mag. 34 (1892), p. 447.

49) British Association Report (1896), p. 708; Acta Math. 21 (1897), p. 99; Math. Ann. 51 (1899), p. 523.

50) Méth. Nouv. III (1899), p. 352.

51) Acta Math. 24 (1900), p. 257—288. In bezug auf die Darwinschen Bahnen vgl. ferner: *Schlitt*, Diss. Kiel 1903; *Moulton*, Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), p. 537; *Strömgren*, Astr. Nachr. 174 (1907), p. 33.

52) Astr. Nachr. 147 (1898), S. 17, 289.

Kurve S umkreisen und deren Periode annähernd gleich der Hälfte der Umlaufszeit von SJ ist. Diese Lösungen werden allgemein als *Lösungen vom Hekubatypus* bezeichnet, da die mittlere Bewegung des kleinen Planeten Hekuba annähernd zweimal so groß ist, wie die von Jupiter. Wegen der annähernden Kommensurabilität der Perioden sind die Störungen, die der Planetoid von J erfährt, ungewöhnlich groß. Betrachten wir zunächst die periodischen Lösungen der ersten Sorte von *Poincaré* für eine mittlere Entfernung von S unterhalb derjenigen, die der doppelten mittleren Bewegung von J entspricht[53]), so finden wir, daß die Bahn des Planetoiden relativ zu der bewegten Geraden SJ in der Richtung der Senkrechten auf SJ verlängert ist. Diese Erscheinung wird um so ausgeprägter, je mehr die Entfernung an jenen kritischen Wert heranrückt, je genauer die Kommensurabilität wird, und schließlich geht die Lösung in eine Poincarésche Lösung zweiter Sorte über, die auch bei verschwindender Masse J eine endliche Exzentrizität hat. Wenn nun die mittlere Entfernung die Stelle überschreitet, die der Kommensurabilität entspricht, so werden die Bahnkurven in der Richtung von SJ verlängert; wächst die mittlere Entfernung weiter, so gehen die Lösungen zweiter Sorte wieder in Lösungen erster Sorte über, und die Bahnform wird wieder nahezu kreisförmig.[53a])

7. Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der benachbarten Lösungen. Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß gegebener Kräfte; wir setzen eine Partikularlösung der Bewegungsgleichung als bekannt voraus und untersuchen die Bewegung eines Massenpunktes, der von einer der gegebenen Bahnkurve benachbarten Stelle ausgeht und daselbst eine Geschwindigkeit besitzt, die der Größe und Richtung nach nur wenig von der Geschwindigkeit in dem betreffenden Punkte der Bahn verschieden ist. Wir wollen untersuchen, ob dieser Massenpunkt während seiner Bewegung nur um die gegebene Bahnkurve oszilliert und in ihrer Nähe bleibt, oder ob sich die Bahn des Massenpunktes von der bekannten Bahn mehr und mehr entfernt, so daß schließlich eine Bewegung von

53) *Brendel* (Abhandl. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1 (1898)) wendet *Gyldens* Methode an; *Poincaré,* Bull. Astr. 19 (1902), p. 177, 289; *Hill,* Astron. Journ. 22 (1902), p. 93, 117; *Schwarzschild,* Astr. Nachr. 160 (1903), p. 385, untersucht die Stabilität dieser Bahnen. Vgl. auch *Simonin,* Nice Obs. Ann. 6 (1897) A, Bull. Astr. 19 (1902), p. 129; *Andoyer,* Bull. Astr. 20 (1903), p. 321; *Wilkens,* Astron. Abh. als Ergänzungshefte zu den Astr. Nachr. Nr. 8 (1905).

53a) In bezug auf andre Kategorien periodischer Lösungen vgl. *Pavanini,* Annali di Mat. (3) XIII, p. 179 und *Griffin,* Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 1.

ganz anderem Charakter resultiert. Diese beiden Möglichkeiten werden häufig als *Stabilität* bzw. *Instabilität* bezeichnet.

Sei ω (das wir als kleine Größe annehmen) die normale Entfernung des Massenpunktes von der bekannten Bahn zu einer Zeit t, bezeichnen wir ferner mit s die Länge des Bogens auf der gegebenen Bahn von einem bestimmten Punkte gerechnet bis zu dem Fußpunkte der Normalen ω, mit v die Geschwindigkeit und mit ϱ den Krümmungsradius in der bekannten Bahn an dieser Stelle; schließlich sei V die potentielle Energie des Massenpunktes. Schreiben wir die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes in den Koordinaten ω und s und eliminieren die Größe $(ds/dt - v)$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{3v^2}{\varrho}\right\}\omega = 0,$$

die die normale Verrückuug der gegebenen Bahn von der Nachbarbahn angibt.

Wenn man in dem kinetischen Potential die Glieder 2. Grades in den Geschwindigkeiten (d. h. die kinetische Energie) nicht trennen kann von den Gliedern nullter Ordnung in den Geschwindigkeiten (d. h. von der potentiellen Energie), so ist eine kleine Modifikation nötig, dieser Umstand tritt z. B. in dem restringierten Dreikörperproblem auf, da die Energiefunktion in diesem Falle ein Glied von der Form $n(uy - vx)$ enthält (Nr. 2).

In dieser Weise untersuchte *Hill*[54]) die kleinen Oszillationen des Planetoiden um eine der von ihm gefundenen periodischen Bahnen. Berechnen wir den Koeffizienten von ω in der Differentialgleichung, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_1 \cos 2t + \theta_2 \cos 4t + \cdots)\,\omega = 0,$$

wo $\theta_0, \theta_1, \ldots$ Konstante bedeuten. Diese Gleichung wird die Hillsche Gleichung genannt.[55]) In der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten wird gezeigt, daß

54) Acta Math. 8 (1886), p. 1, Abdruck einer 1877 in Cambridge (Mass.) veröffentlichten Arbeit. *Adams* bemerkt Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1877), p. 43, daß er schon einige Jahre vorher die Bewegung des Mondknotens nach einer Methode untersucht hat, die der Hillschen für das Mondperigäum ähnlich ist, und daß er dabei zu einer ähnlichen unendlichen Determinante gelangte.

55) Es ist dies eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_1 \cos 2t) = 0,$$

die die Funktionen des elliptischen Zylinders definiert, vgl. *Heine*, Kugelfunktionen p. 404.

die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung die Form

$$\omega = Ae^{ct}f(t) + Be^{-ict}f_1(t)$$

hat, wo c eine bestimmte Konstante bedeutet, die reell ist, wenn θ_0 eine positive Zahl ist, die nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist; A und B sind willkürliche Konstanten, und $f(t)$ und $f_1(t)$ sind periodische Funktionen von der Periode π. Zur Bestimmung von c entwickelte *Hill* die folgende Methode:

Setzen wir $e^{it} = \zeta$, so lautet der Koeffizient von ω in der Differentialgleichung:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n \zeta^{2n},$$

wo die Größen θ_n reell sind. *Hill* setzt für ω die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^{c+2n}$ an und führt diesen Ausdruck von ω in die Differentialgleichung ein. Da jede Potenz von ζ einen verschwindenden Koeffizienten haben muß, so erhalten wir unendlich viele Gleichungen, die die Größen b linear enthalten. Durch Elimination dieser Größen erhält man eine Determinante mit unendlichvielen Zeilen und Kolonnen, in der nur c und die bekannten Größen θ_n vorkommen. Diese Determinante gleich Null gesetzt gibt den Wert von c.[56])

Dieses Ergebnis kann auf die Mondtheorie übertragen werden; die kleinen Oszillationen um die periodische Bahn können als Folge der Exzentrizität der Mondbewegung betrachtet werden, und die Konstante c gibt die Bewegung des Mondperigäums an. Die Stabilität der Bewegung — in dem Sinne, wie sie oben definiert wurde — hängt offenbar von der Realität der Größe c ab; die Größen ic und $-ic$ werden die *„charakteristischen Exponenten"* der betrachteten periodischen Lösung genannt, und die Bedingung der Stabilität ist die, daß die *charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung rein imaginär ausfallen.* Die allgemeine Theorie der Stabilität der Lösungen und insbesondere der periodischen Lösungen rührt von *Routh*[57]), *Korteweg*[58]) und *Poincaré*[59]) her; der Name „charakteristischer Exponent" wurde vom letzteren eingeführt. Das Resultat all dieser Untersuchungen kann folgendermaßen zusammengefaßt werden.

---

56) *Hill* untersucht nicht die Konvergenz dieser unendlichen Determinante; diese Lücke wurde von *Poincaré* ausgefüllt, Bull. de la Soc. math. de France. 14 (1886), p. 77.

57) Stability of motion, Cambridge 1876.

58) Wien. Ber. 93 (1886).

59) Acta Math. 13 (1890), p. 1; Méth. Nouv. I (1892).

Betrachten wir das Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dx_i}{dt} = X \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten. Nehmen wir an, ein System von periodischen Lösungen

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

von der Periode T sei bekannt, so daß $\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t)$ ist (wenn x_i eine Winkelvariable bedeutet, so soll diese Beziehung folgendermaßen lauten:

$$\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t) + 2n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl ist). Betrachten wir eine Nachbarbewegung, die analytisch durch die Gleichungen:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist, wo die Größen ξ_i so klein sein mögen, daß man ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen kann. Die Größen ξ_i werden aus den Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \xi_k \frac{\partial X_i}{\partial k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmt. Da dies ein System von linearen Differentialgleichungen ist mit periodischen Koeffizienten, so ergeben sich die Funktionen ξ als Summe von Ausdrücken von der Form $e^{\alpha_k t} S_{ik}$, wo die Funktionen S_{ik} periodische Funktionen der Zeit von derselben Periode wie die $\varphi_i(t)$ sind, und die Konstanten $e^{2i\pi\alpha_k}$ Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades sind. Die Konstanten α_k werden die *charakteristischen Exponenten* der periodischen Lösung genannt; wenn sie rein imaginär ausfallen, so bleiben die Funktionen ξ klein, und die periodische Lösung ist stabil; im entgegengesetzten Falle ist die Lösung instabil.

Wenn zwei charakteristische Exponenten gleich sind, so tritt in der allgemeinen Lösung ein Glied von der Form $te^{\alpha t}$ auf. Es ist übrigens klar, daß die charakteristischen Exponenten nicht eindeutig definiert sind, sondern bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ unbestimmt bleiben.

Wenn die Funktionen X_i von t unabhängig sind, so ist stets einer der charakteristischen Exponenten gleich Null;[60]) gibt es ein Integral von der Form $F =$ konst., wo F eine eindeutige analytische Funktion ihrer Veränderlichen ist, so verschwindet noch ein charakteristischer Exponent.[61])

---

60) Méth. Nouv. I, p. 180.

61) ibid. p. 187.

Wenn das ursprüngliche Differentialgleichungssystem die kanonische Form hat, so sind stets zwei charakteristische Exponenten entgegengesetzt gleich; die verschiedenen Werte von α^2 werden die *Stabilitätskoeffizienten* der zugrundegelegten periodischen Lösung genannt; wenn sie alle verschieden sind und einen negativen reellen Wert haben, dann ist die Lösung stabil. Wenn die Hamiltonsche Funktion die Zeit nicht enthält, so ist einer der Stabilitätskoeffizienten gleich Null. Bewegt sich ein Massenpunkt in einer periodischen Bahn unter dem Einfluß konservativer Kräfte mit zwei Freiheitsgraden, z. B. in einer periodischen Bahn des restringierten Dreikörperproblems, so verschwinden zwei charakteristische Exponenten, die anderen beiden sind entgegengesetzt gleich. Dieses Resultat wurde zuerst von *Poincaré* ausgesprochen; es ist im wesentlichen schon in einem Theorem enthalten, das früher von *Korteweg*[62]) aufgestellt wurde: wenn u_n, u_{n+1}, u_{n+2} die normalen Verrückungen bedeuten von einem gegebenen Punkte der periodischen Bahn dieses Charakters zu dem entsprechenden Punkt der Nachbarlösung bei drei aufeinanderfolgenden Umläufen, so hat das Verhältnis

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}}$$

einen konstanten Wert, der unabhängig von der Lage des Punktes auf der Bahn und unabhängig von der Wahl der Nachbarlösung ist; das Verhältnis hat den Wert $2 \cosh \alpha T$, wo α einer der charakteristischen Exponenten der periodischen Bahn ist.

Im Dreikörperproblem sind die charakteristischen Exponenten einer periodischen Lösung in eine nach den Potenzen der Quadratwurzel des kleinen Parameters μ fortschreitende Reihe entwickelbar.

Darwin[63]) untersuchte die Stabilität der von ihm gefundenen periodischen Lösungen des restringierten Dreikörperproblems.

Eng verknüpft mit der Theorie der charakteristischen Exponenten ist die Theorie der *asymptotischen Lösungen.*[64]) Im allgemeinen gibt es charakteristische Exponenten mit negativem Realteil. Diejenigen Glieder in der Darstellung der Funktionen ξ, die einen charakteristischen Exponenten mit nicht negativem Realteil enthalten, können durch eine passende Wahl der Integrationskonstanten beseitigt werden; wir erhalten auf diese Weise Partikularlösungen der Differential-

62) loc. cit. Fußnote (58).

63) Acta Math. 21 (1897), p. 144.

64) *Korteweg,* loc. cit.; *Poincaré,* Acta Math. 13 (1890), p. 136; Méth. Nouv. I (1892), III (1899).

gleichungen für die ξ, in denen die Funktionen ξ durch eine Summe von Gliedern dargestellt sind von der Form $e^{\alpha t} S_{ik}$, wo der Realteil von α negativ ist.

Wenn t über alle Grenzen wächst, konvergiert ξ_i gegen Null; mit anderen Worten, die erhaltene Lösung nähert sich mit wachsender Zeit mehr und mehr der ursprünglichen periodischen Lösung; diese *Lösungen* werden als *asymptotische Lösungen* bezeichnet. In ähnlicher Weise kann eine andere Klasse von Lösungen gebildet werden, die für $t = +\infty$ von der periodischen Lösung wesentlich abweichen, aber für $t = -\infty$ sich der periodischen Lösung asymptotisch annähern; diese Lösungen bilden eine zweite Klasse von asymptotischen Lösungen.

Poincaré[65]) hat ferner die Existenz von Lösungen bewiesen, die beiden Klassen von asymptotischen Lösungen angehören, d. h. die sowohl für $t = -\infty$, wie auch für $t = +\infty$ sich der periodischen Bahn asymptotisch annähern und keine periodischen Lösungen sind. Dies sind die sog. *doppeltasymptotischen Lösungen*. *Poincaré*[66]) zeigt noch, daß man die Reihen, die die asymptotischen Lösungen darstellen, aus den allgemeinen Lösungen des Dreikörperproblems erhalten kann; er wendet ferner[67]) das Prinzip der kleinsten Wirkung auf die Theorie der periodischen Lösungen an und gibt eine Klassifikation der instabilen periodischen Lösungen, indem er zeigt, daß man durch kontinuierliche Variation der Konstanten der Bewegung eine periodische Lösung in eine andere nicht überführen kann, wenn die Instabilität der beiden Lösungen verschiedenartig ist.

Die Frage, ob die Methode der kleinen Schwingungen und der charakteristischen Exponenten auch hinreichende Bedingungen für die Stabilität liefert, wurde von *Levi-Civita* untersucht[68]):

Betrachten wir bei einem dynamischen System von zwei Freiheitsgraden eine periodische Lösung, für die der charakteristische Exponent α rein imaginär und $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}$ kommensurabel mit der mittleren Bewegung $\frac{2\pi}{T}$ ist. Wir bezeichnen mit (p_1, p_2, q_1, q_2) die dieser Lösung entsprechenden Poincaréschen Normalvariablen (vgl. Nr. 5). Die Methode der kleinen Schwingungen gibt für die Nachbarbewegungen

65) Acta Math. 13, p. 25; Méth. Nouv, III, Ch. XXXIII.

66) Bull. Astr. 15 (1898), p. 289.

67) Paris C. R. 123 (1896), p. 915; Paris C. R. 124 (1897), p. 713; Méth. Nouv. III (1899), p. 249.

68) Paris C. R. 131 (1900), p. 170, 236; Annali di Math. 5 (1901), p. 221. Vgl. ferner *Cigala*, Annali di Mat. (3) 11, p. 67.

die Gleichungen

$$p_2 = c_{11}x + c_{21}y, \quad q_2 = c_{21}x + c_{22}y,$$

wo x und y Konstante, $c_{11}c_{21}c_{12}c_{22}$ periodische Funktionen der Zeit bedeuten. Wenn wir nun die Glieder 3. Ordnung in der Hamiltonschen Funktion nicht mehr vernachlässigen, so werden die Größen x, y Variable, welche bestimmten nach der Methode der Variation der Konstanten zu erhaltenden Differentialgleichungen genügen. Wenden wir die Transformation, der x und y bei einer vollständigen Umkreisung der periodischen Bahn unterworfen sind, hinreichend oft auf einen Punkt, dessen Koordinaten x, y sind, an, so wird der Punkt schließlich von dem Inneren in das Äußere eines gegebenen Kreises gelangen. Wir erhalten also das Resultat, daß die periodische Lösung, die zufolge der durch die Theorie der kleinen Schwingungen gelieferten Kriterien stabil zu sein schien, instabil wird, wenn man die Glieder höherer Ordnung berücksichtigt.[69])

8. **Die Stabilität der Lösungen definiert durch den Charakter der Bewegung für große Werte der Zeit.** Der Begriff der Stabilität wird oft in anderem Sinne gebraucht als in voriger Nummer. Eine Lösung des Dreikörperproblems wird häufig als *stabil* bezeichnet, wenn die gegenseitigen Entfernungen der Körper für alle Zeiten zwischen bestimmten Grenzen bleiben, so daß die Körper weder einander sehr nahe kommen, noch sich sehr weit voneinander entfernen. *Hill*[70]), *Bohlin*[71]) und *Darwin*[72]) haben gezeigt, daß bestimmte Bewegungstypen im restringierten Problem in diesem Sinne stabil sind (durch Abgrenzung der Gebiete, wo die Geschwindigkeit des Planetoiden imaginär werden müßte, um das Energieintegral zu befriedigen). Man benutzt ferner auch das Wort „Stabilität" bei Bewegungen von der Art, daß das betrachtete System unendlich oft eine Konfiguration annimmt, die der anfänglichen Konfiguration beliebig nahe kommt, wobei die dazwischen vorkommenden Oszillationen keiner Einschränkung unterworfen sind. *Poincaré* benutzt den Ausdruck *Stabilité à la Poisson*, um eine Bewegung letzterer Art zu charakterisieren. Ein von *Hadamard*[73]) herrührendes Theorem ist in der Hinsicht sehr interessant. Betrachten wir die Bewegung eines Punktes der Einheitsmasse unter dem Einfluß einer Kraft, die aus einem Potential V abgeleitet ist

69) Vgl. auch *Korteweg*, loc. cit.
70) Am. J. Math. 1 (1878), p. 5.
71) Acta Math. 10 (1887), p. 109.
72) Acta Math. 21 (1897), p. 99.
73) J. de Math. (5) 3 (1897), p. 331.

auf einer überall regulären Fläche, deren Flächenelement durch die Gleichung:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

gegeben ist. Bezeichnen wir mit J die Funktion

$$\Delta_1(V)\Delta_2(V) - \tfrac{1}{2}\nabla(V, \Delta_1(V)),$$

wo Δ_1, Δ_2 den ersten und zweiten Differentialparameter und ∇ den Differentialparameter der zwei Funktionen V, $\Delta_1(V)$ bedeutet.[74]) V sei auf der ganzen Fläche regulär und besitze nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima. Derjenige Teil der Fläche, wo J positiv ist, werde mit *Hadamard* als *anziehendes Gebiet* bezeichnet. Dann ist entweder derjenige Teil der Bahn, der im anziehenden Gebiet verläuft, der Länge nach größer als jede endliche Zahl, oder aber die Bahnkurve strebt asymptotisch einer instabilen Gleichgewichtslage zu. Im allgemeinen durchsetzen die Bahnkurven unendlich oft das anziehende Gebiet und haben dabei Stabilität à la Poisson.

Poincarés Untersuchungen[74a]) über die Kurven, die durch Differentialgleichungen definiert sind, haben gezeigt, daß in dem allgemeinen n-Körperproblem die Stabilität à la Poisson wesentlich von der Stabilität im Sinne von *Hill* abhängt. Die ganze Frage der Stabilität hat derselbe Autor wesentlich gefördert durch Einführung und Anwendung der *Integralinvarianten:*[75]) Die Existenz der asymptotischen Lösungen zeigt, daß es in dem restringierten Dreikörperproblem unendlich viele Partikularlösungen gibt, die instabil sind in Poissons Sinne. *Poincaré* beweist aber[76]), daß es auch unendlich viele in diesem Sinne stabile Lösungen gibt, und daß die instabilen die Ausnahme bilden und die stabilen die Regel sind in demselben Sinne, wie die rationalen Zahlen die Ausnahme bilden und die irrationalen die Regel sind. Mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anfangsbedingung zu einer instabilen Bewegung führt, ist gleich Null. Der Beweis dieser Sätze gelingt auf Grund des folgenden Theorems: Wenn sich der Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ so bewegt, daß die Koordinaten dieses Punktes stets endlich bleiben, und das Integral

$$\int dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n$$

invariant ist — eben eine *Integralinvariante* bildet, dann gibt es zu jedem noch so kleinen Raumteile v_0 Bahnkurven, die unendlich oft durch diesen Raumteil (v_0) hindurchgehen; in der Tat haben die-

74) Vgl. Bd. III 3, p. 123 dieser Enzyklopädie.

74a) J. de Math. (3) 7, p. 375; (3) 8, p. 251; (4) 1, p. 167; (4) 2, p. 151; (1881—86).

75) Vgl. Bd. II, p. 253 dieser Enzyklopädie (Artikel II A 4b, *Vessiot*).

76) Acta Math. 13 (1890), p. 67; Méth. Nouv. III (1899), p. 162.

jenigen Punkte von v_0, von denen eine Bahnkurve ausgeht, die diese Eigenschaft nicht besitzt, einen verschwindend kleinen Inhalt im Vergleich zu v_0.

Ähnlich wird gezeigt, daß, wenn die Energiekonstante im restringierten Dreikörperproblem zwischen bestimmten Grenzen bleibt, die Bewegung stabil ist, nicht nur im Sinne von *Hill* und *Bohlin*, sondern auch im Sinne von *Poisson*; wenigstens ist die Anzahl der Ausnahmefälle verschwindend gering gegenüber der Anzahl der stimmigen Fälle.

9. Die Lösung des Dreikörperproblems durch unendliche Reihen; die älteren Untersuchungen. Die Beobachtungen der Himmelskörper legen unmittelbar eine bestimmte Form der analytischen Ausdrücke nahe, durch welche ihre Bewegung darzustellen ist. Man fand, daß diese Darstellung jedenfalls so weit, wie unsere Nachrichten in die Vergangenheit zurückreichen, durch die Annahme ermöglicht wird, daß die Planeten in Ellipsen die Sonne umkreisen. Diese Ellipsen sind freilich nicht unveränderlich, sondern ihre Elemente (Exzentrizität usw.) variieren von Jahr zu Jahr. Manche dieser Ungleichungen oder Störungen sind periodisch, d. h. können durch Glieder von der Form $a \sin (bt + c)$ dargestellt werden, wo a, b, c Konstanten bedeuten; solche Störungen verursachen keine wesentlichen Änderungen in den Verhältnissen des Sonnensystems; andere Störungen, die durch Glieder von der Form $at + bt^2 + \cdots$ dargestellt werden, werden *säkulär* genannt; ihr Einfluß besteht in einer fortwährenden Änderung der Bahnen, die schließlich zu einer total verschiedenen Konfiguration führen könnte.

Die Methoden der klassischen Planetentheorie schließen sich diesen den Beobachtungen entnommenen Tatsachen an. In dem Sonnensystem überwiegt die Masse der Sonne alle Planeten; dementsprechend dient in der Planetentheorie als Prinzip der Annäherung die Voraussetzung, daß die Masse des einen Körpers groß gegen die Gesamtmasse der anderen Körper ist. Auf Grund dieses Prinzipes fand man, daß sich mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten[77]) analytische Ausdrücke finden lassen, die mit einer bestimmten Annäherung die Differentialgleichungen des Problems erfüllen und deren physikalische Deutung auf die oben erwähnten veränderlichen Ellipsen führt.

Frühzeitig zeigte sich aber, daß diese Art von Lösung einen bestimmten Nachteil hat. Die säkulären Störungen der Elemente führen nämlich zu Gliedern von der Form ct und $ct \sin bt$ in den Ausdrücken der Koordinaten. Diese Glieder wachsen nun mit t über alle Grenzen,

77) Vgl. den Artikel VI 2, 14 über die Planetentheorie.

und das macht es von vornherein unwahrscheinlich, daß die so erhaltenen Reihen für eine beliebig lange Zeit approximative Darstellungen der Bewegungen sind. Es entsteht naturgemäß die Frage nach dem wahren Charakter der säkulären Störungen, wenn die Differentialgleichungen nicht näherungsweise, sondern streng gelöst werden. Die erste Annäherung mag durch Glieder von der Form ct gegeben werden, wo c eine Konstante ist; doch besteht die Möglichkeit, daß dies nur das erste Glied der Entwicklung z. B. von $\frac{c}{m} \sin mt$ ist, wo m eine kleine Zahl bedeutet. Wenn dies der Fall ist, so sind die säkulären Glieder tatsächlich periodisch, nur von sehr langer Periode. Die Beantwortung dieser Frage hat eine fundamentale Wichtigkeit bei den Untersuchungen über die Stabilität des Sonnensystems und bei der Darstellung der Koordinaten für sehr lange Zeiten.

Die Sache wurde noch verwirrter durch den Umstand, daß man in der Mondtheorie Reihen von etwas verschiedener Bauart erhielt. Die Mondtheorie versucht — gleich der Planetentheorie — die Lösung des Dreikörperproblems durch unendliche Reihen; doch die Annäherungen gründen sich in diesem Fall auf die Annahme, daß zwei der Körper einander umkreisen, während sie gemeinsam um einen dritten Körper von überwiegender Masse rotieren; die Mondtheorie liefert also ebenfalls eine Lösung des Dreikörperproblems, deren Geltungsbereich aber von dem der Planetentheorie verschieden ist.

Diese theoretischen Schwierigkeiten, die der klassischen Planeten- und Mondtheorie wenigstens teilweise im Wege standen, werden durch die Auffindung von Lösungen des Dreikörperproblems in rein trigonometrischer Form bewältigt; wir gehen jetzt zu der Theorie dieser Reihen über.

10. Die Lösung des Problems mit Hilfe der Berührungstransformationen. Die von den verschiedenen Autoren zur Lösung des Dreikörperproblems angewandten Methoden zerfallen in zwei Klassen; die erste Klasse der Methoden beruht auf dem Prinzip der Variation der Konstanten; die zweite Klasse von Methoden beruht auf dem Ansatz von Reihen bestimmter Bauart und der der sukzessiven Bestimmung ihrer Glieder wachsender Ordnung. Wir wollen zuerst zeigen[78]), wie

78) Diese Methode ist nicht wesentlich von der Delaunayschen Methode verschieden (Théorie de la lune, Paris 1860—67); *Delaunay* selbst wandte seine Methode nur auf die Mondbewegung an, die Anwendung auf das allgemeine Dreikörperproblem rührt von *Tisserand* her (Obs. de Paris ann., mém. 18 (1885)); vgl. auch *Hill*, Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 205—242. Die hier gegebene Darstellung rührt von *Whittaker* her (Proc. Lond. Math. Soc. 1901). Die Methode von *Newcomb* (Smithsonian Contributions 1874, p. 1), der zuerst das Theorem

man zu einer Methode der ersten Klasse kommt, welche Reihen liefert, in denen die Zeit nur als Argument von trigonometrischen Funktionen auftritt.

Zum Ausgangspunkte wählen wir die Bewegungsgleichungen in der folgenden Form (Nr. 1):

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_1^2 + \frac{p_3^2}{q_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu}\left(p_2^2 + \frac{p_4^2}{q_2^2}\right) - \frac{m_1 m_2}{q_3}$$
$$- m_1 m_3 \left\{q_3^2 - \frac{2 m_2 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4}\sin q_3 \sin q_4\right) + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} q_1^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$- m_2 m_3 \left\{q_3^2 + \frac{2 m_1 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2 p_3 p_4}\sin q_3 \sin q_4\right) + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} q_1^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt ist. Wir wenden auf dieses Gleichungssystem eine Berührungstransformation an, die durch die Gleichungen:

$$p_\nu = \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_\nu}, \quad p_\nu' = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial q_\nu'} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

definiert ist, wobei

$$\bar{w} = q_1' q_3 + q_2' q_4 + \int^{q_1} \left\{-\frac{\mu^2 m_1^2 m_2^2}{q_3'^2} + \frac{2\mu m_1 m_2}{q_1} - \frac{q_1'^2}{q_1^2}\right\}^{\frac{1}{2}} dq_1,$$
$$+ \int^{q_2} \left\{-\frac{\mu'^2 m_1^2 m_3^2}{q_4'^2} + \frac{2\mu' m_1 m_3}{q_2} - \frac{q_2'^2}{q_2^2}\right\}^{\frac{1}{2}} dq_2$$

ist. Man sieht leicht ein, daß die Funktion H in eine periodische Funktion der neuen Variablen p_1', p_2', p_3', p_4' übergeht; die neuen Bewegungsgleichungen können auf die Form

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

gebracht werden, wobei wir die Akzente bei den neuen Veränderlichen weggelassen haben und H durch eine unendliche Reihe von der Form:

$$H = a_{0000} + \sum a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4)$$

dargestellt ist; die Größen a hängen nur von q_1, q_2, q_3, q_4 ab, und

---

über die Lösbarkeit des Dreikörperproblems mit Hilfe rein trigonometrischer Reihen aussprach, hängt mit der Methode der Variation der Konstanten eng zusammen und ist eine Erweiterung der klassischen Planetentheorie.

die Summation ist über alle positive und negative ganzzahlige Werte von n_1, n_2, n_3, n_4 zu erstrecken, wobei nur die Kombination

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$$

auszuschließen ist. Wenn m_2 und m_3 kleine Größen sind im Vergleich mit m_1, so überwiegt das konstante Glied in der Entwicklung von H die periodischen Glieder; eine approximative Integration zeigt, daß sich in diesem Falle die Größen $q_1', q_2', q_3', q_4', p_1', p_2'$ nur sehr wenig ändern, und die Größen p_3', p_4' beinahe proportional mit der Zeit sind.

Betrachten wir nun ein periodisches Glied von H, das die anderen periodischen Glieder überwiegt, etwa

$$a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_2 + n_4 p_4);$$

wir setzen

$$H = a_{0000} + a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos\theta + R,$$

wobei θ zur Abkürzung für $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4$ steht und R die Summe der anderen periodischen Glieder bedeutet. Wenden wir auf das Gleichungssystem die durch die Gleichungen

$$p_\nu' = \frac{\partial w}{\partial q_\nu'}, \quad q_\nu = \frac{\partial w}{\partial p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

definierte Berührungstransformation an, wobei

$$w = q_1' p_1 + q_2' p_2 + q_3' p_3 + q_4' p_4 + f(q_1', q_2', q_3', q_4', \theta)$$

ist, und die Funktion f so gewählt ist, daß θ in dem Ausdrucke

$$a_{0000}\left(q_1' + n_1 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad q_2' + n_2 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad q_3' + n_3 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad q_4' + n_4 \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$
$$+ a_{n_1 n_2 n_3 n_4}\left(q_1' + n_1 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad q_2' + n_2 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad q_3' + n_3 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad q_4' + n_4 \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \cos\theta$$

gar nicht mehr vorkommt, daß also dieser Ausdruck nur von q_1', q_2', q_3', q_4' abhängt; diese Funktion von q_1', q_2', q_3', q_4' — wir bezeichnen sie mit $a'_{0000}(q_1', q_2', q_3', q_4')$ — ist durch die Bedingung bestimmt, daß, wenn man aus der Gleichung

$$a_{0000} + a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos\theta = a'_{0000}$$

die Funktion $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ berechnet und in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = c_0(q_1', q_2', q_3', q_4', a'_{0000}) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(q_1', q_2', q_3', q_4', a'_{0000}) \cos k\theta$$

darstellt, das Glied c_0 identisch verschwindet.

Die soeben definierte Berührungstransformation kann also explizite

durch Gleichungen von der Form:

$$p_\nu = p_\nu' + \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sin k\theta', \qquad (\nu = 1,2,3,4)$$
$$q_\nu = q_\nu' + p_\nu \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\theta'$$

dargestellt werden, wobei $\theta' = n_1 p_1' + n_2 p_2' + n_3 p_3' + n_4 p_4'$ gesetzt ist. Durch Anwendung dieser Berührungstransformation gehen die Bewegungsgleichungen in das neue Gleichungssystem

$$\frac{dq_\nu'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu'}, \quad \frac{dp_\nu'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu'} \qquad (\nu = 1,2,3,4)$$

über, und H läßt sich in eine unendliche Reihe von der Form

$$H = a_{0000}' + \sum a_{m_1 m_2 m_3 m_4}' \cos (m_1 p_1' + m_2 p_2' + m_3 p_3' + m_4 p_4')$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten a' nur von q_1', q_2', q_3', q_4' abhängen. Das neue Gleichungssystem hat dieselbe Form wie das alte; der einzige Unterschied besteht darin, daß das neue konstante Glied a_{0000}' zwei alte Glieder repräsentiert, nämlich das ursprüngliche konstante Glied a_{0000} und gleichzeitig das alte periodische Glied

$$a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4).$$

Der Effekt der Transformation ist also der, daß das konstante Glied von H noch überwiegender wird wie früher, und daß den periodischen Gliedern in H eine noch unwesentlichere Rolle zukommt. Wir wählen jetzt wiederum eines der wesentlichsten periodischen Glieder in der neuen Entwicklung von H heraus und vereinigen es wieder mit dem konstanten Glied durch Anwendung einer Berührungstransformation von der soeben beschriebenen Art. Auf diese Weise können wir sukzessive alle wesentlichen periodischen Glieder von H mit dem konstanten Glied vereinigen, und das Überwiegen des konstanten Gliedes über die periodischen Glieder wird bei jedem Schritt bedeutender; schließlich werden die periodischen Glieder in H so unwesentlich werden, daß man sie vernachlässigen kann. Wir bezeichnen mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ die Variablen, zu denen wir nach diesen Transformationen gelangen; die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{d\alpha_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_\nu}, \quad \frac{d\beta_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_\nu} \qquad (\nu = 1,2,3,4),$$

wobei H nur von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ abhängt; es sind daher $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ konstante und $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ lineare Funktionen der Zeit:

$$\beta_\nu = \lambda_\nu t + \varepsilon_3 \qquad (\nu = 1,2,3,4);$$

die Integrationskonstanten sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

Durch die sukzessiven Transformationen, die die ursprünglichen Variablen des Dreikörperproblems in die Variablen α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4 überführen, sind folglich auch diese ursprünglichen Koordinaten als Funktionen der Zeit bestimmt; die Form der Transformationen zeigt, daß die Variablen in dem ursprünglichen kanonischen System 8. Ordnung durch Ausdrücke von der Form

$$\left.\begin{aligned} q_\nu &= c_\nu + \sum a_{m_1 m_2 m_3 m_4} \cos(m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 + m_4\beta_4) \\ p_\nu &= \beta_\nu + \sum b_{m_1 m_2 m_3 m_4} \sin(m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 + m_4\beta_4) \end{aligned}\right\} (\nu = 1,2,3,4)$$

dargestellt sind, wobei die Größen a, b, c Funktionen von α_1, α_2, α_3, α_4 sind und die Summation über alle ganzzahligen Werte von m_1, m_2, m_3, m_4 zu erstrecken ist, mit Ausnahme der Kombination

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Transformation in Nr. 1 sehen wir, daß in dem Dreikörperproblem die Koordinaten der Massenpunkte durch Ausdrücke von der Form

$$\sum a_{n_1 n_2 n_3 n_4 n_5} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + n_3\beta_3 + n_4\beta_4 + n_5\beta_5)$$

dargestellt werden können, wobei β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 lineare Funktionen der Zeit sind und die a Konstanten bedeuten; die Summation ist über alle ganzzahlige Werte von n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 zu erstrecken. Bei Bewegungen vom Typus der Planetenbewegungen, wo die Massen m_2 und m_3 verglichen mit der Sonnenmasse m_1 kleine Größen sind, werden demzufolge auch drei von den Winkeln β — etwa β_3, β_4, β_5 — sehr langsam variabel (entsprechend den langen Umläufen der Perihele und Knoten im Planetensystem) und die anderen beiden Winkel, β_1 und β_2, repräsentieren angenähert die mittleren Anomalien der Planeten m_2 und m_3 bei ihrer Bewegung um m_1.

Im Lichte dieser Ergebnisse klären sich die Begriffe „säkulare Glieder" und „periodische Glieder" der alten Theorie folgendermaßen: In den soeben abgeleiteten Reihen kommen Glieder vor, deren Argumente nur von den langsam variierenden Winkeln $\beta_3, \beta_4, \beta_5$ abhängen; diese Glieder entsprechen den säkularen Gliedern. Die Glieder, die eine oder beide der rasch veränderlichen Winkel β_1, β_2 enthalten, stellen die sog. periodischen Störungen dar.[79])

Gyldén faßte die säkularen Glieder etwas anders auf.[80]) Denken wir an irgendein Glied der Störungsfunktion; dieses Glied gibt Anlaß

79) Vgl. *Hill*, Astron. Journ. 22 (1902), p. 183.

80) Traité des orbites absolues I (1893). Vgl. *Hill*, Astron. Journ. 25 (1905), p. 1; *Poincaré*, Acta Math. 29 (1905), p. 235.

zu einem entsprechenden Glied in der Entwicklung der Koordinaten. Wenn bei der Integration der Koeffizient dieses Gliedes durch eine kleine Größe von der Größenordnung der störenden Massen μ dividiert wird, so daß der Einfluß dieses Gliedes in der endgültigen Entwicklung der Koordinaten viel wesentlicher ist als in der Störungsfunktion, so wird das Glied ein *elementares Glied* genannt. Diese elementaren Glieder geben tatsächlich die säkularen Glieder; denn wenn das Argument eines Gliedes nur die langsam variierenden Winkel β_3, β_4, β_5 enthält, so ist der Koeffizient von t in diesem Argument eine kleine Größe von der Ordnung μ; bei der Integration wird aber dieses Glied durch diesen kleinen Koeffizienten dividiert, und daher fällt dieses Glied in die Klasse der Glieder, die soeben als elementare Glieder definiert wurden.

11. Die Lösung des Problems durch sukzessive Bildung der Glieder wachsender Ordnung der Reihe. Wir wollen jetzt ein Beispiel für die zweite Art von Verfahren geben, die Lösung des Problems in der Form einer trigonometrischen Reihe zu erhalten. Die Methode, die wir hier entwickeln, ist die von *Lindstedt*[81]) und *Poincaré*.[82])

Betrachten wir das restringierte Dreikörperproblem; wir können das Gleichungssystem auf die Form

$$\frac{dq_\nu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2)$$

bringen (Nr. 2). Diejenigen Glieder von H, die von der kleinen Größe μ unabhängig sind, bezeichnen wir mit H_0; es ist

$$H_0 = \frac{1}{2q_1^2} + nq_2 .$$

Die Funktion $H - H_0$, die den Faktor μ besitzt, ist eine periodische Funktion von p_1 und p_2; wir bezeichnen sie mit μH_1. Für $\mu = 0$ sind q_1 und q_2 konstant. Wenn die kleine Größe μ von Null ver-

---

81) Paris C. R. 47 (1883), p. 1276, 1353; Astr. Nachr. 107 (1883), p. 197; Annales de l'École Normale (3) 1 (1884), p. 85. Eine Lücke in *Lindstedts* Arbeit wurde von *Poincaré* ausgefüllt, Bull. Astr. 3 (1886), p. 57, der durch eine Anwendung des Greenschen Theorems bewies, daß in jeder Lindstedtschen Annäherung nur ein säkulares Glied auftritt, und daß man dieses stets wegschaffen kann.

82) Acta Math. 13, p. 1; Méth. Nouv. II. *H. v. Zeipel*, Bihang till K. Sv. Vet.-Ak. Handl. 24 (1898), Nr. 8, leitet auf eine neue Weise die Lindstedtschen Reihen ab und erhält die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Existenz; er zeigt ferner (ibid. 26 (1901), Nr. 8) daß die Lindstedtschen Reihen für die Bewegung eines kleinen Planeten nicht existieren, wenn die Neigung der Bahnebene des kleinen Planeten eine bestimmte Grenze übersteigt.

schieden ist, und wenn ξ_1 und ξ_2 die Anfangswerte von q_1 und q_2 bezeichnen, so sind die Größen $q_1 - \xi_1$ und $q_2 - \xi_2$ von derselben Größenordnung wie μ. Setzen wir

$$n_1 = -\frac{\partial H_0(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2}, \quad n_2 = -\frac{\partial H_0(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2},$$

so sind die Größen

$$-\frac{\partial H_0(q_1, q_2)}{\partial q_1} - n_1 \quad \text{und} \quad -\frac{\partial H_0(q_1, q_2)}{\partial q_2} - n_2$$

von derselben Größenordnung wie μ; wir können also schreiben

$$-\frac{\partial H_0}{\partial q_1} - n_1 = \mu \varphi_1(q_1, q_2), \quad -\frac{\partial H_0}{\partial q_2} - n_2 = \mu \varphi_2(q_1, q_2).$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich auf die folgende Form bringen:

$$\frac{dq_1}{dt} = \mu \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \qquad \frac{dq_2}{dt} = \mu \frac{\partial H_1}{\partial p_2},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{\partial H_1}{\partial q_1}\right), \quad \frac{dp_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right).$$

Fassen wir jetzt die Variablen q_1, q_2, p_1, p_2, die wir bisher als Funktionen von t aufgefaßt haben, als Funktionen der zwei Veränderlichen $\omega_1 = \lambda_1 t + \varepsilon_1$, $\omega_2 = \lambda_2 t + \varepsilon_2$ auf, wo λ_1, λ_2 zwei Konstanten bedeuten, die wir später bestimmen werden, und ε_1, ε_2 Integrationskonstanten sind. Unser Gleichungssystem bekommt die Form:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \frac{\partial q_1}{\partial \omega_1} + \lambda_2 \frac{\partial q_1}{\partial \omega_2} - \mu \frac{\partial H_1}{\partial p_1} = 0,\\
&\lambda_1 \frac{\partial q_2}{\partial \omega_1} + \lambda_2 \frac{\partial q_2}{\partial \omega_2} - \mu \frac{\partial H_1}{\partial p_2} = 0,\\
&\lambda_1 \frac{\partial p_1}{\partial \omega_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_1}{\partial \omega_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \frac{\partial H_1}{\partial q_1}\right) = 0,\\
&\lambda_1 \frac{\partial p_2}{\partial \omega_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_2}{\partial \omega_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Diese Größen können in Potenzreihen nach μ entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
q_1 &= {}_0q_1 + \mu_1 q_1 + \mu^2{}_2q_1 + \mu^3{}_3q_1 + \cdots,\\
p_1 - \omega_1 &= \mu_1 p_1 + \mu^2{}_2p_1 + \cdots,\\
\lambda_1 &= {}_0\lambda_1 + \mu_1\lambda_1 + \mu^2{}_2\lambda_1 + \cdots,\\
q_2 &= {}_0q_2 + \mu_1 q_2 + \mu^2{}_2q_2 + \cdots,\\
p_2 - \omega_2 &= \mu_1 p_2 + \mu^2{}_2p_2 + \cdots,\\
\lambda_2 &= {}_0\lambda_2 + \mu_1\lambda_1 + \mu^2{}_2\lambda_2 + \cdots,
\end{aligned}$$

wo die Koeffizienten ${}_k\lambda_i$ Konstante und die Ausdrücke ${}_kp_i$, ${}_kq_i$ nach den Vielfachen von ω_1 und ω_2 geordnete trigonometrische Reihen be-

deuten. Setzen wir diese Entwicklungen von $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ in die linken Seiten der Gleichungen (1) ein, so erhalten wir vier Potenzreihen von μ, deren Koeffizienten trigonometrische Reihen von ω_1 und ω_2 sind; wir bezeichnen diese Funktionen mit $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1', \Phi_2'$. —

Das Theorem von *Lindstedt* lautet folgendermaßen: *Wie groß auch die ganze Zahl k gewählt ist, es ist stets möglich, die Konstanten*

$$ {}_0\lambda_1, {}_1\lambda_1, \ldots, {}_k\lambda_1, {}_0\lambda_2, {}_1\lambda_2, \ldots, {}_k\lambda_2 $$

und die trigonometrischen Reihen

$$ {}_0q_1, \ldots, {}_kq_1, {}_0q_2, \ldots, {}_kq_2, {}_1p_1, \ldots, {}_kp_1, {}_1p_2, \ldots, {}_kp_2 $$

derart zu bestimmen, daß in der Entwicklung von $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1', \Phi_2'$ das von μ freie Glied und die Koeffizienten derjenigen Glieder, deren Ordnung in bezug auf μ nicht größer als k ist, verschwinden; mit anderen Worten, daß die Bewegungsgleichungen bis auf Glieder $(k+1)^{ter}$ Ordnung in μ befriedigt werden.

Wir finden zuerst

$$ {}_0\lambda_1 = n_1, \quad {}_0\lambda_2 = n_0, \quad {}_0q_1 = \xi_1 + y_1, \quad {}_0q_2 = \xi_1 + y_2, $$

wobei y_1 und y_2 Integrationskonstanten bedeuten, von denen wir annehmen, daß sie von der Größenordnung von μ sind.

Nehmen wir an, wir hätten die Werte

$$ {}_0\lambda_i, {}_1\lambda_i, \ldots, {}_{k-1}\lambda_i, \quad {}_0q_i, \ldots, {}_{k-1}q_i, \quad {}_1p_i, \ldots, {}_{k-1}p_i \qquad (i=1,2) $$

gefunden, und suchen ${}_k\lambda_1, {}_k\lambda_2, {}_kq_1, {}_kq_2, {}_kp_1, {}_kp_2$ zu bestimmen. Diese Größen sind aus der Bedingung zu bestimmen, daß in $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1', \Phi_2'$ der Koeffizient von μ^k verschwinden soll; wir erhalten also ein Gleichungssystem, das wir in der folgenden Form schreiben können:

$$ n_1 \frac{\partial_k q_1}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k q_1}{\partial \omega_2} = X_1, \quad n_1 \frac{\partial_k q_2}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k q_2}{\partial \omega_2} = X_2, $$

$$ n_1 \frac{\partial_k p_1}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k p_1}{\partial \omega_2} + {}_k\lambda_1 = Y_1, \quad n_1 \frac{\partial_k p_2}{\partial \omega_1} + n_2 \frac{\partial_k p_2}{\partial \omega_2} + {}_k\lambda_2 = Y_2, $$

wobei X_1, X_2, Y_1, Y_2 bekannte trigonometrische Reihen bedeuten. Die Auflösung dieser Gleichungen ist möglich, wenn

1. das Verhältnis n_1/n_2 inkommensurabel ist, was wir annehmen wollen,

2. die von ω_1 und ω_2 unabhängigen Glieder in den trigonometrischen Reihen X_1, X_2 verschwinden; diese Tatsache kann mit Hilfe der Integralinvarianten bewiesen werden,

3. die von ω_1 und ω_2 unabhängigen Glieder in den trigonometrischen Reihen Y_1, Y_2 mit ${}_k\lambda_1$ bzw. ${}_k\lambda_2$ identisch sind; wir können diese Bedingung erfüllen, indem wir ${}_k\lambda_1$ und ${}_k\lambda_2$ passend wählen. Die Auf-

lösung dieser Gleichungen ist also stets möglich, womit das Theorem von *Lindstedt* bewiesen ist.

Das allgemeine Dreikörperproblem kann in ähnlicher Weise behandelt werden; wir gelangen zu demselben Resultat wie in Nr. 10 mit dem Vorteil, daß die Entwickelbarkeit nach Potenzen von μ anschaulicher in Evidenz gesetzt ist. Wir können also sagen, daß die Differentialgleichungen für die Koordinaten im Dreikörperproblem formal befriedigt werden durch unendliche Reihen, die nach Potenzen des kleinen Parameters μ fortschreiten, der von der Ordnung der kleinen Massen ist; die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind unendliche Reihen, deren Glieder Sinus und Kosinus von linearen Funktionen der fünf Argumente

$$\beta_1 = \lambda_1 t + \varepsilon_1,\ \beta_2 = \lambda_2 t + \varepsilon_2,\ \beta_3 = \lambda_3 t + \varepsilon_3,\ \beta_4 = \lambda_4 t + \varepsilon_4,\ \beta_5 = \lambda_5 t + \varepsilon_5$$

sind (ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 sind willkürliche Konstanten) multipliziert mit von den anderen Integrationskonstanten abhängigen Konstanten. Zwei der Größen β, etwa β_1 und β_2, sind wieder näherungsweise gleich den mittleren Anomalien der beiden kleinen Massen in ihren instantanen Bahnen um die große Masse, während die anderen drei Argumente β_3, β_4, β_5 nur langsam veränderlich[83]) sind.

12. Die Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik. Wir haben gesehen, daß man die Differentialgleichungen für die Koordinaten im Dreikörperproblem formal erfüllen kann durch Reihen von der Form

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots,$$

wobei $f_0, f_1, f_2, \ldots$ selbst unendliche Reihen von der Form

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} c_{n_1, \ldots, n_k} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (n_1\beta_1 + \cdots + n_k\beta_k)$$

sind und

$$\beta_\nu = \lambda_\nu t + \varepsilon_\nu$$

ist; wir untersuchen jetzt die Konvergenz dieser Reihen. Diese Untersuchung zerfällt natürlich in zwei Teile: 1. Die Konvergenztheorie der Reihen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ und 2. die Konvergenztheorie der vollständigen Reihe $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots$.

Wir behandeln zuerst die Reihen

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} c_{n_1, \ldots, n_k} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (n_1\beta_1 + \cdots + n_k\beta_k).$$

---

83) *Poincaré* gab eine andere Ableitung dieser Reihen, Bull. Astr. 14 (1897), p. 241.

Aus den Gleichungen, mit deren Hilfe wir sukzessive die Funktionen f_r nach der Lindstedtschen Methode berechnet haben, sehen wir, daß diese Reihen aus anderen bekannten Reihen (die sich schließlich aus der Störungsfunktion ergeben) durch Integration nach der Zeit abgeleitet wurden. Dabei erhält der Koeffizient $c_{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots, n_k}$ den Divisor $n_1\lambda_1 + \cdots + n_k\lambda_k$. Da die Konvergenz der Entwicklung der Störungsfunktion denselben Charakter hat, wie die einer Potenzreihe von mehreren Variablen, in der der Koeffizient des Gliedes mit dem Argument $(n_1\beta_1 + \cdots + n_k\beta_k)$ in bezug auf die Variabeln von den Ordnungen $|n_1|, |n_2|, \ldots, |n_k|$ ist, so hat die Konvergenz der betrachteten Reihen denselben Charakter wie die der Reihe

$$\sum_{n_1, \ldots, n_k = -\infty}^{\infty} \frac{p^{|n_1|} q^{|n_2|} \ldots s^{|n_k|}}{n_1\lambda_1 + \cdots + n_k\lambda_k}.$$

Nehmen wir der Einfachheit halber $k = 2$, so können wir die Frage auf die Untersuchung der Konvergenz der Reihen von dem Typus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^m q^n}{m - nA}$$

einschränken, wo A die positive Zahl $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$ ist.

Der Wert der Konstante A hängt von den willkürlichen Integrationskonstanten ab; wenn A eine rationale Zahl ist, so ist die Reihe offenbar divergent, da die Glieder, für die $\frac{m}{n} = A$ ist, unendlich werden. Wenn A eine ganze algebraische Irrationalität ist[84]), d. h. die Wurzel einer irreduziblen algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten

$$A^s + G_1 A^{s-1} + \cdots + G_s = 0,$$

so ist die Reihe konvergent, wie wir sofort zeigen werden. Zu diesem Zweck multiplizieren wir Zähler und Nenner jedes Gliedes der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^m q^n}{m - nA}$$

mit dem Produkt

$$(m - nA')(m - nA'') \ldots,$$

wobei $A', A'', \ldots$ die anderen Wurzeln der Gleichung sind. Der Nenner wird ein Polynom in m und n mit ganzzahligen Koeffizienten; und da er nicht verschwinden kann, muß er mindestens gleich 1

84) Diese Bemerkung rührt von *Bruns* her, Astr. Nachr. 109 (1884), p. 215.

sein. Der Zähler ist ein Polynom $(s-1)^{\text{ten}}$ Grades in m und n; man sieht unmittelbar, daß in diesem Falle die Reihe konvergiert.

Es ist übrigens leicht zu zeigen[85]), daß es unendlich viele irrationale Werte von A gibt, für die die Reihe divergiert; man sieht auch, daß in jedem noch so kleinen Intervall unendlich viele Werte von A existieren, wo die Reihe konvergiert, und unendlich viele, wo die Reihe divergiert. *Es liegen also in jedem noch so kleinen Gebiete der reellen Variablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ unendlich viele Wertsysteme dieser Konstanten, für die die Teilreihen von f konvergieren, und unendlich viele Wertsysteme, für die sie divergieren.*

Die Folgen der Divergenz dieser Reihen kann man indessen umgehen durch Anwendung eines Kunstgriffes, der auf der Willkürlichkeit in der Wahl der Konstanten μ beruht und vermöge dessen man erreichen kann, daß jede der Teilsummen nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält. Man kann dies z. B. für ein Glied von f_l, das $p^m q^n$ als Faktor besitzt (p, q sind kleine Größen von der Größenordnung der Exzentrizitäten oder Neigungen der Bahn), dadurch erreichen, daß wir seinen Koeffizienten als von der Größenordnung ν^{l+m+n} ansehen in bezug auf einen neuen Parameter ν.

Trotzdem wird natürlich die Schnelligkeit der Konvergenz der Reihen der Himmelsmechanik immer leiden unter dem Auftreten der kleinen Divisoren bei den Integrationen, die von der näherungsweisen Kommensurabilität der Größen λ herrühren. Die Glieder, in denen diese kleinen Divisoren auftreten, werden von *Gyldén charakteristische Glieder* genannt; sie werden in vielen Fällen im Planetensystem sehr bedeutend. So hat in der Theorie von Jupiter und Saturn eine Ungleichung, deren Periode 900 Jahre ist, einen beträchtlichen Koeffizienten, der von dem kleinen Divisor $5n - 2n'$ herrührt, wo n und n' die mittleren Bewegungen von Jupiter und Saturn bedeuten. Noch bedeutender werden die charakteristischen Glieder bei den kleinen Planeten vom Hekubatypus. Methoden zur Beseitigung der Schwierigkeiten, die von dem Auftreten der charakteristischen Glieder herrühren, sind von vielen Seiten entwickelt worden.[86])

---

85) *Bruns* loc. cit.

86) Vgl. den Artikel über kleine Planeten. Wir erwähnen an dieser Stelle die Methode von *Bohlin,* Bihang till K. Sv. Vet.-Ak. Handlingar 14 (1888), Nr. 5; Astr. Nachr. 121 (1889), p. 17, der durch Anwendung der Jacobi-Hamiltonschen Theorie Reihen erhielt, bei denen die Divisoren ganze Zahlen sind; *Bohlins* Arbeiten wurden von *Poincaré*, Méth. Nouv. II, Ch. 19—21 weitergeführt. Vgl. auch *Charlier*, Archiv för Math. 1 (1904), p. 449, der auch die Jacobi-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung benutzt und zeigt, daß bei jeder Wahl der Inte-

Nachdem wir nun die Konvergenz der Partialsummen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ untersucht haben, wenden wir uns zur Diskussion der Reihe vom Typus

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots,$$

die die Koordinaten im Dreikörperproblem darstellt. Es wurde von *Poincaré* gezeigt[87]), daß diese Reihe nicht gleichmäßig konvergent sein kann für alle Werte der Zeit und für alle Werte der Integrationskonstanten, die in einem endlichen Gebiet liegen. Nehmen wir nämlich an, die Reihe wäre gleichmäßig konvergent; wir könnten dann aus ihr periodische Lösungen ableiten, wenn wir den Integrationskonstanten solche Werte erteilen, daß die Größen λ kommensurabel ausfallen. Die charakteristischen Exponenten dieser periodischen Lösung werden gefunden durch Differentiation der Reihe nach den willkürlichen Konstanten; bezeichnen wir mit x eine der Koordinaten, mit ω eine der willkürlichen Konstanten, so müßten wir erhalten:

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \sum_{\nu} e^{\alpha_\nu t} \theta_\nu(t),$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung bedeuten, und $\theta_\nu(t)$ periodische Funktionen der Zeit sind, deren Periode mit der der Lösung übereinstimmt. Nun können aber aus der Differentiation unsrer trigonometrischen Entwicklungen niemals Exponentialgrößen $e^{\alpha_\nu t}$ entstehen, deren Periode von der Periode der Ausgangslösung verschieden wäre. Daraus würde aber folgen, daß alle charakteristischen Exponenten der periodischen Lösung verschwinden; da dies unmöglich ist[88]), erhalten wir das Theorem, daß die Reihe nicht gleichmäßig konvergent sein kann für alle Werte der Zeit und für alle Werte der Integrationskonstanten in einem endlichen Gebiet. *Charlier*[89]) hat die Konvergenz der Reihe

$$f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots$$

direkt untersucht mit Hilfe eines Theorems von *Cauchy* und *Poincaré*, das folgendermaßen lautet:[90])

Betrachten wir die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

grationskonstanten die Größe λ so bestimmt werden kann, daß die Reihe konvergiert.

87) Acta Math. 13 (1890), p. 249; Méth. Nouv. II, Ch. 13, vgl. auch *Schwarzschild*, Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 765.

88) *Poincaré*, loc. cit.

89) Bull. Astr. 19 (1902), p. 380.

90) Méc. Cél. I, p. 58.

und sei

$$x_i = \theta_i(t, \mu)$$

eine Lösung dieser Gleichungen, bei der die Anfangswerte von $x_1, \ldots, x_n$ verschwinden für $t = 0$. Nehmen wir an, daß für alle Werte von t zwischen 0 und t_0 die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in Potenzreihen nach μ und $x_i - \theta_i(t, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ entwickelbar sind, deren Koeffizienten noch von t abhängen. Es lassen sich dann die Funktionen

$$\theta_1(t, \mu), \ldots, \theta_n(t, \mu)$$

für alle Werte von t zwischen 0 und t_0 in eine nach den Potenzen von μ fortschreitende Reihe entwickeln für hinreichend kleine Werte von $|\mu|$.

Charlier zeigt nun, daß der Radius dieser Potenzreihe in μ gegen Null konvergiert, wenn t_0 über alle Grenzen wächst; wenden wir dieses Theorem auf die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems an, so erhalten wir das Resultat, daß die Entwicklungen der Lösungen des Dreikörperproblems nach Potenzen der störenden Massen zwar konvergent sind, doch die Konvergenz ist keine gleichmäßige, da der Konvergenzradius (in den Massen) eine Funktion der Zeit ist.

Ein Fall, wo die Reihen, die die Lösung des Dreikörperproblems darstellen, nach einer bestimmten Zeit sicherlich aufhören müssen zu konvergieren, ist der Fall des Zusammenstoßes zwischen zweien der drei Körper. *Painlevé*[91]) deutete an, daß die Anfangsbedingungen, die einem Zusammenstoß entsprechen, zwei verschiedene analytische Bedingungen erfüllen müssen, die im Falle des ebenen Dreikörperproblems in eine einzige Bedingung übergehen; *Painlevé* zeigte auch[92]), daß diese Bedingungen nicht algebraisch sein können. *Levi-Civita*[93]) hat den Charakter dieser Bedingungen im Falle des restringierten Problems näher untersucht und gezeigt, wie man sie finden kann. *Bisconcini*[94]) erweiterte Levi-Civitas Resultate auf das allgemeine Dreikörperproblem und verifizierte die Andeutungen von *Painlevé*.

13. Eigenschaften der Koeffizienten besonderer Glieder in den Reihen der Himmelsmechanik. Der Unterschied zwischen den säku-

91) Paris C. R. 123 (1896), p. 871; Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles. Paris 1897, p. 586.

92) Paris C. R. 125 (1897), p. 1078.

93) Annali di Mat. 9 (1903), p. 1; Paris C. R. 136 (1903), p. 82, 221. Acta Math. 30 (1906), p. 305.

94) Rend. della R. acc. d. lincei (5) 12 (1903), p. 552; Acta Math. 30 (1906), p. 49. Vgl. ferner *Sundman*, Acta Soc. Scient. Fenn. 34 (1907), Nr. 6; *Block*, Stockholm Arkiv för Mat. 5 (1908), Nr. 9: Medd. från Lunds Obs. 2, Nr. 6.

laren und periodischen Störungen der elliptischen Elemente der Planetenbahn wurde schon erläutert. *Laplace*[95]) zeigte, daß eins dieser Elemente — *die mittlere Entfernung* oder *die halbe große Achse der Bahn* — keine säkularen Störungen erfährt, wenn man diejenigen Glieder vernachlässigt, die von höherer als 1. Ordnung in den Massen oder von höherer als 2. Ordnung in den Exzentrizitäten und Neigungen sind; *Lagrange*[96]) wies nach, daß das Resultat richtig bleibt, wenn alle Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen mitgenommen werden; *Poisson*[97]) bewies schließlich die Richtigkeit des Theorems auch für den Fall, daß die Quadrate der Massen mitgenommen werden. — *Mathieu*[98]) erweiterte diese Untersuchungen in der Weise, daß er auch Glieder 3. Ordnung in den Massen berücksichtigte. Mit Hilfe der Jacobischen Transformation ersetzte er die Sonne und die Planeten durch drei fiktive Planeten, die sich um ein festes Zentrum in Bahnen bewegen, die homothetisch mit den wirklichen Bahnen sind. Er zeigte durch Entwicklung der Störungsfunktion bis zu den Gliedern 3. Ordnung in den Massen, daß die reziproken mittleren Entfernungen keine säkularen Störungen dieser Ordnung erfahren. *Poisson*[99]) glaubte bereits ein Resultat bezüglich der Nichtexistenz säkularer Störungen 3. Ordnung in den mittleren Entfernungen erhalten zu haben. *Haretu*[100]) zeigte jedoch, daß *Poisson* bestimmte Glieder dieser Klasse weggelassen hat, und bewies, daß diese Glieder tatsächlich eine säkulare Störung zur Folge haben; daher haftet das Theorem über die Invariabilität der großen Achsen an den Gliedern 2. Ordnung in den störenden Massen.

Eginitis zeigte[101]), daß die säkularen Störungen 3. Ordnung der mittleren Entfernungen nur von dem Glied

$$\frac{1}{n^2 a^3}\left(\int \frac{\partial R'}{\partial t}\, dt\right)^2$$

herrühren, wobei $\frac{\partial R''}{\partial t}$ das Aggregat der Glieder 1. und 2. Ordnung

95) Paris. Mém. des Savans Étrangers 7 (1773).

96) Mém. de l'Acad. de Berlin (1776).

97) Journal de l'École Polyt., cah. 15 (1808), p. 1. *Poissons* Beweis wurde von *Tisserand* vereinfacht, Mém. de l'Acad. de Toulouse (7) 7, p. 374, Annales de l'École Normale Sup. (2) 7. p. 261 (1875—76). *Tisserand* wendet die Jacobi-Radausche Transformation an und reduziert das Dreikörperproblem auf ein Problem 12. Ordnung, bei dem nur eine einzige Störungsfunktion auftritt.

98) Paris C. R. 79 (1875), p. 1045; J. f. Math. 80 (1875), p. 97.

99) Mémoires de l'Acad. des Sciences I (1810), p. 55.

100) Paris C. R. 85 (1877), p. 504; Obs. de Paris ann., mém. 18 (1883).

101) Paris C. R. 108, p. 1156; Obs. de Paris ann., mém. 19 (1889).

bedeutet. Er zeigte zugleich, daß solche Störungen in der Tat auftreten, und daß sie periodisch sind, wenn auch von sehr großer Periode.

Der Übergang von der alten Planetentheorie mit ihren säkularen und periodischen Störungen zu der modernen Himmelsmechanik, bei der alle Glieder periodisch sind, berührte natürlich auch die Theoreme dieser Art. *Tisserand*[102]) gab die neue Fassung des Theorems der Invariabilität der großen Achsen, wenn die Lösung des Dreikörperproblems durch Reihen ausgedrückt ist, wie die der Delaunayschen Mondtheorie. Er zeigte, daß das Theorem nicht richtig ist, wenn man auch diejenigen Glieder berücksichtigt, die 4. Ordnung sind in bezug auf das Verhältnis der mittleren Bewegungen.

Rein vom modernen Gesichtspunkte aus wurde die Frage behandelt von *Andoyer*[103]), *Hill*[104]) und *Poincaré*[105]), welcher bewies, daß in dem restringierten Dreikörperproblem der Ausdruck der mittleren Entfernungen eine bestimmte Klasse von Gliedern, die den säkularen Gliedern der alten Theorie entspricht, nicht enthält, wie weit man auch die Annäherung führt.

Einige merkwürdige Resultate verwandter Richtung fand *Adams*[106]) in der Mondtheorie. Bezeichnen wir mit e die Exzentrizität der Mondbahn und mit γ den Sinus der halben Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik (diese Größen sollen wie in der Delaunayschen Theorie definiert sein): sei n die mittlere Bewegung des Mondes, $(1-c)n$ die mittlere Bewegung des Mondperigäums, $(1-g)n$ die mittlere Bewegung des Mondknotens, α die mittlere Entfernung und ν der Radius vector. Der nichtperiodische Teil von $\frac{\alpha}{\nu}$ gestattet eine Entwicklung der Form:

$$A + Be^2 + C\gamma^2 + Ee^4 + 2Fe^2\gamma^2 + G\gamma^4 + \cdots$$

wobei $A, B, C, \ldots$ Funktionen der Exzentrizität der Erdbahn und des Verhältnisses der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond sind. In ähnlicher Weise bezeichnen wir mit $He^2 + K\gamma^2$ die Glieder von c, die e^2 und γ^2 enthalten, und mit $Me^2 + N\gamma^2$ die entsprechenden Glieder von g. Adams' Theorem lautet

$$B = 0, \quad C = 0, \quad EK - FH = 0, \quad FN - GM = 0.$$

Alle diese Resultate werden durch denselben Prozeß gewonnen, der

---

102) Paris C. R. 106 (1888), p. 788.

103) Annales de la Fac. de Toulouse 4 (1898); Obs. de Paris ann., mém. 23 A (1902).

104) Astron. Journ. 24 (1904), p. 27.

105) Méth. Nouv. II (1893), p. 109; Bull. Astr. 14 (1897), p. 261.

106) Lond. Astr. Soc. Monthly not. 38 (1878), p. 460.

für das erste folgendermaßen geschildert werden kann: es werden zwei Monde betrachtet, von denen die Bahn des einen weder eine Exzentrizität noch eine Neigung, die des anderen keine Neigung besitzt. Es wird gezeigt, daß eine bestimmte Funktion der Koordinaten der beiden Monde eine periodische Funktion ist, und dies hat das Verschwinden der Größe B zur Folge.

Diese Resultate wurden von *E. W. Brown*[107]) und *Picart*[108]) erweitert. Andere Eigenschaften der Koeffizienten bei der Lösung des allgemeinen Dreikörperproblems durch trigonometrische Reihen wurden von *Newcomb*[109]), *Siacci*[110]) und *E. W. Brown*[111]) gefunden.

---

107) Amer. Journ. Math. 17 (1895), p. 318; Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 234; Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1897), p. 143.

108) Paris C. R. 131 (1900), p. 63—65.

109) Paris C. R. 75 (1872), p. 1750.

110) Paris C. R. 77 (1873), p. 1288.

111) Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1897), p. 130. In dem Resultat (X) dieser Arbeit findet sich ein Versehen, das aber den weiteren Teil nicht beeinflußt.

(Abgeschlossen im März 1912.)

VI 2, 13. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION.

Von

H. v. ZEIPEL.

in Upsala.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Allgemeines über die Störungsfunktion und ihre Ableitungen.

I. Kreisbahnen in einer Ebene.

2. Koeffizienten $b_n^{(i)}$ von *Laplace*.
3. Reihenentwicklungen derselben
4. Integralausdrücke derselben.
5. Ältere Berechnungsmethoden.
6. Methode von *Newcomb*.
7. Koeffizienten von *Cauchy*.
8. Koeffizienten von *Gyldén*.
9. Koeffizienten von *Radau*.
10. Tafeln.

II. Kreisbahnen in geneigten Ebenen.

11. Koeffizienten $b^{i,j}$ von *Jacobi*.
12. Integralausdrücke derselben.
13. Rekursionsformeln von *Jacobi*.
14. Entwicklungen bei kleiner Neigung.
15. Entwicklungen von *Tisserand*.
16. 17. Entwicklungen von *Hansen*.
18. 19. *Appel*sche hypergeometrische Entwicklungen.
20. Berechnungsmethode von *Sundman*.

III. Entwicklungen nach Potenzen von e und e'.

21. Methode von *Leverrier*.
22. Methode von *Newcomb*.

28. Entwicklungen von *Cauchy*.
24. Entwicklung von *Gyldén*.
25. Entwicklung von *Hill*.
26. Gruppenentwicklungen von *Bohlin*.
27. Zweiter Teil der Störungsfunktion.
28. Kanonische Elemente.

IV. Entwicklungen nach Potenzen des Verhältnisses der großen Achsen.

29. Koeffizienten $X_i^{n,s}$ von *Hansen*.
30. Störungsfunktion der Mondtheorie.

V. Konvergenz der Entwicklungen.

31. Formulierung der ersten Aufgabe.
32. Integralausdrücke der Koeffizienten.
33. 34. Allgemeines über die Singularitäten bestimmter Integrale.
35. Konvergenz der Entwicklungen für die Koeffizienten $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$
36. Konvergenz der Entwicklungen für die Koeffizienten $A^{s,s'}_{m,m'}$ und $B^{s,s'}_{m,m'}$.
37. Formulierung der zweiten Aufgabe.
38. Konvergenz der Entwicklung von Δ^{-1}.

VI. Allgemeine Theorie der Rekursionsformeln und Differentialgleichungen.

39. Formulierung der Aufgabe.
40. Reduktion einiger Doppelintegrale.
41. Rekursionsformeln und Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten.
42. Fundamentalperioden. Rekursionsformeln und Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten.

VII. Numerische Entwicklungsmethoden.

43. Unzulänglichkeit der analytischen Entwicklungen.
44. Übergang von exzentrischen Anomalien zu mittleren.
45. Zweiter Teil der Störungsfunktion.
46. Entwicklungsmethode von *Jacobi*.
47. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen durch mechanische Quadratur.
48. Methode von *Liouville*.
49. Trigonometrische Interpolationsmethode von *Leverrier*.
50. *Cauchys* gemischte Methode.
51. Entwicklung von *Hansen*.
52. Elimination von E'.
53. Anwendung der elliptischen Funktionen.
54. *Gauß'* Theorie der säkularen Störungen.

VIII. Asymptotische Ausdrücke für Funktionen großer Zahlen.

55. Formulierung der Aufgabe.
56. Asymptotische Ausdrücke entfernter Koeffizienten in der *Taylor*schen und *Laurent*schen Reihe.
57. 58. Asymptotische Ausdrücke einiger bestimmter Integrale.

IX. Asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten der Entwicklungen der Störungsfunktionen.

59. Entfernte Glieder in der Entwicklung nach den Vielfachen der mittleren Anomalie des einen Planeten.

60. Entfernte Glieder in der Entwicklung nach den Vielfachen der beiden mittleren Anomalien.

Literatur.

Monographien.

J. Lalande, Astronomie 2, 1764; 2e éd. 3, 1771.

P. S. Laplace, Traité de mécanique céleste I—V. Paris 1799—1827.

P. G. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde III—IV. Paris 1834—46.

U. J. J. Leverrier, Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris I, II, 1855—56.

P. A. Hansen, Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, Abh. I. Abh. d. K. S. Ges. d. Wiss. III. Leipzig 1857.

S. Newcomb, Development of the Perturbative Function and its Derivatives in sines and cosines of multiples of the Eccentric Anomaly, and in Powers of the Eccentricities and Inclinaisons. Astron. Papers. III_1. Washington 1884.

H. Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales I. Stockholm 1893.

S. Newcomb, Development of the Perturbative Function in cosines of multiples of the Mean Anomalies and of Angles between the Perihelia and Common Node and in Powers of the Eccentricities and Mutual Inclination. Astron. Papers V_1. Washington 1895.

Lehrbücher und Bibliographien.

H. Resal, Traité élémentaire de mécanique céleste, 2e édition. Paris 1884.

O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888.

F. Tisserand, Traité de Mécanique céleste I, III, IV. Paris 1889—96.

N. Herz, Artikel „Mechanik des Himmels" in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie. Breslau 1898.

*H. Burkhardt**), Die Entwicklung analytischer Funktionen in harmonische trigonometrische Reihen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. X, Heft 2, erster Halbband. Leipzig 1901—2.

F. R. Moulton, An Introduction to Celestial Mechanics. New York 1902.

C. V. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels I, II. Leipzig 1902, 1907.

H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste I, II_1. Paris 1905, 1907.

---

*) Der sehr vollständigen Bibliographie von *H. Burkhardt* sind viele besonders von den älteren Literaturangaben entnommen.

Einleitung.

1. Allgemeines über die Störungsfunktion und ihre Ableitungen. Mit dem Namen Störungsfunktion wird gewöhnlich die eine oder die andere der Funktionen

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}, \quad R' = \frac{1}{\Delta} - \frac{r'\cos H}{r^2}, \tag{1}$$

wo

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H,$$

bezeichnet. Hier sind r und r' die Radiivektoren zweier Himmelskörper, H der von r und r' eingeschlossene Winkel (vgl. den Artikel VI 2, 14). In der Mondtheorie heißt Störungsfunktion der Ausdruck

$$R' = \frac{1}{(1-\sigma)\sqrt{r'^2 - 2r'r(1-\sigma)\cos H + r^2(1-\sigma)^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{r'^2 + 2r'r\sigma\cos H + r^2\sigma^2}} \tag{2}$$

Dabei bedeutet r den Radiusvektor des Mondes, bezogen auf den Schwerpunkt der Erde, r' den Radiusvektor der Sonne, bezogen auf den Schwerpunkt zwischen Erde und Mond, H den von r und r' eingeschlossenen Winkel, σ das Verhältnis zwischen der Masse des Mondes und der Summe der Massen von Mond und Erde (vgl. den Artikel VI 2, 16).

In der Bewegungstheorie der Himmelskörper geht man im allgemeinen von der elliptischen Bewegung als erster Annäherung aus. Die erste Aufgabe für eine Berechnung der Störungen wird dann, in die Störungsfunktion für die Koordinaten der beiden Himmelskörper ihre Ausdrücke durch die Keplerschen Elemente einzuführen und die entsprechende komplizierte Funktion in zweckmäßiger Weise zu entwickeln.

Nach der Theorie der elliptischen Bewegung ist:

$$\begin{gathered} E - e\sin E = M, \quad r = a(1 - e\cos E) \\ r\cos v = a(\cos E - e), \quad r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E. \end{gathered} \tag{3}$$

Für den zweiten Körper gelten dieselben Gleichungen, wenn nur alle Buchstaben gestrichelt werden. Weiter ist:

$$\cos H = \cos(v+\omega)\cos(v'+\omega') + \cos J\sin(v+\omega)\sin(v'+\omega').$$

Dabei bezeichnen in Übereinstimmung mit den vorausgehenden Artikeln: a, a' die halben großen Achsen der beiden Bahnen; e, e' die Exzentrizitäten; ω, ω' die Perihellängen von der Schnittlinie der Bahnebenen an gerechnet; J die gegenseitige Neigung der Bahnebenen; M, M' die mittleren, E, E' die exzentrischen, v, v' die wahren Anomalien.

Das Problem der Entwicklung der Störungsfunktion läßt sich

nun in der Hauptsache so charakterisieren. Wenn man den Fall ausschließt, daß sich die beiden Ellipsen schneiden, ist die Störungsfunktion für alle reellen Werte der mittleren Anomalien M und M' endlich. Es existieren dann für sie und ihre partiellen Ableitungen trigonometrische Entwicklungen nach den Vielfachen von M und M', in welchen die Koeffizienten von den übrigen Elementen a, a', e, e', ω, ω', J abhängig sind. Das Problem besteht im wesentlichen in der Bildung dieser Koeffizienten. Für die Integration der Bewegungsgleichungen für kürzere Zeit (einige Jahrhunderte) ist es hinreichend, die Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklungen für konstante Werte von a, a' usw. berechnen zu können. In diesem Falle kann man die Koeffizienten durch mechanische Quadratur berechnen, bedient sich aber doch meist analytischer Entwicklungen in Gestalt von Reihen, die nach Potenzen kleiner Größen, wie e, e', $\sin^2\frac{J}{2}$ oder a/a' fortschreiten, solange wenigstens die Konvergenz dieser Reihen genügend ist. Bei Untersuchungen über die wahre Natur der Bewegung und über die Veränderung der Bahnen im Laufe von Jahrtausenden ist man natürlich auf die analytische Form für die Entwicklungskoeffizienten angewiesen.

Es sei vorausbemerkt, daß sich die Betrachtung fast durchweg auf den sog. „Hauptteil" der Störungsfunktion $1/\Delta$ beschränkt, während die einfache Berücksichtigung des zweiten oder „indirekten" Teils der Störungsfunktion $\frac{r\cos H}{r'^2}$ resp. $\frac{r'\cos H}{r^2}$ für sich erfolgt (Nr. 27, 45).

I. Kreisbahnen in einer Ebene.

2. Koeffizienten $b_n^{(i)}$ von Laplace. Wenn e, e' und J verschwinden, wird die Entwicklung der Störungsfunktion einfach. Mit Einführung der Bezeichnungen

$$\alpha = \frac{a}{a'} < 1, \quad z = e^{H\sqrt{-1}},$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden, ergibt sich

$$\Delta^2 : a'^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos H = 1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1}) = (1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1}).$$

Die Aufgabe wird also, die Entwicklungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} [1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos H]^{-\frac{n}{2}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)}\cos iH, \\ [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-\frac{n}{2}} &= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} z^i \end{aligned}$$

zu studieren, wo n eine ungerade positive Zahl ist. Die Größen $b_n^{(i)}$ werden die Koeffizienten von Laplace genannt. Dieselben spielen in der Theorie der Störungsfunktion eine ganz hervorragende Rolle.

Offenbar ist

$$b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}$$

Es genügt also diejenigen $b_n^{(i)}$ zu betrachten, für welche i nicht negativ ist.

3. Reihenentwicklungen der $b_n^{(i)}$. Die Koeffizienten von Laplace können in verschiedene hypergeometrische Reihen entwickelt werden. Es ergibt sich, unter Anwendung der Bezeichnungen

$$(\gamma, i) = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+i-1), \qquad (\gamma, 0) = 1$$

und

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma 1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1\cdot 2}x^2 + \cdots$$

$$(5)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1+\alpha^2)^{\frac{n}{2}+i}} F\left(\frac{n}{4}+\frac{i}{2}, \frac{n}{4}+\frac{i}{2}+\frac{1}{2}, i+1, \frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\right)$$

$$(6)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \alpha^i F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+i, i+1, \alpha^2\right)$$

$$(7)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1-\alpha^2)^{n-1}} F\left(-\frac{n}{2}+1, -\frac{n}{2}+i+1, i+1, \alpha^2\right)$$

$$(8)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1+\alpha)^{n+2i}} F\left(\frac{n}{2}+i, i+\frac{1}{2}, 2i+1, \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right)$$

$$(9)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1-\alpha)^{n+2i}} F\left(\frac{n}{2}+i, i+\frac{1}{2}, 2i+1, \frac{-4\alpha}{(1-\alpha)^2}\right)$$

$$(10)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1-\alpha^2)^{\frac{n}{2}}} F\left(\frac{n}{2}, 1-\frac{n}{2}, i+1, \frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$

$$(11)\quad \frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1-\alpha^2)^{\frac{n}{2}+i}} F\left(-\frac{n}{2}+i+1, \frac{n}{2}+i, i+1, \frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$

Die ersten Glieder der Reihen (5) wurden von *L. Euler*[1]) für

1) *L. Euler,* Sur les inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter, Paris 1749, § 25, p. 26. Die Abhandlung war ursprünglich für den 7. Band des Pariser „recueil des pièces qui ont remporté les prix" bestimmt (Vgl. dessen Vorrede), ist aber in manchen Exemplaren dem 6. angehängt oder fehlt auch ganz.

$i = 0, 1, 2, 3$ berechnet. Er entwickelte zuerst nach den Potenzen von $\cos H$ und ordnete nachher um, indem er von dem allgemeinen Ausdruck von $\cos^i H$ durch $\cos iH$, $\cos(i-2)H, \ldots$ Gebrauch machte. Die allgemeine Form dieser Reihen erkannte *J. B. L. d'Alembert*[2]). Die Reihe (6) rührt von *J. L. Lagrange*[3]) her. Er zerlegte $1+\alpha^2-2\alpha\cos H$ in die beiden komplexen Faktoren $(1-\alpha e^{H\sqrt{-1}})$, $(1-\alpha e^{-H\sqrt{-1}})$ und entwickelte die $\left(-\frac{n}{2}\right)^{\text{te}}$ Potenz jedes Faktors für sich nach Potenzen von α, multiplizierte aus und ordnete nach den Kosinus der Vielfachen von H. Durch Transformation der hypergeometrischen Reihe in (6) leitete *L. Euler*[4]) aus (6) die Formel (7) ab. *C. F. Gauß*[5]) führte in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe noch die Entwicklungen (8) und (9) an, die sich aus den beiden Identitäten

$$(1+\alpha)^n(1+\alpha^2-2\alpha\cos H)^{-\frac{n}{2}} = \left[1-\frac{4\alpha\cos^2\frac{H}{2}}{(1+\alpha)^2}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

$$(1-\alpha)^n(1+\alpha^2-2\alpha\cos H)^{-\frac{n}{2}} = \left[1+\frac{4\alpha\cos^2\frac{H}{2}}{(1-\alpha)^2}\right]^{-\frac{n}{2}}$$

ergeben. Die wichtige Formel (10) wurde von *A. M. Legendre*[6]) mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten gefunden. Dieselbe Entwicklung sowie auch (11) wurden endlich von *A. L. Cauchy*[7]) aus einem Integralausdruck (18) erhalten, wovon später die Rede sein wird.

Die Reihen (5)—(8) sind konvergent, wenn $0 < \alpha < 1$. Die Konvergenz der Reihe (9) besteht nur, solange $0 < \alpha < 3 - \sqrt{8} = 0{,}172\ldots$ Die in (10) und (11) vorkommenden hypergeometrischen Reihen konvergieren nur, wenn $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$ *A. L. Cauchy*[8]) und nach ihm *O. Callandreau*[8']) haben aber gezeigt, daß die Formel (10) auch

2) *J. B. L. d'Alembert,* Recherches sur différens points importans du système du monde, 2, Paris 1754, p. 61.

3) *J. L. Lagrange,* Misc. Taur. 3_2, 1762/65 [66], Nr. 73 = Œuvres, 1, p. 619; Paris, recueil des ... prix 9, (1766), Nr. 18 = Œuvres 6, p. 87.

4) *L. Euler,* Institutiones calc. integr., 2. ed., 4, Petrop. 1794, p. 250—259.

5) *C. F. Gauß,* Gott. comm. rec. 2 (1813), Nr. 6 = Werke 3, p. 128.

6) *A. M. Legendre,* Exercices de calcul intégral, tome 2, 5e partie, Paris 1817, Nr. 156, p. 278.

7) *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 19 (1844), p. 58 = Œuvres (1) 8, p. 248.

Reihen nach Potenzen von $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2$ gibt *J. Hellins*, Lond. philos. trans. (1798), p. 535, 557.

8) *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 34 (1852), p. 159 = Œuvres (1) 11, p. 402.

8') *O. Callandreau*. Paris C. R. 115 (1892), p. 386; Journ. Ecol. Pol. (2) 7 (1902), p. 47.

für größere Werte von α mit Vorteil angewandt werden kann, wenn nur i eine große Zahl ist. Die Reihe ist in der Tat semikonvergent, und der Fehler ist gleich dem ersten weggelassenen Glied mit einem echten Bruche multipliziert, wenn nur die Anzahl der mitgenommenen Glieder größer als $\frac{n}{2} - 1$ ist.

4. Integralausdrücke der $b_n^{(i)}$. Die Koeffizienten $b_n^{(i)}$ können auch durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden. Die erste der Gleichungen (4) gibt in der Tat

$$(12) \qquad b_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\psi)^{-\frac{n}{2}} \cos i\psi \, d\psi.$$

Diese Darstellung fanden schon *J. B. L. d'Alembert*[9]) und *A. C. Clairaut*[10]).

Durch Anwendung seiner Methoden zur Lösung von Differenzengleichungen fand *P. S. Laplace*[11]) die Relation

$$(13) \qquad b_1^{(i)} = \frac{4}{\pi} \alpha^i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2i}\psi \, d\psi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\psi}}.$$

Dieselbe wurde später auch von *A. M. Legendre*[12]) gewonnen, indem er die Reihenentwicklung des Integrals nach Potenzen von α^2 mit der Entwicklung (7) für $n = 1$ verglich.

Von der Formel

$$\int_0^{\pi} \cos^p x \cos ix \, dx = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)} \int_0^{\pi} \cos^{p-i} x \sin^{2i} x \, dx$$

ausgehend hat *C. G. J. Jacobi*[13]) die allgemeine Gleichung

$$(14) \qquad \int_0^{\pi} f(\cos x) \cos ix \, dx = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2i-1)} \int_0^{\pi} f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x \, dx$$

---

9) *J. B. L. d'Alembert,* Recherches sur différens points importans du système du monde 2, Paris 1754, p. 66.

10) *A. C. Clairaut,* Paris hist. (2) mém. 1754, p. 548 (Juli 1757).

11) *P. S. Laplace,* Méc. cél. livre 15, Nr. 3 (1824) = Œuvres 5, p. 373. Errata Conn. d. temps pour 1828, p. 315.

12) *A. M. Legendre,* Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes 2, Paris 1826, appendice, sect. I, p. 536.

13) *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 15 (1836), p. 3, 10 [Juli 1835] = Werke 6, p. 88, 89, 98.

abgeleitet. Aus ihr ergibt sich infolge (12):

$$(15)\quad b_n^{(i)} = \frac{n(n+2)\cdots(n+2i-2)}{1\cdot 3\cdots(2i-1)}\,\frac{2}{\pi}\,\alpha^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i}\psi\, d\psi}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi)^{\frac{n}{2}+i}}.$$

Durch Anwendung der Landenschen Transformation

$$\sin\varphi = \frac{\sin\psi}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi}}$$

findet er:

$$(16)\quad b_n^{(i)} = \frac{n(n+2)\cdots(n+2i-2)}{1\cdot 3\cdots(2i-1)}\,\frac{2}{\pi}\,\alpha^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}\cdot\left\{\frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}+\alpha\cos\varphi}{1-\alpha^2}\right\}^{n-1}$$

Für $n = 1$ ergibt sich hieraus als Spezialfall die Formel (13).

Als hypergeometrische Funktionen müssen sich die $b_n^{(i)}$ auch durch hypergeometrische Integrale ausdrücken lassen. Eine solche Darstellung fand *J. Binet*[14]) im Spezialfalle $n = 1$:

$$(17)\quad \tfrac{1}{2}\, b_1^{(i)} = \frac{\alpha^i}{\pi}\int_0^1 (1-\alpha^2 x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Eine Entwicklung nach Potenzen von α führt in der Tat auf die Formel (6) von Lagrange. Ein allgemeinerer Ausdruck rührt von *A. L. Cauchy*[15]) her, der seine Theorie der komplexen Integrale nutzbar machte. Er geht vom Integrale

$$(18)\quad \tfrac{1}{2}\, b_n^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int (1-\alpha z)^{-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{c}{z}\right)^{-\frac{n}{2}} z^{i-1}\, dz$$

aus, wo der Integrationsweg der Einheitskreis ist. Diesen Integrationsweg ersetzt er durch einen anderen: $|z| = \alpha(1+\varepsilon)$, wonach sich ergibt:

$$(19)\quad \tfrac{1}{2}\, b_n^{(i)} = \frac{\alpha^i}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|x|=1+\varepsilon} (1-\alpha^2 x)^{-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{n}{2}} x^{i-1}\, dx.$$

ε ist hier eine beliebig kleine positive Größe.

H. Poincaré[16]) führte in die Theorie der Koeffizienten $b_n^{(i)}$ die elliptischen Funktionen $p(u)$ von Weierstraß ein. Er setzte in der Gleichung (18)

$$z = p(u) - e_3, \quad \alpha = e_2 - e_3, \quad \frac{1}{\alpha} = e_1 - e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

14) *J. Binet*, J. Éc. Polyt. cah. 27 (1839), p. 332.

15) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 15 (1842), p. 266 = Œuvres (1) 7, p. 97.

16) *H. Poincaré*, Leçons de méc. cél. 2 (1907), p. 57.

womit folgt:

$$(1-\alpha z)(z-\alpha)z = \frac{-\alpha}{4}p'(u)^2$$

und

$$\frac{1}{2}\,b_n^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^{2\omega_1}[p'u]^{1-n}[p(u)-e_3]^{n-1+i}\,du. \tag{20}$$

Die zu integrierende doppeltperiodische Funktion $F(u)$ wird nur unendlich für $u = 0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ $(p(\omega_\nu) = e_\nu)$. Weiter ist

$$F(u) = F(-u), \quad F(\omega_\nu + u) = F(\omega_\nu - u).$$

Die Funktion $F(u)$ ist daher linear zusammengesetzt aus den Ableitungen *ungerader* Ordnung der Funktionen $\zeta(u)$, $\zeta(u-\omega_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3$. Es ist daher $(\eta_\nu = \zeta(\omega_\nu))$:

$$b_n^{(i)} = \frac{P\eta_1 + Q\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}},$$

wo P und Q rationale Funktionen von α sind.

A. Wilkens[17]) hat gezeigt, wie die Berechnung von P und Q durch Rekursionsformeln erleichtert werden kann.

Von den Laplaceschen Koeffizienten $b_n^{(i)}$ sind $b_1^{(0)}$ und $b_1^{(1)}$ die wichtigsten. Infolge der Gleichung (13) können dieselben leicht durch die elliptischen Integrale

$$F_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}}, \quad E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

ausgedrückt werden. Man findet:

$$b_1^{(0)} = \frac{4}{\pi}F_1, \quad b_1^{(1)} = \frac{4}{\pi}\frac{F_1 - E_1}{\alpha}. \tag{21}$$

Andererseits ergibt sich aus (20)

$$b_1^{(0)} = \frac{4}{\pi}\frac{\omega_1}{\sqrt{\alpha}}, \quad b_1^{(1)} = \frac{4}{\pi}\frac{\frac{1}{3}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\omega_1 - \eta_1}{\sqrt{\alpha}}. \tag{22}$$

Für die Berechnung von F_1 bietet die Theorie der elliptischen Integrale mehrere Methoden, die sehr rasch zum Ziele führen. Nach *C. F. Gauß*[18]) ist

$$F_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1, \sqrt{1-\alpha^2})}, \tag{23}$$

17) *A. Wilkens,* Astr. Nachr. 166 (1904), p. 213, 214.

18) *C. F. Gauß,* Gott. comm. rec. 4 (1818) nr. 16, = Werke 3, p. 352.

wo das arithmetisch-geometrische Mittel $M(m, n)$ durch die Formeln

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad n_1 = \sqrt{mn},$$

$$m_\nu = \frac{m_{\nu-1}+n_{\nu-1}}{2}, \quad n_\nu = \sqrt{m_{\nu-1}n_{\nu-1}}, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

$$M(m, n) = \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \lim_{\nu=\infty} n_\nu$$

definiert ist. Diese Methode wurde besonders von *P. A. Hansen*[19]) und *S. Newcomb*[20]) empfohlen. Letzterer setzt

$$\alpha = \sin\theta,$$

$$\log b_1^{(0)} = \log N - \log\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\log\cos\theta$$

und gibt die Werte von $\log N$ (N nahe $= 2$) für $\alpha = 0{,}45; 0{,}46; \ldots; 0{,}75$. *R. T. A. Innes*[21]) bemerkte, daß die Tafel von Newcomb Fehler in der siebenten Dezimalstelle enthält. Er setzt

$$\log b_1^{(0)} = \log 8 - 2\log\left(1 + \sqrt{1-\alpha^2}\right) + N_1.$$

Die Größe $10^8\, N_1$ ist von *F. Robbins*[22]) für $\alpha < 0{,}85$ tabelliert worden

Für F_1 hat *A. M. Legendre*[23]) das rasch konvergierende unendliche Produkt gegeben:

$$F_1 = \frac{\pi}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\cdots,$$

wo

$$\alpha_\nu = \frac{1-\sqrt{1-\alpha_{\nu-1}^2}}{1+\sqrt{1-\alpha_{\nu-1}^2}}, \quad \alpha_0 = \alpha, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist. Für numerische Rechnung noch zweckmäßigere Formeln wurden hieraus von *H. Gyldén*[24]) abgeleitet. Er fand

$$F_1 = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\ldots}}{\sqrt{\cos\theta}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cdots\right)^2},$$

wo

$$\alpha = \sin\theta, \quad \sin\theta_\nu = \operatorname{tg}^2\frac{\theta_{\nu-1}}{2}, \quad \theta_0 = \theta, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die in der Formel (22) auftretenden Perioden ω_1 und η_1 können leicht durch Anwendung der sehr konvergenten ϑ-Reihen von Jacobi

---

19) *P. A. Hansen,* Paris C. R. Suppl. 1 (1856), p. 165. [Eingereicht 1846.]
20) *S. Newcomb,* Wash. Astron. Papers, vol. 3, part. 1 (1884), p. 69.
21) *R. T. A. Innes,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 69 (1909), p. 638.
22) *F. Robbins,* ibid. p. 649.
23) *A. M. Legendre,* Traité des fonctions elliptiques 1 (1825), p. 83.
24) *H. Gyldén,* Stockholm Bih. K. Vet. Akad. Handl. Bd. 6, Nr. 16, p. 26 (1881).

berechnet werden. Die hierfür nötigen Formeln hat *H. A. Schwarz*[25]) zusammengestellt. Je nachdem $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$, kommen verschiedene Formeln in Anwendung. Dadurch erreicht man, daß die Größe h, nach deren Potenzen die ϑ-Reihen fortschreiten, stets

$$< e^{-\pi} = 0{,}04321\ldots$$

ist. Die Konvergenz ist deshalb immer eine sehr große.

5. Ältere Berechnungsmethoden. Für die numerische Berechnung der Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung von Δ^{-s} ist es im allgemeinen nötig, die numerischen Werte von $b_n^{(i)}$ nebst deren Ableitungen nach α zu kennen. Obwohl die Reihen (6) konvergent sind, wenn $|\alpha| < 1$ ist, so sind sie in numerischer Hinsicht als unzweckmäßig zu bezeichnen, besonders wenn $\alpha > \frac{1}{2}$. Es ist deshalb nötig gewesen, andere Berechnungsmethoden aufzusuchen. Dabei haben gewisse Rekursionsformeln eine wichtige Rolle gespielt.

Es seien

$$F_i = F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

beliebige hypergeometrische Reihen, für welche die Differenzen

$$\alpha_i - \alpha_j, \quad \beta_i - \beta_j, \quad \gamma_i - \gamma_j \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots)$$

ganze Zahlen sind. *C. F. Gauß*[26]) hat gezeigt, daß zwischen drei beliebigen der Funktionen F_i eine homogene, lineare Relation besteht mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von x, α, β und γ sind. Nun sind die Koeffizienten $b_n^{(i)}$ mit allen ihren Ableitungen homogene, lineare Ausdrücke mit rationalen Koeffizienten solcher hypergeometrischen Reihen. Es folgt daraus, daß zwischen drei beliebigen der Funktionen

$$\frac{d^j b_n^{(i)}}{d\alpha^j} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 1, 3, 5, \ldots)$$

eine homogene, lineare Rekursionsformel besteht mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von α sind. Mehrere von diesen Rekursionsformeln waren schon im 18. Jahrhundert bekannt. So hatte *L. Euler*[27]) die folgende abgeleitet:

$$(24) \qquad b_n^{(i+1)} = \frac{2i}{2i - n + 2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) b_n^{(i)} - \frac{2i + n - 2}{2i - n + 2} b_n^{(i-1)}.$$

Mit ihrer Hilfe können $b_n^{(2)}$, $b_n^{(3)}$, ... berechnet werden, wenn $b_n^{(0)}$ und

25) *H. A. Schwarz,* Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Göttingen 1885, Nr. 45, p. 61.

26) *C. F. Gauß,* Gott. comm. rec. 2 (1813), nr. 7, 8 = Werke 3, p. 130—131.

27) *L. Euler,* Sur les inégalités du mouvm. de Sat. et de Jup., Paris 1749, § 26, p. 27.

$b_n^{(1)}$ bekannt sind. Von *J. L. Lagrange*[28]) rühren zwei Formeln her, die $b_{n+2}^{(i)}$ durch $b_n^{(i)}$ und $b_n^{(i+1)}$ oder durch $b_n^{(i)}$ und $b_n^{(i-1)}$ ausdrücken. Mit ihrer Hilfe können z. B. $b_{n+2}^{(0)}$ und $b_{n+2}^{(1)}$ durch $b_n^{(0)}$ und $b_n^{(1)}$ berechnet werden. Eine spätere Abhandlung von *J. L. Lagrange*[29]) drückt die Ableitung $\frac{db_n^{(i)}}{d\alpha}$ durch $b_n^{(i)}$ und $b_{n+2}^{(i)}$ aus. Endlich hat *A. M. Legendre*[30]) die folgenden Formeln gegeben:

$$(25)\qquad \begin{aligned} b_{n+2}^{(i)} + b_{n+2}^{(i+1)} &= \frac{(2i+n)b_n^{(i)} - (2i-n+2)b_n^{(i+1)}}{n(1-\alpha)^2}, \\ b_{n+2}^{(i)} - b_{n+2}^{(i+1)} &= \frac{(2i+n)b_n^{(i)} + (2i-n+2)b_n^{(i+1)}}{n(1+\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Bei den Rechnungen, die *P. S. Laplace* und *A. Bouvard* für die Mécanique Céleste ausführten, kam die Formel (24) zur Anwendung. *P. G. Pontécoulant*[31]) und später *U. J. J. Leverrier*[32]) wiesen darauf hin, daß diese Formel aus zwei Gründen fehlervergrößernd sein kann. Erstens wird $b_n^{(i+1)}$ als Differenz von zwei größeren Zahlen gefunden; zweitens tritt bei kleinen Werten von α ein Fehler in $b_n^{(i)}$ stark vergrößert in $b_n^{(i+1)}$ auf.

U. J. J. Leverrier[33]) hat deshalb auf die Anwendung der Formel (24) bei kleineren Werten von α verzichtet. In solchen Fällen berechnete er die Funktionen $b_1^{(0)}$, $b_1^{(1)}$, $b_1^{(2)}$, ... und die Ableitungen derselben mit Hilfe von Reihen, die durch eine die Konvergenz vermehrende Umformung aus den Reihen (6) abgeleitet wurden. Die Koeffizienten dieser transformierten Reihen wurden später auch von *S. C. Walker*[34]) numerisch gegeben. Übrigens hat auch *O. Callandreau*[35]), ausgehend von der Integralformel von Cauchy dieselben Reihen behandelt und in bezug auf ihre Konvergenz diskutiert. Nachdem die $b_1^{(i)}$ bekannt waren, berechnete Leverrier $b_3^{(i)}$, $b_5^{(i)}$, $b_7^{(i)}$, ... durch sukzessive Anwendung der Rekursionsformeln (25). Aber auch diese sind, besonders für größere

---

28) *J. L. Lagrange,* Misc. Taur. 3, 1762/65 [66], n° 73 = Oeuvres 1, p. 622; Paris, reçueil des ... prix 9 (1766), n° 20 = Oeuvres 6, p. 91.

29) *J. L. Lagrange,* Berl. nouv. mém. 1781 [83], n° 45 = Oeuvres 5, p. 185.

30) *A. M. Legendre,* Excercises de calcul intégral, tome 2, 5e partie (1817), n° 164, p. 284.

31) *P. G. de Pontécoulant,* Théorie analytique du système du monde 3 (1834), p. 63.

32) *U. J. J. Leverrier,* Paris C. R. 10 (1840), p. 751. — Développements sur plusieurs points de la théorie des perturbations des planètes, Paris 1841, p. 33.

33) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann. 2 (1856), add. I, p. [1]—[10].

34) *S. C. Walker,* Amer. Ephem. Appendix 1857, p. 95—117.

35) *O. Callandreau,* Paris C. R. 90 (1880), p. 1540.

Werte von α, für numerische Rechnung wenig geeignet. Für die Berechnung der Größen

$$\frac{\alpha^j}{j!}\frac{d^j b_n^{(i)}}{d\alpha^j} \quad (n=1,3,5,\ldots;\ i=0,1,2,\ldots;\ j=1,2,3,\ldots) \tag{26}$$

leitete endlich *U. J. J. Leverrier*[36]) eine Reihe Rekursionsformeln ab, die aber kompliziert und in numerischer Hinsicht ziemlich unzweckmäßig sind. Übrigens treten die Größen (26) nicht direkt in der Leverrierschen Entwicklung der Störungsfunktion auf. Die für diese Entwicklung nötigen Größen sind tatsächlich

$$\frac{\alpha^j}{j!}\cdot\frac{d^j\left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)}\right)}{d\alpha^j}.$$

6. Methode von Newcomb. Für die Berechnung der Größen

$$c_n^{(i)} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)} = 2\frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1,i)}\alpha^{\frac{n+2i-1}{2}} F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+i, i+1, \alpha^2\right)$$

und ihrer Ableitungen nach $\log\alpha$

$$D^j c_n^{(i)} = \frac{d^j c_n^{(i)}}{(d\log\alpha)^j} \qquad j=1,2,3,\ldots \tag{27}$$

hat *S. Newcomb*[37]) ein durch Eleganz und Schärfe ausgezeichnetes Verfahren gegeben.

Newcomb führt anstatt $c_n^{(i)}$ eine allgemeinere Funktion

$$c_n^{(i,j)} = 2^{j+1}\left(\frac{n}{2}, j\right)\frac{\left(\frac{n}{2}, i+j\right)}{(1,i+j)}\alpha^{\frac{n+2i+4j-1}{2}} \cdot F\left(\frac{n}{2}+j, \frac{n}{2}+i+j, i+j+1, \alpha^2\right) \tag{28}$$

ein. Es ist dann offenbar

$$D^{k+1} c_n^{(i,j)} = \frac{n+2i+4j-1}{2} D^k c_n^{(i\cdot j)} + D^k c_n^{(i,j+1)}, \tag{29}$$

$$(i,j,k=0,1,2,3,\ldots;\ n=1,3,5,\ldots).$$

Durch diese Formeln (29) können die in der Newcombschen Entwicklung der Störungsfunktion vorkommenden Größen (27) für $j=0,1,2,\ldots,m$ berechnet werden, sobald die numerischen Werte der Funktionen (28) für $j=0,1,2,\ldots,m$ bekannt sind.

Zur Berechnung dieser Funktionen (28) dienen einige von New-

---

36) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann. 2 (1856), ch. 5, n° 4, p. 7—9.

37) *S. Newcomb*, Wash. Astron. Papers 3, part. 1 (1884), p. 42—47; 5, part. 4 (1895), p. 309—317.

comb abgeleitete Rekursionsformeln:

$$(30)\qquad (2i+2j+n-2)\alpha c_n^{(i-1,j)} - 2(i+j+i\alpha^2)c_n^{(i\cdot j)} + (2i-n+2)\alpha c_n^{(i+1,j)} = 0,$$

$$(31)\qquad (2j+n)\alpha c_n^{(1\cdot j)} - c_n^{(0,j+1)} + \alpha c_n^{(1,j+1)} = 0,$$

$$(32)\qquad (n+2j)^2\alpha c_n^{(0,j)} - n[n+(n+2j)\alpha^2]c_{n+2}^{(0,j)} + 2n(n+j)\alpha c_{n+2}^{(1\cdot j)} = 0.$$

Unter Einführung der Bezeichnung

$$(33)\qquad p_n^{(i\cdot j)} = \frac{c_n^{(i\cdot j)}}{c_n^{(i-1,j)}}$$

können dieselben in folgender Weise geschrieben werden:

$$(34)\qquad p_n^{(i\cdot j)} = \frac{P_n^{(i\cdot j)}}{1 - Q_n^{(i\cdot j)} p_n^{(i+1\cdot j)}},$$

$$(35)\qquad c_1^{(0,j+1)} = \frac{(2j+1)\alpha p_1^{(1,j)} c_1^{(0,j)}}{1 - \alpha p_1^{(1,j+1)}},$$

$$(36)\qquad c_{n+2}^{(0,j)} = \frac{(n+2j)^2\alpha c_n^{(0,j)}}{n[n+(n+2j)\alpha^2] - 2n(n+j)\alpha p_{n+2}^{(1\cdot j)}},$$

wo $P_n^{(i\cdot j)}$ und $Q_n^{(i\cdot j)}$ als bekannt betrachtet werden können.

Newcomb beginnt mit der Berechnung von $p_n^{(k,j)}$, wo k eine große Zahl, z. B. $k = 10$, ist. Es ist

$$p_n^{(k,j)} = \frac{n+2k+2j-2}{2k+2j}\alpha\frac{F_1}{F},$$

wo

$$F = F(A, B, C, \alpha^2), \quad F_1 = F(A, B+1, C+1, \alpha^2),$$

$$A = \frac{n}{2}+j, \quad B = \frac{n}{2}+k+j-1, \quad C = k+j.$$

Für die Berechnung von $\frac{F_1}{F}$ wendet *S. Newcomb*[38]) eine sehr konvergente Kettenbruchentwicklung von *C. F. Gauß*[39]) an.

Nachdem in dieser Weise die $p_n^{(k,j)}$ bekannt geworden sind, werden die $p_n^{(i\cdot j)}$ für $i = k-1, k-2, \ldots, 3, 2, 1$ durch (34) erhalten. Den ersten Koeffizienten $c_1^{(0,0)} = b_1^{(0)}$ berechnet Newcomb durch das arithmetisch-geometrische Mittel [siehe (21), (23)]. Durch sukzessive Anwendung der Formel (35) ergeben sich dann die $c_1^{(0,1)}, c_1^{(0,2)}, \ldots$. Danach können $c_3^{(0}$, $c_5^{(0,j)}, \ldots$ nacheinander mittels (36) berechnet werden. Durch die Formel (33) werden endlich nach und nach die Werte von $c_n^{(1,j)}, c_n^{(2,j)}, c_n^{(3,j)}, \ldots$ erhalten.

38) *S. Newcomb*, Wash. Astron. Papers 3, part. 1 (1884), p. 48.

39) *C. F. Gauß*, Gott. comm. rec. 2 (1813), nr. 12 = Werke 3, p. 134.

Die von Newcomb gegebene Rekursionsformel (30) geht für $j = 0$ in die Eulersche Gleichung (24) über. Rekursionsformeln dieser Art waren schon vorher von *C. F. Gauß*[40]), *C. G. J. Jacobi*[41]) und *P. A. Hansen*[42]) durch Kettenbrüche aufgelöst worden.

R. T. A. Innes[43]) hat die Newcombsche Methode in einem wesentlichen Punkte umgestaltet. Er ging von der neuen Rekursionsformel

$$n^2 c_{n+2}^{(i,j)} = (n + 2i + 2j)\, c_n^{(i-1,j+1)} + c_n^{(i-1,j+2)} \tag{37}$$

aus, setzte $j = 0$, und drückte $c_n^{(i-1,1)}$ und $c_n^{(i-1,2)}$ mittels $c_n^{(i-1)}$, $Dc_n^{(i-1)}$ und $D^2 c_n^{(i-1)}$ unter Anwendung der Formeln (29) aus. Es ergab sich in dieser Weise und nach m-facher Differentiation

$$\begin{aligned} n^2 D^m c_{n+2}^{(i)} &= D^m \Big[D^2 + D - \Big(i + \frac{n-1}{2}\Big)\Big(i + \frac{n-3}{2}\Big) \Big] c_n^{(i-1)} \\ &= D^m \Big[D^2 + D - \Big(i - \frac{n-1}{2}\Big)\Big(i - \frac{n-3}{2}\Big) \Big] c_n^{(i+1)} . \end{aligned} \tag{38}$$

Nachdem die Größen $D^j c_1^{(i)}$ nach Newcombs Methode (für $n = 1$) berechnet worden sind, ergeben die Formeln (38) nach und nach die Werte von $D^j c_3^{(i)}$, $D^j c_5^{(i)}$ usw.

In einer späteren Abhandlung bemerkt *R. T. A. Innes*[44]), daß infolge (38) die Größen $c_3^{(i)}$, $c_5^{(i)}$, $c_7^{(i)}$, usw. nebst ihren Ableitungen eliminiert werden können. Die Koeffizienten der Störungsfunktion werden dann (siehe Nr. 22) linear zusammengesetzt aus den $b_1^{(i)}$ und ihren Ableitungen in bezug auf $\log \alpha$. Damit gewinnt man aber keine Vereinfachung in numerischer Hinsicht.

7. Koeffizienten von Cauchy. Aus den numerischen Werten der Funktionen (26), die *U. J. J. Leverrier*[45]) für die verschiedenen Kombinationen der Hauptplaneten gegeben hat, geht hervor, daß dieselben mit wachsender Ordnungszahl j abnehmen, wenn $\alpha < \frac{1}{2}$, daß sie dagegen zunehmen, wenn $\alpha > \frac{1}{2}$. In strenger Weise hat später *F. Tisserand*[46]) bewiesen:

$$\lim_{j=\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{d^j b_n^{(i)}}{d\alpha^j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha < \frac{1}{2}, \\ \infty, & \text{wenn } \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{39}$$

---

40) *C. F. Gauß,* Nachlaß, Werke 8, p. 84 (1813?).

41) *C. G. J. Jacobi,* Astr. Nachr. 28 (1848), p. 77, 78 = Werke 7, p. 156.

42) *P. A. Hansen,* Paris C. R. Suppl. 1 (1856), p. 163. [Eingereicht 1846.] Leipzig Ges. Wiss. Abh. 2 (1855), Nr. 5, p. 187.

43) *R. T. A. Innes,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 69 (1909), nr. 8, p. 635. Die Formel von Innes p. 635, l. 7 scheint von einem Druckfehler entstellt zu sein.

44) *R. T. A. Innes,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 70 (1909), nr. 2, p. 194.

45) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann. 2 (1856), p. 67—86.

46) *F. Tisserand,* Paris C. R. 90 (1880), p. 1021, 1093.

Diese Arbeit von Tisserand veranlaßte einige weitere Untersuchungen über den asymptotischen Wert der Funktion (26) für große j. *O. Callandreau*[47]) leitete das Hauptglied des asymptotischen Ausdruckes ab. Auf Grund einer sehr allgemeinen Methode, von der in Nr. 56 die Rede sein wird, hat *J. G. Darboux*[48]) die fünf ersten Glieder gegeben. Später hat *J. G. Darboux*[49]) sein Resultat auch in anderer Weise wiedergefunden.

Es folgt aus der eben besprochenen Eigentümlichkeit der Funktionen (26), daß die numerischen Werte der Koeffizienten der Störungsfunktion für große α als Differenzen von großen Zahlen erhalten werden, wenn diese Koeffizienten aus den Funktionen (26) aufgebaut sind. Um diesem Übelstand abzuhelfen, führte *A. L. Cauchy*[50]) andere Transzendenten ein. Er setzte

$$(40)\qquad \Theta_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{x=1+\varepsilon} (1-\alpha^2 x)^{-\frac{n}{2}-j} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}} x^{i+j-1}\, dx.$$

Es ist also, infolge von (19)

$$(41)\qquad \Theta_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}, j\right)} \frac{d^j \Theta_{i,0}^{(n)}}{(d\alpha^2)^j} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2}, j\right)} \frac{d^j \left(\frac{1}{2}\alpha^{-i} b_n^{(i)}\right)}{(d\alpha^2)^j}.$$

In hypergeometrischen Reihen ausgedrückt, wird

$$(42)\qquad \Theta_{i,j}^{(n)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i+j\right)}{(1, i+j)} F\left(\frac{n}{2}+j, \frac{n}{2}+i+j, i+j+1, \alpha^2\right).$$

Die Koeffizienten von Cauchy sind sehr eng mit den $c_n^{(i,j)}$ von Newcomb verwandt. Es ist in der Tat, infolge (28) und (42)

$$(43)\qquad \Theta_{i,j}^{(n)} = \frac{c_n^{(i,j)}}{2^{j+1}\left(\frac{n}{2}, j\right)\alpha^{\frac{n+2i+4j-1}{2}}}.$$

Durch partielle Integration der rechten Seite der Gleichung (40) erhielt *Cauchy*[51]) die Rekursionsformel

$$(44)\qquad (n-2)\Theta_{i,j}^{(n)} = 2(i+j+1)\Theta_{i,j+1}^{(n-2)} + (2j+n)\alpha^2 \Theta_{i,j+2}^{(n-2)}.$$

---

47) *O. Callandreau*, Paris C. R. 90 (1880), p. 1154, 1201.

48) *J. G. Darboux*, Paris C. R. 90 (1880), p. 1416.

49) *J. G. Darboux*, Paris C. R. 90 (1880), p. 1472.

50) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 15 (1842), p. 255, 301, 357, 478 = Œuvres (1) 7, p. 86, 101, 104, 121.

51) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 15 (1842), p. 483 = Œuvres (1) 7, p. 126 (Cauchy gibt eigentlich fehlerhaft $\Theta_{i-1,j+2}^{(n-2)}$ im letzten Glied der Gleichung (44)).

Mit ihrer Hilfe können die $\Theta_{i,j}^{(n)}$ mit den Indizes $n = 3, 5, \ldots$ berechnet werden, wenn die $\Theta_{i,j}^{(1)}$ bekannt sind. Die Rekursionsformel (44) spielt also dieselbe Rolle wie die Gleichung (37) von Innes. Die beiden Gleichungen sind aber nicht zusammenfallend.

Noch andere Rekursionsformeln zwischen den $\Theta_{i,j}^{(n)}$ wurden von *F. Tisserand*[52]) abgeleitet.

8. **Koeffizienten von Gyldén.** 25 Jahre später, aber wie es scheint, unabhängig von Cauchy, führte *H. Gyldén*[53]) die nach ihm genannten Koeffizienten $\gamma_j^{n,i}$ ein durch die nur wenig von Cauchys Gleichung (41) abweichende Definition

$$\gamma_j^{n,i} = \frac{\alpha^{n+i+2j}}{1 \cdot 2 \cdots j} \frac{d^j\left(\frac{1}{2}\alpha^{-i} b_n^{(i)}\right)}{(d\alpha^2)^j}. \tag{45}$$

Aus dieser Formel ergibt sich im Vergleich mit (41) und (43):

$$\gamma_j^{n,i} = \frac{\binom{n}{2}, j}{(1 \cdot j)} \alpha^{n+i+2j} \Theta_{i,j}^{(n)} = \frac{\alpha^{\frac{n+1}{2}}}{2^{j+1}(1, j)} c_n^{(i,j)}. \tag{46}$$

Aus den Rekursionsformeln (37) und (44) bzw. folgen also für die γ-Koeffizienten zwei entsprechende. Auf die zweite von diesen hat *H. v. Zeipel*[54]) die Aufmerksamkeit gelenkt. Mit ihrer Hilfe können die $\gamma_j^{3,i}$, $\gamma_j^{5,i}$, ... berechnet werden, wenn die $\gamma_j^{1,i}$ bekannt sind. Dieselben sind einfacher als die von *H. Gyldén*[55]) für denselben Zweck abgeleiteten.

Die Berechnung von $\gamma_j^{1,i}$ führt Gyldén auf die Berechnung anderer Transzendenten

$$\beta_h^{(2j+1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2h}\psi \, d\psi}{(\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\psi})^{2j+1}} \tag{47}$$

zurück.[53]) Der Integralausdruck (13) in der Definitionsgleichung (45) für $n = 1$ eingeführt, gibt ihm

$$\gamma_j^{1,i} = \frac{(\frac{1}{2}, j)}{(1, j)} \alpha^{i+2j+1} \beta_{i+j}^{(2j+1)}. \tag{48}$$

Infolge der ersten der Gleichungen (46) ist $\beta_{i+j}^{(2j+1)}$ nichts anderes als die von Cauchy eingeführte Funktion $\Theta_{i,j}^{(1)}$. Übrigens hatte auch

52) *F. Tisserand,* Paris C. R. 90 (1880), p. 557.

53) *H. Gyldén,* Astr. Nachr. 70 (1867), p. 151.

54) *H. v. Zeipel,* Stockholm, Arkiv för matematik etc. Bd. 7, Nr. 3 (1911), p. 1.

55) *H. Gyldén,* Stockholm, Bih. K. Vet. Akad. Handl. Bd. 7, Nr. 2 (1882), p. 51, 52; Orbites absolues 1 (1893), p. 386, 387.

Scheibner[56]) diese Transzendenten für die Entwicklung der Störungsfunktion angewandt. Aber H. Gyldén gebührt das Verdienst, geeignete Formeln für die Berechnung von $\beta_h^{(2j+1)}$ gegeben zu haben. Für diesen Zweck leitete er Rekursionsformeln ab, die als Spezialfälle (für $n = 1$) der Newcombschen Gleichungen (30) und (31) betrachtet werden können. Bei Auflösung derselben benutzte *H. Gyldén*[57])[58]) eine Methode, die nur in bezug auf die Bezeichnungen von dem Newcombschen Verfahren für $n = 1$ abweicht.

Es ist zu erwähnen, daß *P. Harzer*[59]) und *O. Callandreau*[60]) die Koeffizienten β nach der Formel (47) mittels mechanischer Quadraturen — in speziellen Fällen — leicht und genau berechnet haben.

Die Koeffizienten von Laplace können in verschiedenen Weisen durch die Gyldénschen β ausgedrückt werden. *J. C. R. Radau*[61]) hat gefunden:

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} K_\nu \alpha^{i+2\nu} \beta_{i+\nu}^{(n+2\nu)} = \alpha^i \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} L_\nu \beta_i^{(n+2\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} M_\nu \alpha^{i+2\nu} \beta_{i+\nu}^{(2n-1)},$$

wo K_ν, L_ν, M_ν gewisse rationale Zahlen sind, von welchen $K_\nu > 0$, $L_\nu > 0$, $(-1)^\nu M_\nu > 0$.

F. Tisserand[62]) drückte, von der Definitionsgleichung (45) für $n = 1$ ausgehend, $\frac{1}{\alpha} \gamma_j^{1,i}$ linear durch die $\alpha^k \frac{d^k b_1^{(i)}}{d\alpha^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, j)$ aus. In umgekehrter Weise hat *A. Wilkens*[63]) Ausdrücke der Form

$$\alpha^j \frac{d^j b_1^{(i)}}{d\alpha^j} = \sum_{k=0}^{j} N_k^{(i,j)} \frac{1}{\alpha} \gamma_k^{1,i}, \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

wo die $N_k^{(i,j)}$ *positive* ganze Zahlen sind, gegeben. Diese Formeln sind für die Berechnung der Ableitungen von $b_1^{(i)}$ zweckmäßiger als die Leverrierschen. Offenbar könnte man analoge Formeln auch für $n = 3, 5, \ldots$ ableiten.

56) *W. Scheibner*, Über die Berechnung einer Gattung von Funktionen, welche bei der Entwickl. der Störungsfunkt. erscheinen. Gotha 1853. (Diese Arbeit war mir nicht zugänglich.)

57) *H. Gyldén*, Stockholm, Bih. K. Vet. Akad. Handl. Bd. 6, Nr. 16 (1881), p. 22, 23.

58) *H. Gyldén*, Orbites absolues 1 (1893), p. 401.

59) *P. Harzer*, St Pét. mém. (7), 34 (1886), Nr. 12, p. 27, 125.

60) *O. Callandreau*, J. Éc. Polyt. (2) 7 (1902), p. 39.

61) *J. C. R. Radau*, Paris Bull. astr. 13 (1896), p. 7.

62) *F. Tisserand*, Traité de Méc. cél. 4 (1896), p. 384.

63) *A. Wilkens*, Astr. Nachr. 166 (1904), p. 209.

9. Koeffizienten von Radau. Um bei der Entwicklung der Störungsfunktion kleine Differenzen zwischen großen Zahlen zu vermeiden, führte auch *J. C. R. Radau*[64]) anstatt der Ableitungen der Laplaceschen Koeffizienten andere Transzendenten ein. Er setzte

$$\Delta b_n^{(i)} = b_n^{(i)} - \alpha b_n^{(i-1)},$$
$$\Delta^2 b_n^{(i)} = \Delta b_n^{(i)} - \alpha \Delta b_n^{(i-1)} = b_n^{(i)} - 2\alpha b_n^{(i-1)} + \alpha^2 b_n^{(i-2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nabla b_n^{(i)} = b_n^{(i)} - \alpha b_n^{(i+1)},$$
$$\nabla^2 b_n^{(i)} = \nabla b_n^{(i)} - \alpha \nabla b_n^{(i+1)} = b_n^{(i)} - 2\alpha b_n^{(i+1)} + \alpha^2 b_n^{(i+2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Auch diese Größen lassen sich, wie die vorher von Cauchy, Gyldén und Newcomb angewandten, als Produkte einer Potenz von α mit einer hypergeometrischen Reihe darstellen. Es ergibt sich die Relation:

$$\gamma_j^{n,i} = \frac{\left(\frac{n}{2}, j\right)}{(1, j)} \alpha^{n+j} \frac{1}{2} \Delta^j b_{n+2j}^{(i+j)}.$$

Für die Berechnung von Δb und ∇b hat Radau Rekursionsformeln gegeben.

10. Tafeln. Die Werte der im vorstehenden besprochenen Koeffizienten sind zum Teil tabuliert, und zwar etwa in dem Umfange, in dem sie für eine Entwicklung der Störungsfunktion bis auf Glieder 4. Grades in bezug auf die Exzentrizitäten und Neigungen (s. u.) nötig sind. Die vor allen wichtigen $b_1^{(0)}$ und $b_1^{(1)}$ berechnen sich infolge (21) mit Hilfe der Tafeln von *A. M. Legendre*[65]). Diese Tafeln geben $\log F_1$ und $\log E_1$ mit 12 bis 14 Dezimalen und mit 3 bis 4 Differenzen für die Werte $0^0{,}0$; $0^0{,}1$; $0^0{,}2$; ...; $89^0{,}9$; $90^0{,}0$ des Argumentes $\arcsin \alpha$.

Ausgedehnte Tafelwerke von *J. D. Runkle*[66]) geben mit fünf bis sieben Stellen die Werte der Funktionen

$$[\alpha^{2j-i}(1-\alpha^2)^j] \cdot \alpha^j \frac{d^j b_n^{(i)}}{d\alpha^j}$$

für $\alpha = 0{,}000$; $0{,}005$; $0{,}010$; ...; $0{,}745$; $0{,}750$.

Die Werte von $\log \beta_h^{(2j+1)}$ wurden mit vier bis sieben Stellen von *H. Masal*[67]) tabuliert für $\log \alpha = 9{,}30$; $9{,}31$; ...; $9{,}59$; $9{,}600$; $9{,}601$; ...; $9{,}850$; und für $j = 0, 1, 2, 3, 4$; $h = j, j+1, j+2, \ldots, 12$.

---

64) *J. C. R. Radau,* Obs. de Paris ann. 21 (1895), p. 22.

65) *A. M. Legendre,* Traité des fonc. ellipt. 2 Paris (1826), p. 221—243; Exercises du Calc. intégr. tome 3, Paris 1816, p. 125—147.

66) *J. D. Runkle,* Smiths. Contr. to Knowl. 9 Wash. 1857, Appendix (1855).

67) *H. Masal,* Stockholm Obs. Astr. iakttagelser. etc. 4, Nr. 3 (1891).

Endlich hat *H. Gyldén*[68]) sehr vollständige und bequeme Tafeln mit vier bis sieben Stellen von $\log \gamma_j^{n,i}$ für $\log \alpha = 9{,}620;\ 9{,}621;\ \ldots;$ $9{,}799;\ 9{,}800$ gegeben.

II. Kreisbahnen in geneigten Ebenen.

11. Koeffizienten $b^{i,j}$ von Jacobi. Wenn die Exzentrizitäten e und e' verschwinden, die Neigung J aber beliebig ist, wird die Entwicklung der Störungsfunktion immer noch verhältnismäßig einfach. Unter Einführung der Bezeichnungen

$$\mu = \cos^2\frac{J}{2}, \quad \nu = \sin^2\frac{J}{2}, \qquad (\mu + \nu = 1)$$

$$x = L - L', \quad y = L + L', \quad \xi = e^{x\sqrt{-1}}, \quad \eta = e^{y\sqrt{-1}},$$

wo L und L' die mittleren Längen vom gegenseitigen Knoten an gezählt bedeuten, ergibt sich

$$\sigma = \cos H = \mu\cos x + \nu\cos y = \tfrac{1}{2}\mu(\xi + \xi^{-1}) + \tfrac{1}{2}\nu(\eta + \eta^{-1}), \tag{49}$$

$$\Delta^2 : a'^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\sigma = D^2.$$

Die Aufgabe wird also, die Entwicklungen

$$D^{-1} = \tag{50}$$

$$b^{0,0} + 2\sum_{i=1}^{\infty} b^{i,0}\cos ix + 2\sum_{j=1}^{\infty} b^{0,j}\cos jy + 4\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b^{i,j}\cos ix\cos jy,$$

$$D^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} b^{i,j}\xi^i\eta^j, \qquad (b^{i,j} = b^{|i|,|j|}) \tag{51}$$

zu studieren. Die Koeffizienten $b^{i,j}$ sind Funktionen von α und J. Für die praktische Anwendung ist es erforderlich, diese Koeffizienten und ihre Ableitungen in bezug auf α berechnen zu können.

12. Integralausdrücke derselben. Die Koeffizienten $b^{i,j}$ können durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden. Es folgt aus der Entwicklung (50):

$$b^{i,j} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} D^{-1}\cos ix\cos jy\,dx\,dy = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{|\xi|=|\eta|=1}\int \frac{d\xi\,d\eta}{D\xi^{i+1}\eta^{j+1}}. \tag{52}$$

Von der oben besprochenen allgemeinen Gleichung (14) ausgehend hat *C. G. J. Jacobi*[69]) den Ausdruck (52) in den folgenden trans-

---

68) *H. Gyldén*, Astr. Ges. Publ. 21 (Leipzig 1896).

69) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 14 [Juli 1835] = Werke 6, p. 103.

formiert:

$$b^{i,j} = \frac{(\frac{1}{2}, i+j)}{(\frac{1}{2}, i)(\frac{1}{2}, j)} (\alpha\mu)^i (\alpha\nu)^j \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi D^{-2i-2j-1} \sin^{2i} x \sin^{2j} y \, dx \, dy.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, erstens daß die $b^{i,j} > 0$ sind, zweitens ihre annähernde Größenordnung.

13. Rekursionsformeln von Jacobi. Mit Hilfe der Identitäten

$$D^2 \frac{\partial D^{-1}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} D^{-1} \frac{\partial D^2}{\partial \xi} = 0, \qquad D^2 \frac{\partial D^{-1}}{\partial \eta} + \frac{1}{2} D^{-1} \frac{\partial D^2}{\partial \eta} = 0$$

leitete *C. G. J. Jacobi*[70]) zwei homogene lineare Relationen ab, durch welche $b^{i+1,j}$ und $b^{i,j+1}$ mittels $b^{i,j}$, $b^{i-1,j}$ und $b^{i,j-1}$ ausgedrückt werden. Durch Anwendung dieser Rekursionsformeln berechnen sich die $b^{i,j}$, sobald vier von ihnen, z. B. $b^{0,0}$, $b^{1,0}$, $b^{0,1}$, $b^{1,1}$, bekannt sind. Diese Berechnungsmethode ist aber nicht zweckmäßig. Die Jacobischen Rekursionsformeln sind in der Tat fehlervergrößernd wie die vorher behandelte Formel (24). Als Kontrollformel können aber jedenfalls diese Relationen angewandt werden.

14. Entwicklungen bei kleiner Neigung. Wenn die Neigung J hinreichend klein ist, so ist es erlaubt, nach Einführung von $\mu = 1 - \nu$ die Funktion D^{-1} nach Potenzen von ν zu entwickeln. In dieser Weise sind in der Tat *U. J. J. Leverrier*[71]) und *S. Newcomb*[72]) vorgegangen. Es ergibt sich

$$D^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}, m)}{(1, m)} \frac{[2\alpha\nu(\cos y - \cos x)]^m}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x]^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Nach Entwicklung der verschiedenen Glieder in trigonometrischen Reihen findet man die folgenden Reihen für $b^{i,j}$:

$$\begin{aligned} b^{i,0} &= \tfrac{1}{2} b_1^{(i)} - \tfrac{1}{4}\nu(\alpha b_3^{(i-1)} + \alpha b_3^{(i+1)}) \\ &\quad + \tfrac{3}{16}\nu^2(\alpha^2 b_5^{(i-2)} + 4\alpha^2 b_5^{(i)} + \alpha^2 b_5^{(i+2)}) - \cdots; \\ b^{i,1} &= \tfrac{1}{4}\nu\alpha b_3^{(i)} - \tfrac{3}{8}\nu^2(\alpha^2 b_5^{(i-1)} + \alpha^2 b_5^{(i+1)}) + \cdots; \\ b^{i,2} &= \tfrac{3}{16}\nu^2\alpha^2 b_5^{(i)} - \cdots; \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{53}$$

S. Newcomb[73]) hat diese Reihen bis zu ν^4 einschl. getrieben.

---

70) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 209 [Okt. 1835] = Werke 6, p. 124.
71) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 260.
72) *S. Newcomb*, Wash. Astr. Papers 3_1 (1884), p. 14.
73) *S. Newcomb*, Wash. Astr. Papers 5_1 (1895), p. 27.

Die obige Entwicklung von D^{-1} ist nur erlaubt, wenn

$$|\nu| < \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}. \tag{54}$$

Es wird sich später herausstellen, daß die Reihen (53) nur unter der Bedingung (54) konvergent sind. Bei größeren Neigungen müssen deshalb andere Entwicklungsmethoden angewandt werden.

15. Entwicklungen von Tisserand. Eine solche wurde schon von *U. J. J. Leverrier*[74]) angedeutet, aber erst von *F. Tisserand* durchgeführt. Dieser ging von der ersten der Formeln (4) für $n = 1$ aus und führte in diese die Entwicklung

$$\cos nH = \sum_{i,j} Q_{i\cdot j}^{(n)} \cos ix \cos jy$$

ein. Damit folgt:

$$b^{i,j} = \sum_{m=0}^{\infty} b_1^{(i+j+2m)} Q_{i,j}^{(i+j+2m)} \tag{55}$$

In mehreren Noten lieferte Tisserand[75]) allgemeine Ausdrücke für $Q_{0,0}^{(n)}$, $Q_{1,0}^{(n)}$, $Q_{0,1}^{(n)}$, $Q_{1,1}^{(n)}$ nach Potenzen von $\sin^2 J$ geordnet. Weiter zeigte er[76]), wie die $Q_{i\cdot i}^{(2m)}$ durch die Kugelfunktionen X_m und X_{m-1} ausgedrückt werden können. Wegen der Unzweckmäßigkeit der Jacobischen Rekursionsformeln suchte er ferner die allgemeine Form für $Q_{i\cdot j}^{(n)}$. Er ging dabei[77]) von der Identität

$$2 \cos nH = \frac{\sin(n+1)H}{\sin H} - \frac{\sin(n-1)H}{\sin H}$$

aus, definierte $R_{i\cdot j}^{(n)}$ als Funktionen von ν durch den Ansatz

$$\frac{\sin(n+1)H}{\sin H} = \sum_{i\cdot j} R_{i\cdot j}^{(n)} \cos ix \cos jy$$

und erhielt so

$$2 Q_{i\cdot j}^{(n)} = R_{i\cdot j}^{(n)} - R_{i\cdot j}^{(n-2)} \tag{56}$$

Durch Induktion wies er nach, daß

$$R_{i\cdot j}^{(i+j+2m)} = C_{i\cdot j}^{(i+j+2m)} \mu^i \nu^j F^2(-m, m+i+j+1, j+1, \nu), \tag{57}$$

wo $C_{i\cdot j}^{(i+j+2m)}$ ein numerischer Faktor ist.

---

74) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 331—333.

75) *F. Tisserand,* Paris C. R. 88 (1879), p. 97, 137, 201.

76) *F. Tisserand,* ibid. p. 1229.

77) *F. Tisserand,* Obs. de Paris ann. 15 (1880), p. C 12; Auszüge Paris C. R. 89 (1879), p. 553, 585.

Tisserand[78]) gab schließlich den asymptotischen Ausdruck

$$Q_{i\cdot j}^{(n)} \sim \frac{2(-1)^j}{n\pi} \cos nJ,$$

für große n, aber endliche i und j. Er ging dabei von dem asymptotischen Wert für $F(\alpha + n, -n, \gamma, x)$ aus, den *G. Darboux* als Beispiel seiner allgemeinen Methode zur Bestimmung asymptotischer Werte angeführt hatte. (Siehe später Nr. 56.)

Eine elegante Ableitung der Formel (57) wurde später von *T. J. Stieltjes*[79]) gegeben. In dem Polynom

$$U_n(\sigma) = \frac{\sin(n+1)H}{\sin H}, \qquad \text{wo } \sigma = \cos H,$$

setzte er, die Beziehung (49) verallgemeinernd:

$$\sigma = \cos\psi \cos\psi' \cos x + \sin\psi \sin\psi' \cos y.$$

Von der bekannten Differentialgleichung

$$(1-\sigma^2)U_n''(\sigma) - 3\sigma U_n'(\sigma) + n(n+2)U_n(\sigma) = 0$$

ausgehend leitete er dann für U_n als Funktion von x, y und ψ die folgende Gleichung ab:

$$(58)\quad \frac{\partial^2 U_n}{\partial\psi^2} + 2\cot\psi \frac{\partial U_n}{\partial\psi} + \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + n(n+2)U_n = 0.$$

Weiter setzte er

$$U_n = \sum T_{i\cdot j}^{(n)} (\cos\psi\cos\psi')^i (\sin\psi\sin\psi')^j \cos ix \cos jy$$

und erhielt so, infolge (58), für $T_{i\cdot j}$ eine hypergeometrische Differentialgleichung, aus der sich ergab

$$T_{i\cdot j}^{(n)} = C' F\Big(\frac{i+j-n}{2}, \frac{i+j+n+2}{2}, j+1, \sin^2\psi\Big),$$

unter C' eine Funktion nur von ψ' verstanden. Da ψ und ψ' in symmetrischer Weise in $T_{i\cdot j}^{(n)}$ eingehen, so wird also

$$T_{i\cdot j}^{(n)} = C_{i\cdot j}^{(n)} F\Big(\frac{i+j-n}{2}, \frac{i+j+n+2}{2}, j+1, \sin^2\psi'\Big) \cdot F\Big(\frac{i+j-n}{2}, \frac{i+j+n+2}{2}, j+1, \sin^2\psi\Big).$$

In dieser Formel

$$\psi = \psi' = \frac{J}{2}$$

setzend fand Stieltjes die Tisserandsche Gleichung (57) wieder.

---

78) *F. Tisserand,* ibid. p. 31.

79) *T. J. Stieltjes,* J. de Math. (4) 5 (1889), p. 55; Auszug Paris C. R. 95 (1882), p. 901, 1043. Vgl. auch Tisserands traité 1, p. 448—456.

16. Entwicklungen von Hansen. *P. A. Hansen*[80]) entwickelte $b^{i\cdot j}$ nach Potenzen von α und zeigte, daß die Koeffizienten dieser Reihen, von einem einfachen Faktor abgesehen, hypergeometrische Polynome von ν oder $-\frac{\nu}{\mu}$ sind. Der Beweis von Hansen ist kompliziert. *A. Cayley*[81]) hat später dieselbe Aufgabe einfacher behandelt. *F. Tisserand*[82]) ging von der Entwicklung

$$D^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\sigma),$$

wo $P_n(\sigma)$ Legendres Polynom ist, aus. Auf Grund der bekannten Differentialgleichung zweiter Ordnung für $P_n(\sigma)$ leitete Tisserand für P_n als Funktion von J, x und y folgende Differentialgleichung ab:

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial J^2} + \cot J \frac{\partial P_n}{\partial J} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

In dieser führte er die endliche Reihe

$$P_n(\sigma) = \sum_{i,j} A_{i\cdot j}^{(n)} \cos ix \cos jy$$

ein und erhielt für die so definierten Funktionen $A_{i\cdot j}^{(n)}$ von J eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. In dieselbe setzte er

$$A_{i\cdot j}^{(n)} = \mu^i \nu^j B_{i\cdot j}^{(n)},$$

und führte ν anstatt J als unabhängige Veränderliche ein. Für $B_{i\cdot j}^{(n)}$ ergab sich dann eine hypergeometrische Differentialgleichung. In solcher Weise fand Tisserand die Formel

$$(59)\quad A_{i\cdot j}^{(i+j+2m)} = k_{i\cdot j}^{(i+j+2m)} \mu^i \nu^j F(-2m, 2m+2i+2j+1, 2j+1, \nu)$$

wo $k_{i\cdot j}^{(i+j+2m)}$ eine Konstante ist, die er durch Bildung der Koeffizienten von $\nu^{i+j+2m} \cos ix \cos jy$ in $P_{i+j+2m}(\sigma)$ bestimmte.

Die Hansensche Entwickelung von $b^{i\cdot j}$ nach Potenzen von α ist also:

$$(60)\qquad b^{i\cdot j} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{i+j+2m} A_{i\cdot j}^{(i+j+2m)}$$

P. A. Hansen[83]) gibt für $A_{i\cdot j}^{(i+j+2m)}$ auch eine Form, wo das hyper-

80) *P. A. Hansen*, Leipzig Ges. Wiss. Abh. 2 (1855), p. 307—347.

81) *A. Cayley*, Lond. Astr. Soc. Mem. 28 (1860), p. 207—215.

82) *F. Tisserand*, Obs. de Paris ann. 18 (1885), p. C 1—11; Auszug Paris C. R. 97 (1883), p. 815. Vgl. auch traité 1, Nr. 197, p. 456—459.

83) *P. A. Hansen*, Leipzig Ges. Wiss. Abh. 2 (1855), p. 329.

geometrische Polynom $F\left(-2m, -2m-2i, 2j+1, -\frac{\nu}{\mu}\right)$ auftritt. Für die Koeffizienten dieser Polynome gibt er numerische Werte.[84]) Auch entwickelte Hansen[85]) das in (59) auftretende Polynom F nach cos der Vielfachen von J.

17. Andere Entwicklungen von Hansen. *P. A. Hansen*[85']) hat außerdem $b_p^{i,j}$ nach Potenzen von $\frac{\alpha}{(1 \pm \alpha)^2}$ und auch nach Potenzen von $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \beta$ entwickelt. Indessen macht Hansen darauf aufmerksam, daß diese Reihen für ein gegebenes α schlechter konvergieren als die Entwicklungen nach Potenzen von α. Hansen zeigte, wie die Koeffizienten der nach Potenzen von β geordneten Reihe sich leicht durch hypergeometrische Polynome mit dem Argumente $\nu^2 : \mu^2$ ausdrücken lassen. Hansens Resultat wurde durch mehrere Noten von *P. Appell*[86]), *R. Radau*[87]), *O. Backlund*[88]) bestätigt.

In Analogie mit (50) wird allgemein gesetzt

$$D^{-p} = \sum_{i \cdot j = -\infty}^{+\infty} b_p^{i,j} \cos ix \cos jy. \tag{61}$$

Um die Funktion $(1+\alpha^2)^{\frac{p}{2}} b_p^{i,j}$ nach Potenzen von β zu entwickeln, wurde zuerst die Funktion

$$\left(\frac{D^2}{1+\alpha^2}\right)^{-\frac{p}{2}} = (1 - 2\beta\sigma)^{-\frac{p}{2}}$$

nach dem Binomialsatz entwickelt. Nachdem für die verschiedenen Potenzen von σ ihre endlichen trigonometrischen Reihen nach cos ix und cos jy eingeführt waren, ergab sich die Hansensche Formel

$$b_p^{i,j} = (1+\alpha^2)^{-\frac{p}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{i+j+2m} \frac{\left(\frac{p}{2}, i+j+2m\right)}{(1,m)(1,i+m)(1,j)} \mu^{i+2m} \nu^j \cdot F\left(-m, -i-m, j+1, \frac{\nu^2}{\mu^2}\right). \tag{62}$$

---

84) Ibid. p. 357—370.

85) Ibid. p. 334.

85') Ibid. p. 347—352.

86) *P. Appell,* Paris C. R. 97 (1883), p. 1036.

87) *R. Radau,* Obs. de Paris ann. 18 (1883), p. D 14. Analyse: Paris Bull. astr. 1 (1884), p. 449. Auszüge Paris C. R. 97 (1883), p. 1130, 1275.

88) *O. Backlund.* Paris C. R. 97 (1883), p. 1470; vgl. *R. Radau,* Paris C. R. 97, p. 1548.

18. Appellsche hypergeometrische Entwicklungen. *P. Appell*[86]) hat gezeigt, daß die $b_p^{i\cdot j}$ mit Hilfe der von ihm[89]) eingeführten hypergeometrischen Reihen von zwei Veränderlichen dargestellt werden können. Unter Verwendung der Bezeichnung

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)x^m y^n}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} \tag{63}$$

ergibt sich, nach leichter Umformung, aus (62):

$$b_p^{i\cdot j} = (1+\alpha^2)^{-\frac{p}{2}} \frac{\left(\frac{p}{2}, i+j\right)}{(1, i)(1, j)} (\beta\mu)^i (\beta\nu)^j \cdot \tag{64}$$

$$F_4\left(\frac{p}{4}+\frac{i+j}{2}, \frac{p}{4}+\frac{i+j+1}{2}, i+1, j+1, (2\beta\mu)^2, (2\beta\nu)^2\right) \cdot$$

Wenn diese Reihe nach Potenzen von ν geordnet wird, findet man:

$$b_p^{i\cdot j} = (1+\alpha^2)^{-\frac{p}{2}} \frac{\left(\frac{p}{2}, i+j\right)}{(1, i)(1, j)} (\beta\mu)^i (\beta\nu)^j \cdot \tag{65}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\beta\nu)^{2n} \frac{\left(\frac{p}{2}+i+j, 2n\right)}{(1, n)(j+1, n)} F\left(\frac{p}{4}+\frac{i+j}{2}+n, \frac{p}{4}+\frac{i+j+1}{2}+n, i+1, (2\beta\mu)^2\right) \cdot$$

19. Fortsetzung. *F. Tisserand*[82])[90]) versuchte die Hansensche Formel (60) zu generalisieren und die allgemeinen Ausdrücke der Koeffizienten in den Entwicklungen von $b_p^{i\cdot j}$ nach Potenzen von α zu geben. Es gelang ihm zu beweisen, daß diese Koeffizienten im Spezialfalle $i = j$ durch hypergeometrische Polynome zweiter Ordnung von der Form

$$\sum_{m=0}^{-a} \frac{(a, m)(b, m)(c, m)}{(d, m)(e, m)(1, m)} (\sin^2 J)^m$$

dargestellt werden können.

P. Appell[86]) betrachtete im Ausdrucke (49) für σ, μ und ν als voneinander unabhängige Größen und zeigte, daß die in Frage stehenden Koeffizienten hypergeometrische Polynome von μ^2 und ν^2 sind. Nach Entwicklung der verschiedenen Glieder der Hansenschen Reihe (62) nach Potenzen von α fand Appell die Formel

$$b_p^{i\cdot j} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{i+j+2m} (-1)^m \frac{\left(\frac{p}{2}, m+i+j\right)}{(1, i)(1, j)(1, m)} \mu^i \nu^j \cdot \tag{66}$$

$$\cdot F_4\left(\frac{p}{2}+m+i+j, -m, i+1, j+1, \mu^2, \nu^2\right)$$

89) *P. Appell*, J. de Math. (3) 8 (1882), p. 173 (présenté à l'Acad. mars 1880).
90) *F. Tisserand*, Paris C. R. 97 (1883), p. 880.

Für die numerische Berechnung der Polynome F_4 hat *A. Lebeuf*[91]) einfache Rekursionsformeln abgeleitet.

In seiner Abhandlung über die hypergeometrischen Funktionen von zwei Veränderlichen hatte *P. Appell*[89]) gezeigt, daß die durch die Formel (63) definierte Funktion F_4 zwei homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügt. Von diesen Differentialgleichungen ausgehend fand *O. Callandreau*[92]), daß für die in (65) vorkommende Funktion F_4, nachdem $\mu = 1 - \nu$ gesetzt worden war, eine homogene, lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit den Singularitäten $\nu = 0, 1, \infty$ besteht. Bald darauf gelang es *P. Appell*[93]), diese Differentialgleichung dritter Ordnung wirklich zu bilden. Er zeigte auch, daß dieselbe für $i = j$ in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktionen zweiter Ordnung vom Argumente $4\nu(1-\nu)$ übergeht. Dadurch wurde ein schon von *F. Tisserand*[90]) gefundenes Resultat bestätigt. Endlich hat *R. Radau*[94]) die Polynome F_4 nach Potenzen von ν entwickelt und die komplizierten allgemeinen Ausdrücke der auftretenden Koeffizienten gebildet.

20. Berechnungsmethode von Sundman. Für die analytische Entwicklung der Störungsfunktion, wenn die Exzentrizitäten klein sind, braucht man nicht nur die numerischen Werte von $b^{i,j}$, sondern auch die Werte der Ableitungen dieser Funktionen in bezug auf α. *Für hinreichend kleine Neigungen* berechneten Leverrier, Newcomb u. a. die Werte dieser Ableitungen mit Hilfe der Reihen, die durch Differentiation der Formel (53) entstehen. Die in den §§ 15—19 besprochenen Entwicklungen von Tisserand, Hansen und Appell können wohl im allgemeinen für die Berechnung von $b^{i,j}$ angewandt werden, aber die durch Differentiation dieser Entwicklungen hervorgehenden Reihen konvergieren wenigstens für größere Werte von α zu langsam, um für die Berechnung der Ableitungen von $b^{i,j}$ brauchbar zu sein. Eine auch in den schwierigen Fällen vorzügliche Methode zur Berechnung der Funktionen

$$\frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^m b^{i,j}}{d\alpha^m} \tag{67}$$

ist von *K. F. Sundman*[95]) gegeben worden. Er betrachtete in $D^2\mu$

91) *A. Lebeuf*, Sur une nouvelle démonstration des polynomes Hansen-Tisserand, Thèse soutenue à la Sorbonne (1897), Nr. 11, p. 17; Analyse Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 74.

92) *O. Callandreau*, Paris C. R. 97 (1883), p. 1187.

93) *P. Appell*, J. de Math. (3) 10 (1884), p. 418.

94) *R. Radau*, Paris C. R. 97 (1883), p. 1275.

95) *K. F. Sundman*, Über die Störungen der kleinen Planeten usw. Akademische Abhandl. Helsingfors (1901), p. 24—36.

und ν als voneinander unabhängig und entwickelte D^{-1} nach Potenzen von ν. Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$D_0^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\mu\cos x,$$

$$D_0^{-n} = \frac{1}{2}B_n^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(i)}\cos ix$$

findet man leicht

$$D^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}, m)\,(2\alpha\nu\cos y)^m}{(1, m)\quad D_0^{2m+1}}$$

und

$$(68)\qquad 2b^{i,j} = \frac{(\frac{1}{2}, j)}{(1, j)}\nu^j\alpha^j B_{2j+1}^{(i)} + \frac{(\frac{1}{2}, j+2)}{(1,1)\,(1, j+1)}\nu^{j+2}\alpha^{j+2}B_{2j+5}^{(i)}$$
$$+ \frac{(\frac{1}{2}, j+4)}{(1,2)\,(1, j+2)}\nu^{j+4}\alpha^{j+4}B_{2j+9}^{(i)} + \cdots$$

Es sei nebenbei bemerkt, daß diese Entwicklung als Spezialfall der Formel (65) für $p = 1$ betrachtet werden kann.

Die Reihe (68) ist für beliebige Werte der Neigung konvergent. (Vgl. Nr. 35.)

Durch Differentiation der Sundmanschen Reihe (68) wird die Berechnung der Größen (67) auf die Berechnung von

$$(69)\qquad B_{n,l}^{(i)} = \frac{\alpha^l}{l!}\frac{d^l B_n^{(i)}}{d\alpha^l}$$

zurückgeführt.

Sundman bemerkt, daß die Größe $B_{n,l}^{(i)}$ der Koeffizient von $\sigma^l\cos ix$ in der Entwicklung von

$$P^{(n)} = [1 + \alpha^2(1+\sigma)^2 - 2\alpha(1+\sigma)\mu\cos x]^{-\frac{n}{2}}$$

in eine Fouriersche Reihe und nach Potenzen von σ ist. Nach Einführung der Größen $\varkappa$, γ, λ durch die Gleichungen

$$\varkappa^2(1+\gamma^2) = 1 + \alpha^2, \quad \varkappa^2\gamma = \alpha\mu, \quad \lambda = \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2} \qquad (0 < \gamma < 1)$$

ergibt sich:

$$P^{(n)} = \varkappa^{-n}[1 + \gamma^2(1+\sigma)^2 - 2\gamma(1+\sigma)\cos x + \lambda(2\sigma + \sigma^2)]^{-\frac{n}{2}}.$$

Wenn $b_n^{(i)}$ die Laplaceschen Koeffizienten mit dem Argumente γ bezeichnen, und wenn

$$b_{n,l}^{(i)} = \frac{\gamma^l}{l!}\frac{d^l b_n^{(i)}}{d\gamma^l}; \quad b_{n,0}^{(i)} = b_n^{(0)}; \quad b_{n,-q}^{(i)} = 0 \qquad (q > 0)$$

gesetzt wird, so ist also in endlicher Form:

$$x^n B^{(i)}_{n,l} = b^{(i)}_{n,l} - \frac{n}{2}\lambda\left[2b^{(i)}_{n+2,l-1} + b^{(i)}_{n+2,l-2}\right]$$
$$+ \frac{n}{2}\frac{n+2}{4}\lambda^2\left[4b^{(i)}_{n+4,l-2} + 4b^{(i)}_{n+4,l-3} + b^{(i)}_{n+4,l-4}\right]$$
$$- \frac{n}{2}\frac{n+2}{4}\frac{n+4}{6}\lambda^3\left[8b^{(i)}_{n+6,l-3} + 12b^{(i)}_{n+6,l-4}\right.$$
$$\left. + 6b^{(i)}_{n+6,l-5} + b^{(i)}_{n+6,l-6}\right] + \cdots$$

Hierdurch können die $B^{(i)}_{n,l}$ berechnet werden, nachdem die Werte der $b^{(i)}_{n,l}$ bekannt sind. Zur Berechnung dieser letzteren können die schon besprochenen Methoden von Leverrier oder Newcomb angewandt werden.

III. Entwicklungen nach Potenzen von e und e'.

21. Methode von Leverrier. Wenn die Exzentrizitäten e und e' klein sind, so können die Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen von e und e' entwickelt werden. Wir betrachten zuerst nur den Hauptteil $\frac{1}{\Delta}$ der Störungsfunktion.

Die für kreisförmige Bahnen geltende Entwicklung (51) kann offenbar in folgender Weise geschrieben werden

$$\frac{1}{\Delta_0} = \sum_{s,s'} A(s,s')\, c^{\sqrt{-1}(sL+s'L')}, \tag{70}$$

wo für s und s' alle positiven und negativen ganzen Zahlen, für welche $s+s'$ gerade ist, zu nehmen sind. Die Koeffizienten $A(s,s')$ sind durch die Formel

$$A(s,s') = \frac{1}{a'}\, b^{\frac{s'-s}{2},\frac{s'+s}{2}}\left(\frac{a}{a'}\right) \tag{71}$$

mittels der in Kap. II vorkommenden Funktionen $b^{i,j}$ ausgedrückt.

Theoretisch ist es leicht, von der speziellen Formel (70) zu der allgemeinen Entwicklung von $\frac{1}{\Delta}$ überzugehen. Infolge der Gleichungen (3) für die elliptische Bewegung ist in der Tat

$$r = a(1+x), \qquad v = M + y, \qquad v + \omega = L + y,$$

wo x und $\sqrt{-1}\,y$ Potenzreihen mit rationalen Zahlenkoeffizienten nach Potenzen von $ec^{\sqrt{-1}M}$ und $ec^{-\sqrt{-1}M}$ sind, die übrigens mit diesen Größen verschwinden. Für r' und v' gelten dieselben Formeln, wenn nur alle Größen gestrichelt werden. Wenn man also in der Gleichung (70) an die Größen

$$a, \quad a', \quad L, \quad L'$$

die Zusätze

$$ax, \quad a'x', \quad y, \quad y'$$

anbringt und nach Potenzen der Größen

$$(72) \qquad ec^{\pm\sqrt{-1}M}, \qquad e'c^{\pm\sqrt{-1}M'}$$

ordnet, so bekommt man eine Entwicklung von der Form

$$(73) \qquad \frac{1}{\Delta} = \sum A^{m,m'}_{q,q'}(s,s')\, e^m e'^{m'} c^{\sqrt{-1}(sL+s'L'+qM+q'M')},$$

wo

$$s, s', q, q' = -\infty, \cdots, +\infty, \qquad s+s' = \text{gerade},$$
$$m-|q|,\ m'-|q'| = 0, 2, 4, \cdots, +\infty.$$

Die Koeffizienten $A^{m,m'}_{q,q'}(s,s')$ für gegebene s und s' sind offenbar durch die Entwicklung von

$$(74) \qquad \frac{1}{a'(1+x')}\, b^{\frac{s'-s}{2},\frac{s'+s}{2}}\left(\alpha\left[1+\frac{x-x'}{1+x'}\right]\right) c^{\sqrt{-1}(sy+s'y')}$$
$$= \sum A^{m,m'}_{q,q}(s,s')\, e^m e'^{m'} c^{\sqrt{-1}(qM+q'M')}$$

nach Potenzen der Größen (72) definiert. Dieselben nehmen deshalb folgende Form an

$$(75) \qquad A^{m,m'}_{q,q}(s,s') = \frac{1}{a'}\sum_{k=0}^{m+m'} C_k \frac{\alpha^k}{k!}\frac{d^k b^{\frac{s'-s}{2},\frac{s'+s}{2}}}{d\alpha^k},$$

wo die C_k Polynome von s und s' vom Grade $m+m'-k$ sind mit rationalen Zahlenkoeffizienten, die von m, m', q, q' und k abhängen.

Eine für die Integration zweckmäßigere Form des Argumentes ergibt sich nach Einführung in (73) von

$$M = L-\omega, \quad M' = L'-\omega', \quad s = p-q, \quad s' = p'-q'.$$

Wenn die Neigung J zwischen den Bahnebenen hinreichend klein ist, so können, infolge von § 14, die $b^{i,j}$ und also auch die Koeffizienten (75) nach Potenzen von $\nu = \sin^2\frac{J}{2}$ entwickelt werden. Man bekommt so die Leverriersche Entwicklung

$$(76) \qquad \frac{1}{\Delta} = \sum A^{m,m',f}_{p,p',q,q'}\, e^m e'^{m'}\left(\sin\tfrac{1}{2}J\right)^{2f} c^{\sqrt{-1}(pL+p'L'-q\omega-q'\omega')},$$

wo

$$p, p', q, q' = -\infty, \cdots, +\infty, \qquad p+p'-q-q' = \text{gerade},$$
$$m-|q|, \quad m'-|q'|, \quad 2f-|p+p'-q-q'| = 0, 2, 4, \ldots, +\infty.$$

Die allgemeine Form der Koeffizienten geht aus der Gleichung

$$A^{m,m'}_{q,q'}(p-q, p'-q') = \sum_f A^{m,m',f}_{p,p',q,q'}\nu^f$$

in Verbindung mit den Formeln (75) und (53) hervor.

Die wirkliche Durchführung der eben skizzierten Entwicklungsmethode bietet natürlicherweise große Schwierigkeiten dar. Nach Lagrange und Laplace, welche die Glieder dritten Grades vernachlässigten, haben sich eine ganze Reihe von Astronomen mit diesem Probleme beschäftigt. In erster Linie muß eine Arbeit von *J. C. Burckhardt*[96]) erwähnt werden. In derselben wird die Entwicklung bis zu den Gliedern sechsten Grades in e und e' einschl., aber mit Vernachlässigung der Neigungsglieder, getrieben. Burckhardts Arbeit enthält wesentliche Fehler, und Burckhardt hat übrigens selbst eine genaue Kontrolle für nötig gehalten. Aber Burckhardts Verdienst ist es, gezeigt zu haben, daß eine Entwicklung in so großer Ausdehnung praktisch ausführbar ist. Die Frage wurde bald wieder von *J. Binet*[97]) aufgenommen. Er hat in einer an die Académie des Sciences 1812 eingereichten Abhandlung, die Pontécoulant im Manuskript vorgelegt war, die für eine Entwickelung bis zum siebenten Grade einschl. nötigen Vorbereitungen gegeben. Von Binets Untersuchungen scheint aber nur ein Auszug[97]) gedruckt zu sein. *G. de Pontécoulant*[98]) hat die Resultate von Burckhardt kontrolliert und außerdem durch Hinzufügung der Neigungsglieder vervollständigt. Die Entwicklung von Pontécoulant enthält keine Glieder siebenten Grades und von den Gliedern sechsten Grades nur diejenigen, für welche $|p + p'| = 6$. Von den Gliedern dritten, vierten und fünften Grades gibt Pontécoulant alle, wo $|p + p'| = 3$, 4 oder 5 ist, aber nur die von der Neigung unabhängigen, wo $|p + p'| = 0$, 1 oder 2. Eine vollständige Entwicklung bis zu den Gliedern sechsten Grades einschl. wurde von *B. Peirce*[99]) publiziert. Als Grundlage seiner Theorie der großen Planeten entwickelte *U. J. J. Leverrier*[100]) von neuem die Störungsfunktion und berücksichtigte dabei auch die Glieder siebenten Grades. Für alle so auftretenden Koeffizienten hat Leverrier die analytischen Ausdrücke gegeben. Außerdem hat er auch Tafeln geliefert, welche die numerischen Werte der in den meisten und wichtigsten Koeffizienten auftretenden Zahlenfaktoren geben. Unter Verwendung der von Leverrier eingeführten Methoden und Bezeichnungen hat *F. Boquet*[101]) alle Glieder achten Grades hinzugefügt.

---

96) *J. C. Burckhardt,* Paris Inst. (math.) mém. 1808, (1809), p. 36—67.

97) *J. Binet,* Paris, Soc. philomatique bulletin 3 (1812), p. 113. (Diese Abhandlung ist mir nicht zugänglich gewesen.)

98) *G. de Pontécoulant,* Théorie analytique du système du monde 3 (Paris 1834), p. 26—55, Nr. 6—16.

99) *B. Peirce,* Astr. Journ. 1 (1849), p. 1, 31, 33.

100) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 277—330, 358—383.

22. Methode von Newcomb. Die Rechnungen, durch welche Leverrier und Boquet zur Entwicklung der Störungsfunktion gelangten, müssen als sehr verwickelt bezeichnet werden. Von *S. Newcomb* wurde deshalb eine einfachere und systematischere Entwicklungsmethode vorgeschlagen[102]), und in allen Einzelheiten durchgeführt.[103]) Später hat *H. Poincaré*[104]) eine in mathematischer Hinsicht elegantere Darstellung der Newcombschen Methode geliefert. Von einer beliebigen Funktion $F(x, x')$ ausgehend schreibt Poincaré die Taylorsche Formel in symbolischer Weise:

$$F(x+\varepsilon, x'+\varepsilon') = e^{\varepsilon D+\varepsilon' D'} F(x, x'). \tag{77}$$

Auf der rechten Seite steht die Exponentialfunktion anstatt ihrer Entwicklung nach Potenzen von D und D'. In dieser gedachten Entwicklung hat ferner

$$D^n D'^{n'} F$$

die Bedeutung von

$$\frac{\partial^{n+n'} F}{\partial x^n \partial x'^{n'}}.$$

Poincaré nimmt an, daß ε und ε' Potenzreihen mehrerer Veränderlichen h und h' sind, die übrigens mit diesen h und h' verschwinden. Durch die Entwicklung

$$e^{\varepsilon D+\varepsilon' D'} = \sum_{m,m'=0}^{\infty} h^m h'^{m'} \Pi_{m,m'} \tag{78}$$

werden die Polynome $\Pi_{m,m'}$ vom Grade $m+m'$ in D und D' definiert. Für die Entwicklung von $F(x+\varepsilon, x'+\varepsilon')$ nach Potenzen von h und h' bekommt Poincaré in dieser Weise den symbolischen Ausdruck

$$F(x+\varepsilon, x'+\varepsilon') = \sum h^m h'^{m'} \Pi_{m,m'} \cdot F(x, x'). \tag{79}$$

Diese Grundsätze können auf die Entwicklung der Störungsfungsfunktion angewandt werden. Bei verschwindenden Exzentrizitäten betrachtet Newcomb $\frac{1}{\Delta}$ als Funktion von $\log a, L$, $\log a', L'$, die also die Rolle von x, x' spielen. Anstatt ε und ε' kommen hier die Größen

$$\varrho = \log \frac{r}{a}, \quad y = v - M, \quad \varrho' = \log \frac{r'}{a'}, \quad y' = v' - M'$$

101) *F. Boquet,* Développement de la fonction perturbatrice. Thèse de doctorat. Paris 1885, Analyse Bull. astr. 2 (1885), p. 386.

102) *S. Newcomb,* Paris C. R. 70 (1870), p. 385. American Journ. of Math. 3 (1880), p. 193—209.

103) Wash. Astr. Papers 3_1 (1884); 5_1 (1895).

104) *H. Poincaré,* Leçons de méc. cél. 2_1 (Paris 1907), p. 86.

in Betracht. Dieselben können infolge der Formeln (3) für die elliptische Bewegung nach Potenzen der kleinen Größen

$$ec^{\pm\sqrt{-1}M} \quad \text{und} \quad e'c^{\pm\sqrt{-1}M'} \tag{80}$$

entwickelt werden. Diese letzteren spielen also die Rolle von h und h'. Die auf der linken Seite der Formel (78) vorkommende Größe ist hier

$$c^{qD+yD_1+q'D'+y'D_1'} = \left(\frac{r}{a}\right)^{D} c^{(v-M)D_1} \cdot \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} c^{(v'-M')D_1'}, \tag{81}$$

wo D, D_1, D', D_1' die Differentialsymbole in bezug auf $\log a$, L, $\log a'$, L' bedeuten. Die Aufgabe wird also, die Größe (81) nach Potenzen der Größen (80) zu entwickeln. Poincaré setzt

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta} c^{\sqrt{-1}(v-M)\gamma} = \sum_{m,q} \Pi_q^m(\beta,\gamma)\, e^m c^{\sqrt{-1}qM} \tag{82}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \qquad m - |q| = 0, 2, 4, \ldots$$

und definiert dadurch die Polynome $\Pi_q^m(\beta,\gamma)$ vom Grade m in β und γ. Die in diesen Polynomen auftretenden Koeffizienten sind rationale Zahlen. Die der Formel (78) entsprechende Entwicklung wird nun

$$c^{qD+yD_1+q'D'+y'D_1'}$$

$$= \sum_{\substack{m,q\\ m',q'}} \Pi_q^m\left(D, \frac{D_1}{\sqrt{-1}}\right) \Pi_{q'}^{m'}\left(D', \frac{D_1'}{\sqrt{-1}}\right) e^m e'^{m'} c^{\sqrt{-1}(qM+q'M')}.$$

In Analogie mit (79) wird dann die Entwicklung der Störungsfunktion:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum e^m e'^{m'} c^{\sqrt{-1}(qM+q'M')} \Pi_q^m\left(D, \frac{D_1}{\sqrt{-1}}\right) \Pi_{q'}^{m'}\left(D', \frac{D_1'}{\sqrt{-1}}\right) \frac{1}{\Delta_0}.$$

Für $\frac{1}{\Delta_0}$ muß hier seine Entwicklung (70) eingesetzt werden. Nun ist aber

$$\left(\frac{D_1}{\sqrt{-1}}\right)^{n} \left(\frac{D_1'}{\sqrt{-1}}\right)^{n'} c^{\sqrt{-1}(sL+s'L')} = s^n s'^{n'} \cdot c^{\sqrt{-1}(sL+s'L')}.$$

Man findet also für $\frac{1}{\Delta}$ eine Entwicklung der Form (73), wo

$$A_{q,q'}^{m,m'}(s, s') = \Pi_q^m(D, s)\, \Pi_{q'}^{m'}(D', s') A(s, s').$$

Diese Formel kann noch etwas vereinfacht werden. Die Koeffizienten $A(s, s')$ der Entwicklung (70) sind in der Tat homogene Funktionen vom Grade -1 von a und a'. Es ist also

$$a\frac{\partial A}{\partial a} + a'\frac{\partial A}{\partial a'} = -A,$$

d. h.

$$D + D' = -1,$$

d. h.

$$D' = -D-1.$$

Unter Verwendung der Bezeichnung

$$\Pi_{q,q'}^{m,m'}(D,s,s') = \Pi_q^m(D,s)\Pi_{q'}^{m'}(-D-1,s') \tag{83}$$

bekommt man also für die Bildung der allgemeinen Koeffizienten der Entwicklung (73) die Gleichung

$$A_{q,q'}^{m,m'}(s,s') = \Pi_{q,q'}^{m,m'}(D,s,s')\cdot A(s,s'). \tag{84}$$

Die rechte Seite ist hier eine homogene lineare Funktion von $A(s,s')$ und deren Ableitungen nach $\log a$. Die Entwicklung der Störungsfunktion ist also auf die Bildung der Polynome Π zurückgeführt. Die Polynome $\Pi_{q,q'}^{m,m'}$ werden die *Differentialoperatoren von Newcomb* genannt.

Für die sukzessive Bildung der Polynome $\Pi_q^m(\beta,\gamma)$ hat *S. Newcomb*[105]) Rekursionsformeln abgeleitet. Dieselben können durch Differentiation der Definitionsgleichung (82) nach $\log e$ gefunden werden. Es ergibt sich in dieser Weise die Identität

$$\sum_{m,q}\Pi_q^m(\beta,\gamma)\,m e^m c^{\sqrt{-1}qM}$$

$$=\left(\beta e\frac{\partial\varrho}{\partial e}+\gamma e\frac{\partial\sqrt{-1}y}{\partial e}\right)\sum_{m,q}\Pi_q^m(\beta,\gamma)\,e^m c^{\sqrt{-1}qM}.$$

Nun sind aber $e\frac{\partial\varrho}{\partial e}$ und $e\frac{\partial\sqrt{-1}y}{\partial e}$ bekannte Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten, die nach Potenzen der Größen $ec^{\pm\sqrt{-1}M}$ fortschreiten und mit e verschwinden. Der Vergleich der Koeffizienten von e^m in den beiden Seiten der eben angeführten Identität gibt also für $\Pi_q^m(\beta,\gamma)$ einen homogenen linearen Ausdruck aus den Polynomen Π^{m-1}, Π^{m-2}, ... niedrigeren Grades als m. Die Koeffizienten dieses linearen Ausdruckes sind offenbar homogen und linear in bezug auf β und γ mit Koeffizienten, die rationale Zahlen sind. In der erwähnten Abhandlung Newcombs[105]) findet man (S. 27—29) die Polynome $\Pi_q^m(D,-i)$ für $m\leq 8$. Ebenso findet man (S. 30—32) die Polynome $\Pi_q^m(-D-1,i)$. Weiter hat Newcomb (S. 32—42) die Polynome $\Pi_{q,q'}^{m,m'}(D,-i,i)$ für $m+m'\leq 7$ und (S. 42—48) die Polynome $\Pi_{q,q'}^{m,m'}(D,-i+1,i+1)$ für $m+m'\leq 5$ gegeben.

---

105) *S. Newcomb*, Wash. Astr. Papers 5_1 (1895), p. 13.

Für die Bildung der Polynome Π_q^m hat *P. H. Cowell*[106]) die Formel

$$\Pi_q^m(\beta,\gamma) = \sum_{m'} \sum_{q'} \Pi_{q'}^{m'}(\beta,0)\,\Pi_{q-q'}^{m-m'}(0,\gamma) \tag{85}$$

vorgeschlagen, welche unmittelbar aus der Definitionsgleichung (82) folgt. In der Doppelsumme nimmt m' die Werte 0, 1, 2, ..., m. Für ein gegebenes m' muß q' alle diejenigen Zahlenwerte durchlaufen, für welche $m' - |q'|$ und $m' - m - |q - q'|$ gerade positive Zahlen oder Null sind. Man brauchte also im voraus nur die Polynome $\Pi_q^m(\beta,0)$ und $\Pi_q^m(0,\gamma)$ zu kennen. Diese Cowellsche Methode ist besonders bequem, wenn man ein isoliertes Polynom Π von hohem Grade abzuleiten wünscht.

A. S. Chessin[107]) hat eine Rekursionsformel

$$\Pi_q^m(\beta,\gamma) = \sum_{k=0}^{m} \Phi_q^{m,k}(\gamma)\,\Pi_{m-k}^{m-k}(\beta,\gamma) \tag{86}$$

abgeleitet, in welcher die $\Phi_q^{m,k}(\gamma)$ unabhängig von β und Polynome von γ sind. Der Grad dieses Polynoms ist nie höher als die kleinere der Zahlen k und $\frac{m-q}{2}$. Infolge dieser Relation und der Gleichungen (83) und (84) findet Chessin die Formel

$$A_{q,q'}^{m,m'}(s,s') = \sum_{k=0}^{m} \sum_{k'=0}^{m'} \Phi_q^{m,k}(s)\,\Phi_{q'}^{m',k'}(s')\,A_{m-k,\,m'-k'}^{m-k,\,m'-k'}(s,s'). \tag{87}$$

Es wäre also nur nötig, die Koeffizienten $A_{n,n'}^{n,n'}(s,s')$ direkt zu berechnen. Die Formel (87) ist besonders wichtig und vereinfacht in hohem Grade die Berechnung von $A_{m-2,\,m'}^{m,m'}(s,s')$ und $A_{m,\,m'-2}^{m,m'}(s,s')$, da in diesen Fällen die Anzahl der Glieder nur $m+1$ und $m'+1$ ist, während die Polynome Φ höchstens ersten Grades sind.

Von den Newcombschen Rekursionsformeln ausgehend hat *R. T. A. Innes*[107']) einige andere abgeleitet. Dieselben drücken $\Pi_m^m(\beta,\gamma)$ und $\Pi_{m-2}^m(\beta,\gamma)$ linear durch $\Pi_0^0(\beta,\gamma)$, $\Pi_1^1(\beta,\gamma)$, ... und $\Pi_{m-1}^{m-1}(\beta,\gamma)$ aus. Innes gibt das allgemeine Gesetz der Koeffizienten, die linear in bezug auf β und γ sind.

Mit Hilfe einiger Rekursionsformeln und Differentialgleichungen für die Koeffizienten $X_i^{n,s}$ von Hansen (siehe Nr. 29) hat schließlich *H. v. Zeipel*[107'']) eine allgemeine und doch aus nur wenigen Gliedern

106) *P. H. Cowell,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 69 (1909), p. 170.
107) *A. S. Chessin,* Astron. Journ. 19 (1898), p. 73, 159.
107') *R. T. A. Innes,* Trans. Roy. Soc. South Africa 2, (1912), p. 301.
107'') *H. v. Zeipel,* Stockholm K. Vet. Akad. Arkiv 8 No. 19 (1912), p. 6.

zusammengesetzte Relation zwischen den Operatoren von Newcomb gegeben:

$$4m\Pi_q^m(\beta,\gamma)=(-2\beta+4\gamma)\Pi_{q-1}^{m-1}(\beta,\gamma+1)-(2\beta+4\gamma)\Pi_{q+1}^{m-1}(\beta,\gamma-1)$$
$$+(-\beta+\gamma)\Pi_{q-2}^{m-2}(\beta,\gamma+2)+(-2\beta+4m-8)\Pi_q^{m-2}(\beta,\gamma)$$
$$-(\beta+\gamma)\Pi_{q+2}^{m-2}(\beta,\gamma-2).$$

Hieraus ergibt sich für $q=m$:

$$4m\Pi_m^m(\beta,\gamma)=(-2\beta+4\gamma)\Pi_{m-1}^{m-1}(\beta,\gamma+1)+(-\beta+\gamma)\Pi_{m-2}^{m-2}(\beta,\gamma+2).$$

Für die Berechnung von Π_{m-2}^m gibt Zeipel die ebenso einfache Formel:

$$4\Pi_{m-2}^m(\beta,\gamma)=-(2\beta+4\gamma)\Pi_{m-1}^{m-1}(\beta,\gamma-1)$$
$$-(\beta+4\gamma+m-2)\Pi_{m-2}^{m-2}(\beta,\gamma).$$

Nach derselben Methode hat *S. Newcomb*[108]) auch eine Entwicklung der Störungsfunktion hergestellt, wo die Argumente der trigonometrischen Funktionen nicht aus den mittleren, sondern aus den exzentrischen Anomalien und Längen zusammengesetzt sind. Die Koeffizienten dieser Entwicklung sind nach Potenzen von ε und ε' geordnet, wo

$$e=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\qquad e'=\frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}.$$

Für die Differentialoperatoren $\Pi_{q,0}^{m,0}$ und $\Pi_{0,q'}^{0\ m'}$ $(m,m'\leq 7)$ und für $\Pi_{q,q'}^{m,m'}$ $(m+m'\leq 6)$ hat Newcomb die analytischen Ausdrücke gegeben. Weiter hat er die numerischen und die logarithmischen Werte der Koeffizienten dieser Operatoren (für $m+m'\leq 6$) in Tafeln zusammengestellt. In diesem Falle ist die Herleitung der Operatoren einfacher, da ϱ und y besonders einfache Funktionen der exzentrischen Anomalie sind. Doch scheint die Berechnung der Koeffizienten $A_{q,q'}^{m,m'}(s,s')$ ebenso mühsam zu sein bei dieser Entwicklungsart (wenn man von den Tafeln absieht), wie bei der schon betrachteten Entwicklung nach den mittleren Anomalien. In seiner Arbeit über die Bewegung der vier inneren Hauptplaneten hat Newcomb jedoch zuerst nach den exzentrischen Anomalien entwickelt, um erst vor der Integration mit Hilfe der Besselschen Funktionen (siehe Nr. 44) zu den mittleren Anomalien überzugehen. Bei Wahl der exzentrischen Anomalien ist die Entwicklung der Störungsfunktion rascher konvergent, und die Zahl der nötigen Glieder wird deshalb viel kleiner als bei der Entwicklung nach den mittleren Anomalien. Dieser Vorteil scheint

108) *S. Newcomb,* Wash. Astr. Papers 3_1 (1884).

aber durch den notwendigen Übergang zu den mittleren Anomalien mit Anwendung der Besselschen Funktionen neutralisiert zu werden.

Die von Cowell abgeleitete Formel (85) ist offenbar auch für die bei der Anwendung der exzentrischen Anomalien auftretenden Operatoren gültig.

Es erübrigt noch zu erwähnen, daß *A. S. Chessin*[109])[110]) für die Entwicklung nach den exzentrischen Anomalien Rekursionsformeln gegeben hat, die analog und sogar einfacher sind als die Gleichungen (86) und (87). Endlich hat Chessin[109]) auch einige Rekursionsformeln für die Berechnung der Koeffizienten $A^{n,n'}_{n,n'}(s, s')$ publiziert.

23. Entwicklungen von Cauchy. Von *A. L. Cauchy* wurden zwei Methoden vorgeschlagen, die derjenigen von Leverrier ziemlich verwandt sind. In der ersten[111]) zeigte Cauchy, wie die Koeffizienten (75) durch die Transzendenten $b_p^{i\cdot j}$ anstatt durch $b_1^{i\cdot j}$ und seine Ableitungen ausgedrückt werden können. Gleichzeitig hat er für die Berechnung von $b_p^{i\cdot j}$ die später von Sundman angewandten Entwicklungen von der Form (68) vorgeschlagen.

Bei seiner zweiten Methode[50]) entwickelte Cauchy, wie Leverrier, $\frac{1}{\Delta}$ nach Potenzen von $\nu = \sin^2\frac{J}{2}$. Bei den darauffolgenden Entwicklungen von

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v + \omega - v' - \omega')]^{-\frac{n}{2}}$$

führte er die vom Argumente r/r' abhängigen Laplaceschen Koeffizienten $b_n^{(i)}\left(\frac{r}{r'}\right)$ ein. Dann wurden die Funktionen

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^{-i} b_n^{(i)}\left(\frac{r}{r'}\right) \tag{88}$$

nach Potenzen der Größe

$$\frac{r^2}{r'^2} - \frac{a^2}{a'^2} \tag{89}$$

entwickelt, wodurch die im § 7 betrachteten Transzendenten $\Theta^{(n)}_{i\cdot j}$ eingeführt wurden. In dieser Weise werden die Koeffizienten $A^{m,m',f}_{p,p',q,q'}$ der Entwicklung (76) linear durch die $\Theta^{(2f+1)}_{i\cdot j}$ ausgedrückt. Diese von Cauchy skizzierte Methode ist aber nie in allen Einzelheiten ausgeführt worden.

---

109) *A. S. Chessin,* Astron. Journ. 14 (1894), p. 105, 153.

110) *A. S. Chessin,* Astron. Journ. 20 (1899), p. 73.

111) *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 11 (1840), p. 453, 501 = Œuvres (1) 5, p. 288, 311.

24. Entwicklung von Gyldén. Die von *H. Gyldén* angewandte Entwicklungsmethode ist der zweiten eben besprochenen von Cauchy sehr ähnlich. Gyldén[53]) entwickelte zuerst Δ^{-1} in eine Fourriersche Reihe nach Vielfachen des Winkels H zwischen den beiden Planeten. Die so auftretenden Funktionen (88) (für $n = 1$) entwickelte er nach Potenzen der kleinen Größe (89) und führte so die Transzendenten $\beta_{i+j}^{(2j+1)}$ ein, die mit den Funktionen $\Theta_{i,j}^{(1)}$ von Cauchy zusammenfallen. Später kam Gyldén[55]), bei der Entwicklung von Δ^{-n}, auf die Transzendenten $\gamma_j^{n,i}$. Der Zusammenhang derselben mit Cauchys $\Theta_{i,j}^{(n)}$ wurde schon in § 8 hervorgehoben. Als unabhängige Veränderliche verwandte Gyldén nicht die Zeit, sondern die wahre Anomalie des gestörten Planeten. Zuerst bildete er die besonders einfache „fundamentale Entwicklung", welche nach den Vielfachen der beiden wahren Anomalien fortschreitet. Diese Form ist aber für die Integration nicht geeignet. Deshalb wurde die wahre Anomalie des störenden Planeten mittelst der Keplerschen Gleichung durch die wahre Anomalie des gestörten Planeten ausgedrückt. In dieser Weise entstand Gyldéns „diastematische Entwicklung" der Störungsfunktion. Die Entwicklungsmethode Gyldéns ist Gegenstand einer Reihe von Untersuchungen anderer Astronomen gewesen. Betreffs derselben wird hier auf den Artikel von *K. Sundman* verwiesen (VI 2, Nr. 14). Hier sei nur gesagt, daß die „diastematische Entwicklung" von Gyldén analytisch komplizierter ist, als die Entwicklung (76) von Leverrier und Newcomb. Bei Gyldén sind in der Tat die Koeffizienten $\gamma_j^{n,i}$ mit Faktoren multipliziert, welche Polynome des Verhältnisses der beiden mittleren Bewegungen sind, während bei Leverrier und Newcomb die Laplaceschen Koeffizienten und ihre Ableitungen nur mit rationalen Zahlen multipliziert vorkommen. Durch die Wahl der wahren (oder exzentrischen) Anomalie des einen Planeten als unabhängiger Veränderlicher anstatt der Zeit t wird die *analytische* Entwicklung der Störungsfunktion nur verwickelter.

25. Entwicklung von Hill. Unter der Annahme, daß die Bahnebenen zusammenfallen, hat *G. W. Hill*[112]) die negativen ungeraden Potenzen von Δ in trigonometrischen Reihen nach den Vielfachen der wahren Anomalien entwickelt. Er geht dabei von der Reihe

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{r'}\right)^n \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_n^{(i)} e^{\sqrt{-1}\, iH}$$

112) *G. W. Hill*, Coll. Math. Works 4 (1907), p. 398—407.

aus. In der Taylorschen Entwicklung

$$B_n^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \frac{d^j b_n^{(i)}}{d\alpha^j} \left(\frac{r}{a}\frac{a'}{r'} - 1\right)^j$$

vernachlässigt er alle Glieder, wo $j > 8$. Dann wird approximativ nach Entwicklung von $\left(\frac{r}{a}\frac{a'}{r'} - 1\right)^j$:

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^n B_n^{(i)} = \sum_{m=0}^{8} K_{n,m}^{(i)} \left(\frac{r}{a}\right)^m \left(\frac{a'}{r'}\right)^{n+m},$$

wo die K einfache lineare Ausdrücke von den Größen (26) sind. Für die Potenzen von r und r' führt Hill ihre Fourierschen Reihen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \Phi_q^{(m)}(e)\, c^{\sqrt{-1}\, q v}$$

ein und findet endlich

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{i,q,q'=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{8} K_{n,m}^{(i)} \Phi_q^{(m)}(e)\, \Phi_{q'}^{(-n-m)}(e') \right\} c^{\sqrt{-1}(qv + q'v' + iH)}$$

Die Größe $\Phi_q^m(e)$ entwickelt Hill bis zum achten Grade einschl. für $m = -9, -8, \ldots, +7, +8$.

26. Gruppenentwicklungen von Bohlin. Um die angenäherten Störungen der kleinen Planeten gruppenweise zu berechnen, hat *K. Bohlin*[113]) den Vorschlag gemacht, die Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung der Störungsfunktion nicht nur nach Potenzen von e, e' und $\sin^2 \frac{J}{2}$ zu entwickeln, sondern auch nach den Potenzen einer kleinen Größe w, welche durch die Gleichung definiert ist:

$$\mu = \mu_0 (1 - w),$$

wo μ das Verhältnis der beiden mittleren Bewegungen und μ_0 eine einfache rationale Zahl wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\cdots$ ist. Solche Entwicklungen sind von *K. Bohlin*[113]) im Falle von $\mu_0 = \frac{1}{3}$, von *H. v. Zeipel*[114]) für $\mu_0 = \frac{1}{2}$ und von *H. G. Block*[115]) für $\mu_0 = \frac{1}{4}$ ausgeführt worden. Endlich hat *K. G. Olsson*[116]) analoge Entwicklungen nach Potenzen von

$$e - \arcsin 12^0, \quad e', \quad \sin^2 \frac{J}{2} - \sin^2 6^0, \quad 1 - 3\mu$$

---

113) *K. Bohlin,* Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsaliensis (3) 17 (1896). Siehe auch: Sur le développement des perturbations planétaires. Stockholm 1902.

114) *H. v. Zeipel,* St. Pét. mém. (8) 12 Nr. 11 (1902).

115) *H. G. Block,* Stockholm Obs. Astr. Jakttagelser etc. 8, Nr. 5 (1907).

116) *K. G. Olsson,* Stockholm Bih. K. Vet. Akad. Handl. 25, Nr. 8 (1900).

veröffentlicht. Bei allen diesen Arbeiten wurde nach Hansens Vorgang die exzentrische Anomalie des gestörten Planeten als unabhängige Veränderliche verwandt.

In diesem Zusammenhang ist auch zu erwähnen, daß *H. Ludendorff*[117]) Entwicklungen gegeben hat, mit deren Hilfe die Gyldénschen $\beta_h^{(2j+1)}$ für $j = 0$; $h = 0, 1, 2, \ldots, 12$ und für $j = 1, 2, 3$; $h = 12$ berechnet werden können, wenn $\log \alpha$ nahe $= 9{,}880$ ist (die Hildagruppe der kleinen Planeten).

27. Zweiter Teil der Störungsfunktion. Von den bisher behandelten Entwicklungen für den Hauptteil $\frac{1}{\Delta}$ der Störungsfunktion ist es leicht, zu den entsprechenden Entwicklungen der vollständigen Störungsfunktion R oder R' [vgl. (1)] überzugehen. Für den zweiten Teil der Störungsfunktion R ergibt sich für verschwindende Exzentrizitäten der Ausdruck

$$-\frac{a}{2a'^2}\left\{\mu c^{\sqrt{-1}(-L+L')} + \mu c^{\sqrt{-1}(L-L')} + \nu c^{\sqrt{-1}(L+L')} + \nu c^{\sqrt{-1}(-L-L')}\right\}.$$

Um aus der Entwicklung (70) für $\frac{1}{\Delta_0}$ die entsprechende Reihe für R_0 abzuleiten, müssen also in der Formel (71) an $b^{\pm 1,0}$ und $b^{0,\pm 1}$ folgende Korrektionen angebracht werden

$$\delta b^{\pm 1,0} = -\tfrac{1}{2}\alpha\mu, \qquad \delta b^{0,\pm 1} = -\tfrac{1}{2}\alpha\nu.$$

Die entsprechenden Korrektionen für den Übergang von $\frac{1}{\Delta_0}$ zu R_0' sind offenbar:

$$\delta' b^{\pm 1,0} = -\tfrac{1}{2}\alpha^{-2}\mu, \qquad \delta' b^{0,\pm 1} = -\tfrac{1}{2}\alpha^{-2}\nu.$$

Infolge der Ausdrücke (53) von $b^{i,j}$ müssen deshalb an die Laplaceschen Koeffizienten folgende Verbesserungen angebracht werden

$$\text{(90)} \qquad \begin{aligned} \delta b_1^{(\pm 1)} &= -\alpha, & \delta(\alpha b_3^{(0)}) &= -2\alpha; \\ \delta' b_1^{(\pm 1)} &= -\alpha^{-2}, & \delta'(\alpha b_3^{(0)}) &= -2\alpha^{-2}. \end{aligned}$$

Durch Differentiation dieser Ausdrücke ergeben sich leicht diejenigen Verbesserungen, welche an die, in den von *U. J. Leverrier*[118]), *S. Newcomb*[119]) und *H. Gyldén*[120]) gegebenen analytischen Entwicklungen von $\frac{1}{\Delta}$, auftretenden, von α abhängigen Transzendenten anzubringen sind, wenn man von dem Hauptteil $\frac{1}{\Delta}$ zu der vollständigen Störungsfunktion R bzw. R' überzugehen wünscht.

---

117) *H. Ludendorff*, Astr. Nachr. 140 (1896), p. 197.
118) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 273.
119) *S. Newcomb*, Wash. Astron. Papers 3_1 (1884), p. 56.
120) *H. Gyldén*, Orbites absolues etc. 2, Stockholm (1908), p. 173, 178.

28. Kanonische Elemente. Wenn man in den Differentialgleichungen kanonische Elemente benutzt, was in vieler Beziehung vorteilhaft ist, so empfiehlt es sich, auch die Störungsfunktion nach kanonischen Elementen zu entwickeln.

Ch. E. Delaunay[121]) hat in seiner Mondtheorie anstatt der elliptischen Elemente die kanonischen Elemente

$$L,\ G,\ \Theta,\ l,\ g,\ \theta \tag{91}$$

angewandt, wo

$$L = \sqrt{a},\quad G = \sqrt{a(1-e^2)},\quad \Theta = \sqrt{a(1-e^2)}\cos i,$$

während i die Neigung der Bahn, l die mittlere Anomalie, g die Länge des Perihels vom aufsteigenden Knoten, θ die Länge dieses Knotens bedeutet. Derselben Elemente (91) hat sich übrigens, wenigstens teilweise, *C. G. J. Jacobi*[122]) bedient bei seiner Integrationsmethode des Problems der zwei Körper. Von *H. Poincaré*[123]) wurden zwei andere kanonische Elementensysteme

$$\Lambda,\ H,\ Z,\ \lambda,\ h,\ \zeta \tag{92}$$

und

$$\Lambda,\ \xi,\ p,\ \lambda,\ \eta,\ q \tag{93}$$

eingeführt. Hier ist (mit β einen von den Massen abhängigen Faktor bezeichnend)

$$\Lambda = \beta L,\qquad H = \beta(L-G),\qquad Z = \beta(G-\Theta),$$
$$\lambda = l+g+\theta,\qquad h = -g-\theta,\qquad \zeta = -\theta,$$
$$\xi = \sqrt{2H}\cos h,\qquad \eta = \sqrt{2H}\sin h,$$
$$p = \sqrt{2Z}\cos\zeta,\qquad q = \sqrt{2Z}\sin\zeta.$$

Dieselben Elemente wurden übrigens ungefähr gleichzeitig von *P. Harzer*[124]) in Anwendung gebracht. Die Elemente (93) sind den Elementen (91) und (92) vorzuziehen. Die Elemente ξ und η sind nämlich von der Größenordnung der Exzentrizität, p und q von der Größenordnung der Neigung i. Weiter können $e\cos h$, $e\sin h$, $i\cos\zeta$, $i\sin\zeta$ nach Potenzen von ξ, η, p, q entwickelt werden. Es folgt daraus für die Störungsfunktion eine Entwicklung nach den Vielfachen der

---

121) *Ch. E. Delaunay,* Paris Mémoires de l'Acad. d. Sciences 28 (1860); 29 (1867).

122) *C. G. J. Jacobi,* Vorlesungen über Dynamik (1842—43): 24. Vorl. = Werke 7, p. 183—189.

123) *H. Poincaré,* Méthodes nouvelles etc. 1, Paris (1892), p. 30.

124) *P. Harzer,* Die säkularen Veränderungen der Bahnen der großen Planeten. Preisschr. der F. Jablonowsk. Ges. Leipzig 1895, p. 4.

mittleren Längen und nach den Potenzen der Größen $\xi, \eta, p, q, \xi', \eta', p', q'$. In allen Einzelheiten ist diese Entwicklung von *G. Norén* und *J. A. Wallberg*[125]) bis zu den Gliedern zweiten Grades einschl. durchgeführt worden.

IV. Entwicklungen nach Potenzen des Verhältnisses der großen Achsen.

29. Koeffizienten $X_i^{n,s}$ von Hansen. Wenn das Verhältnis $\frac{r}{r'}$ der Radienvektoren wesentlich kleiner als Eins ist, kann es in manchen Fällen vorteilhaft sein, die Entwicklung der Störungsfunktion in erster Linie nach den Potenzen dieses Verhältnisses zu ordnen. So z. B. wenn es sich um die Berechnung der allgemeinen Störungen der kleinen Planeten oder einiger Kometen durch Saturn handelt. Vor allem ist aber eine solche Entwicklung der Störungsfunktion in der Mondtheorie von Bedeutung.

Infolge der Formeln (70) und (71) im Verein mit der Entwicklung (60) von Hansen ergibt sich die Reihe

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{s, s', n} A^{(n)}_{\left|\frac{s'-s}{2}\right|, \left|\frac{s'+s}{2}\right|} \cdot \frac{r^n}{r'^{n+1}} \cdot c^{\sqrt{-1}[s(v+\omega)+s'(v'+\omega')]},$$

wo

$$n = 0, 1, 2, \cdots, +\infty,$$

$$s, s' = -n, -n+2, -n+4, \ldots, n-2, n.$$

Die Größe $A^{(n)}_{i,j}$ ist durch die Formel (59) gegeben. Nun sind r und v Funktionen der mittleren Anomalie M, während r' und v' von M' abhängen. Nach Einführung der durch die Gleichung

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n c^{\sqrt{-1}sv} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X_i^{n,s} \cdot c^{\sqrt{-1}iM} \tag{94}$$

definierten, von der Exzentrizität e abhängigen Größen $X_i^{n,s}$ bekommt man die Entwicklung

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{n, s, s', q, q'} X^{n,s}_{s+q}(e) \cdot X^{-n-1, s'}_{s'+q'}(e') \cdot A^{(n)}_{\left|\frac{s'-s}{2}\right|, \left|\frac{s'+s}{2}\right|} \cdot \frac{a^n}{a'^{n+1}} \cdot c^{\sqrt{-1}(sL+s'L'+qM+q'M')}, \tag{95}$$

wo noch die ganzen Zahlen q und q' alle Werte von $-\infty$ zu $+\infty$ annehmen. Die Entwicklung der Störungsfunktion R oder lieber die-

125) *G. Norén* und *J. A. Wallberg*, Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förhandl. 1899, Nr. 9. Stockholm 1900 = Meddelanden från Lunds astr. observatorium Nr. 10. Vgl. auch *C. V. L. Charliers* Mechanik des Himmels Bd. I, p. 301—315.

jenige von $R - \frac{1}{r'}$ erhält man durch Ausschließen der Glieder, wo $n = 0, 1$.

Allgemeine Reihenentwicklungen für die Koeffizienten $X_i^{n,s}$ hat *P. A. Hansen*[126]) gegeben. Er geht von dem Integralausdrucke

$$X_i^{n,s} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=1} \left(\frac{r}{a}\right)^n x^s z^{-i} \frac{dz}{z}$$

aus, wo

$$x = c^{\sqrt{-1}v}, \qquad y = c^{\sqrt{-1}E}, \qquad z = c^{\sqrt{-1}M}$$

ist. Als Integrationsvariable wählt er anstatt z entweder x oder y und bekommt so für $X_i^{n,s}$ zwei andere Integralausdrücke. Die Integration wird nach Entwicklung der zu integrierenden Funktion nach positiven und negativen Potenzen von x bzw. y ausgeführt. So findet Hansen für $X_i^{n,s}$ ziemlich komplizierte Reihenentwicklungen, wo die Glieder rationale Funktionen von $\varepsilon = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e}$ sind. Für $i = 0$ werden die Entwicklungen einfacher, und man wird dann auf hypergeometrische Reihen oder Polynome geführt. Eine elegante Darstellung dieser Hansenschen Formeln hat *F. Tisserand*[127]) gegeben.

Eine andere Darstellung von $X_i^{n,s}$ verdankt man *G. W. Hill.*[128]) Er bemerkt, daß $X_i^{n,s}$ das konstante Glied von

$$(1+\varepsilon^2)^{-n-1} y^{s-i} (1-\varepsilon y)^{n+1-s} \left(1-\frac{\varepsilon}{y}\right)^{n+1+s} c^{\frac{ie}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

ist. Die Entwicklung des rationalen Faktors nach positiven und negativen Potenzen von y führt auf Koeffizienten, die immer mit Hilfe von hypergeometrischen Polynomen von ε^2 ausgedrückt werden können. Die Koeffizienten der Entwicklung des transzendenten Faktors sind die Besselschen Funktionen der Argumente $\frac{ie}{2}$. Man bekommt so für $X_i^{n,s}$ eine unendliche Reihe, deren Glieder aus hypergeometrischen Polynomen und Besselschen Funktionen einfach zusammengesetzt sind.

Die Koeffizienten $X_i^{n,s}$ können offenbar nach Potenzen von e entwickelt werden. Dabei treten als Koeffizienten die Operatoren von Newcomb auf (vgl. Nr. 22). Infolge der Definitionsgleichung (82) dieser Operatoren ist in der Tat

$$(96) \qquad X_{s+q}^{n,s} = \sum_m \Pi_q^m(n,s)\, e^m, \qquad m - |q| = 0, 2, 4, \ldots, +\infty.$$

126) *P. A. Hansen,* Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 2 (1855), p. 270.
127) *F. Tisserand,* Traité de Méc. cél. 1, p. 249—261
128) *G. W. Hill,* The Analyst 2 (1875), p. 176 = Works 1, p. 221.

G. W. Hill[129]) hat versucht, die analytische Form der Koeffizienten der Reihe (96) zu finden, kam aber dabei im allgemeinen auf sehr komplizierte Ausdrücke. Nur für den ersten Koeffizienten $\Pi_q^{|2|}(n, s)$ hat er einen ziemlich einfachen Ausdruck publiziert. Mit Hilfe desselben und infolge der Newcombschen Gleichungen (83) und (84) ist die analytische Form des Anfangsgliedes der Entwicklung nach Potenzen von e und e' eines beliebigen Koeffizienten der Fourierschen Reihe (73) vollständig bekannt. Als Spezialfall eines Theorems von *F. Tisserand*[130]) ergibt sich übrigens unter einfacher symbolischer Form die allgemeine Entwicklung von $X_i^{n,0}$ nach Potenzen von e.

Für numerisch gegebene Werte der Indizes q, m und n sind die $\Pi_q^m(n, s)$ Polynome von s vom Grade m. Einige dieser Polynome können leicht aus denjenigen Entwicklungen abgeleitet werden, welche *U. J. J. Leverrier*[131]) für die Größen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} s(v - M) \qquad n = 0, -1, -2, \ldots, -7$$

gegeben hat. Numerische Werte für die Koeffizienten der Entwicklungen von $X_i^{n,s}$ nach Potenzen von e bis zum siebenten Grade einschl. und für $n = -5, -4, \ldots, +4$; $s = 0, 1, \ldots, 5$ sind von *A. Cayley*[132]) publiziert worden. Endlich hat *R. T. A. Innes*[133]) die Koeffizienten der Entwicklungen $X_s^{n,s}$, $X_{s+1}^{n,s}$, $\ldots$, $X_{s+7}^{n,s}$ nach Potenzen von e bis zum siebenten Grade einschl. als Polynome von n und s ausgedrückt Dieselben Polynome sind übrigens schon von *S. Newcomb*[134]) in noch größerer Ausdehnung (bis zum achten Grade einschl.) gegeben worden. Man hat nur in Newcombs Ausdrücken n, s anstatt $D, -i$ einzuführen

30. Störungsfunktion der Mondtheorie. Unter Hinweis auf den Artikel VI 2, 16 von E. W. Brown über Mondtheorie sei hier nur folgendes bemerkt. In den Mondtheorien von Lubbock, Pontécoulant und Delaunay wird die durch die Gleichung (2) gegebene Störungsfunktion R'' nach Potenzen der kleinen Größen α, e, e', ν entwickelt. Offenbar wird diese Entwicklung aus (95) erhalten, indem man zuerst diejenigen Glieder, für welche $n = 0, 1$ ist, wegläßt, dann $\frac{a^n}{a'^{n+1}}$ mit dem Faktor $[(1-\sigma)^{n-1} - (-\sigma)^{n-1}]$ multipliziert und endlich die Funk-

129) *G. W. Hill*, ibid. p. 222, 223.
130) *F. Tisserand*, Paris C. R. 91 (1880), p. 897.
131) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 346, 348—355.
132) *A. Cayley*, Lond. Astr. Soz. Mem. 29 (1861) (Read Jan. 1859), p. 257—304.
133) *R. T. A. Innes*, Lond. Astr. Soz. Mem. 54 (1904) (Read Dez. 1902), p. 137.
134) *S. Newcomb*, Wash. Astron. Papers 5_1 (1895), p. 27—29.

tionen $A_{i,j}^{(n)}$, $X_{s+q}^{n,s}(e)$, $X_{s'+q'}^{-n-1,s'}(e')$ unter Verwendung der Formeln (59) und (96) nach Potenzen von ν bzw. e oder e' entwickelt. Die so auftretenden Koeffizienten sind in großer Ausdehnung von *G. de Pontécoulant*[135]), *A. Cayley*[136]) und *Ch. E. Delaunay*[137]) berechnet worden. Am weitesten hat es der letztere getrieben, indem er alle Kombinationen

$$\frac{a^n}{a'^{n+1}} e^m e'^{m'} \left(\sin \frac{1}{2} J\right)^{2f}$$

berücksichtigte, für welche $(m + m' + 2f + 2n) \leq 10$ ist.

V. Konvergenz der Entwicklungen.

31. Formulierung der ersten Aufgabe. Die Störungsfunktion kann, als eine periodische Funktion der in ihr auftretenden Winkelvariabeln, in trigonometrischen Reihen entwickelt werden, die entweder nach den Vielfachen der mittleren Anomalien M, M' oder auch nach Vielfachen von M, M', ω, ω' fortschreiten. Statt M und M' können auch z. B. die exzentrischen Anomalien E und E' angewandt werden. Die Konvergenz dieser trigonometrischen Entwicklungen ist evident, solange man den Fall eines Schnitts der Ellipsen ausschließt. Nun lassen sich aber die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen selbst in all den im vorausgehenden behandelten Weisen in Potenzreihen nach kleinen Größen wie e, e', ν, α entwickeln. Die hier auftretende erste Aufgabe ist, *die Konvergenz dieser Potenzreihen für die einzelnen Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung zu studieren.*

Für den indirekten Teil der Störungsfunktion ist die eben bezeichnete Konvergenzfrage mit wenigen Worten zu erledigen. Die Koeffizienten sind nur in bezug auf e und e' transzendent, und ihre Entwicklungen nach Potenzen von e und e' konvergieren, wenn nur $|e| < 1$, $|e'| < 1$ ist (siehe z. B. Tisserand, Traité Vol. I, Chap. XIII). Im folgenden wird daher nur der Hauptteil $\frac{1}{\Delta}$ der Störungsfunktion betrachtet werden.

32. Integralausdrücke der Koeffizienten. Die wichtigsten trigonometrischen Entwicklungen der Störungsfunktion sind die folgen-

---

135) *G. de Pontécoulant,* Théorie analytique du système du monde 4, Paris (1846), p. 58—61.

136) *A. Cayley,* Lond. Astr. Soz. Mem. 27 (1859), p. 76—86. Errata ibid. 28 (1860), p. 216.

137) *Ch. E. Delaunay,* Paris, Mém. de l'Acad. des Sciences 28 (1860), p. 33—54, 883.

den vier:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{m,m'} A_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mM+m'M')} = \sum_{m,m',s,s'} A^{s,s'}_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mM+m'M'+s\omega+s'\omega')}$$
$$= \sum_{m,m} B_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mE+m'E')} = \sum_{m,m',s,s'} B^{s,s'}_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mE+m'E'+s\omega+s'\omega')} \tag{97}$$

(m, m', s, s' ganzzahlig).

Die Koeffizienten $A_{m,m'}$, $B_{m,m'}$ lassen sich nach der elementaren Theorie der Fourierschen Reihen als Doppelintegrale darstellen. Dasselbe gilt auch für die Koeffizienten $A^{s,s'}_{m,m'}$ und $B^{s,s'}_{m,m'}$, für die zunächst vierfache Integrale erhalten werden. Schreibt man nämlich:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{s,s'} \Phi^{s,s'} c^{\sqrt{-1}(s\omega+s'\omega')},$$

so lassen sich die Koeffizienten $\Phi^{s,s'}$ dieser Entwicklung durch einfache Umsetzung aus der Entwicklung (51) entnehmen, und zwar gilt:

$$\Phi^{s,s'} = \frac{1}{r'} b^{\frac{s'-s}{2}, \frac{s'+s}{2}} \left(\frac{r}{r'}, J\right) c^{\sqrt{-1}(sv+s'v')}, \tag{98}$$

wo $b^{i,j}$ die dort eingeführten Jacobischen Koeffizienten sind. Da nun:

$$\Phi^{s,s'} = \sum_{m,m'} A^{s,s'}_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mM+m'M')} = \sum_{m,m'} B^{s,s'}_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mE+m'E')}$$

ist, so erhält man die Koeffizienten $A^{s,s'}_{m,m'}$, $B^{s,s'}_{m,m'}$ durch Bildung von Doppelintegralen über $\Phi^{s,s'}$

In allen diesen Doppelintegralen werden passend anstatt M und M' oder E und E' als Integrationsvariabele

$$x = c^{\sqrt{-1}E}, \qquad y = c^{\sqrt{-1}E'}$$

gewählt. Nach Einführung der Bezeichnungen

$$V = \left[1 - \frac{e}{2}(x + x^{-1})\right]\left[1 - \frac{e'}{2}(y + y^{-1})\right],$$
$$\Omega = \frac{me}{2}(x - x^{-1}) + \frac{m'e'}{2}(y - y^{-1}) \tag{99}$$

ergibt sich:

$$A_{m,m'} = -\frac{1}{4\pi^2}\int\int \frac{1}{\Delta} \frac{Vc^{\Omega}\, dx\, dy}{x^{m+1}\, y^{m'+1}}, \tag{100}$$

$$A^{s,s'}_{m,m'} = -\frac{1}{4\pi^2}\int\int \Phi^{s,s'} \frac{Vc^{\Omega}\, dx\, dy}{x^{m+1}\, y^{m'+1}}. \tag{101}$$

Die Integrationswege sind hier die Kreise in der komplexen Ebene für x bzw. y $|x| = 1$, $|y| = 1$.

Wenn $V = 1$, $\Omega = 0$ in (100) und (101) gesetzt wird, so bekommt man die Ausdrücke von $B_{m,m'}$ und $B^{s,s'}_{m,m'}$.

Um die Konvergenzbedingungen der Entwicklungen von $A_{m,m'}$ $B_{m,m'}$, $A^{s,s'}_{m,m'}$, $B^{s,s'}_{m,m'}$ zu finden, sieht man sich nun auf das Problem, geführt, die Singularitäten der entsprechenden Doppelintegrale, als Funktionen der elliptischen Elemente betrachtet, zu suchen, da die dem Nullpunkt nächstliegende Singularität die Konvergenzgrenze angibt.

33. Allgemeines über die Singularitäten bestimmter Integrale. *H. Poincaré*[138]) hat allgemein gezeigt, wie solche Singularitäten gefunden werden können. Er betrachtet zuerst eine durch ein einfaches Integral gegebene Funktion

$$f(z) = \int F(x, z)\, dx,$$

wo die Integration längs einer geschlossenen Kurve in der komplexen x-Ebene auszuführen ist. Die im Endlichen liegenden Singularitäten von $F(x, z)$, als Funktion von x, werden mit $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnet. Dieselben sind im allgemeinen mit z beweglich. Es wird angenommen, daß keiner der Punkte x_i sich auf dem Integrationswege befinde. Der Integrationsweg kann kontinuierlich in beliebiger Weise deformiert werden, ohne daß $f(z)$ seinen Wert ändert, solange nicht einer der Punkte x_i überschritten wird. Es werde jetzt weiter vorausgesetzt, daß z in stetiger Weise sich verändert. Wenn dann irgendeiner der Punkte x_i sich dem Integrationswege nähert, so kann man diesen Weg deformieren, um der heranrückenden Singularität auszuweichen. Dies ist immer möglich, und $f(z)$ bleibt holomorph, solange nicht entweder zwei von verschiedenen Seiten des Integrationsweges kommende x_i zusammenfallen oder eine innerhalb der Integrationskurve liegende Singularität x_i sich ins Unendliche entfernt. Poincaré nimmt an, daß die x_i Wurzeln einer Gleichung

$$\varphi(x, z) = 0$$

sind, welche sich in mehrere voneinander unabhängige Gleichungen

$$\varphi_1(x, z) = 0, \quad \varphi_2(x, z) = 0, \quad \ldots$$

auflösen läßt. Unter dieser Annahme befinden sich die gesuchten Singularitäten von $f(z)$ unter den Wurzeln der Gleichungen, die erhalten werden, wenn x aus den verschiedenen Paaren von Gleichungen

$$\begin{aligned} &\varphi_i = \varphi_j = 0, && i, j = 1, 2, \ldots \\ (102)\qquad &\varphi_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0, && k = 1, 2, \ldots \\ &\varphi_k = 0, \quad x = \infty && k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

138) *H. Poincaré,* Méthodes nouvelles 1 (1892), p. 282; Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 450—454; Leçons 2_1 (1907), p. 101—105.

eliminiert wird. Denn jede Lösung eines solchen Gleichungspaares bezeichnet das Zusammenfallen zweier Singularitäten.

Jeder in dieser Weise gefundene Wert von z . aber offenbar noch nicht notwendig eine singuläre Stelle für $f(z)$. Hierüber wird in jedem einzelnen Falle eine spezielle Untersuchung nötig, die oft den schwierigeren Teil der Aufgabe ausmacht.

34. Fortsetzung. Poincaré geht weiter zum Aufsuchen der Singularitäten des Doppelintegrals

$$f(z) = \int dx \int F(x, y, z)\, dy$$

als Funktion von z betrachtet. Die Integration wird zuerst in der y-Ebene längs einer mit x und z veränderlichen geschlossenen Kurve C_y ausgeführt und danach in der x-Ebene längs einer mit z beweglichen geschlossenen Kontur C_x.

Poincaré nimmt an, daß die Singularitäten von $F(x, y, z)$ durch die Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

gegeben sind, und daß sich diese Gleichung in die folgenden irreduktibeln Gleichungen auflöst:

$$(103) \quad \varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad \varphi_3(x, y, z) = 0, \quad \ldots$$

Zuerst werden die Gleichungspaare

$$(104) \qquad \begin{aligned} &\varphi_i = \varphi_j = 0, && i, j = 1, 2, 3, \ldots \\ &\varphi_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = 0, && k = 1, 2, 3, \ldots \\ &\varphi_k = 0, \quad y = \infty, && k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

betrachtet. Durch dieselben werden eine Reihe von Funktionspaaren

$$x_n(z), \quad y_n(z) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definiert, welchen in den x- und y-Ebenen mit z bewegliche Punktepaare x_n, y_n entsprechen.

Solange die Kontur C_x, während der stetigen Veränderung von z, den Punkten $x_n(z)$ ausweichen kann, so lange bleibt offenbar $f(z)$ holomorph. Nur wenn zwei von verschiedenen Seiten von C_x kommende Punktepaare (x_i, y_i) und (x_j, y_j) zusammenfallen oder wenn ein Punkt x_n ins Unendliche rückt, kann $f(z)$ aufhören, holomorph zu sein. Die möglicherweise singulären Werte von z sind also diejenigen, für welche entweder eins der Systeme (104) eine Doppellösung oder zwei dieser Systeme eine gemeinsame Lösung oder endlich eins von diesen Systemen eine ins Unendliche rückende Lösung bekommt. Da die Integrationsordnung beliebig ist, so brauchen unter allen Systemen

von je drei Gleichungen, die so erhalten werden, nur diejenigen in Betracht gezogen zu werden, in welchen die Differentiationen nach x und y symmetrisch auftreten. Alle diejenigen ε, die möglicherweise singulär für $f(\varepsilon)$ sein können, werden also nach Elimination von x und y aus den verschiedenen Systemen von je drei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i = \varphi_j = \varphi_k = 0; && i,j,k = 1,2,\ldots\\
&\varphi_i = \varphi_j = \frac{\partial(\varphi_i,\varphi_j)}{\partial(x,y)} = 0; && i,j = 1,2,\ldots\\
&\varphi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = 0; && i = 1,2,\ldots\\
&\varphi_i = 0, \quad x = y = \infty. && i = 1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{105}
$$

erhalten. Aber wieder sind nicht alle diese Werte notwendig singuläre und eine spezielle Untersuchung ist in jedem einzelnen Falle nötig.

35. Konvergenz der Entwicklungen für $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$. Im Falle des Integralausdruckes (100) für $A_{n,m'}$ (und $B_{m,m'}$ für $V = 1$, $\Omega = 0$) werden die Gleichungen (103)

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x^2y^2\Delta^2 = 0. \tag{106}$$

Die Funktion $x^2y^2\Delta^2$ ist ein Polynom sechsten Grades in x und y mit Koeffizienten, die nur für $e = \pm 1$, $e' = \pm 1$ nicht holomorph sind. Da die letzte Gleichung sehr kompliziert ist, so ist es noch nicht gelungen, die allgemeinen Konvergenzbedingungen für die Entwicklungen von $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ aufzustellen.

Für den allgemeinen Fall hat jedoch *H. Poincaré*[139]) den Satz ausgesprochen: Die Entwicklungen aller Koeffizienten $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ besitzen denselben Konvergenzbereich. Dieser Satz folgt daraus, daß die Gleichungen (106) unabhängig von m und m' und außerdem dieselben für $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ sind.

Von Spezialfällen hat *H. Poincaré*[140]) zuerst denjenigen behandelt, wo $e = e' = 0$ ist. Dann ist $xy\Delta^2$ ein Polynom zweiten Grades in x oder y. Die Auflösung der Gleichungssysteme (105) gibt dann für die Singularitäten der Koeffizienten $b^{i,j}$ die Bedingungen

$$\alpha\mu = 0, \quad \alpha\nu = 0, \quad 1 + \alpha^2 + 2\alpha(\pm\mu \pm \nu) = 0. \tag{107}$$

In eingehender Weise sind diese Singularitäten von *H. v. Zeipel*[141]) untersucht worden. Für die Entwicklungen (53) hat er den Konver-

139) *H. Poincaré,* Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 457; Leçons 2_1 (1907), p. 107.

140) *H. Poincaré,* Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 457—459; Leçons 2_1 (1907), p. 108—112.

141) *H. v. Zeipel,* Stockholm K. Vet. Akad. Arkiv. 6, Nr. 33 (1911), p. 17.

genzkreis

$$|\nu| = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$$

gefunden. Außerdem hat er gezeigt[142]), daß die Hansensche Entwicklung (60) auf ihrem Konvergenzkreis $|\alpha| = 1$ nur die Singularitäten

$$\alpha = \pm e^{\pm\sqrt{-1}J}$$

besitzt. Für $\alpha = \pm 1$ sind diese Funktionselemente holomorph, wenn $0 < J < \pi$.

Aus den Bedingungsgleichungen (107) geht weiter hervor, daß die Appellschen Entwicklungen (64) konvergent sind, sobald

$$|2\beta\mu| + |2\beta\nu| < 1.$$

Ebenso findet man für die Sundmansche Entwicklung (68) die Konvergenzbedingung

$$|\nu| < \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} - \mu.$$

Die Entwicklungen (60), (62), (64), (65), (66), (68) sind für alle Werte der Neigung konvergent, wenn nur $\alpha < 1$.

H. Poincaré[143]) hat ferner auch den Spezialfall $J = 0$ behandelt. Dann ist Δ^2 eine Summe von zwei Quadraten und kann deshalb in zwei Faktoren aufgelöst werden. In diesem Falle ergeben sich für die Entwicklungen von $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ nach Potenzen von e und e' die Konvergenzbedingungen

$$|e| < 1, \qquad |e'| < 1,$$

$$a^2 e^2| + a'^2|e'^2| + 2aa'|ee'\cos(\varpi - \varpi') < (a'-a)^2.$$

In einem dritten Spezialfalle, wo die Bahnen konzentrisch sind ($e' = \alpha e$), hat *A. Féraud*[144]) die Konvergenzbedingungen der Entwicklungen von $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ nach Potenzen von e und $\sin J$, oder von e und $\sin^2\frac{J}{2}$, oder von e, $\cos^2\frac{J}{2}$, $\sin^2\frac{J}{2}$ anfgestellt.

Endlich hat *A. Féraud*[145]) versucht, diejenigen Spezialfälle zu behandeln, wo die eine Bahn kreisförmig ist, während die Apsidenlinie der anderen Bahn mit der Knotenlinie zusammenfällt oder dazu senkrecht steht. Er leitet die Gleichungen (105) ab. Es ist ihm aber nicht gelungen, aus diesen komplizierten Gleichungen die gesuchten Konvergenzbereiche zu finden.

142) *H. v. Zeipel*, ibid., p. 12, 15.

143) *H. Poincaré*, Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 460—464; Leçons 2, (1907), p. 112—117.

144) *A. Féraud*, Paris Bull. astr. 16 (1899), p. 449—456.

145) *A. Féraud*, Obs. de Bordeaux ann. 10 (1902), p. 1—37. Auszüge Paris C. R. 130 (1900), p. 1376; 131 (1900), p. 661.

36. Konvergenz der Entwicklungen für $A^{s,s'}_{m,m'}$ und $B^{s,s'}_{m,m'}$. Da die Singularitäten von $b^{i,j}$ durch die Bedingungen (107) bekannt sind, so findet man leicht, daß die Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad r = 0, \quad r' = 0, \quad r \pm r' = 0, \quad r \pm c^{\pm\sqrt{-1}J} \cdot r' = 0$$

alle endlichen Singularitäten der in (101) integrierten Funktion geben. Aus diesen Gleichungen und aus den entsprechenden Systemen (105) hat *H. v. Zeipel*[146]) die Singularitäten von $A^{s,s'}_{m,m'}$ und $B^{s,s'}_{m,m'}$ abgeleitet und außerdem die Konvergenzbedingungen für die Entwicklungen dieser Funktionen aufgestellt.

Diese Bedingungen sind

$$|e| < 1, \quad |e'| < 1, \quad a|e| + a'|e'| < \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'|\cos J|}$$

für die Entwicklungen nach Potenzen von e und e'; und

$$|e| < 1, \quad a|e| + a'|e'| < a' - a, \quad |\nu| < \frac{[a'(1-|e'|) - a(1-|e|)]^2}{4aa'(1-|e|)(1-|e'|)}$$

für die Entwicklungen nach Potenzen von e, e' und ν.

Die Konvergenz der Entwicklungen nach Potenzen von e und e' nimmt also mit der Neigung der Bahnen zu.

37. Formulierung der zweiten Aufgabe. Bei der praktischen Anwendung der analytischen Entwicklungsmethoden werden meistens die Koeffizienten der betreffenden Fourierschen Reihe nach Potenzen der kleinen Größen e, e' und ν entwickelt. Dabei werden alle Glieder von höherer Ordnung als z. B. der siebenten vernachlässigt.

Was man also vornimmt, ist im Grunde gar keine trigonometrische Entwicklung, sondern eine Entwicklung der ganzen Störungsfunktion nach Potenzen der kleinen Größen e, e', ν, und es ist die Konvergenz *dieser* Potenzentwicklung, welche zu untersuchen ist und welche eigentlich viel mehr Interesse hat als die bisher behandelte Konvergenzfrage für die einzelnen Entwicklungskoeffizienten.

Die Entwicklung des zweiten Teiles der Störungsfunktion nach Potenzen von e und e' ist wieder eine ziemlich einfache. Bei Anwendung der wahren oder der exzentrischen Anomalien sind die Konvergenzbedingungen

$$|e| < 1, \qquad |e'| < 1.$$

Wenn aber die mittleren Anomalien gewählt werden, dann treten die der Keplerschen Gleichung entsprechenden Lagrangeschen Reihen auf. Die Konvergenzbedingungen lauten dann (für beliebige reelle Werte von M und M')

$$|e| < \varkappa, \quad |e'| < \varkappa, \qquad \text{wo } \varkappa = 0{,}66274\,34193\ldots$$

146) *H. v. Zeipel,* Stockholm K. Vet. Akad. Arkiv 6, Nr. 33 (1911), p. 20, 37, 44.

Der Wert von $\varkappa$ wurde zuerst von *P. S. Laplace*[147]) aus den asymptotischen Ausdrücken der Koeffizienten hergeleitet. Dieselbe Grenze wurde später verschiedentlich aus funktionentheoretischen Gesichtspunkten bestimmt. [Siehe II B 1, Nr. 15 (Osgood) und VI 2, 9, Nr. 4 (Herglotz)]. In letzter Zeit hat noch *H. Poincaré*[148]) diese Aufgabe behandelt.

38. Konvergenz der Entwicklung von Δ^{-1}. Die Konvergenzbedingungen für die Entwicklungen des Hauptteils der Störungsfunktion Δ^{-1} nach Potenzen von e, e' (und ν) zu finden, scheint eine sehr schwierige Aufgabe zu sein, die jedenfalls bisher in ihrer Allgemeinheit noch ungelöst ist. *K. F. Sundman*[149]) hat den Fall behandelt, wo $\nu = 0$ ist. Dann ist

$$\Delta^2 = \left(r'c^{\sqrt{-1}v'} - rc^{\sqrt{-1}(v+\varpi-\varpi')}\right)\left(r'c^{-\sqrt{-1}v'} - rc^{-\sqrt{-1}(v+\varpi-\varpi')}\right).$$

Es wird gesetzt

$$e = \varrho c^{\sqrt{-1}\varphi}, \qquad e' = \varrho' c^{\sqrt{-1}\varphi'},$$

wo ϱ, ϱ' reell und positiv, φ, φ' reell sind. Mit $\bar{\varrho}$ und $\bar{\varrho}'$ werden solche Werte von ϱ und ϱ' bezeichnet, daß $\Delta^2 = 0$ für $\varrho = \bar{\varrho}$, $\varrho' = \bar{\varrho}'$ und für gewisse reelle Werte von M, M', φ, φ', $\varpi - \varpi'$, während dagegen $\Delta^2 \neq 0$, solange $\varrho < \bar{\varrho}$, $\varrho' < \bar{\varrho}'$. Die gesuchten Konvergenzbedingungen für die Entwicklung von Δ^{-p} nach Potenzen von e und e' sind dann offenbar

$$|e| < \bar{\varrho}, \qquad |e'| < \bar{\varrho}'.$$

Sundman setzt weiter

$$R = \left|rc^{\sqrt{-1}v}\right|, \qquad R' = \left|r'c^{\sqrt{-1}v'}\right|$$

und bezeichnet mit $R_M(\varrho)$ den größten Wert von R für gegebenes ϱ und beliebige M und φ; mit $R'_m(\varrho')$ den kleinsten Wert von R' für gegebenes ϱ' und beliebige M' und φ'. Die gesuchten Werte von $\bar{\varrho}$ und $\bar{\varrho}'$ werden dann offenbar durch die Gleichung

$$R_M(\bar{\varrho}) = R'_m(\bar{\varrho}')$$

verbunden. Sundman hat gezeigt, daß R einen Maximalwert

$$a\left(1 + 2\varrho + \varrho^2 + \tfrac{2}{3}\varrho^3 + \cdots\right) \quad \text{für} \quad M = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

147) *P. S. Laplace*, Paris mém. prés. (2) 6, année 1823 (1827), p. 61 = Œuvres 12, p. 549—560. Vgl. Méc. cél. Suppl. au 5e Vol., Nr. 2, 3 (1825) = Œuvres 5, p. 473—484.

148) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 28—33.

149) *K. F. Sundman*, Über die Störungen der kleinen Planeten usw. Akad. Abh. Helsingfors (1901), p. 18—23.

und einen Minimalwert

$$a\left(1-2\varrho+\varrho^2-\tfrac{2}{3}\varrho^3+\cdots\right) \quad \text{für} \quad M=\frac{\pi}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$$

besitzt. Damit sind aber vielleicht nicht das größte Maximum und und das kleinste Minimum gefunden. Deshalb kann Sundman nur folgendes Divergenzkriterium formulieren: Die Entwicklung von Δ^{-p} nach Potenzen von e und e' divergiert, wenn

$$a<a', \qquad J=0,$$

$$a(1+2e+e^2+\tfrac{2}{3}e^3+\tfrac{2}{3}e^4+\cdots)>a'(1-2e'+e'^2-\tfrac{2}{3}e'^3+\tfrac{2}{3}e'^4-\cdots).$$

Einige hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingungen für die Konvergenz der Entwicklung von Δ^{-1} nach Potenzen von e, e' und ν hat *G. Silva*[150]) aufgestellt.

VI. Allgemeine Theorie der Rekursionsformeln und Differentialgleichungen.

39. Formulierung der Aufgabe. In der Theorie und bei der praktischen Berechnung der Laplaceschen Koeffizienten $b_s^{(i)}$ spielen die Rekursionsformeln, die zwischen je dreien von diesen Koeffizienten und ihren Ableitungen bestehen, eine wichtige Rolle. Vermutlich würde auch die Berechnung der Koeffizienten $b^{i,j}$ und ihrer Ableitungen durch geeignete Ausnutzung der Jacobischen Rekursionsformeln (oder damit analoger) vereinfacht werden können. Ein noch wesentlicherer Fortschritt wäre es, wenn man direkt die Koeffizienten der rein trigonometrischen Entwicklungen der Störungsfunktion (oben Gl. (97)) durch Rekursionsformeln berechnen könnte. Dann wäre man der Frage der Konvergenz der Entwicklungen nach den Potenzen der Exzentrizitäten und anderer kleiner Größen enthoben und hätte es nur mit den zweifellos konvergenten trigonometrischen Entwicklungen selbst zu tun. Schon *C. G. J. Jacobi*[151]) hat angegeben, daß die Koeffizienten $B_{m,m'}$ der Entwicklung nach den exzentrischen Anomalien mittels 15 von ihnen durch lineare Rekursionsformeln ausgedrückt werden können. Das folgt aus den Identitäten:

$$\Delta^{-1}\frac{\partial\Delta^2}{\partial x}+2\Delta^2\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}=0, \qquad \Delta^{-1}\frac{\partial\Delta^2}{\partial y}+2\Delta^2\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}=0,$$

wenn man für Δ^{-1} die trigonometrische Entwicklung, für Δ^2 seinen Ausdruck als ganze Funktion von x, $1/x$, y, $1/y$ einsetzt. Zugleich schwieriger und wichtiger ist es, analoge Rekursionsformeln für die

150) *G. Silva,* Paris Bull. astr. 26 (1909), p. 49, 97.

151) *C. G. J. Jacobi,* Werke 7, p. 287 (Nachlaß).

Koeffizienten $A_{m,m'}$ der trigonometrischen Entwicklung nach den mittleren Anomalien aufzustellen. Zur Lösung dieser Fragen hat *H. Poincaré*[152])[153])[154]) die allgemeine Theorie der Doppelintegrale algebraischer Funktionen von zwei Veränderlichen herangezogen. Die auf diesem Wege bisher erhaltenen Resultate werden im folgenden dargestellt. Es sei aber bemerkt, daß eine Durcharbeitung dieser Rekursionsformeln bis zur rechnerischen Brauchbarkeit noch aussteht.

Mit der Existenz von Rekursionsformeln ist überall die von entsprechenden Differentialgleichungen höherer Ordnung für die Koeffizienten verbunden.

40. Reduktion einiger Doppelintegrale. Poincaré betrachtet[153])[154]) die Doppelintegrale

$$\Pi = \int\int \frac{Hc^{\Omega}\, dx\, dy}{xy\, F^{s}}, \tag{108}$$

welche längs gewissen geschlossenen Flächen im Gebiete der komplexen Veränderlichen x und y ausgeführt werden. In denselben ist $2s$ eine ungerade Zahl. Ω und F sind gegebene Polynome von x, x^{-1}, y, y^{-1} vom Grade ω bzw. f, während H ein beliebiges Polynom vom Grade h ist. Ein Polynom

$$\sum_{a,b} A x^a y^b \tag{109}$$

heißt dabei vom Grade n, wenn $|a| \leq n$, $|b| \leq n$. Das allgemeine Polynom vom Grade n enthält $(2n+1)^2$ arbiträre Konstanten.

Die Integrale Π können auf eine gewisse Anzahl voneinander linear unabhängiger unter ihnen reduziert werden. Es ist in der Tat $\Pi = 0$, wenn H durch die Gleichung

$$\frac{Hc^{\Omega}}{xy\, F^{s}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{Pc^{\Omega}}{y F^{s-1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{Qc^{\Omega}}{x F^{s-1}} \tag{110}$$

bestimmt wird, wo P und Q beliebige Polynome vom Grade $p = h - f - \omega$ bezeichnen. Es scheint zunächst, als ob man auf diese Weise entsprechend den $2(2p+1)^2$ willkürlichen Konstanten von P und Q auch ebensoviele Rekursionsformeln zwischen den $(2h+1)^2$ Integralen Π fände. Indessen sind offenbar alle solche Kombinationen von Funktionen P und Q auszuschließen, bei welchen H identisch Null wird. Man erhält alle Kombinationen letzterer Art, indem man in den Gleichungen

$$\frac{Pc^{\Omega}}{y F^{s-1}} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Sc^{\Omega}}{F^{s-2}}\right), \quad \frac{Qc^{\Omega}}{x F^{s-1}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Sc^{\Omega}}{F^{s-2}}\right) \tag{111}$$

152) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 130.

153) *H. Poincaré*, J. de Math. (5) 3 (1897), p. 203—276.

154) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 119—139.

S so bestimmt, daß P und Q Polynome vom Grade $p \leqq h - f - \omega$ werden. Poincaré zeigt nun, daß dann S notwendig ein Polynom vom Grade $(p - f - \omega)$ ist. Die Zahl der auf diese Weise zu findenden linearen Relationen ist also nur $2(2p+1)^2 - [2(p-f-\omega)+1]^2$. Damit folgt, daß es höchstens

$$(2h+1)^2 - 2[2(h-f-\omega)+1]^2 + [2(h-2f-2\omega)+1]^2 = 8(f+\omega)^2$$

voneinander linear unabhängige Integrale Π von der Form (108) gibt. Diese Anzahl ist unabhängig von h und s.

Um zu beweisen, daß S ein Polynom ist, studiert Poincaré die Verzweigungen der Funktion

$$\frac{Sc^{\Omega}}{F^{s-2}} = U = \int dU = \int \left\{ \frac{Qc^{\Omega}}{F^{s-1}} \frac{dx}{x} - \frac{Pc^{\Omega}}{F^{s-1}} \frac{dy}{y} \right\}.$$

Diese Funktion kann offenbar nur dann aufhören, holomorph zu sein, wenn eine der Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x^{j} y^{j} F(x, y) \equiv f(x, y) = 0 \tag{112}$$

befriedigt ist.

E. Picard[155]) hat gezeigt, daß jeder vor x, y beschriebene geschlossene Weg durch kontinuierliche Deformation in einen anderen transformiert werden kann, welcher aus einem Punkte der y-Ebene und einem geschlossenen Weg in der x-Ebene besteht, ohne daß irgendeine der Gleichungen (112) befriedigt wird. Es genügt daher, nur die Verzweigungen der Funktion

$$U = \int \frac{Qc^{\Omega}}{F^{s-1}} \frac{dx}{x}$$

zu studieren.

Die zyklischen Perioden dieser Funktion sind infolge der Integrabilitätsbedingung des Systems (111) von y unabhängig. *E. Picard*[156]) hat weiter gezeigt, daß jeder Zykel, auf welchem $\sqrt{F}$ eindeutig bleibt, in eine Anzahl Partialzykeln aufgelöst werden kann, von welchen jeder durch Variation von y in einen Punkt zusammengezogen werden kann, so daß die entsprechende zyklische Periode Null ist. Der Beweis von Picard setzt nur voraus, daß die Gleichung (112) irreduktibel ist, und daß für die singulären Werte von y nur zwei Wurzeln sich untereinander vertauschen. Unter diesen Bedingungen besitzt also U keine zyklische Periode.

Polare Perioden können nur für $x = 0$ auftreten und dann nur,

155) *E. Picard,* Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes 1 (Paris 1897), p. 68, 69.

156) *E. Picard,* ibid., p. 88—90.

wenn f eine gerade Zahl ist. Auch die polare Periode ist von y unabhängig, wechselt aber ihr Vorzeichen, wenn y eine ungerade Wurzel der Gleichung

$$f(0, y) = 0$$

umkreist. In dieser Weise fand Poincaré, daß die Funktion U keine polare Periode besitzt, wenigstens wenn $f(0, y)$ oder $f(x, 0)$ ungerade Nullstellen haben.

Wenn x einen Zyklus beschreibt und $\sqrt{F}$ dabei sein Vorzeichen wechselt, so geht U in einen Wert $\overline{U} = h - U$ über, wo h eine Konstante ist, denn man hat

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Pc^{\Omega}}{F^{s-1} \cdot y} = -\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}.$$

Die Konstante h hat für alle solche Zykeln denselben Wert, sonst würde U eine von Null verschiedene Periode haben.

Durch Hinzufügung einer Konstanten kann U offenbar so definiert werden, daß U sein Vorzeichen zusammen mit $\sqrt{F}$ wechselt. Dann ist $U\sqrt{F}$ und also auch S eine eindeutige Funktion.

Diese Funktion S kann nur mit $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ unendlich werden, d. h. für

$$x = \infty, \quad y = \infty, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad F = 0.$$

Wenn $F = 0$ ist, so werden $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ unendlich von der Ordnung $s - 1$ und deshalb U unendlich von der Ordnung $s - 2$, woraus folgt, daß S endlich bleibt. Indem Poincaré endlich die Größenordnung von S zuerst für große und kleine x, dann für große und kleine y untersucht, findet er, daß S ein Polynom vom Grade $p - f - \omega$ in $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$ ist.

Die Anzahl voneinander linear unabhängiger Doppelintegrale Π wird kleiner, wenn die Polynome gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen. So z. B. wenn F, Ω und H unverändert bleiben, wenn x und y gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln. Im Ausdruck (109) für diese Polynome sind dann a und b gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade. Ein Polynom vom Grade n mit dieser Eigenschaft enthält nun

$$\theta(n) = 2n^2 + 2n + 1$$

willkürliche Konstanten. Poincaré zeigt, daß in diesem Falle nur solche Polynome P, Q und S zu betrachten sind, welche ebenfalls die oben erwähnte Symmetrieeigenschaft besitzen. Er findet, daß in diesem Falle die Integrale Π durch eine Anzahl von höchstens

$$\theta(h) - 2\theta(h - f - \omega) + \theta(h - 2f - 2\omega) = 4(f + \omega)^2 \tag{113}$$

unter ihnen linear ausgedrückt werden können.

41. Rekursionsformeln und Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Die vorstehende allgemeine Theorie hat *H. Poincaré*[157]) angewandt, um die Rekursionsformeln und Differentialgleichungen der durch die Formel (100) definierten Koeffizienten $A_{m,m'}$ (und $B_{m,m'}$) zu studieren. Anstatt x und y führt er als Integrationsvariablen ξ und η durch die Transformation

$$x = \xi\eta, \qquad y = \frac{\xi}{\eta}$$

ein. Dann werden Δ^2, welche Funktion die Rolle von F spielt, und Ω Polynome von ξ, ξ^{-1}, η, η^{-1} vom Grade $f = 2$ und $\omega = 1$ ($\omega = 0$ für $B_{m,m'}$) mit Koeffizienten, die rationale Funktionen der Keplerschen Elemente

$$a, \quad a', \quad \varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \operatorname{tg}\frac{J}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} \tag{114}$$

sind. Die Koeffizienten $A_{m,m'}$ und $B_{m,m'}$ nebst ihren Ableitungen nach den Elementen (114) können so durch Integrale von der Form (108) ausgedrückt werden. Dabei ist aber zu bemerken, daß Ω für die Koeffizienten $A_{m,m'}$ und ihre Ableitungen die Indizes m und m' enthält. Die Funktion Δ^2 erfüllt im allgemeinen Falle die Bedingungen, welche dem Polynome F in Nr. **40** auferlegt wurden. Poincaré gelangt daher zu folgenden Sätzen:

Zwischen den Koeffizienten $B_{m,m'}$ in der trigonometrischen Entwicklung von Δ^{-1} nach den Vielfachen der exzentrischen Anomalien existieren lineare Rekursionsformeln mit Koeffizienten, die rationale Funktionen der Elemente (114) sind. Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln können alle diese Koeffizienten $B_{m,m'}$ durch 16 unter ihnen ausgedrückt werden.

Jeder Koeffizient $B_{m,m'}$, als Funktion eines der Elemente (114) betrachtet, genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung von höchstens 16. Ordnung mit Koeffizienten, die rationale Funktionen der Elemente (114) sind.

Jeder Koeffizient $A_{m,m'}$ in der trigonometrischen Entwicklung von Δ^{-1} nach den Vielfachen der mittleren Anomalien, als Funktion eines der Elemente (114) betrachtet, genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung von höchstens 36. Ordnung mit Koeffizienten, die rationale Funktionen der Elemente (114) sind.

In dem Spezialfalle $e = e' = 0$ ist $A_{m,m'} = B_{m,m'}$, und diese Koeffizienten gehen in die Jacobischen $b^{i,j}$ über. Das Polynom Δ^2 ist vom Grade $f = 1$ und bleibt unverändert, wenn x und y gleichzeitig ihre

157) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 127—132.

Vorzeichen wechseln. Es ist in der Tat[158])

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - aa'\mu(xy^{-1} + x^{-1}y) - aa'\nu(xy + x^{-1}y^{-1}).$$

Weiter ist $xy\Delta^2$ irreduktibel und besitzt für $x = 0$ einfache Nullstellen. Es folgt also der Satz:

Zwischen den Koeffizienten $b^{i,j}$ und ihren Ableitungen nach α, μ oder ν existieren lineare Rekursionsformeln mit Koeffizienten, die α, μ, ν rational enthalten. Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln können die $b^{i,j}$ und ihre Ableitungen mittels vieren von ihnen ausgedrückt werden.

Denselben Satz beweist Poincaré[159]) auch in anderer Weise, indem er anstatt x und y die Veränderlichen z und w durch die Transformation

$$z = xy^{-1}, \qquad w = xy$$

einführt. Für den Beweis stützt er sich auf den Umstand, daß Δ^2 invariant ist, wenn z durch $\frac{1}{z}$ oder w durch $\frac{1}{w}$ ersetzt wird.

Bei einem dritten Beweis führt Poincaré[160]), um zu zeigen, daß S ein Polynom ist, im Integralausdruck für U die elliptische Funktion $p(u)$ anstatt x ein. Von den Poincaréschen Grundgedanken geleitet hat übrigens *A. Féraud*[161]) gleichzeitig gezeigt, daß die Zahl der linear unabhängigen unter den $b^{i,j}$ höchstens vier ist.

Von denselben Prinzipien ausgehend hat ferner *A. Féraud*[162]) auch eine Reihe anderer Spezialfälle behandelt und eine obere Grenze für die Anzahl der unabhängigen Koeffizienten bei Entwicklung von Δ^{-1} nach Vielfachen der exzentrischen Anomalien bestimmt. Dabei hat er sich der für jeden Spezialfall charakteristischen Symmetrien des Polynomes Δ^2 bedient.

Von *A. Lambert*[163]) sind einige Differentialgleichungen für die durch die Entwicklung (61) definierten Koeffizienten $b_p^{i,j}$ abgeleitet worden. Einer dieser Differentialgleichungen widmete er eine eingehende Untersuchung. Diese Gleichung ist

$$\frac{1}{Z^{i,j}} \frac{\partial^2 Z^{i,j}}{\partial X \partial Y} = \frac{4i^2 - 1}{4(X+Y)^2} - \frac{4j^2 - 1}{4(X-Y)^2}, \tag{115}$$

158) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 136, Nr. 297.

159) *H. Poincaré*, ibid., p. 132—136.

160) *H. Poincaré*, Paris Bull. astr. 14 (1897), p. 449—466; 15 (1898), p. 70—71.

161) *A. Féraud*, Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 369—377.

162) *A. Féraud*, Obs. de Bordeaux ann. 8 (1898), p. 1—66; Auszüge Paris C. R. 126 (1898), p. 1402; Paris Bull. astr. 16 (1899), p. 93—101.

163) *A. Lambert*, Obs. de Paris ann. 26 (1910), p. C 1—45. Auszug Paris C. R. 144 (1907), p. 183.

wo

$$Z^{i,j} = (1+\alpha^2)^{\frac{p}{2}-1} \alpha \sin J \cdot b_p^{i,j}, \quad X = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad Y = \frac{\alpha \cos J}{1+\alpha^2}.$$

Lambert zeigte, wie die Gleichung (115) durch sogenannte *Moutard*sche Transformationen[164]) in die entsprechenden Differentialgleichungen für

$$b_p^{i+1,j+1} \quad b_p^{i-1,j+1} \quad b_p^{i+1,j-1} \quad b_p^{i-1,j-1}$$

übergeführt werden kann.

Lambert wendete außerdem das sog. Riemannsche Integrationsverfahren für die Gleichung (115) im Falle $i = j = 0$ an. *B. Riemann*[165]) hat, wie bekannt, einen Ausdruck für diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y) \tag{116}$$

gegeben, welche auf den beiden Linien $x = a$ und $y = b$ gegebene Werte annimmt. Für die Anwendbarkeit dieser Methode ist es nötig, die sog. Riemannsche Funktion zu kennen, d. h. eine Lösung $z(x, y; x_0, y_0)$ mit zwei Parametern x_0, y_0 und mit der Eigenschaft

$$z(x_0, y; x_0, y_0) \equiv z(x, y_0; x_0, y_0) \equiv 1.$$

Lambert hat die Riemannsche Funktion für die Gleichung (115) im Falle $i = j = 0$ abgeleitet.

42. Fundamentalperioden. Rekursionsformeln und Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten. Es werde wie oben angenommen, daß in der Formel (108) die Integration längs einer geschlossenen zweidimensionalen Fläche im vierdimensionalen Gebiete der komplexen Veränderlichen x und y auszuführen ist. Weiter werde angenommen, daß auf dieser Fläche die Funktion unter den Integralzeichen stetig und eindeutig ist. Solange diese Bedingung erfüllt ist, behält die sog. Periode Π ihren Wert unverändert, wenn auch die Integrationsfläche in kontinuierlicher Weise deformiert wird. Es gibt, wie bekannt, eine gewisse Anzahl von solchen geschlossenen Flächen

$$C_1, \; C_2, \; \ldots, \; C_k \tag{117}$$

oder von entsprechenden Fundamentalperioden

$$\Pi_1, \; \Pi_2, \; \ldots, \; \Pi_k \tag{118}$$

mit der Eigenschaft, daß jede beliebige Periode Π eine lineare Kom-

164) *M. Moutard,* J. École Polyt. cah. 45 (1878), p. 1—11 (présenté à l'Acad. 1870). Vgl. *Darboux,* Théorie des surfaces 2, p. 144.

165) *B. Riemann,* Göttingen Abh. der K. Ges. Wiss. 8 (1860) = Werke, 2. Aufl., p. 156. Vgl. *Darboux,* Théorie des surfaces 2, p. 71.

bination mit ganzzahligen Koeffizienten dieser Fundamentalperioden ist *H. Poincaré*[166]) betrachtet nun $k+1$ Perioden Π

$$\Pi^{(1)},\ \Pi^{(2)},\ \ldots,\ \Pi^{(k+1)}, \tag{119}$$

in welchen die Polynome H oder Ω verschieden, aber das Polynom F und die Integrationsfläche für alle gemeinsam sind. Man kann z. B. aus den Koeffizienten $A_{m,m'}$, $B_{m,m'}$ und ihren Ableitungen eine Anzahl von $k+1$ beliebig herausgreifen. Die den Flächen (117) entsprechenden Fundamentalperioden von $\Pi^{(i)}$ werden mit

$$\Pi_1^{(i)},\ \Pi_2^{(i)},\ \ldots,\ \Pi_k^{(i)}$$

bezeichnet. Zwischen den Perioden (119) besteht dann offenbar die Rekursionsformel

$$\begin{vmatrix} \Pi^{(1)} & \Pi_1^{(1)} & \ldots & \Pi_k^{(1)} \\ \Pi^{(2)} & \Pi_1^{(2)} & \ldots & \Pi_k^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi^{(k+1)} & \Pi_1^{(k+1)} & \ldots & \Pi_k^{(k+1)} \end{vmatrix} = 0, \tag{120}$$

welche auch in der Form

$$\Pi^{(k+1)} = \Phi_1 \Pi^{(1)} + \Phi_2 \Pi^{(2)} + \cdots \Phi_k \Pi^{(k)}$$

geschrieben werden kann. Poincaré beweist, daß die Koeffizienten Φ eindeutige Funktionen der Elemente (114) sind. Dieselben sind in der Tat Quotienten aus Determinanten der Ordnung k, die aus den k letzten Kolonnen der Determinante (120) gebildet werden. Wenn die Elemente (114) einen beliebigen geschlossenen Weg im komplexen Gebiet beschreiben, so wird auf jeder Zeile dieser Determinanten eine und dieselbe lineare Substitution ausgeübt. Jede von diesen Determinanten wird dann also mit einem und demselben Faktor multipliziert. Die Quotienten $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ sind deshalb eindeutig.

Wenn die Integrale Π nur algebraische Singularitäten besitzen, so sind die Koeffizienten Φ offenbar rationale Funktionen der Elemente (114). Dieser Fall trifft zu für $\Omega = 0$. Die Zahl der linear unabhängigen unter den $B_{m,m'}$ ist aber höchstens 16 im allgemeinen und 4, wenn die Exzentrizitäten Null sind. Für die Störungsfunktion weiß man daher, daß $k \leq 16$ in dem allgemeinen Falle, und daß $k \leq 4$, wenn $e = e' = 0$.

In dieser Weise hat H. Poincaré den folgenden Satz gefunden:

Zwischen den Koeffizienten $A_{m,m'}$ in der trigonometrischen Entwicklung von Δ^{-1} nach den Vielfachen der mittleren Anomalien existieren lineare Rekursionsformeln mit Koeffizienten, die eindeutige

166) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 137—139.

Funktionen der Elemente (114) sind. Mit ihrer Hilfe können alle diese Koeffizienten $A_{m,m'}$ durch höchstens 16 unter ihnen ausgedrückt werden. Jeder Koeffizient $A_{m,m'}$, als Funktion der Elemente (114) betrachtet, genügt außerdem einer homogenen linearen Differentialgleichung von höchstens 16. Ordnung mit Koeffizienten, die eindeutige Funktionen dieser Elemente sind.

Poincaré spricht die Hoffnung aus, es werde sich bei dem Aufsuchen der Fundamentalperioden zeigen, daß die Ordnungszahl k beträchtlich kleiner als 16 sei.

VII. Numerische Entwicklungsmethoden.

43. Unzulänglichkeit der analytischen Entwicklungen. Die analytischen Entwicklungen der Störungsfunktion sind für die allgemeine Störungstheorie von großer Bedeutung, besonders bei Untersuchungen über die allgemeinen Eigenschaften der Planetenbewegung. Aber auch bei Aufgaben von beschränkterer Natur, wenn es sich z. B. um die Vorausberechnung der Bewegung der Planeten für einige Jahrhunderte handelt, können dieselben von Nutzen sein. Ein großer Vorteil ist dabei, daß isolierte Glieder direkt berechnet werden können, unabhängig von den übrigen Gliedern. Eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Leverrierschen und Newcombschen Entwicklungen ist aber im allgemeinen, daß wenigstens die Exzentrizitäten sehr kleine Größen sind. Für die Bahnen der großen Planeten scheint ja diese Bedingung erfüllt zu sein. Aber auch bei diesen Hauptplaneten kommt es zuweilen vor, daß gewisse Störungen von sehr langer Periode in der Praxis nicht berechnet werden können mit Hilfe von Reihen, die nach Potenzen der Exzentrizitäten geordnet sind, da die Glieder dieser Reihen im Anfang zu langsam abnehmen. Die Exzentrizitäten mancher Asteroidenbahnen sind so groß, daß Entwicklungen nach Potenzen derselben von vornherein vermieden werden müssen. Weiter ist es offenbar, daß solche Entwicklungen bei Untersuchungen über die Bewegungen der Kometen unbrauchbar sind.

In manchen Fällen müssen deshalb die Koeffizienten der Fourierschen Reihen für die Störungsfunktion und ihre Ableitungen durch Methoden berechnet werden, bei welchen schon von Anfang an die numerischen Werte der Elemente a, a', e, e', ω, ω', J in die Rechnung eingeführt werden. Es kann übrigens die Frage aufgeworfen werden, ob nicht bei allen Bewegungstheorien in unserm Sonnensysteme die numerischen Entwicklungsmethoden den analytischen vorzuziehen sind, wenn eine der Genauigkeit der modernen Beobachtungen entsprechende Schärfe der Theorie angestrebt wird.

44. Übergang von exzentrischen Anomalien zu mittleren. Bei mehreren dieser numerischen Methoden werden die Reihen zuerst nach den Vielfachen einer exzentrischen Anomalie geordnet, weil die Distanz Δ einfacher durch diese Anomalie als durch die mittlere ausgedrückt wird. Um von der Entwicklung einer Funktion nach den Vielfachen von E zur entsprechenden Entwicklung nach Multipeln von M überzugehen, wird die von *C. G. J. Jacobi*[167]) und *P. A. Hansen*[168]) abgeleitete Formel

$$c^{\sqrt{-1}jE} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{i} J_{i-j}(ie)\, c^{\sqrt{-1}iM} \tag{121}$$

angewandt. Dieselbe folgt leicht aus der Definitionsgleichung

$$J_i(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(iE - z \sin E)\, dE, \tag{122}$$

durch welche *F. W. Bessel*[169]) die nach ihm benannten Besselschen Funktionen $J_i(z)$ in die Analyse einführte.

Infolge (121) können die gesuchten Koeffizienten A_i der Reihe

$$F = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_i\, c^{\sqrt{-1}iM}$$

aus den bekannten Koeffizienten B_i der Entwicklung

$$F = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_j\, c^{\sqrt{-1}jE}$$

durch die Formeln

$$\begin{aligned} iA_i &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (i-k)\, J_k(ie)\, B_{i-k}, \qquad i \neq 0 \\ A_0 &= B_0 - \frac{e}{2}(B_{-1} + B_{+1}) \end{aligned} \tag{123}$$

berechnet werden.

---

167) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), Nr. 9 (Juli 1835) = Werke 6, p. 100.

168) *P. A. Hansen*, Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 2 (1855), p. 249.

169) *F. W. Bessel*, Berl. Abhdl. 1824, Nr. 8 = Ges. Abhdl. 1, p. 92. Bessel schreibt I_z^i anstatt $J_i(z)$. Für die Theorie der Besselschen Funktionen sei auf II A 10, Nr. **44—61** (Wangerin) verwiesen.

In ähnlicher Weise findet man durch die Formeln

$$i \cdot i' A_{i,i'} = \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} (i-k)(i'-k') J_k(ie) J_{k'}(i'e') B_{i-k,i'-k'}, \qquad i \cdot i' \neq 0$$

$$iA_{i,0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (i-k) J_k(ie) \Big[B_{i-k,0} - \frac{e'}{2} (B_{i-k,-1} + B_{i-k,+1}) \Big], \qquad i \neq 0$$

(124)

$$i' A_{0,i'} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (i'-k') J_{k'}(i'e') \Big[B_{0,i'-k'} - \frac{e}{2} (B_{-1,i'-k'} + B_{+1,i'-k'}) \Big], \qquad i' \neq 0$$

$$A_{0,0} = B_{0,0} - \frac{e}{2}(B_{-1,0} + B_{+1,0}) - \frac{e'}{2}(B_{0,-1} + B_{0,+1}) + \frac{ee'}{4}(B_{-1,-1} + B_{-1,+1} + B_{+1,-1} + B_{+1,+1})$$

die unbekannten Koeffizienten $A_{i,i'}$ einer Entwicklung

$$F = \sum_{i,i'=-\infty}^{+\infty} A_{i,i'} c^{\sqrt{-1}(iM+i'M')}$$

aus den bekannten $B_{j,j'}$ der entsprechenden Reihe

$$F = \sum_{j,j'=-\infty}^{+\infty} B_{j,j'} c^{\sqrt{-1}(jE+j'E')}$$

derselben Funktion F.

Bei den in (123) und (124) auftretenden Summen brauchen nur einige wenige Glieder mitgenommen zu werden, da die Größen $J_k(ie)$ und $J_{k'}(i'e')$ mit wachsenden $|k|$ und $|k'|$ rasch abnehmen.

Die Ausdrücke (123) und (124) folgen auch leicht aus folgendem Satz von *A. L. Cauchy*[170]): Der Koeffizient A_i von $c^{\sqrt{-1}iM}$ in der Entwicklung einer Funktion F nach Vielfachen der mittleren Anomalie ist gleich dem Koeffizienten von $c^{\sqrt{-1}iE}$ in der Entwicklung jeder der Funktionen

$$(1 - e\cos E) c^{\sqrt{-1}ie\sin E} F, \qquad \frac{1}{i\sqrt{-1}} c^{\sqrt{-1}ie\sin E} \cdot \frac{dF}{dE}$$

nach Vielfachen der exzentrischen Anomalie. Die erste Hälfte dieses Satzes fand Cauchy, indem er im Integralausdrucke für A_i als Integrationsvariable die exzentrische Anomalie statt der mittleren einführte; die zweite Hälfte erhielt er aus demselben Integral nach partieller Integration.

---

170) *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 12 (1841), p. 88 = Œuvres (1) 6, p. 21.

45. Zweiter Teil der Störungsfunktion. Von den aus der Theorie der elliptischen Bewegung wohlbekannten Formeln

$$\frac{r}{a}\cos v = \cos E - e, \qquad \frac{r}{a}\sin v = \sqrt{1-e^2}\sin E,$$

$$\frac{a^2}{r^2}\cos v = -\frac{d^2\frac{r}{a}\cos v}{dM^2}, \qquad \frac{a^2}{r^2}\sin v = -\frac{d^2\frac{r}{a}\sin v}{dM^2} \tag{125}$$

ausgehend entwickelte *F. W. Bessel*[171]) die auf den linken Seiten stehenden Funktionen in trigonometrische Reihen nach Vielfachen von M. Die Koeffizienten drückte er einfach durch die Besselschen Funktionen aus. Durch Kombination dieser Reihen leitete *Bessel*[172]) für den zweiten Teil

$$\frac{r\cos H}{r'^2}$$

der Störungsfunktion R die allgemeine Entwicklung nach Vielfachen der mittleren Anomalien ab. In diesem Teil der Störungsfunktion kommt offenbar kein konstantes Glied vor, weil derselbe die zweite Ableitung einer periodischen Funktion ist. Eine Folge davon ist, daß keine säkularen Störungen erster Ordnung aus dem zweiten Teil der Störungsfunktion hervorgehen.

Die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion in bezug auf die Koordinaten sind lineare Ausdrücke der negativen ungeraden Potenzen des Abstandes Δ mit Koeffizienten, die aus den durch die Formel (94) entwickelten Funktionen zusammengesetzt sind. Die Ausdrücke der in der Praxis vorkommenden Ableitungen sind von *P. A. Hansen*[173]) und *G. W. Hill*[174]) abgeleitet. Von den dabei auftretenden Funktionen von der Form (94) können außer den Funktionen (125) noch mehrere andere mit Hilfe der Besselschen Funktionen nach Vielfachen von M (oder M') entwickelt werden.[172])[175])[176])

Die im folgenden behandelten numerischen Entwicklungsmethoden beziehen sich nur auf die Entwicklung der Funktionen Δ^{-n}.

---

171) *F. W. Bessel,* Berl. Abhdl. (1824), Nr. 4, 8 = Ges. Abh. 1, p. 88, 93.

172) *F. W. Bessel,* ibid., p. 89, 93.

173) *P. A. Hansen,* Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 5 (1856), p. 120. (Auseinandersetzung 1. Abhdl., p. 120.)

174) *G. W. Hill,* Wash. Astron. Papers 4 (1890), p. 66, 201 = Works 3, p. 66, 201.

175) *F. W Bessel,* Astr. Nachr. 14 (1837), p. 33—36 = Ges. Abh. 1, p. 46, 47.

176) *H. Poincaré,* Leçons 2_1 (1907), p. 24—26. Siehe auch *F. Tisserands* Traité 1 (1889), p. 224—227.

46. Entwicklungsmethode von Jacobi. Von *C. G. J. Jacobi*[177]) rührt eine Entwicklungsmethode her, welche eine mittlere Stellung zwischen den analytischen und den numerischen Methoden einnimmt. Jacobi entwickelt Δ^{-n} nach Vielfachen der exzentrischen Anomalien. Er setzt

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + \delta, \tag{126}$$

wo δ nur Glieder zweiten Grades in bezug auf die Exzentrizitäten und die Neigung enthält. Als Voraussetzung wird angenommen, daß die Entwicklung von Δ^{-1} nach Potenzen von δ rasch genug konvergiert. Die Funktion δ wird so gewählt, daß

$$\begin{aligned}\Delta_0^2 &= H^2\{1+\gamma^2+\gamma'^2-2\gamma\cos(E-E'+B-B')-2\gamma'\cos(E'+B') \\ &\qquad +2\gamma\gamma'\cos(E+B)\} \\ &= H^2(1-\gamma z-\gamma' z')(1-\gamma z^{-1}-\gamma' z'^{-1}),\end{aligned}$$

wo

$$z = c^{\sqrt{-1}(E-E'+B-B')}, \qquad z' = c^{-\sqrt{-1}(E'+B')},$$

während H, γ, γ', B, B' konstante von den Bahnelementen abhängige Größen sind. Ihre analytischen Ausdrücke hat *F. Tisserand*[178]) gegeben.

Die Entwicklung von Δ^{-n} wird infolge (126) auf die einfacheren Entwicklungen von Δ_0^{-n}, Δ_0^{-n-2}, ... zurückgeführt.

H. Poincaré[179]) hat in eleganter Weise die Zerlegung von Δ^2 durchgeführt. Er hat außerdem bemerkt, daß der Koeffizient von $z^h z'^k$ in der Entwicklung von Δ_0^{-n}, von einem Faktor $C_{h,k}\gamma^h\gamma'^k$ abgesehen, eine Appellsche hypergeometrische Reihe der Veränderlichen γ^2 und γ'^2 ist. Die genannten Reihen können nach Potenzen von γ'^2, die eine kleine Größe zweiten Grades in bezug auf die Exzentrizitäten und die Neigung ist, entwickelt werden. Dabei treten als Koeffizienten die gewöhnlichen hypergeometrischen Reihen von γ^2 auf, welche in analoger Weise wie die Laplaceschen Koeffizienten berechnet werden können. Jacobi waren die Appellschen Reihen unbekannt. Seine etwas abweichende Analyse für die Entwicklung von Δ_0^{-n} findet man in den schon angeführten Arbeiten.[177])[178])

Der Übergang zur Entwicklung nach Vielfachen der mittleren Anomalie geschieht numerisch mit Hilfe der Formeln von Nr. 44.

47. Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen durch mechanische Quadratur. In schwierigeren Fällen

---

177) *C. G. J. Jacobi,* Astr. Nachr. 28 (1848), p. 65—94 = Werke 7, p. 145—174. Auszug Berl. Ber. (1843), p. 50 = Werke 7, p. 94.

178) *F. Tisserand,* Traité de méc. cél. 4 (1896), ch. 18, p. 301—311.

179) *H. Poincaré,* Leçons 2_1 (1907), p. 143—145.

können die schon erwähnten Entwicklungsmethoden unbrauchbar werden, obwohl die trigonometrische Entwicklung der Störungsfunktion gut konvergiert. Solche Fälle treten häufig auf, wenn es sich um die Berechnung der Störungen der kleinen Planeten durch Jupiter handelt. Für die numerische Bestimmung der Koeffizienten in den Fourierschen Reihen für R und ihre Ableitungen wird dann die Methode der mechanischen Quadratur von großer Bedeutung.

Die Koeffizienten C_i in der trigonometrischen Entwicklung

$$y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i c^{\sqrt{-1}iu} \tag{127}$$

einer periodischen Funktion $y(u)$ sind, wie bekannt, durch die Formel

$$C_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot c^{-\sqrt{-1}iu} du$$

gegeben. Wo die Integration nicht analytisch ausgeführt werden kann, ist sie doch stets wenigstens wenn y endlich ist, mit Hilfe von mechanischer Quadratur möglich. Am einfachsten wird der Integrationsweg in gleiche Teile zerlegt. Wenn $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ die bekannten Werte von y sind für $u = 0, \frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$, ist näherungsweise

$$C_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k c^{-\sqrt{-1}ik\frac{2\pi}{n}}. \tag{128}$$

Die exakte Formel wird erhalten, indem der linken Seite das Korrektionsglied

$$\delta = (C_{i-n} + C_{i+n}) + (C_{i-2n} + C_{i+2n}) + \cdots \tag{129}$$

hinzugefügt wird. Dieses Glied wird im Verhältnis zu C_i beliebig klein, wenn, für ein gegebenes i, n hinreichend groß gewählt ist.

Diese Methode zur Berechnung der Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen wurde schon von *L. Euler*[180]) angewandt bei seiner Bestimmung der säkularen Störungen von Jupiter und Saturn. In derselben Weise berechnete später *A. Clairaut*[181]) einige periodische Störungen der Sonnenbewegung.

Später wurde die Anwendung der Formel (128) auch von *F. W. Bessel*[182]) und *P. A. Hansen*[183]) befürwortet. Die besonders einfachen

180) *L. Euler*, Sur les inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter; Paris 1749, § 29, p. 30.

181) *A. Clairaut*, Paris hist. (2) mém. 1754 (59), p. 546 (Juli 1757).

182) *F. W. Bessel*, Jenaische Literatur-Zeitung (1814), p. 412; Königsb.

Fälle, wo $n = 16$ oder 32, wurden von *P. A. Hansen*[184]) in seiner Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn eingehend behandelt. In seiner *Auseinandersetzung*[185]) *usw.* hat er Rechnungvorschriften für die Fälle $n = 12, 16, 24, 32$ gegeben. Weiter findet man in den Arbeiten von *U. J. J. Leverrier*[186]) detallierte Formelsysteme für $n = 8, 16, 32$. Endlich hat auch *C. Runge*[187]) bequeme Rechnungsmethoden für $n = 12$ und 24 veröffentlicht. Vgl. auch den Artikel II A 9a (Burkhardt), p. 685.

Für die Bestimmung eines geeigneten n schlägt *F. W. Bessel*[188]) die Methode von *P. S. Laplace*[189]) vor, durch welche Integrale, die sehr große Zahlen enthalten, geschätzt werden können. (Vgl. im folg. Kap. VIII.)

Auch die in der trigonometrischen Entwicklung

$$y = \sum_{i,i'=-\infty}^{+\infty} C_{i,i'}\, c^{\sqrt{-1}(iu+i'u')} \tag{130}$$

einer periodischen Funktion $y(u, u')$ von zwei Veränderlichen auftretenden Koeffizienten $C_{i,i'}$, welche durch Doppelintegrale gegeben sind, können mit Hilfe mechanischer Quadraturen berechnet werden Der angenäherte Ausdruck für $C_{i,i'}$ wird dann

$$C_{i,i'} = \frac{1}{nn'} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n'-1} y_{k,k'}\, c^{-\sqrt{-1}\left(ik\frac{2\pi}{n} + i'k'\frac{2\pi}{n'}\right)},$$

wo $y_{k,k'}$ den Wert von y für $u = k\frac{2\pi}{n}$, $u' = k'\frac{2\pi}{n'}$ bezeichnet.

Diese Methode zur Berechnung von Doppelintegralen wurde von *F. W. Bessel*[190]) empfohlen. Aber *P. A. Hansen*[184]) war der erste, welcher in größerer Ausdehnung ausgeführte doppelte mechanische

---

Beob. 1 (1815), p. III = Ges. Abhdl. 2, p. 25; Berl. Abhdl. für 1816—17, p. 49 = Ges. Abhdl. 1, p. 18; Astr. Nachr. 6 (1828), p. 336 = Ges. Abhdl. 2, p. 366.

183) *P. A. Hansen,* Astr. Nachr. 7 (1829), p. 475—478.

184) *P. A. Hansen,* Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin (1831), p. 49—57.

185) *P. A. Hansen,* Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 5 (1856), p. 158—165. (Auseinandersetzung 1. Abh., p. 158—165.)

186) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 107—118, 137—151.

187) *C. Runge,* Zeitschr. für Math. u. Physik 48 (1903), p. 443; 52 (1907), p. 117; Göttingen, Nachr. der K. Ges. Wiss. (1908), p. 275.

188) *F. W. Bessel,* Berl. Abhdl. 1820—21, p. 56 = Ges. Abhdl. 2, p. 363.

189) *P. S. Laplace,* Théorie analytique des probabilités, 2e éd. Paris (1814), 2e partie, 1e ch. = Œuvres 7.

190) *F. W. Bessel,* Berl. Abhdl. 1820—21, p. 55 = Ges. Abhdl. 2, p. 362.

Quadraturen veröffentlichte. Er berechnete in dieser Weise die Koeffizienten in den trigonometrischen Entwicklungen von Δ^{-1}, Δ^{-3} und Δ^{-5} im Falle Jupiter-Saturn. Dabei teilte er der Differenz $M - M'$ der mittleren Anomalien 32 Werte und der mittleren Anomalie M' Saturns 16 Werte zu. Dieselbe Methode war übrigens schon 1811 von *C. F. Gauß*[191]) in Anwendung gebracht worden bei seiner erst neuerdings veröffentlichten Berechnung der allgemeinen Störungen der Pallas durch Jupiter. Den Umkreis teilt Gauß für $M - M'$ in 48, für M in 24 Teilen.

48. Methode von Liouville. *J. Liouville*[192]) hat gezeigt, wie Koeffizienten von hohem Grade in der Entwicklung der Störungsfunktion mit großer Annäherung durch einfache Integrale gefunden werden können. Unter der Annahme, daß i und i' für den gewünschten Koeffizienten relative Primzahlen sind, führt Liouville in die Reihe (130) statt u und u' zwei neue Variable σ und θ ein gemäß den Gleichungen:

$$u = -i'\sigma, \qquad u' = i\sigma + \frac{\theta}{i'},$$

woraus sich noch ergibt

$$iu + i'u' = \theta.$$

$y(u, u')$ wird dann eine periodische Funktion von σ mit der Periode 2π. Das von σ unabhängige Glied in der trigonometrischen Entwicklung von y nach Vielfachen von σ ist

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_{pi,pi'}\, c^{\sqrt{-1}p\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\left(-i'\sigma, i\sigma + \frac{\theta}{i'}\right) d\sigma = \psi(\theta).$$

Dem Argumente θ erteilt Liouville die vier Werte $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ und erhält dann, infolge der Formeln (128) und (129), die Gleichung

$$C_{i,i'} = \frac{1}{4}\left\{\psi(0) - \psi(\pi) + \sqrt{-1}\left[\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]\right\} - \delta,$$

wo

$$\delta = C_{-3i,-3i'} + C_{5i,5i'} + C_{-7i,-7i'} + C_{9i,9i'} + \cdots.$$

Wenn y die Störungsfunktion, u und u' die mittleren Anomalien bezeichnen, so ist $C_{i,i'}$ vom Grade $|i + i'|$ in bezug auf die Exzentrizitäten und die Neigung. Das Korrektionsglied δ ist vom Grade $|3i + 3i'|$ und wird deshalb oft vernachlässigt werden können.

---

191) *C. F. Gauß*, Ges. Werke 7 (1906), p. 489—564 (Nachlaß).

192) *J. Liouville*, J. de Math. 1 (1836), p. 197. Auszug Paris C. R. 2 (1836), p. 217. Siehe auch Poissons Rapport über Liouvilles Arbeit Paris C. R. 2 (1836), p. 394.

Die Integration in bezug auf σ, um die erforderlichen Werte von $\psi(\theta)$ für $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ zu erhalten, kann durch mechanische Quadratur ausgeführt werden. Dabei muß aber 2π in sehr viele Teile zerlegt werden; denn die trigonometrische Entwicklung von Δ^{-1} nach Vielfachen von σ konvergiert nur langsam.

49. Trigonometrische Interpolationsmethode von Leverrier. Um die Schwierigkeiten zu umgehen, welche in der geigneten Bestimmung von n in der Formel (128) stecken, hat *U. J. J. Leverrier*[193]) vorgeschlagen, die Funktion $y(u)$ für äquidistante Werte $u = 0, \tau, 2\tau, \ldots, 2n\tau$ zu berechnen, wo τ mit 2π inkommensurabel ist. Aus den Gleichungen

$$(130') \qquad y_k = \sum_{i=-n}^{+n} C_i c^{\sqrt{-1}ik\tau} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$$

eliminiert Leverrier nacheinander C_0, $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$ usw. und findet schließlich analytische Ausdrücke für C_n und C_{-n}. Wenn diese Koeffizienten nicht klein genug sind, so ersetzt er n durch ein größeres n'. Dabei werden die Ausdrücke für $C_{n'}$ und $C_{-n'}$ ebenso leicht gewonnen, wie wenn man von Anfang an n' anstatt n gewählt hätte. Wenn die $C_{\pm n'}$ klein genug sind, so werden die folgenden Koeffizienten vernachlässigt. Darauf geben die Leverrierschen Formeln rückwärts analytische Ausdrücke für $C_{\pm(n'-1)}$, $C_{\pm(n'-2)}$, $\ldots$, $C_{\pm 1}$, C_0. Leverrier hat in eingehender Weise die Formeln numerisch entwickelt in dem Falle $\tau = 42^0\,14'$ und $n = 20$. *J. F. Encke*[194]) hat die Darstellung Leverriers veranschaulicht durch Einführung von trigonometrischen Funktionen anstatt der Exponentialfunktion. Endlich hat *G. J. Houël*[195]) mit Anwendung von Determinanten die Gleichungen aufgelöst, welche aus (130') durch Einführung von $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ entstehen.

U. J. J. Leverrier[196]) hat seine Interpolationsmethode angewandt, um die große Ungleichheit vom Argumente $18M' - 7M$, welche in der mittleren Länge von Pallas infolge der Einwirkung Jupiters auftritt, zu berechnen. Um die beiden erforderlichen Glieder in der Entwicklung von Δ^{-1} zu finden, berechnete Leverrier diese Funktion für die Werte $0, \tau, 2\tau, \ldots, 40\tau$ ($\tau = 42^0 14'$) der mittleren Länge

193) *U. J. J. Leverrier,* Développements sur plusieurs points de la théorie des perturbations des planètes, Paris (1841), p. 1—29. Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 384—397.

194) *J. F. Encke,* Berl. astr. Jahrb. (1860), p. 313 = Ges. Abhdl. 3, p. 188.

195) *G. J. Houël,* Obs. de Paris ann. 8 (1866), p. 83—130; Rapport Paris C. R. 53 (1861), p. 880.

196) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 397—418

von Pallas und für die Werte 0^0, 5^0, 10^0, ..., 355^0 der mittleren Anomalie von Jupiter.

50. Cauchys gemischte Methode. Die Berechnung der Koeffizienten in der trigonometrischen Entwicklung von Δ^{-n} durch mechanische Doppelquadraturen ist eine ziemlich verwickelte Aufgabe. Glücklicherweise gibt es eine bequemere Methode, bei welcher man mit einer einfachen mechanischen Quadratur auskommt, indem die andere Quadratur analytisch ausgeführt wird. Auf die Möglichkeit einer solchen gemischten Methode hat schon *F. W. Bessel*[197]) hingewiesen. Er dachte dabei an eine Verallgemeinerung der Gaußschen Theorie der Säkularstörungen erster Ordnung. Der Gedanke Bessels wurde indessen nicht ausgeführt. Aber eine in derselben Richtung gehende Methode wurde 25 Jahre später von *A. L. Cauchy*[198]) aufgestellt. Cauchy hat dieselbe angewandt, um den von Leverrier berechneten Wert der großen Ungleichheit in der mittleren Länge von Pallas zu kontrollieren. Auf Aufforderung von Leverrier hat *V. Puiseux*[199]) eine zusammenfassende Darlegung der Methode gegeben. Endlich hat *J. Bourget*[200]), von den Ideen Cauchys geleitet, vollständige Formeln für die Entwicklung der Störungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen gegeben.

Cauchy geht von der Entwicklung

$$\Delta^{-1} = \sum_{i'=-\infty}^{+\infty} B_{i'} c^{\sqrt{-1}\, i' E}$$

aus. Für Δ^2, betrachtet als Funktion von $y = c^{\sqrt{-1}E}$, gilt der einfache Ausdruck

$$\Delta^2 = A + By + B' y^{-1} + Cy^2 + C' y^{-2}, \tag{131}$$

wo $A, B, \ldots, C'$ in bekannter Weise von E abhängen. Darauf gründet sich die Möglichkeit, die Koeffizienten $B_{i'}$ in analytischer Form zu geben, wie gleich gezeigt werden wird. Mit Hilfe der analytischen Ausdrücke für $B_{i'}$ werden nun die Werte dieser Koeffizienten für äquidistante Werte von E berechnet. Durch Anwendung der Formel

$$A_{m'} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{m'-k}{m'} J_k(m'e') B_{m'-k}$$

197) *F. W. Bessel*, Berl. Abhdl. 1820—21, p. 55 = Ges. Abhdl. 2, p. 363, 364.

198) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 18 (1844), p. 625; 19 (1844), p. 1228; 20 (1845), p. 769, 825 = Œuvres (1) 8, p. 168, 348; 9, p. 124, 141.

199) *V. Puiseux*, Obs. de Paris ann. 7 (1863), p. 165—235. Vgl. auch Tisserand, traité 4 (1896), ch. 17, p. 278—300.

200) *J. Bourget*, Obs. de Paris ann. 7 (1863), p. 263—300. Vgl. auch Fr. Faà de Bruno, Paris thèse 1856; Berger, Toulouse thèse 1863; J. Houël, Obs. de Paris ann. 8 (1866), p. 131 und Prag Archiv 1 (1875).

[vgl. (123)] folgt weiter der Koeffizient $A_{m'}$ in der Reihe

$$\Delta^{-1} = \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} A_{m'} c^{\sqrt{-1}m'M'} \tag{132}$$

für die equidistanten Werte von E. Der gesuchte Koeffizient $A_{m,m'}$ in der Entwicklung (97) nach den Vielfachen von M und M' wird schließlich aus dem Integrale

$$A_{m,m'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_{m'} c^{-\sqrt{-1}mM}(1 - e\cos E)\,dE$$

durch eine einzige mechanische Quadratur erhalten.

Die analytischen Ausdrücke für die Koeffizienten $B_{i'}$ selbst findet Cauchy in folgender Weise. In der Formel (131) ist

$$C = C' = \tfrac{1}{4}a'^2e'^2.$$

A ist reell, B und B' sind konjugierte komplexe Größen. Die Wurzeln der Gleichung $\Delta^2 = 0$ sind deshalb von der Form

$$\alpha' c^{\sqrt{-1}\varphi'},\quad \frac{1}{\alpha'}c^{\sqrt{-1}\varphi'},\quad \beta' c^{-\sqrt{-1}\varphi'},\quad \frac{1}{\beta'}c^{-\sqrt{-1}\varphi'}, \tag{133}$$

$$(\text{wo } 0 < \beta' < \alpha' < 1)$$

woraus folgt, daß

$$\Delta^2 = \frac{\alpha'^2e'^2}{4\alpha'\beta'}[1 - 2\alpha'\cos(E' - \varphi') + \alpha'^2][1 - 2\beta'\cos(E' + \varphi') + \beta'^2].$$

Die von E abhängigen Größen α', β', φ' werden durch Auflösung einer Gleichung dritten Grades mit reellen Wurzeln erhalten (siehe z. B. Tisserands Traité 4, p. 283). Die Koeffizienten dieser Gleichung sind einfache trigonometrische Funktionen von E. Man kann auch die Gleichung dritten Grades vermeiden und die Größen α', β', φ' nach Potenzen der kleinen Größe $C = \frac{1}{4}a'^2e'^2$ entwickeln (siehe z. B. Tisserands Traité 4, p. 285—287). Dabei können Schwierigkeiten auftreten, wenn α' sehr nahe $= 1$ ist. Wie man dieselben umgehen kann, hat *Ch. Trépied*[201]) gezeigt.

Nach Entwicklung der beiden von E' abhängigen Faktoren von Δ^{-1} nach den Vielfachen von E' findet Cauchy für $B_{i'}$ den analytischen Ausdruck

$$B_{i'} = \frac{\sqrt{\alpha'\beta'}}{2a'e'}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_1^{(i'-i)}(\alpha')\,b_1^{(i)}(\beta')\cdot c^{\sqrt{-1}(2i-i')\varphi'},$$

in welchem die von α' und β' abhängigen Laplaceschen Koeffizienten $b_1^{(i)}$ auftreten.

---

201) *Ch. Trépied,* Paris C. R. 90 (1880), p. 1474.

51. Entwicklung von Hansen. Die gemischte Methode wurde von *P. A. Hansen*[202]) in zwei Hinsichten vereinfacht. Analytisch entwickelt er nach den Vielfachen von $E' - E$. Die Entwicklung der Koeffizienten nach Vielfachen von E durch mechanische Quadratur wird dann einfacher als die entsprechende Entwicklung bei Cauchy. Weiter vermeidet Hansen die Auflösung von Δ^2 in zwei Faktoren.

Mit Einführung der Bezeichnungen

$$\Delta_0^2 = A + Bc^{\sqrt{-1}E'} + B'c^{-\sqrt{-1}E'}, \qquad \delta = \frac{a'^2 e'^2}{4}\left(c^{\sqrt{-1}2E'} + c^{-\sqrt{-1}2E'}\right)$$

wird infolge (131)

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + \delta.$$

Unter der Voraussetzung, daß $\delta : \Delta_0^2$ eine kleine Größe ist (wie im allgemeinen in der Praxis), entwickelt Hansen Δ^{-n} nach Potenzen von δ und wird so auf die Entwicklung der einfacheren Funktionen Δ_0^{-1}, Δ_0^{-3}, Δ_0^{-5}, ... geführt. Er setzt

$$\Delta_0^2 = \mathfrak{M}[1 + \theta^2 - 2\theta\cos(E' - F)]$$

und findet

$$\Delta_0^{-n} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_n^{(i)} c^{\sqrt{-1}\,i(E'-E)},$$

wo

$$\mathfrak{B}_n^{(i)} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} b_n^{(i)}(\theta)\, c^{-\sqrt{-1}\,i(F-E)}$$

Die Größen $\mathfrak{M}$, θ und $F - E$, und also auch die $\mathfrak{B}_n^{(i)}$ sind periodische Funktionen von E. In der Entwicklung

$$\mathfrak{B}_n^{(i)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_n^{(i,j)} c^{\sqrt{-1}\,jE}$$

ist $\mathfrak{B}_n^{(i,j)}$ vom Grade j in bezug auf die Exzentrizitäten und die Neigung. Die Berechnung dieser Koeffizienten $\mathfrak{B}_n^{(i,j)}$ durch mechanische Quadratur ist deshalb eine einfache Aufgabe.

In dieser Weise findet Hansen für Δ_0^{-n}, Δ_0^{-n-2}, ... Entwicklungen nach Vielfachen von E und E'. Nach Multiplikation mit den Potenzen von δ ergeben sich für Δ^{-n} ähnliche Reihen.

52. Elimination von E'. In seiner Theorie der kleinen Planeten wählt *Hansen* als unabhängige Veränderliche die exzentrische Anomalie E des gestörten Planeten. In den nach den Vielfachen von E

202) *P. A. Hansen,* Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 3 (1857), Nr. 64, p. 157; Nr. 68, p. 167. (Auseinandersetzung 1. Abh., p. 157, 167.)

und E' fortschreitenden Reihen führt er[203]) zuerst die mittlere Anomalie M' anstatt E' ein. Darauf substituiert er für M' den Ausdruck

$$M' = \frac{n'}{n} M + C = E_1 - \frac{n'}{n} e \sin E,$$

wo

$$E_1 = \frac{n'}{n} E + C$$

ist [n und n' sind die mittleren Bewegungen, C eine Konstante]. Infolge dieser Umformungen geht z. B. die Reihe

$$\Delta^{-1} = \sum B_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mE+m'E')} \tag{134}$$

in eine andere

$$\Delta^{-1} = \sum C_{m,m'} c^{\sqrt{-1}(mE+m'E_1)} \tag{135}$$

über. Durch die Formeln

$$m' C_{m,m'} = \sum_{k,k'=-\infty}^{+\infty} (m'-k') J_k\left(-\frac{n'}{n} m' e\right) J_{k'}(m'e') B_{m-k,m'-k'}, \qquad m' \neq 0$$

$$C_{m,0} = B_{m,0} - \frac{e'}{2}(B_{m,-1} + B_{m,+1}),$$

in welchen wieder die Besselschen Funktionen auftreten, können die Koeffizienten der Reihe (135) aus denjenigen der Reihe (134) berechnet werden.

53. Anwendung der elliptischen Funktionen. *C. V. L. Charlier*[204]) betrachtet Δ^{-n} als periodische Funktion von E (oder E') und $E - E'$ und macht darauf aufmerksam, daß die Entwicklung nach den Vielfachen von E (oder E') analytisch ausgeführt werden kann, während die dabei auftretenden Koeffizienten mit Hilfe mechanischer Quadratur nach Vielfachen von $E - E'$ entwickelt werden können. Die Glieder der analytischen Entwicklung nehmen dann rasch ab, denn der Koeffizient von $c^{\sqrt{-1}kE}$ ist vom Grade k in bezug auf die Exzentrizitäten und die Neigung. Man braucht deshalb nur wenige Werte von k in Betracht zu ziehen. Im Anschluß an die Theorie von *C. F. Gauß*[205]) über die Säkularstörungen drückt *Charlier*[206]) die Koeffizienten mit den Indizes $k = 0, \pm 1, \pm 2$ in der Entwicklung von Δ^{-3} mit Hilfe zweier elliptischer Integrale, mit von $E - E'$ abhängendem

---

203) *P. A. Hansen,* ebd. Nr. 69, p. 169; Nr. 74, p. 180.

204) *C. V. L. Charlier,* Stockholm K. Vet. Akad. Handlingar 22, Nr. 2 (1887), p. 11.

205) *C. F. Gauß,* Gott. comm. rec. 4 (1818) = Werke 3, p. 331—355.

206) *C. V. L. Charlier,* Stockholm K. Vet. Akad. Handlingar 22, Nr. 2 (1887), p. 19.

Modul, aus. Die mechanischen Quadraturen, durch welche die Koeffizienten der vollständigen Reihe gefunden werden, werden jedoch bei Charliers Vorschlag komplizierter als bei Hansen.

H. Poincaré[207]) hat vorgeschlagen, die Koeffizienten der Reihe

$$\Delta^{-n} = \sum B_{m'}^{(n)} c^{\sqrt{-1}m'E'}$$

mit Hilfe der elliptischen Funktionen von *Weierstraß* zu berechnen. In der Formel

$$B_{m'}^{(n)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|y|=1} \frac{y^{-m'+n-1}\,dy}{(y^2\Delta^2)^{\frac{n}{2}}}$$

genügt die Beschränkung auf Werte $m' \leq 0$, denn die $B_{m'}^{(n)}$ und $B_{-m'}^{(n)}$ sind konjugiert komplexe Größen. Von den Wurzeln (133) der Gleichung $y^2\Delta^2 = 0$ werden die inneren mit α, β; die äußeren mit γ, δ bezeichnet. *Poincaré* setzt

$$y = \alpha\frac{z-s'}{z-s}, \qquad z = p(u)$$

und bestimmt die Größen s, s' in der Weise, daß

$$\frac{dy}{\sqrt{-1}\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}} = du.$$

Die Größen s und s' sowie die Wurzeln e_1, e_2, e_3 der Gleichung

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0$$

werden dann einfache rationale Funktionen von α, β, γ, δ. Die Wurzeln e_1, e_2, e_3 sind übrigens reell. In dieser Weise findet man

$$(136)\quad B_{-k}^{(n)} = \left(\frac{a'e'}{2}\right)^{-n} \Phi \int_0^{2\omega_1} (pu-s)^{-k+n-1}(pu-s')^{k+n-1}(p'u)^{-n+1}\,du,$$

wo Φ eine rationale Funktion von α, β, γ, δ bezeichnet.

Die elliptische Funktion $F(u)$ unter dem Integralzeichen wird unendlich nur für $u = 0$, ω_1, ω_2, ω_3, $\pm u_0$, wo $p(\omega_\nu) = e_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ und $p(u_0) = s$. Weiter ist $F(-u) = F(u)$, $F(\omega_i - u) = F(\omega_i + u)$. Nach der Theorie der elliptischen Funktionen ist das in (136) vorkommende Integral linear zusammengesetzt aus den Integralen

$$\int_0^{2\omega_1} du = 2\omega_1, \quad \int_0^{2\omega_1} \zeta'(u)\,du = 2\eta_1, \quad \int_0^{2\omega_1} \zeta'(u+\omega_i)\,du = 2\eta_1,$$

$$\int_0^{2\omega_1} \zeta'(u \pm u_0)\,du = 2\eta_1, \quad \int_0^{2\omega_1} \{\zeta(u+u_0) - \zeta(u-u_0)\}\,du = 4\eta_1 u_0.$$

207) *H. Poincaré*, Leçons 2_1 (1907), p. 151—153.

Sei noch:

$$u_0 = u_0' + \sqrt{-1}\, u_0''.$$

Die Koeffizienten

$$(a'e')^n B_{m'}^{(n)}$$

sind aus den vier reellen Transzendenten

$$\omega_1, \quad \eta_1, \quad \eta_1 u_0', \quad \eta_1 u_0''$$

linear zusammengesetzt mit Koeffizienten, die rational in α, β, γ, δ sind.

Wenn

$$|m'| < n,$$

treten übrigens nur ω_1 und η_1 in den Koeffizienten auf.

Für die Berechnung der Transzendenten ω_1, η_1 und u_0 hat *H. A. Schwarz*[208]) sehr bequeme Formeln zusammengestellt.

54. Gauß' Theorie der säkularen Störungen. Die in den vorigen Nummern erwähnten Methoden stehen in enger Beziehung zu der von *C. F. Gauß*[205]) gegebenen Methode zur Berechnung der säkularen Störungen erster Ordnung in den Bahnelementen von Planeten oder Kometen.

Diese Störungen treten in folgender Form auf

$$(137) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ U\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial A} + V\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial B} + W\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial C} \right\} dM\, dM'.$$

Hier sind A, B, C die rechtwinkligen Koordinaten des gestörten Körpers; U, V, W sind unabhängig von der Lage des störenden Planeten in seiner Bahn, d. h. unabhängig von der mittleren Anomalie M'. Als A- und B-Achse wählt Gauß die Hauptachsen der Bahnellipse des störenden Körpers. Für Δ^2 gilt dann der einfache Ausdruck

$$\Delta^2 = (A - a'\cos E')^2 + (B - b'\sin E')^2 + C^2, \quad \text{wo } b' = a'\sqrt{1-e'^2}.$$

Gauß zeigt, wie die Integration in bezug auf M' ausgeführt werden kann mit Hilfe von elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung. Dieses von Gauß gelöste Problem fällt offenbar mit dem Problem zusammen, die Attraktionskomponenten eines materiellen Ringes zu bestimmen, welcher entsteht, wenn die Masse des störenden Planeten längs seiner Bahn verteilt wird im Verhältnis der Zeiten, in welchen der Planet die verschiedenen Teile seiner Bahn beschreibt. Nach Einführung der exzentrischen Anomalie E' anstatt M' nehmen die ge-

208) *H. A. Schwarz*, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Göttingen (1885), Nr. 45, p. 61; Nr. 49, p. 70.

nannten Attraktionskomponenten die Form der partiellen Ableitungen in bezug auf A, B, C der Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-e'\cos E')}{\Delta}\,dE'$$

an.

In die so entstehenden Integrale führt Gauß anstatt E' die Variable T ein, indem er setzt

$$H\cos E' = \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T, \quad H\sin E' = \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T,$$
$$H = \gamma + \gamma'\cos T + \gamma'\sin T.$$

Die Koeffizienten α, α', ..., γ'' werden durch die Bedingung

$$H^2\Delta^2 = G + G'\cos^2 T + G''\sin^2 T$$

bestimmt. Diese Bestimmung ist möglich, wenn G, $-G'$, $-G''$ die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{A^2}{a'^2+x} + \frac{B^2}{b'^2+x} + \frac{C^2}{c'^2+x} = 1 \tag{138}$$

sind. Gauß zeigt, daß die Wurzeln dieser Gleichung reell sind, und daß eine positiv, zwei negativ sind. Die Koeffizienten α, α', ..., γ'' sind alle reell, wenn die Größen G, G', G'' so gewählt werden, daß keine von ihnen negativ ist, was hiernach immer möglich ist. Infolge der von Gauß eingeführten Transformation ist

$$H\,dE' = \pm\,dT.$$

Für die Attraktionskomponenten des Ringes bekommt Gauß so Ausdrücke, die aus den beiden elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung mit dem Modul

$$k^2 = \frac{G'-G''}{G'+G} \tag{139}$$

linear zusammengesetzt sind.

Nach vielen Jahren wurde das von Gauß behandelte Problem wieder von *E. Bour*[209]) aufgenommen. Dieser betrachtet den Kegel, welcher die Bahn des störenden Planeten als Basis und die Lage des gestörten Körpers als Spitze hat, und findet so die geometrische Bedeutung der von Gauß eingeführten Größen. Die Gleichung des Kegels in bezug auf die Hauptachsen desselben ist

$$\frac{x^2}{G'} + \frac{y^2}{G''} - \frac{z^2}{G} = 0.$$

Weiter ist T die exzentrische Anomalie in der Hauptellipse des Kegels.

Eine elegante Ableitung der von Gauß gewonnenen Resultate hat

209) *E. Bour*, J. de l'école polytechnique cah. 36 (1856), p. 59—84.

G. H. Halphen[210]) geliefert. Wie Bour, legte er die Koordinatenachsen durch den angezogenen Punkt und parallel mit den Hauptachsen des schon betrachteten Kegels. Aber außerdem führte Halphen in die Integrale

$$(140)\quad X_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x\,dM'}{\Delta^3},\quad Y_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{y\,dM'}{\Delta^3},\quad Z_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,dM'}{\Delta^3},$$

wo $\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2$, anstatt dM' das vom Radiusvektor beschriebene Flächenelement $d\sigma$ durch die Formeln

$$\frac{dM'}{2\pi} = \frac{d\sigma}{\pi a' b'},$$

$$2h\,d\sigma = x_0(y\,dz - z\,dy) + y_0(z\,dx - x\,dz) + z_0(x\,dy - y\,dx)$$

ein, wo h den Abstand des gestörten Körpers von der Bahnebene des störenden Planeten, x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der Sonne bezeichnen. Die Integrale (140) werden dann, von dem Faktor $(2\pi h a' b')^{-1}$ abgesehen,

$$x_0\int \frac{x(y\,dz - z\,dy)}{\Delta^3},\quad y_0\int \frac{y(z\,dx - x\,dz)}{\Delta^3},\quad z_0\int \frac{z(x\,dy - y\,dx)}{\Delta^3}.$$

Ihr Werte verändern sich nicht, wenn anstatt der Bahnellipse des störenden Planeten eine Hauptellipse des Kegels als Integrationskurve gewählt wird. Man kann deshalb setzen

$$x = \sqrt{G'}\cos T,\quad y = \sqrt{G''}\sin T,\quad z = \sqrt{G}.$$

In dieser Weise werden die Attraktionskomponenten (140) sehr einfach durch die vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul (139) ausgedrückt.

G. H. Halphen[211]) hat auch eine andere Form für die Lösung des Problems von Gauß gegeben, in welcher die von Weierstraß eingeführten Perioden ω_1 und η_1 der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung auftreten. Er hat dann auch gezeigt, wie die Attraktion des Ringes vollständig berechnet werden kann ohne Auflösung der Gleichung dritten Grades von Gauß.

Dieser Umstand hängt mit einem von *H. Bruns*[212]) bewiesenen Satze zusammen. Bruns hat nämlich gezeigt, wie die Fundamentalperioden ω_1, ω_3, η_1, η_3 der elliptischen Integrale erster und zweiter

210) *G. H. Halphen,* Traité des fonctions elliptiques 2 (Paris 1888), p. 310—316. Vgl. Tisserands Traité 1, p. 431—440.

211) *G. H. Halphen,* ibid., p. 316—328. Auszug Paris C. R. 103 (1886), p. 363.

212) *H. Bruns,* Über die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, Dorpat 1875.

Gattung mit Hilfe der Invarianten g_2 und g_3 einfach ausgedrückt werden können. Die dabei auftretenden Transzendenten sind hypergeometrische Reihen, in welchen das vierte Element nur von der absoluten Invariante

$$g = \frac{g_2^3}{27 g_3^2}$$

abhängt.

Die in dieser Nummer erwähnten Arbeiten hatten hauptsächlich den Zweck, die Attraktionskomponenten des elliptischen Ringes zu bestimmen. Um die Methode von Gauß für die Störungsrechnung fruchtbar zu machen, blieb noch übrig, die Rechenvorschriften aufzustellen, durch welche die zweite Integration in (137) ausgeführt werden konnte. Bei dieser Integration ist man offenbar auf die mechanische Quadratur angewiesen. Anstatt M wird die Anomalie E als Integrationsvariable eingeführt. Einige der nötigen Formeln wurden von *H. Seeliger*[213]) abgeleitet. *G. W. Hill*[214]) gibt eine für die numerische Rechnung bequeme Zusammenstellung nebst Tafeln, um die Berechnung einiger Kombinationen von elliptischen Integralen zu erleichtern. Auch *O. Callandreau*[215]) und *R. T. A. Innes*[216]) haben ähnliche Tafeln publiziert. Nach den Untersuchungen Halphens hat *G. W. Hill*[217])[218]) die Frage von neuem aufgenommen. Für die Berechnung der elliptischen Integrale empfiehlt Hill in diesen Arbeiten die bekannten ϑ-Reihen. Infolge der sehr raschen Konvergenz dieser Reihen sind Tafeln beinahe zwecklos. In Anschluß an die eben erwähnten Arbeiten von Bruns und Halphen haben *L. Arndt*[219]) und *R. T. A. Innes*[220]) vollständige Formeln gegeben, mit deren Hilfe die Säkularstörungen ohne Auflösung einer Gleichung dritten Grades gefunden werden können. Für die Berechnung der in den Ausdrücken für ω_1 und η_1 auftretenden zwei hypergeometrischen Reihen findet man ausführliche Tafeln in Arndts Arbeit. Für die von Innes angewandten analogen hyper-

213) *H. Seeliger,* Astr. Nachr. 94 (1878), p. 1—30.

214) *G. W. Hill,* Wash. Astr. Papers 1_5 (1882), p. 317—361 = Works 2, p. 1—46. Referat von H. Seeliger, Astr. Ges. Vjs. 17 (1882), p. 169.

215) *O. Callandreau,* Obs. de Paris ann. 18 (1885), p. A 1—46.

216) *R. T. A. Innes,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 54 (1894), p. 289—296; Errata p. 401.

217) *G. W. Hill,* American J. of Math. 23 (1901), p. 317—336 = Works 4, p. 219 235.

218) *G. W. Hill,* American J. of Math. 22 (1901), p. 53—56 = Works 4, p. 236—243.

219) *L. Arndt,* Neuchâtel, Bull. de la soc. d. sciences naturelles 24 (1896), p. 3—44.

220) *R. T. A. Innes,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 67 (1907), p. 427—443.

geometrischen Reihen hat *F. Robbins*[221]) Tafeln veröffentlicht. In einem Zusatze zu einer Berechnung der Säkularstörungen des Planeten Ceres hat endlich *C. J. Merfield*[222]) die numerischen Werte der 20 ersten Koeffizienten der von Innes angewandten hypergeometrischen Reihen zusammengestellt.

VIII. Asymptotische Ausdrücke für Funktionen großer Zahlen.

55. Formulierung der Aufgabe. Wenn die Umlaufszeiten zweier Planeten nahe kommensurabel sind, so treten in ihren Längen gewisse langperiodische Störungen auf, die zuweilen sehr bedeutend sind. Solche Störungen von hoher Ordnung können ohne Anwendung von zeitraubenden doppelten mechanischen Quadraturen viel leichter berechnet werden mit Hilfe von gewissen, für große m' geltenden, asymptotischen Ausdrücken der in der Entwicklung (132) auftretenden Koeffizienten $A_{m'}$ und darauffolgende einfache mechanische Quadratur. Will man jede Quadratur vermeiden, so wird man vor die noch ungelöste Aufgabe gestellt, asymptotische Ausdrücke für die durch die Formel (100) definierten Koeffizienten $A_{m,m'}$ zu finden. Die Ableitung dieser beiden Sorten von asymptotischen Ausdrücken hängt nahe zusammen mit der Aufgabe, asymptotische Ausdrücke entfernter Glieder einer Laurentschen Reihe zu finden und ebenso mit der noch allgemeineren Aufgabe, solche Ausdrücke für Integrale von der Form

$$\int f(u)\,\varphi(u)^n\,du \tag{141}$$

aufzustellen, wo n eine große positive Zahl bedeutet.

56. Asymptotische Ausdrücke entfernter Koeffizienten in den Reihen von Taylor und Laurent. Solche Ausdrücke für die Koeffizienten A_n $(n>0)$ der Entwicklung

$$\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-s} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n$$

wurden von *A. L. Cauchy*[223]) abgeleitet unter den Annahmen, daß $0<s<1$ und $f(x)$ eindeutig und holomorph ist zwischen zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien a und a_1, wo $a_1<|k|<a$. In der Formel

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^{-n}\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-s} f(x)\,dp, \quad \text{wo } x = hc^{\sqrt{-1}p}, \quad h<|k| \tag{142}$$

221) *F. Robbins,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 67 (1907), p. 444—447.

222) *C. J. Merfield,* Astr. Nachr. 176 (1907), p. 245—246.

223) *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 20 (1845), p. 708—722 = Œuvres (1) 9, p. 102—116.

setzt Cauchy $h = k$. Er spaltet $f(x)$ durch den Ansatz:

$$f(kc^{\sqrt{-1}p}) = f(k) + pP,$$

wo P und seine Ableitungen kontinuierliche Funktionen von p sind, in zwei Teile. Die Integration für den ersten Teil führt auf das bekannte Eulersche Integral und gibt den Wert $k^{-n}f(k)[s]_n$, wo

$$[s]_n = \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(s)\,\Gamma(n+1)}.$$

Im Integralausdruck des zweiten Teiles δ integriert Cauchy partiell in bezug auf den Faktor $c^{-\sqrt{-1}np}$. Er findet so, bei der Annahme $0 < s < 1$, daß $\lim_{n=\infty} nk^n\delta$ eine endliche Größe ist. Da $\frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma(n+1)}$ von der Größenordnung n^{s-1} ist, so folgt, daß mit wachsendem n der Beitrag des zweiten Teils klein wird gegen den des ersten, und daß daher der asymptotische Ausdruck gilt:

(143) $$A_n \sim f(k)k^{-n}[s]_n.$$

Um mehrere Glieder im Ausdruck für A_n zu gewinnen, führt Cauchy in die Formel (142) die Entwicklung $f(kc^{\sqrt{-1}p}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m p^m$ ein. Unter der Annahme, daß $c^{\pi} < \frac{a}{|k|}$ und $< \frac{|k|}{a_1}$, findet er so den symbolischen Ausdruck

(144) $$A_n = k^{-n} f\left(kc^{-\frac{\partial}{\partial n}}\right)[s]_n.$$

Cauchy betrachtet speziell den Fall, wo $f(x) = \mathfrak{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$, und führt anstatt der Ableitungen in bezug auf n die endlichen Differenzen

$$\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n) = c^{\frac{\partial}{\partial n}}\varphi(n) - 1,$$

$$\nabla\varphi(n) = \varphi(n) - \varphi(n-1) = -c^{-\frac{\partial}{\partial n}}\varphi(n) + 1$$

ein. Dann wird die Formel (144)

(145) $$A_n = k^{-n}\mathfrak{F}(k - k\nabla,\ k^{-1} + k^{-1}\Delta)[s]_n.$$

In dieser Weise findet er eine Reihe für A_n, nachdem $\mathfrak{F}$ nach Potenzen von ∇ und Δ entwickelt worden ist und nach Einführung von

$$\nabla^m\Delta^{m'}[s]_n = [s - m - m']_{n+m'}.$$

Diese Größe ist von der Größenordnung $n^{s-1-m-m'}$. Die Glieder im Reihenausdrucke für A_n nehmen also anfangs rasch ab, wenn n eine große Zahl ist. Auf vorher publizierte Untersuchungen[224]) hinweisend,

224) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 20 (1915), p. 280—293; 463—481 = Œuvres (1) 9, p. 5—19; 54—74.

hebt Cauchy hervor, daß diese Reihe für A_n für große n konvergent ist, wenn die Entwicklung von $\mathcal{F}(k - ky, k^{-1} + k^{-1}z)$ nach Potenzen von y und z für $|y^{-1}| + |z^{-1}| < 1$ konvergiert, daß sie aber halbkonvergent ist, wenn die Entwicklung von $\mathcal{F}$ unter den Bedingungen $|y| > 1$, $|z| > 1$ konvergiert.

Einige Jahre später hat *Cauchy*[225]) gefunden, daß die besprochenen Formeln mit Vorteil durch andere einfachere ersetzt werden können. Er betrachtet dabei die Funktion

$$Z = (1 - z_1 z^{-1})^{-s} F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^n,$$

wo $F(z)$ eindeutig und holomorph ist in der Nähe von $|z| = |z_1|$. Im Ausdrucke

$$(146) \quad A_{-n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int z^n (1 - z_1 z^{-1})^{-s} F(z) \frac{dz}{z}, \quad \text{wo } |z| > |z_1|,$$

führt er ein

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{F(v)\,dv}{v - z} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{F(u)\,du}{u - z},$$

wo $|v| > |z|$, $|u| < |z_1|$. Dabei setzt er

$$\frac{1}{v - z} = \frac{1}{v - z_1 - (z - z_1)} = \frac{1}{v - z_1} + \frac{z - z_1}{(v - z_1)^2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(z - z_1)^{m-1}}{(v - z_1)^m} + \frac{(z - z_1)^m}{(v - z_1)^m (v - z)}$$

und wendet für $\frac{1}{u - z}$ die anloge Identität an. In dieser Weise wird erhalten

$$(147) \quad A_{-n} = [s]_n z_1^n \Big\{ F(z_1) - \frac{[1 - s]_1}{n + 1} z_1 F'(z_1) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{[1 - s]_{m-1}}{(n + 1) \cdots (n + m - 1)} (-z_1)^{m-1} F^{(m-1)}(z_1) \Big\} + \varrho_m,$$

wo das Restglied ϱ_m die folgende Form hat:

$$(148) \quad \varrho_m = -\frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{z^{n+m-1} (1 - z_1 z^{-1})^{m-s} F(v)\,dz\,dv}{(v - z_1)^m (v - z)}$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{z^{n+m-1} (1 - z_1 z^{-1})^{m-s} F(u)\,dz\,du}{(u - z_1)^m (u - z)}$$

Wenn die Taylorsche Entwicklung von $F(z)$ nach Potenzen von $z - z_1$ längs des ganzen Integrationsweges in (146) konvergiert, so kann dieselbe dort eingeführt werden. Es ergibt sich so für A_{-n} eine konvergente Reihe, und man hat in (147) $\lim_{m=\infty} \varrho_m = 0$.

225) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 33 (1851), p. 709; 34 (1852), p. 9, 70, 121 = Œuvres (1) 11, p. 385—399.

Cauchy sagt, daß die Größe von ϱ_m immer abgeschätzt werden kann, und daß ϱ_m mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann mit Hilfe einer konvergenten Reihe, die nach Entwicklung von $\frac{1}{v-z}$ und $\frac{1}{u-z}$ in Reihen nach Potenzen von $\frac{z}{v}$ oder $\frac{u}{z}$ aus (148) folgt.

Man muß hiergegen doch bemerken, daß im allgemeinen keine obere Grenze für $|\varrho_m|$ wirklich abgeleitet ist, und daß es sogar im allgemeinen unbekannt bleibt, in welcher Weise $|\varrho_m|$ mit wachsendem n gegen Null geht.

Nur in demjenigen speziellen Falle, wo $F(z)$ in allen Punkten des Gebietes $|z| \leq |z_1|$ holomorph ist, gibt *Cauchy*[226]) für den Modul von ϱ_m eine obere Grenze. In diesem Falle fällt das zweite Glied im Ausdrucke (148) für ϱ_m weg. In das erste Glied wird die Entwicklung

$$F(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \left(\frac{v}{z_1}\right)^\nu$$

eingeführt. Weiter wird dort die Funktion $\left(\frac{z_1}{v-z_1}\right)^m \frac{v}{v-z}$ nach positiven Potenzen von $\frac{z_1}{v}$ und $\frac{z}{z_1}$ entwickelt. Endlich wird für $\left(1-\frac{z_1}{z}\right)^{m-s}$ seine Entwicklung nach positiven Potenzen von $\frac{z_1}{z}$ gesetzt. In dieser Weise findet Cauchy den Ausdruck

$$(149) \qquad \varrho_m = (-1)^m \theta_m \frac{[s]_n [1-s]_m}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} z_1^{n+m} \Phi^{(m)}(z_1), \qquad |\theta_m| < 1,$$

wo $\Phi^{(m)}(z_1)$ die m^{te} Ableitung in bezug auf z der Funktion

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu| \left(\frac{z}{z_1}\right)^\nu$$

für $z = z_1$ ist. [Die Formel (149) setzt voraus, daß $m > s-1$, was Cauchy zu erwähnen unterläßt.]

Wenn die Koeffizienten B_ν positiv sind, so ist $\Phi(z) \equiv F(z)$. Dann ist auch $0 < \theta_m < 1$, und das Restglied ϱ_m wird ein Bruchteil des ersten weggelassenen Gliedes in der halbkonvergenten Reihe für A_{-n}. Cauchy zeigt, daß dies bei der Entwicklung (10) von Legendre zutrifft, und daß diese Entwicklung deshalb auch, wenn $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, für die Berechnung der Laplaceschen Koeffizienten anwendbar ist, wenn nur der obere Index eine große Zahl ist.

226) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 34 (1852), p. 156 = Œuvres (1) 11, p. 399—403.

G. W. Hill[227]) hat darauf hingewiesen, daß die Formel (144), welche geschrieben werden kann:

$$A_n = k^{-n}[s]_n\left\{f(k) + \frac{[1-s]_1}{n+s-1}kf'(k) + \frac{[1-s]_2}{(n+s-1)(n+s-2)}k^2f''(k) + \cdots\right\},$$

unbequem wird, wenn die Ableitungen von $f(x)$ komplizierte Funktionen sind. Er setzt deshalb

$$A_n = k^{-n}[s]_n\{x_0f(k-ky_0) + x_1f(k-ky_1) + \cdots + x_pf(k-ky_p)\}$$

und bestimmt $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p$ so, daß bei der Entwicklung dieses Ausdruckes nach Potenzen von $y_0, y_1, \ldots, y_p$ dieselben Faktoren für $f(k), f'(k), \ldots, f^{2p+1}(k)$ erhalten werden wie in jenem Ausdrucke. Hill zeigt, daß $y_0, y_1, \ldots, y_p$ von der Größenordnung $\frac{1}{n}$ sind, und daß diese Größen Wurzeln einer Gleichung vom Grade $p+1$ sind. Für $p=0$ ist offenbar

$$y_0 = \frac{1-s}{n+s-1}, \qquad x_0 = 1.$$

Auch für $p=1$ gibt Hill die Ausdrücke von x_0, y_0, x_1, y_1. Für $p=2$ schreibt er die Gleichung dritten Grades für y auf. Außerdem findet man in der Abhandlung von Hill numerische Werte mit sieben Stellen von $\log[s]_n$ für $2s = 1, 3, 5, 7, 9$; $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$.

Mehrere Jahrzehnte nach Cauchys Arbeiten über diesen Gegenstand wurde die Theorie der Funktionen großer Zahlen in hohem Grade durch *G. Darboux*[228]) gefördert. Dieser sucht asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten a_n der Taylorschen Reihe

$$F(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n + \cdots,$$

wenn n eine große Zahl ist. Er nimmt zuerst an, daß $F(z)$ auf dem Konvergenzkreise, dessen Radius R sei, eine einzige Singularität $z=a$ besitzt, und daß in der Umgebung von $z=a$

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_\nu} + \varphi(z) \tag{150}$$

gilt, wobei $\varphi(z)$ in der Nähe von $z=a$ holomorph ist. Die A_ν sind Konstante, die α_ν mit ν zunehmende Zahlen, von welchen keine eine positive ganze Zahl oder Null ist. (Darboux macht auch die unwesentliche Annahme, daß $\alpha_\mu - \alpha_\nu$ ganze Zahlen sind.) Der Koeffizient von $\left(\frac{z}{a}\right)^n$ in der Entwicklung von $\left(1-\frac{z}{a}\right)^h$ ist

$$T(h,n) = \frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\,\Gamma(n+1)}.$$

227) *G. W. Hill,* American J. of Math. 6 (1884), Nr. 4, p. 125—130 = Works 2, p. 58—63.

228) *G. Darboux,* J. de Math. (3) 4 (1878), Nr. 1, p. 9–20.

Darboux zeigt, daß in dem Ausdrucke

$$(151) \qquad a_n = a^{-n}\{A_1 T(\alpha_1, n) + \cdots + A_p T(\alpha_p, n) + \delta_n\}$$

die sukzessiven Glieder innerhalb der Klammer von den Größenordnungen $n^{-1-\alpha_1}, \ldots, n^{-1-\alpha_p}, n^{-1-\alpha_{p+1}}$ sind.

Der Beweis ist folgender:

Wenn die Anzahl der Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ endlich ist, was z. B. für einen Pol zutrifft, so ist offenbar $\varphi(z)$ holomorph in allen Punkten des Gebietes $|z| \leq R$. Derjenige Teil von a_n, welcher von der Entwicklung von $\varphi(z)$ nach Potenzen von z stammt, hat dann eine kleinere Größenordnung als $R^{-n} \cdot n^{-s}$, wo s eine beliebige Zahl ist, denn die Entwicklungen von $\varphi(z)$ und seinen Ableitungen sind konvergent, wenn $|z| = R$. Da weiter die Größe $T(h, n)$ für große positive Werte von n von der Größenordnung n^{-1-h} ist, so folgt Darboux' Satz für diesen Fall.

Wenn aber die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in unendlicher Anzahl vorkommen, stützt Darboux seinen Satz auf folgendes Theorem von *O. Bonnet*[229]): „Wenn eine Funktion $f(z)$, welche durch eine Taylorsche Reihe nach Potenzen von z gegeben ist, auf dem Konvergenzkreise dieser Reihe in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, so konvergiert die Taylorsche Reihe auf dem Konvergenzkreise und stellt dort die Funktion $f(z)$ dar." Darboux setzt $\alpha_{p+1} = \nu - \alpha$, wo ν eine nicht negative ganze Zahl ist, und $0 < \alpha < 1$; darauf wendet er Bonnets Theorem auf die Funktion

$$f(z) = \frac{d^\nu}{d(\log z)^\nu}\left\{F(z) - \sum_{\nu=1}^{p} A_\nu \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_\nu}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} n^\nu \delta_n \left(\frac{z}{a}\right)^n$$

an. Auf dem Konvergenzkreise, wo $z = Rc^{\sqrt{-1}\theta}$, gilt dann die Gleichung

$$(152) \qquad f(Rc^{\sqrt{-1}\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} n^\nu \delta_n \left(\frac{R}{a}\right)^n c^{\sqrt{-1}n\theta}.$$

Die hier entwickelte Funktion wird unendlich von der Ordnung α für den $z = a$ entsprechenden Wert des Argumentes θ. Die Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung (152) sind von derselben Größenordnung wie die entsprechenden Koeffizienten in der Fourierschen Entwicklung der Funktion $(\theta - \theta_0)^{-\alpha}$. Darboux zeigt mit Hilfe der Integraldarstellung dieser letzteren Koeffizienten, daß sie die Größen-

229) *O. Bonnet*, Memoire sur la théorie générale des séries (Couronné par l'Académie royale de Belgique en 1849). [Diese Arbeit habe ich nicht einsehen können.]

ordnung $n^{-1+\alpha}$ besitzen. Es folgt daraus, daß δ_n von der Größenordnung $n^{-1-\alpha_{p+1}}$ ist.

Wenn die Funktion $F(z)$ auf dem Konvergenzkreise mehrere Singularitäten von der betrachteten Natur (150) besitzt, so behandelt man jede Singularität für sich und vereinigt in dem asymptotischen Ausdrucke für a_n die von den verschiedenen Singularitäten stammenden Glieder.

J. B. Flamme[230]) hat nach Verallgemeinerung des Theorems von Bonnet gezeigt, daß der asymptotische Ausdruck von Darboux auch für die Koeffizienten a_n $(n > 0)$ der Laurentschen Reihe

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \tag{153}$$

gilt, wenn die Singularitäten von $F(z)$ auf dem äußeren Konvergenzkreise von der Natur (150) sind. Um analoge Ausdrücke für a_n $(n < 0)$ zu finden, hat man nur z durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen.

57. Asymptotische Ausdrücke einiger bestimmter Integrale. *J. B. Flamme*[231]) hat auch in anderer Weise die Aufgabe verallgemeinert. Nach einer Untersuchung der Singularität $t = a$ der Funktion

$$\int_A^B \frac{F(z)\,dz}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_A^B F(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

hat er gezeigt, daß der asymptotische Ausdruck (151) auch für die allgemeine Funktion

$$M_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_A^B F(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \qquad (n > 0) \tag{154}$$

gültig bleibt, wenn $|A| > |a|$, $|B| > |a|$ und der Integrationsweg äquivalent ist mit einem Wege, von welchem nur ein unendlich kleiner Halbkreis, in retrograder Richtung um a beschrieben, innerhalb des Kreises $|z| = |a|$ liegt. („Contour de première espèce" nach der Terminologie von M. Hamy.) Der Koeffizient a_n $(n > 0)$ in der Reihe (153) ist offenbar aus ebensovielen Integralen M_n linear zusammengesetzt, wie es Singularitäten auf dem äußeren Konvergenzkreise dieser Reihe gibt.

Am weitesten in der Verallgemeinerung geht *M. Hamy.*[232]) Bei

230) *J. B. Flamme,* Obs. de Bordeaux ann. 2 (1887), p. 49—68.

231) Ibid., p. 68—76.

232) *M. Hamy,* J. de Math. (6) 4 (1908), p. 209—239, 267—275. Mehrere

ihm ist n nicht notwendig eine ganze Zahl, und er macht außerdem allgemeinere Annahmen über die Natur der Singularitäten von $F(z)$ und über die Lage des Integrationsweges.

Hamy betrachtet einerseits das Integral

$$M_n' = \int_a^b F(z)\frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{155}$$

wo der Integrationsweg, mit Ausnahme des Anfangspunktes a, ganz außerhalb des Kreises $|z| = |a|$ liegt. (Contour de troisième espèce.) Er nimmt an, daß $a \neq 0$, daß keine Singularitäten für $F(z)$ unendlich nahe an a vorkommen, und daß die Funktion $F(z)$ in der Umgebung von a die folgende Form hat

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{p} A_\nu \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_\nu} \log^{q_\nu}\left(\frac{z}{a} - 1\right) + \left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha} \psi(z) \log^{q}\left(\frac{z}{a} - 1\right). \tag{156}$$

Die hier vorkommende Funktion $\psi(z)$ ist für $z = a$ endlich. Die $q_1, \ldots, q_p, q$ sind positive ganze Zahlen oder Null; weiter ist

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < \alpha.$$

Die Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sind so gewählt, daß die Binome $\left(\frac{z}{a} - 1\right)^{\alpha_\nu}$ reell und positiv sind, wenn $\frac{z}{a} > 1$.

Sein Resultat ist in diesem Falle folgendes. Sei

$$U^{(q)}(h, n) = \frac{d^q}{dh^q}\left\{\frac{\Gamma(h+1)\,\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)}\right\}. \tag{157}$$

Dann sind im Ausdruck:

$$M_n' = -a^{-n}\{A_1 U^{(q_1)}(\alpha_1, n) + \cdots + A_p U^{(q_p)}(\alpha_p, n) + \delta\} \tag{158}$$

die sukzessiven Glieder innerhalb der Klammer für große Werte von n von den Größenordnungen:

$$\frac{\log^{q_1} n}{n^{1+\alpha_1}}, \ldots, \frac{\log^{q_p} n}{n^{1+\alpha_p}}, \quad \frac{\log^{q} n}{n^{1+\alpha}}.$$

Andrerseits betrachtet Hamy das Integral

$$M_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C F(z)\frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{159}$$

wo der Integrationsweg wie im Integral (154) definiert wird. (Contour

seiner Resultate hatte Hamy schon vorher ausgesprochen. Siehe Paris C. R. 114 (1892), p. 993; 125 (1897), p. 926; J. de Math. (4) 10 (1894), p. 393—403.

de première espèce.) In der Umgebung der isolierten Singularität a ist

$$F(z) = \varphi(z) + F_1(z) + \left[\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha} \log^{q}\left(1 - \frac{z}{a}\right)\right]\psi(z).$$

$\psi(z)$ ist im Punkte a endlich, $\varphi(z)$ in demselben Punkte holomorph. Weiter ist

$$F_1(z) = \sum_{\nu=1}^{p} A_\nu \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_\nu} \log^{q_\nu}\left(1 - \frac{z}{a}\right).$$

Die $q_1, \ldots, q_p, q$ sind positive ganze Zahlen oder Null; weiter ist

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < \alpha, \qquad \alpha > -1.$$

Wenn $q_\nu = 0$, so wird angenommen, daß das entsprechende α_ν nicht eine ganze Zahl oder Null ist. Die Konstanten $A_1, \ldots, A_p$ sind so gewählt, daß die im Ausdrucke für $F_1(z)$ vorkommenden Funktionen $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_\nu} \log^{q_\nu}\left(1 - \frac{z}{a}\right)$ reell und positiv sind, wenn $\frac{z}{a} < 1$.

Sein Resultat in diesem zweiten Falle lautet: Sei

$$T^{(q)}(h, n) = \frac{d^q}{dh^q}\left\{\frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\,\Gamma(n+1)}\right\},$$

dann sind im Ausdruck:

$$(160) \quad M_n = a^{-n}\{A_1 T^{(q_1)}(\alpha_1, n) + \cdots + A_p T^{(q_p)}(\alpha_p, n) + \delta\}$$

für das Integral (159) die sukzessiven Glieder innerhalb der Klammer für große Werte von n von den Größenordnungen:

$$\frac{\log^{q_1} n}{n^{1+\alpha_1}}, \ldots, \frac{\log^{q_p} n}{n^{1+\alpha_p}}, \quad \frac{\log^{q} n}{n^{1+\alpha}}$$

Hier muß man $q_\nu - 1$ bzw. $q - 1$ statt q_ν bzw. q einsetzen, wenn α_ν bzw. α eine ganze positive Zahl oder Null ist.

Schon vor Hamy hatte *J. Hadamard*[233]) asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten einer Taylorschen Reihe angedeutet, wenn die entwickelte Funktion auf dem Konvergenzkreise logarithmische Singularitäten der obigen Art besitzt. Eine wirkliche Durchführung der Größenabschätzungen für diesen Fall ist vor Hamy schon von *O. Blumenthal* gegeben[234]) worden. Weiter hat dann noch *A. Féraud*[235]) dieselbe Aufgabe behandelt. Er betrachtet neben der gegebenen Reihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

---

233) *J. Hadamard*, J. de Math. (4) 8 (1892), 3. Partie, p. 154—186.

234) *O. Blumenthal*, Dissertation Göttingen 1898, p. 37.

235) *A. Féraud*, Obs. de Bordeaux ann. 7 (1897), 1. Partie, p. 48—69.

die adjungierte

$$\varphi(t) = \int_0^1 (1-x)^{-\alpha-1} F(tx)\,dx = \Gamma(-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha} a_n t^n$$

und sucht zuerst asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten dieser letzten Reihe.

58. Asymptotische Ausdrücke allgemeinerer bestimmter Integrale. Im innigsten Zusammenhange mit dem in voriger Nummer behandelten Probleme steht die Aufgabe, asymptotische Ausdrücke für die Integrale

$$I = \int f(u)\,\varphi(u)^n\,du \tag{161}$$

zu finden, wie gleich des näheren gezeigt werden wird. Diese Aufgabe wurde zuerst von *P. S. Laplace*[236]) in Angriff genommen für den Fall, wo der Integrationsweg reell ist. Die Deduktion von Laplace ist aber nicht einwandfrei. Sein Resultat hat *A. L. Cauchy*[237]) bestätigt und erweitert in Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Konvergenz der Lagrangeschen Reihe. Cauchy betrachtet das Integral I zwischen den reellen Grenzen $c - \frac{a}{\sqrt{n}}$ und $c + \frac{a}{\sqrt{n}}$ und nimmt an, daß

$$\frac{d\varphi}{du} = 0, \qquad |\varphi(u)| = \text{max.} \qquad \text{für } u = c; \tag{162}$$

übrigens wird vorausgesetzt, daß a eine große, $\frac{a}{\sqrt{n}}$ aber eine kleine Größe ist. Er setzt $u = c + \frac{t}{\sqrt{n}}$, $\varphi = c^w$, entwickelt w und f nach Potenzen von t und findet leicht den asymptotischen Ausdruck

$$I \sim \frac{f\varphi^n}{\sqrt{n}} \int_{-a}^{+a} c^{\frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi}t^2}\,dt \sim \frac{f\varphi^n}{\sqrt{n}} \sqrt{-2\pi\frac{\varphi}{\varphi''}} \tag{163}$$

wo f, φ und φ'' die Werte von $f(u)$, $\varphi(u)$ und $\frac{d^2\varphi(u)}{du^2}$ für $u = c$ sind. Wenn $|\varphi(c)|$ das maximum maximorum von $|\varphi(u)|$ ist im Gebiete $u_0 < u \leq u_1$, so gilt, für große Werte von n, der asymptotische Ausdruck (163) auch für das Integral (161) zwischen den Grenzen u_0 und u_1.

---

236) *P. S. Laplace*, Théorie analytique des probabilités, 2e édition, Paris 1814, Nr. 27, p. 103 = Œuvres 7, p. 103.

237) *A. L. Cauchy*, Paris Mém. de l'acad. roy. des sciences 8 (1829), p. 101—107 (vom Sept. 1827). Vgl. auch Paris C. R. 29 (1849), p. 42 = Œuvres (1) 11, p. 139.

Cauchy bemerkt, daß die Gleichung $\frac{d\varphi}{du} = 0$ in zwei zerfällt, wenn φ komplex ist; wenn aber φ einen Parameter r enthält und der Wert von I von r unabhängig ist, so könne man oft r und c so wählen, daß die Bedingungen (162) erfüllt sind. Unter Anwendung dieses Grundsatzes gelingt es *Cauchy*[238]), auch denjenigen Fall zu behandeln, wo der Integrationsweg ein Kreis in der Ebene der komplexen Veränderlichen u ist. Wenn für $u = c$, $\frac{d\varphi}{du} = 0$ und $|\varphi(c)|$ das maximum maximorum von $|\varphi(u)|$ längs des Kreises $|u| = |c|$ ist, so nennt *Cauchy*[238])[239]) $|\varphi(c)|$ den *Prinzipalmodul* von $\varphi(u)$. In dieser Weise findet Cauchy, daß die Relation (163) auch dann besteht, wenn der Integrationsweg ein Kreis ist, auf welchem $\varphi(u)$ einen Prinzipal modul besitzt.

Cauchy[240]) kehrte im Zusammenhange mit seinen astronomischen Arbeiten mehrmals zu demselben Probleme zurück. Er leitete dabei aufs neue die Relation (163) ab und zeigte außerdem, wie asymptotische Ausdrücke von größerer Annäherung erhalten werden können. Diese Ausdrücke sind aber später von anderen ganz verdrängt worden.

Ungefähr 30 Jahre nach Cauchy hat sich *G. Darboux*[241]) der Theorie dieser Integrale zugewandt. Er bemerkt, daß dieselben als Koeffizienten für t^n in den Entwicklungen der Funktionen

$$\int \frac{f(u)\,du}{\sqrt{1 - t\,\varphi(u)}}, \qquad \int \frac{f(u)\,du}{1 - t\,\varphi(u)} \tag{164}$$

nach Potenzen von t auftreten. Er nimmt an, daß der Integrationsweg, ohne die Singularitäten von $f(u)$ und von $\varphi(u)$ zu berühren, deformiert werden kann, so daß derselbe durch einen Punkt $u = c$ geht, wo $\frac{d\varphi}{du} = 0$, während $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ längs des ganzen Integrationsweges ist. Auf dem Konvergenzkreise der Entwicklungen der Funktionen (164) gibt es dann nur eine Singularität, und zwar $t = \frac{1}{\varphi(c)}$ Unter Anwendung seiner Methode für die Herstellung von asymptotischen Ausdrücken für die Koeffizienten der Taylorschen Reihe findet Darboux die Formel (163) von Laplace und Cauchy wieder.

Der Zusammenhang der jetzigen Aufgabe mit der in voriger Nummer behandelten wird am deutlichsten, wenn man dem Vorschlage

---

238) *A. L. Cauchy*, ibid., p. 108—110.
239) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 20 (1845), p. 546 = Œuvres (1) 9, p. 75.
240) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 20 (1845), p. 704 = Œuvres (1) 9, p. 97.
241) *G. Darboux*, J. de Math. (3) 4 (1878), p. 29—35.

von *J. B. Flamme*[242]) folgt, das Integral (161) durch die Substitution

$$z = \frac{1}{\varphi(u)} \tag{165}$$

zu transformieren. Mit Einführung der Bezeichnung

$$F(z) = -\frac{f(u)}{\varphi'(u)}$$

wird

$$I = \int F(z) \frac{dz}{z^{n+2}} \tag{166}$$

in formaler Übereinstimmung mit den in Nr. 57 behandelten Integralen. Natürlich ist die Art der Singularitäten aber besonders zu studieren. Flamme weist schon darauf hin, daß asymptotische Ausdrücke für I erhalten werden können, nicht nur in dem von Darboux betrachteten Spezialfalle, sondern auch in anderen Fällen, wo $z = \frac{1}{\varphi(c)}$ eine Singularität für $F(z)$ ist, während $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ längs des Integrationsweges ist. Die vollständige Durchführung verdankt man wieder *M. Hamy.*[243]) Hamy studiert zuerst den Fall, wo der Modul von $\varphi(u)$ längs des Integrationsweges seinen größten Wert an der unteren Grenze $u = c$ des Integrals (161) annimmt. Im transformierten Integral (166) ist dann $|z| > \left|\frac{1}{\varphi(c)}\right|$ (Contour de troisième espèce par rapport à $\frac{1}{\varphi(c)}$). Er nimmt an, daß $f(u)$ und $\varphi(u)$ in der Umgebung von c in folgender Weise entwickelt werden können:

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu (u-c)^{\beta_\nu} \log^{q_\nu}(u-c), \\ \varphi(u) &= \varphi(c) + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu (u-c)^{\alpha_\nu}, \end{aligned} \tag{167}$$

wo A und B Konstanten, die q_ν ganze positive Zahlen oder Null sind, während

$$-1 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots, \qquad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt für $F(z)$ in der Nähe von $z = \frac{1}{\varphi(c)}$ eine Entwicklung von der Form (156) mit $a = \frac{1}{\varphi(c)}$. Hamy findet in dieser Weise und unter Anwendung der Gleichung (158) den gesuchten asymptotischen Ausdruck für I.

In dem speziellen Falle, wo $f(u)$ und $\varphi(u)$ für $u = c$ holomorph

242) *J. B. Flamme,* Obs. de Bordeaux ann. 2 (1887), p. 76—82.

243) *M. Hamy,* J. de Math. (6) 4 (1908), p. 239—267, 275—281.

sind und außerdem $\varphi'(c) = 0$, $\varphi''(c) \neq 0$, hat man in der Nähe von $z = \frac{1}{\varphi(c)}$

$$(168)\quad F(z) = C_1(z\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + C_2(z\varphi - 1)^0 + C_3(z\varphi - 1)^{+\frac{1}{2}} + \cdots.$$

Infolge der Gleichungen (157) und (158) wird dann der asymptotische Ausdruck von der Form

$$I = [\varphi(c)]^n \left\{ \frac{D_1}{\sqrt{n}} + \frac{D_2}{n} + \frac{D_3}{(\sqrt{n})^3} + \cdots \right\},$$

wo die D_ν rationale Funktionen von f und φ und ihren Ableitungen für $u = c$ sind.

Weiter betrachtet Hamy den von *Cauchy*[238]) und *Darboux*[241]) studierten Fall, wo der deformierte Integrationsweg durch einen Punkt $u = c$ hindurchgeht, in welchem $f(u)$ und $\varphi(u)$ holomorph sind und $\varphi'(c) = 0$, $\varphi''(c) \neq 0$, während außerdem auf dem ganzen übrigen Integrationsweg $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ ist. Die ersten Glieder des asymptotischen Ausdrucks werden:

$$(169)\quad I = \sqrt{\frac{-2\varphi}{\varphi''}} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \varphi^n \Big\{ f + \frac{1}{2n}\Big[-\frac{3}{4} f + \frac{\varphi}{\varphi''}\Big(\frac{1}{4}\frac{f\varphi^{IV}}{\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} - f''\Big)\Big] + \cdots \Big\}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel hängt mit der Richtung des Integrationsweges im Punkte $u = c$ zusammen.[244])

Hamy nimmt schließlich an, daß, nach Deformation des Integrationsweges in (161), der Integrationsweg des transformierten Integrals (166) „de première espèce" ist in bezug auf den singulären Punkt $z = \frac{1}{\varphi(c)}$ für $F(z)$. Er setzt außerdem voraus, daß $f(u)$ und $\varphi(u)$ wie in den Formeln (167) entwickelt werden können. Die Formel (160) gibt dann für I einen asymptotischen Ausdruck.

Ein interessanter Spezialfall tritt auf, wenn $\varphi(u)$ holomorph ist für $u = c$, $\varphi'(c) \neq 0$,

$$f(u) = (u - c)^\beta [B_1 + B_2(u - c) + B_3(u - c)^2 + \cdots],$$

und wenn außerdem auf dem Integrationswege $|\varphi(u)| < |\varphi(c)|$ mit Ausnahme eines unendlich kleinen Halbkreises um c, wo $|\varphi(u)| > |\varphi(c)|$. Dann ist unter der Voraussetzung, daß u in retrograder Richtung um c geht,

$$(170)\quad I = -\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(-\beta)}\Big(\frac{\varphi}{\varphi'}\Big)^{\beta+1}\frac{\varphi^n}{n^{\beta+1}}\Big\{ B_1 + \frac{\beta+1}{n}\Big[\frac{\beta+2}{2}\Big(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2} - 1\Big)B_1 - \frac{\varphi}{\varphi'}B_2\Big] + \frac{1}{n^2}(\ )\Big\},$$

wobei ein bestimmter Wert von $\left(\frac{\varphi}{\varphi'}\right)^{\beta+1}$ zu benutzen ist.[245])

IX. Asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten der Entwicklungen der Störungsfunktion.

59. Entfernte Glieder in der Entwicklung nach den Vielfachen der mittleren Anomalie des einen Planeten. Nach einem Satze von *Cauchy*[170]) ist der Koeffizient $A_{m'}$ in der Entwicklung (132) gleich dem Koeffizienten für $x'^{m'}$ in der Entwicklung der Funktion

$$F(x') = \frac{1 - \frac{e'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)}{\Delta} c'^{\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}, \qquad \text{wo } c' = \frac{m'e'}{2},$$

nach Potenzen von x'. Um einen asymptotischen Ausdruck für $A_{m'}$ zu finden, betrachtete *Cauchy*[246]) c' als eine von m' unabhängige konstante Größe und suchte einen für große m' geltenden asymptotischen Ausdruck für den Koeffizienten von $x'^{m'}$ in der Entwicklung von $F(x')$. Für reelle Werte der exzentrischen Anomalie E ist

$$\xi' = \frac{1}{\alpha'} c^{\sqrt{-1}\varphi'}$$

die auf dem äußeren Konvergenzkreise liegende Singularität von $F(x')$ (vgl. Nr. **50**). In der Umgebung dieser Singularität ist

$$F(x') = \left(1 - \frac{x'}{\xi'}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{F}\left(x', \frac{1}{x'}\right),$$

wo der Ausdruck $\mathfrak{F}$ leicht aus dem Ausdruck für Δ^{-1} (Nr. **50**) abgeleitet wird. Durch Anwendung seiner Formel (145), und indem $\frac{1}{m'^2}$, $\frac{e'}{m'}$, e'^2 im Vergleich mit Eins vernachlässigt wurden, fand Cauchy den angenäherten Ausdruck

$$A_{m'} = \left[\frac{1}{2}\right]_{m'} \xi'^{-m'} \frac{2\sqrt{\alpha'\beta'}}{a'c'\sqrt{1-\alpha'^2}} c'^{\left(\xi' - \frac{1}{\xi'}\right) - \frac{e'}{2}\left(\xi' + \frac{1}{\xi'}\right) \frac{1}{4m'} \frac{\alpha'^2}{1-\alpha'^2}}$$

Cauchy hat diese Formel angewandt, um im Falle Pallas-Jupiter die numerischen Werte von $A_{m'}$ (für $m' = 18$) für die äquidistanten Werte $E = 0^0, 10^0, 20^0, \ldots, 350^0$ der exzentrischen Anomalie von Pallas zu berechnen. Aus diesen Werten fand er durch eine mechanische Quadratur den Wert des Koeffizienten $A_{-7,18}$ in der Entwicklung von Δ^{-1} nach Vielfachen der beiden mittleren Anomalien. Für die langperiodische Störung in der mittleren Länge von Pallas ergab sich in

244) Ibid., p. 246.

245) Ibid., p. 266.

246) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 20 (1845), p. 843—845 = Œuvres (1) 9, p. 160—162.

dieser Weise der Wert[247])

$$906'',3 \sin (18M' - 7M - 29^0\,3'\,25'').$$

Kurz vorher hatte Cauchy mit Hilfe seiner komplizierteren gemischten Methode (vgl. Nr. 50) den Wert[248])

$$906'',6 \sin (18M' - 7M - 29^0\,3'\,55'')$$

gefunden. In dieser Weise ist es Cauchy gelungen, den von *Leverrier*[196]) durch sehr zeitraubende mechanische Doppelquadraturen berechneten Wert

$$895'' \sin (18M' - 7M - 29^0\,4')$$

zu kontrollieren.

Die eben betrachtete Methode Cauchys setzt voraus, daß die Exzentrizität e' eine kleine Größe ist, *M. Hamy*[249]) hat andere asymptotische Ausdrücke für $A_{m'}$ gegeben, welche nur voraussetzen, daß die beiden Bahnellipsen sich nicht schneiden. Hamy geht von den Formeln

$$f(x') = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{1 - \frac{e'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)}{x'\Delta}, \qquad \varphi(x') = x' c^{\frac{e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)},$$

$$A_{-m'} = \int_{|x'|=1} f(x')\,[\varphi(x')]^{m'}\,dx', \qquad m' > 0$$

aus und wendet seine Untersuchungen über Integrale von dieser Form an.[248]) Die Gleichung $\varphi'(x') = 0$ hat zwei Wurzeln: $x' = \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$ und $x' = \cot\frac{\psi'}{2}$, wo $\sin\psi' = e'$. Eine wichtige Rolle spielen die Kurven, auf welchen $|\varphi(x')| = \text{const}$. Man hat $|\varphi(x')| = 1$ auf dem Kreise $|x'| = 1$. Wenn $|\varphi(x')|$ abnimmt, so geht dieser Kreis in eine geschlossene Kurve N über, die sich immer mehr gegen den Nullpunkt zusammenzieht, und auf welcher der Radiusvektor wächst, wenn das Argument von x' von 0 gegen $\pm\pi$ geht. Im Falle $x' = \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$ nimmt N eine spezielle Lage N_1 ein. Die Funktion $f(x')$ besitzt, abgesehen von $x' = 0$ und $x' = \infty$, nur die vier in der Formel (133) ausgeschriebenen Singularitäten. Unter diesen liegt immer eine innerhalb der Kurve N_1, denn es ist $\beta' < \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$.

Hamy betrachtete zwei Fälle:

1. Die Singularität $Z = \alpha' c^{\sqrt{-1}\varphi'}$ liegt zwischen der Kurve N_1 und dem Kreise $|x'| = 1$. Dann wird der anfängliche Integrations-

247) Ibid., p. 846.

248) Ibid., p. 843.

249) *M. Hamy,* Paris C. R. 147 (1908), p. 1251—1256.

weg $|x'| = 1$ so deformiert, daß er schließlich zwischen N_1 und der Kurve $|\varphi(x')| = |\varphi(Z)|$ liegt mit Ausnahme eines unendlich kleinen Halbkreises um Z, welcher außerhalb der letzten Kurve bleibt. In der Nähe von Z sind $\sqrt{x' - Z} \cdot f(x')$ und $\varphi(x')$ holomorph. Weiter ist $\varphi'(Z) \neq 0$. Durch Anwendung der Formel (170), wo $\beta = -\frac{1}{2}$, findet daher Hamy den aymptotischen Ausdruck

$$A_{-m'} \sim \frac{2}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi m'}} \frac{\sqrt{-\left(Z - \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}\right)\left(Z - \cot\frac{\psi'}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\psi'\,(Z-z_1)\,(Z-z_2)\,(Z-z_3)}} [\varphi(Z)]^{m'},$$

wo z_1, z_2, z_3 die drei übrigen Wurzeln der Gleichung $x'^2\Delta^2 = 0$ bezeichnen. Das Restglied ist von der Größenordnung $\frac{1}{m'}$.

2. Die Singularität $Z = \alpha' c^{\sqrt{-1}\varphi'}$ liegt innerhalb der Kurve N_1. (Nach Hamy dürfte dieser Fall wohl nie in der Praxis vorkommen.) Dann wird der Integrationsweg durch den Punkt $x' = \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$, und zwar durch das Gebiet zwischen der Kurve N_1 und dem Kreise $|x'| = \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$ gelegt. Auf einem solchen Wege nimmt $|\varphi(x')|$ seinen größten Wert im Punkte $x' = \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$ an. In diesem Punkte sind $f(x')$ und $\varphi(x')$ holomorph; weiter ist dort $\varphi'(x') = 0$, $\varphi''(x') \neq 0$. Die Formel (169) gibt daher für diesen Fall einen asymptotischen Ausdruck für $A_{-m'}$. Da $\operatorname{tg}\frac{\psi'}{2}$ eine einfache Wurzel von $f(x')$ ist, so enthält das erste Glied $m'^{-\frac{3}{2}}$ als Faktor.

60. Entfernte Glieder in der Entwicklung nach den Vielfachen der beiden mittleren Anomalien. a) *Methoden von Cauchy und Hamy.* *A. L. Cauchy*[250]) hat auch asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$F(x, y) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} A_{m,n} x^m y^n$$

von zwei Veränderlichen gesucht. Er nimmt dabei an, daß die Funktion $F(x, y)$ in der Umgebung von $|x| = 1$, $|y| = 1$ in der Form

$$F(x, y) = \left(1 - \frac{y}{v}\right)^{-s} f(x, y)$$

geschrieben werden kann, wo v eine Funktion von x ist, deren Modul > 1 ist im betrachteten Gebiete der Veränderlichen x, während

250) *A. L. Cauchy*, Paris C. R. 20 (1845), p. 722—726 = Œuvres (1) 9, p. 116—121.

$f(x, y)$ holomorph ist, wenn $1 \leq y \leq v$. Der Koeffizient A_n von y^n in der Entwicklung von $F(x, y)$ ist, infolge von (143) oder (144), durch eine Formel

$$A_n = [s]_n v^{-n} f(x, v)(1 + \beta) \qquad (\lim_{n=\infty} \beta = 0)$$

gegeben. Dieselbe gilt, solange x in einem gewissen den Kreis $|x| = 1$ enthaltenden Gebiete G bleibt. Um einen angenäherten Wert für den Koeffizienten $A_{-m,n}$ zu finden, sucht Cauchy das konstante Glied in der Entwicklung von

$$A_n x^m = [s]_n \left(x^n v^{-1}\right)^m f(x, v)(1 + \beta)$$

nach Potenzen von x. Er nennt u denjenigen Wert von x, welcher dem Prinzipalmodul des Produktes $x^m v^{-n}$ entspricht, und setzt voraus, daß die beiden Kreise $|x| = u$ und $|x| = 1$ und der ringförmige Bereich zwischen ihnen innerhalb des Gebietes G liegt. Unter diesen Annahmen wendet Cauchy seine bei den Untersuchungen[235]) über das Integral (161) gewonnenen Resultate an und findet so den asymptotischen Ausdruck:

$$A_{-m,n} = [s]_n u^m v^{-n} \frac{f(u, v)}{2\sqrt{\pi a n}}(1 + \alpha),$$

wo α gegen Null geht mit $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$. In dieser Formel ist außerdem

$$a = -\frac{1}{2} x \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{v}\frac{dv}{dx}\right\}$$

für $x = u$.

Cauchy hat vorgeschlagen[251]), diese Methode auf die Entwicklung der Störungsfunktion anzuwenden, ist aber dabei nicht in Einzelheiten eingegangen.

In nächstem Anschluß an diesen Ideen Cauchys stehen Arbeiten von *M. Hamy* über die asymptotischen Ausdrücke für die Koeffizienten $A_{m,m'}$ in der Entwicklung von $\frac{1}{\Delta}$. Hamy hat zuerst[252]) den einfachen Fall behandelt, wo die Exzentrizitäten e und e' Null sind, die Neigung aber einen beliebigen von Null verschiedenen Wert hat. Dann ist $xy\Delta^2$ ein Polynom vom zweiten Grade in x und in y. Weiter ist infolge von (100)

$$A_{m,m'} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|x|=1} \frac{dx}{x^{m+1}} \left\{ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|y|=1} \frac{dy}{\Delta y^{m'+1}} \right\}.$$

---

251) *A. L. Cauchy,* Paris C. R. 20 (1845), p. 1612—1620 = Œuvres (1) 9, p. 205—214.

252) *M. Hamy,* Paris Bull. astr. 10 (1893), p. 41—56, 84—90; Auszug Paris C. R. 114 (1892), p. 993; 115 (1892), p. 869.

Das Polynom $xy\Delta^2$ hat zwei Wurzeln y' und y'', von welchen $|y'|<1$, $|y''|>1$, wenn $|x|=1$. Die Diskriminante von $xy\Delta^2$, betrachtet als Funktion von y, ist vom vierten Grade in bezug auf x. Ihre Wurzeln sind reell und von der Form $-\frac{1}{\mu}$, $-\mu$, $+\mu$, $+\frac{1}{\mu}$ $(0<\mu<1)$. Solange die Veränderliche x die Querschnitte

$$-\infty \text{ —— } -\frac{1}{\mu}, \quad -\mu \text{ —— } +\mu, \quad +\frac{1}{\mu} \text{ —— } +\infty$$

nicht überschreitet, kann als Integrationsweg in der y-Ebene eine Kurve „de première espèce“ in bezug auf die Wurzel y'' gewählt werden (vgl. Nr. 57). Solange x in dieser Weise sich verändert, bleibt übrigens $y''\neq\infty$. In der Nähe von $y=y''$ ist nun

$$\frac{1}{\Delta}=f(x)\left(1-\frac{y}{y''}\right)^{-\frac{1}{2}}+\cdots,$$

und die Koeffizienten $f(x), \ldots$ in dieser Entwicklung sind eindeutig und holomorph, solange x die Querschnitte nicht erreicht. Unter Anwendung der von *J. B. Flamme*[231]) generalisierten Darbouxschen Methode findet Hamy die Formel

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{dy}{\Delta y^{m'+1}}=y''^{-m'}\frac{\Gamma(m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(m'+1)}f(x)(1+\delta),$$

wo δ von der Größenordnung $\frac{1}{m'}$ ist, solange x den Querschnitten nicht unendlich nahe kommt. Für $A_{m,m'}$ ergibt sich also der Ausdruck

$$A_{m,m'}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\Gamma(m'+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(m'+1)}\int_{|x|=1}f(x)(1+\delta)\,\varphi(x)^{m'}\,dx,$$

wo

$$\varphi(x)=\frac{x^\theta}{y''}, \qquad \theta=-\frac{m+1}{m''}$$

ist. Um einen asymptotischen Ausdruck von der Form (169) für $A_{m,m'}$ zu finden, sind nun die Nullstellen der Funktion $\varphi'(x)$ zu suchen. Dieselben sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom achten Grade, sind übrigens paarweise reziprok und paarweise entgegengesetzt gleich. In dem von den erwähnten Querschnitten begrenzten Gebiete der x-Ebene gibt es zwei reelle und zwei rein imaginäre Wurzeln für $\varphi'(x)$. Von den beiden reellen, die mit $\pm Z$ bezeichnet werden, *liegt die eine zwischen* $-\frac{1}{\mu}$ *und* $-\mu$, *die andere zwischen* $+\mu$ *und* $+\frac{1}{\mu}$. In den Punkten $\pm Z$ hat $|\varphi(x)|$ längs der reellen Achse ein Minimum. Auf dem Kreise D, welcher mit dem Nullpunkt als Zentrum durch die Punkte $\pm Z$ geht, nimmt $|\varphi(x)|$ seinen größten

Wert in diesen Punkten $\pm Z$ an. Mit dem Kreise D als Integrationsweg findet sich daher für $A_{m,m'}$ ein asymptotischer Ausdruck nach der Formel (169). Genau genommen betrachtet übrigens Hamy die Entwicklung der etwas allgemeineren Funktion $\psi(x)\cdot\Delta^{-s}$, wo $2s = 1, 3, 5, \ldots$ und $\psi(x)$ ein Polynom in x und $\frac{1}{x}$ ist, und gibt für die Koeffizienten dieser Entwicklung asymptotische Ausdrücke unter Angabe der zwei ersten Glieder in der halbkonvergenten Reihe nach fallenden Potenzen von m'.

Andere Spezialfälle behandelt Hamy in einer späteren Arbeit.[253]) Er setzt in etwas abweichender Bezeichnung:

$$\frac{m}{m'} = \theta, \quad c^{\sqrt{-1}M} = t, \quad c^{\sqrt{-1}M'} = t^{-\theta}\cdot x$$

und findet so den Ausdruck

$$A_{m,m'} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{|t|=1}\int_{|x|=1}\Delta^{-1}x^{-m'}\frac{dx\,dt}{x\;t}.$$

Anstatt t wird z durch die Substitution (wo $e = \sin\psi$)

$$t = zc^{\frac{\sin\psi}{2}\left(\frac{1}{z}-z\right)}, \quad \frac{dt}{t} = \frac{r}{a}\frac{dz}{z} = -\frac{\sin\psi}{2z^2}\left(z-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)\left(z-\cot\frac{\psi}{2}\right)dz$$

eingeführt. Es ergibt sich dann

$$A_{m,m'} = I = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|z|=1}Jdz, \quad J = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|x|=1}F(x,z)x^{-m'-1}dx,$$

$$F(x,z) = \frac{r}{az}\Delta^{-1}.$$

Hamy entwickelt I nach Potenzen von $\sin^2\frac{1}{2}\gamma$, wo γ die Neigung zwischen den Bahnebenen bezeichnet, und sucht asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten dieser Reihe. Da die Diskussion für die Koeffizienten verschiedener Potenzen von $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ ungefähr dieselbe ist, wollen wir uns hier auf den Koeffizienten der nullten Potenz beschränken, also einfach die Neigung gleich Null setzen.

Hamy betrachtet zuerst[254]) den Fall, wo die äußere Bahn kreisförmig ist $\left(e' = 0, \; \alpha = \frac{a}{a'} < 1\right)$. Dann ist

$$\Delta^2 = \frac{a'^2}{x\varphi(z)}[1 - x\varphi(z)]\left[x\varphi(z) - \frac{r^2}{a'^2}\right],$$

253) *M. Hamy*, J. de Math. (4) 10 (1894), p. 405—410.

254) Ibid., p. 410—466; Errata: J. de Math. (5) 2 (1896), p. 439. Auszug Paris C. R. 117 (1893), p. 1050; 118 (1894), p. 88, 698.

wo

$$\varphi(z) = \alpha \frac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2\left[z c^{\frac{\sin\psi}{2}\left(\frac{1}{z}-z\right)}\right]^{-\theta}$$

Die Singularitäten für $F(x, z)$, als Funktion von x betrachtet, sind $x = 0, \infty, \mu, \nu$, wo $\mu = \frac{1}{\varphi(z)}$, $\nu = \frac{1}{\varphi(z)}\frac{r^2}{a'^2}$. Man hat $\mu = 0$ oder $\nu = \infty$ nur für $z = 0$ oder $z = \infty$. Die Bedingung $\mu = \nu$, d. h. $r^2 = a'^2$ zerfällt in zwei Gleichungen vom zweiten Grade in bezug auf z. Die eine ($r = a'$) hat zwei negative reziproke Wurzeln z_1 und z_2 ($z_1 < z_2 < 0$). Die andere ($r = -a'$) hat zwei positive reziproke Wurzeln z_1' und z_2' ($z_1' > z_2' > 0$). Die Singularitäten für J sind deshalb (vgl. Nr. 33) $z_1, z_2, 0, z_2', z_1', \infty$. Solange die Veränderliche z die geradlinigen Querschnitte $-\infty$ —— z_1, z_2 —— z_2', z_1' —— $+\infty$ nicht berührt, bleibt J eindeutig und holomorph. Wenn außerdem $z \neq \cot\frac{\psi}{2}$ (damit μ endlich sei), so ist es möglich, einen Integrationsweg „de première espèce" in bezug auf μ zu wählen. Unter Anwendung der von Flamme[231]) generalisierten Darbouxschen Methode findet dann Hamy den asymptotischen Ausdruck

$$(171) \quad J = \Psi(z)\frac{\varphi(z)^{m'}}{\sqrt{m'}}\left(1 + \frac{R}{m'}\right), \quad \text{wo } \Psi(z) = \frac{r}{az}\frac{1}{\sqrt{a'^2 - r^2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Die von z und m' abhängige Größe R bleibt für unendlich große m' endlich, wenn nur z den Querschnitten oder dem Punkte $z = \cot\frac{\psi}{2}$ nicht unendlich nahe rückt.

Im Ausdrucke für I ist es erlaubt, den Integrationsweg zu verändern, wofern nur die Singularitäten von J vermieden werden. Solange der Integrationsweg nicht unendlich nahe an die Punkte $z_1, z_2, 0, z_2', z_1', \infty, \cot\frac{\psi}{2}$ rückt, darf man für große m' in der Formel (171) $R : m'$ im Vergleich mit Eins vernachlässigen. $A_{m,m'}$ erscheint dann angenähert als ein Integral von der Form (161). Um einen asymptotischen Ausdruck für $A_{m,m'}$ zu finden, sind also die Wurzeln der Gleichung $\varphi'(z) = 0$ zu suchen. Diese Bedingung führt nun zur Gleichung

$$(172) \quad \theta \sin\psi\left(z - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 + 2z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right) = 0.$$

Die Nullstellen der von θ abhängigen Diskriminante bezeichnet Hamy mit $\theta', \theta'', \theta'''$. Man hat $\theta''' < \theta'' < 0 < \theta'$, wenn $\psi > 0$. Wenn $-\infty < \theta < \theta'''$ ist, dann sind die drei Wurzeln der Gleichung (172) positiv. Die kleinste wird mit Z bezeichnet. Wenn $\theta''' < \theta < \theta''$, so

sind zwei Wurzeln konjugiert komplexe Größen. Dieselben werden mit $Z_{\pm i}$ bezeichnet. Wenn $\theta'' < \theta < 0$ ist, gibt es zwei negative und eine positive Wurzel. Die kleinste negative Wurzel wird Z genannt. Wenn $0 < \theta < \theta'$, so sind noch zwei Wurzeln negativ und eine positiv. Dann bezeichnet aber Z die mittlere Wurzel. Wenn endlich $\theta' < \theta < \infty$, so sind zwei Wurzeln $Z_{\pm i}$ konjugiert komplex.

Hamy zeigt, daß auf einem Kreise D, welcher mit Zentrum im Nullpunkt durch den Punkt Z bzw. durch die Punkte $Z_{\pm i}$ geht, der Modul von $\varphi(z)$ seinen größten Wert in Z bzw. $Z_{\pm i}$ annimmt. In diesem Punkte ist übrigens $\varphi'(z) = 0$. Hamy deformiert den anfänglichen Integrationsweg $|z| = 1$ so, daß derselbe zum Schluß mit dem Kreise D zusammenfällt. Wenn nötig, werden dabei die Singularitäten von J auf Doppellinien längs der Querschnitte und auf kleinen Kreisen umgangen. Dabei treten zwei verschiedene Fälle auf. Im ersten Fall:

$$|z_2| < Z \quad \text{bzw.} \quad |Z_{\pm i}| < |z_1|$$

ist eine Deformation des Kreises D nicht nötig, da dieser Kreis die Querschnitte nicht schneidet. Je nachdem Z oder $Z_{\pm i}$ in Betracht kommt, hat man dann infolge von (169) entweder

(173) $$I = H(Z)(1 + \varepsilon)$$

oder

(174) $$I = \{H(Z_i) + H(Z_{-i})\}(1 + \varepsilon).$$

Hier ist

$$H(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{r}{az} \frac{1}{\sqrt{a'^2 - r^2}} \sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}} \frac{\varphi(z)^{m'}}{m'},$$

während ε von der Größenordnung $\frac{1}{m'}$ ist.

Im zweiten Falle:

$$|Z| \quad \text{bzw.} \quad |Z_{\pm i}| > |z_1| \quad \text{oder} \quad < |z_2|$$

muß man den Kreis D in der eben angedeuteten Weise deformieren, um z_1 oder z_2 zu vermeiden. Der durch z_ν (z_1 oder z_2) deformierte Integrationsweg in der z-Ebene geht dann teilweise unendlich nahe an z_ν vorbei. Für die Untersuchung des entsprechenden Teiles von I ist der Ausdruck (171) nicht mehr anwendbar. Diese Schwierigkeit wird durch Wechsel der Integrationsordnung umgangen. In dieser Weise zeigt Hamy, daß im Falle

2a) $$|\varphi(Z)| \quad \text{bzw.} \quad |\varphi(Z_{\pm i})| > |\varphi(z_\nu)|$$

der asymptotische Ausdruck (173) bzw. (174) noch gilt; im Falle

2b) $$|\varphi(Z)| \quad \text{bzw.} \quad |\varphi(Z_{\pm i})| < |\varphi(z_\nu)|$$

dagegen findet er den asymptotischen Ausdruck:

$$I = \Xi(z_r)(1+\varepsilon),$$

wo

$$\Xi(z) = -\frac{1}{\pi a z}\left\{\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)^2 + \alpha \sin\psi \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\frac{z^2-1}{z^2}\right\}\frac{-\frac{1}{2}\varphi(z)^{m'}}{m'},$$

und ε von der Größenordnung $\frac{1}{m'}$ ist.

Schließlich hat *M. Hamy*[255]) in ganz analoger Weise den Fall behandelt, wo die innere Bahn kreisförmig ist.

b) *Methode von Poincaré.* Etwas vor den erwähnten Arbeiten von Hamy hatte *H. Poincaré*[256]) von der Darbouxschen Methode ausgehend asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten $A_{an+b,cn+d}$ gesucht, wenn n eine sehr große Zahl ist. Er nimmt dabei an, daß a, b, c, d bestimmte ganze Zahlen sind, und daß a und c keinen gemeinsamen Divisor haben. Unter Verwendung der Substitution

$$c^{\sqrt{-1}M} = t^c, \quad c^{\sqrt{-1}M'} = t^{-a} z^{\frac{1}{c}}$$

und nach Einführung der Bezeichnung

$$F(z,t) = \Delta^{-1} t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}}$$

ergibt sich für $F(z,t)$ die Entwicklung

$$F(z,t) = \sum A_{m,m'} t^{(m-b)c-(m'-d)a-1} z^{\frac{m'-d}{c}}$$

Poincaré definiert durch die Formel

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|t|=1} F(z,t)\,dt$$

eine Funktion $\Phi(z)$. Nach der obigen Entwicklung für $F(z,t)$ ist offenbar

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{an+b,cn+d} z^n. \tag{175}$$

Für $\Phi(z)$ ergibt sich ein einfacher Ausdruck, indem man anstatt t als Integrationsvariable $x^{\frac{1}{c}}$ durch die Substitution

$$t = \frac{1}{x^c} c^{\frac{c}{2c}\left(\frac{1}{x}-x\right)}$$

---

255) *M. Hamy,* J. de Math. (5) 2 (1896), p. 381—439; Auszug Paris C. R. 122 (1896), p. 980, 1082.

256) *H. Poincaré,* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste 1, Paris 1892, chap. 6, p. 280—325; Auszug Paris C. R. 112 (1891), p. 269.

einführt. Dann wird

(176)
$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\left|x^{\frac{1}{c}}\right|=1} \Delta^{-1}\left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right)\right]\left[x c^{\frac{e}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}\right]^{\frac{ad-bc}{c}} z^{-\frac{d}{c}} \frac{dx^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{c}}}.$$

Die Funktion $x^2y^2\Delta^2$ ist ein Polynom vom sechsten Grade in x und y, wo x und y dieselbe Bedeutung wie in Nr. 32 haben. Zwischen x, y und z besteht offenbar die Relation

(177)
$$z = \left[x c^{\frac{e}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}\right]^a \left[y c^{\frac{e'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)}\right]^c.$$

Für $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$ hat man $|y| = 1$. In dieser Weise wird y als Funktion von $x^{\frac{1}{c}}$ und $z^{\frac{1}{c}}$ vollkommen definiert. Die Funktion innerhalb des Integralzeichens im Ausdrucke (176) für $\Phi(z)$ ist also im allgemeinen Falle ein ganz bestimmter Zweig einer unendlich vieldeutigen Funktion von $x^{\frac{1}{c}}$ und $z^{\frac{1}{c}}$. Um nach dem Vorschlage Poincarés asymptotische Ausdrücke für $A_{an+b,cn+d}$ für große Werte von n zu finden, muß man die dem Kreise $|z| = 1$ am nächsten liegenden Singularitäten für $\Phi(z)$ entdecken und studieren. Dabei kommen die in Nr. 33 erwähnten Prinzipien zur Anwendung. Die Singularitäten der Funktion innerhalb des Integralzeichens in (176), als Funktion von $x^{\frac{1}{c}}$ betrachtet, sind, außer $x^{\frac{1}{c}} = 0$ und $x^{\frac{1}{c}} = \infty$, entweder solche, für welche y aufhört holomorph zu sein, oder auch solche, für welche $\Delta = 0$ ist. Diejenigen Werte von x und y, welche nach Einführung in (177) Singularitäten für $\Phi(z)$ geben, sind Wurzeln algebraischer Bedingungsgleichungen, durch welche ausgedrückt wird, daß zwei Singularitäten der Funktion innerhalb des Integralzeichens zusammenfallen. Das Aufsuchen der Wurzeln dieser algebraischen Bedingungsgleichungen ist keine schwierige Aufgabe, besonders wenn die Exzentrizitäten und die Neigung kleine Größen sind. Schwieriger scheint es zu sein, diejenigen Fälle anzugeben, wo die zusammenfallenden Singularitäten nicht nur dem betrachteten Zweig der Funktion innerhalb des Integralzeichens zugehören, sondern auch vor dem Zusammenfallen sich auf verschiedenen Seiten des Integrationsweges befinden. Diejenigen Werte von z, welche diesen Fällen entsprechen, nennt Poincaré „zulässig" (admissibles).

Poincaré leitet die genannten algebraischen Bedingungsgleichungen ab, wenn die Neigung Null ist. Bei der folgenden Diskussion, durch

welche zu entscheiden ist, welche Singularitäten zulässig sind, macht er außerdem die sehr vereinfachende Annahme, daß $e' = 0$ ist. Dann ist

$$\frac{\Delta^2}{a^2} = \left[\beta y - \frac{(x-\tau)^2}{(1+\tau^2)x}\right]\left[\beta y^{-1} - \frac{(1-x\tau)^2}{(1+\tau^2)x}\right], \tag{178}$$

$$\tau = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\arcsin e), \quad \beta = \frac{a'}{a}.$$

Abgesehen von $x = 0$, $x = \infty$ werden die Singularitäten der Funktion innerhalb des Integralzeichens in (176) aus der einen oder anderen der Gleichungen

$$z = \left[x c^{\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}\right]^a \left[\frac{(x-\tau)^2}{\beta(1+\tau^2)x}\right]^c, \tag{179}$$

$$z = \left[x c^{\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}\right]^a \left[\frac{\beta(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2}\right]^c \tag{180}$$

erhalten. Damit diese Gleichungen eine gemeinsame Wurzel besitzen, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(x-\tau)(1-x\tau) \pm \beta(1+\tau^2)x = 0. \tag{181}$$

In dieser Weise werden vier Singularitäten „de première espèce" unabhängig von den ganzen Zahlen a und c erhalten. Sie sind alle reell. Die Bedingung, daß die Gleichung (179) oder (180) eine zweifache Wurzel besitze, wird durch die erste oder die zweite der Gleichungen gegeben:.

$$cx(x+\tau)(1+\tau^2) + a(1-x\tau)(x-\tau)^2 = 0, \tag{182}$$

$$cx(1+x\tau)(1+\tau^2) + a(x-\tau)(1-x\tau)^2 = 0. \tag{183}$$

Indem die Gleichungen (179) mit (182), (180) mit (183) kombiniert werden, findet man sechs Singularitäten „de deuxième espèce", welche mit a und c veränderlich sind. Abgesehen von $z = 0$ und $z = \infty$ besitzt also die Funktion $\Phi(z)$ höchstens zehn Singularitäten. Dieselben sind paarweise reziprok.

Die Diskussion, durch welche zu entscheiden ist, welche von diesen Singularitäten zulässig sind, führt Poincaré in eingehender Weise nur unter einigen einschränkenden Bedingungen durch. Er nimmt an, daß e (oder τ) eine kleine Größe ist, daß $\beta > 1$, und daß $-\frac{c}{a}$ nur wenig vom Verhältnis der mittleren Bewegungen der beiden Planeten abweicht. Dann sind alle Singularitäten reell. Die Kurven (179) und (180) werden geometrisch dargestellt, indem $|z|$ und x als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes gedeutet werden. Die Singularitäten für $\Phi(z)$ entsprechen denjenigen Punkte, wo die beiden Kurven einander schneiden, oder wo $|z|$ ein Maximum oder ein Mini-

mum hat. Um zu entscheiden, ob eine Singularität z_0 zulässig ist oder nicht, läßt Poincaré $|z|$ von dem Wert $|z_0|$ gegen den Wert $|z| = 1$ gehen. Nur dann ist z_0 zulässig, wenn die beiden von $|z| = |z_0|$ ausgehenden Werte von x sich an verschiedenen Seiten des Kreises $|x| = 1$ befinden, sobald $|z| = 1$ geworden ist. Unter den gemachten Annahmen findet Poincaré in dieser Weise, daß die einzigen zulässigen Singularitäten für $\Phi(z)$ diejenigen reziproken Werte sind, welche den negativen Wurzeln der Gleichungen (182) und (183) entsprechen.

Poincaré zeigt weiter ganz kurz, wie die Resultate verallgemeinert werden können. Er sucht zuerst die zulässigen Singularitäten in demjenigen Falle auf, wo $J = 0$, $\varpi - \varpi' = 0$, während e und $\frac{e'}{e}$ klein sind. Darauf geht er zu dem allgemeineren Falle über, wo die Neigung eine kleine Größe ist, und deutet an, wie die zulässigen Singularitäten dann gefunden werden können. Darauf beweist er den Satz, daß die Natur einer Singularität (ob zulässig oder unzulässig) im allgemeinen unveränderlich ist, wenn die Bahnelemente sich verändern. Nur als eine Singularität, vom Nullpunkte aus gesehen, hinter einer zulässigen geht, kann dieselbe in gewissen Fällen ihre Natur wechseln. Durch geeignete kontinuierliche Veränderung der Elemente würde man also die zulässigen Singularitäten für $\Phi(z)$ in jedem gegebenen Falle finden können.

Poincaré zeigt endlich, daß in der Nähe einer zulässigen Singularität z_0:

$$\Phi(z) = \Phi_2(z) + \Phi_3(z) \log (z - z_0)$$

ist, wo Φ_2 und Φ_3 für $z = z_0$ holomorph sind. Man kann also die verallgemeinerte Darbouxsche Methode anwenden, um für große Werte von n asymptotische Ausdrücke für $A_{an+b,cn+d}$ zu finden.

Die eben erwähnten, von Poincaré teilweise nur skizzierten Ideen sind von *N. Coculesco*[257]) mehr ins Detail ausgeführt worden für den Fall, daß die Bahnebenen zusammenfallen, die Exzentrizitäten klein sind, die Perihelien in derselben Richtung liegen, und $c : a < 0$ ist. Die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe liegt in dem Umstande, daß die Funktion innerhalb des Integralzeichens in (176) eine unendlich vieldeutige Funktion von $x^{\frac{1}{c}}$ und $z^{\frac{1}{c}}$ ist, und daß die Integration nicht mehr, wie im Falle $e' = 0$, in der $x^{\frac{1}{c}}$-Ebene ausgeführt werden kann. Der Integrationsweg muß in der Tat auf der Riemannschen

257) *N. Coculesco*, J. de Math. (5) 1 (1895), p. 359—442. Auszüge Paris C. R. 118 (1894), p. 59; 120 (1895), p. 32.

Fläche, welche der Relation (177) entspricht, gezogen und deformiert werden. Diese Fläche hat unendlich viele Blätter und ist außerdem mit z veränderlich. Diese Schwierigkeit sucht Coculesco zu beseitigen, indem er die Relation (177) angenähert auflöst. In erster Annäherung ist:

$$y = z^{\frac{1}{c}}\left[x c^{\frac{e}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)}\right]^{\frac{a}{c}} = \psi$$

und in zweiter:

$$y = \psi c^{\frac{e'}{2}\left(\psi-\frac{1}{\psi}\right)}.$$

Mit solcher Annäherung ist y eindeutige Funktion von $x^{\frac{1}{c}}$ und $z^{\frac{1}{c}}$. (Es würde noch zu untersuchen sein, inwieweit die Resultate der Diskussion durch diese Vereinfachung beeinflußt werden.) Die den Singularitäten von $\Phi(z)$ entsprechenden Werte von x und y werden nach Potenzen der kleinen Größe τ entwickelt. Dabei wird $\tau' : \tau$ als Parameter betrachtet. Coculesco sucht die Singularitäten auf den Konvergenzkreisen der Entwicklung (175) und findet mittels der Darbouxschen Methode asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten $A_{an+b,cn+d}$.

c) *Methode von Féraud.* Eine dritte Methode für die asymptotische Berechnung der durch die Formel (100) definierten Koeffizienten $A_{m,m'}$ in der Entwicklung von $\frac{1}{\Delta}$ ist von *A. Féraud*[258]) vorgeschlagen worden. Er setzt

$$m = -ap + b, \quad m' = -cp + d,$$

wo a, b, c, d bestimmte ganze Zahlen sind, a und c ohne gemeinsamen Divisor, $c > 0$. Er bildet die Funktion

$$\varphi(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{-ap+b,-cp+d}\, t^{-p}. \tag{184}$$

Mit Einführung der Bezeichnungen (vgl. Nr. 32)

$$\Omega_0 = \frac{ae}{2}(x - x^{-1}) + \frac{ce'}{2}(y - y^{-1}),$$

$$\Omega_1 = \frac{be}{2}(x - x^{-1}) + \frac{de'}{2}(y - y^{-1})$$

wird erhalten

$$\varphi(t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{|x|=1}\int_{y=1} \frac{V c^{\Omega_1} x^{-b-1} y^{-b-1}\, dx\, dy}{\left[1 - \frac{1}{t} c^{-\Omega_0} x^a y^c\right]\Delta}. \tag{185}$$

Die Entwicklung (184) für $\varphi(t)$ konvergiert offenbar, wenn $|t| > 1$.

258) *A. Féraud,* Obs. de Bordeaux ann. 7 (1897), p. 100—238. Auszüge Paris C. R. 122 (1896), p. 871; Bord. Proc. 1896/97, p. 93.

Um nach dem Vorschlage von Féraud asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten $A_{-ap+b,-cp+d}$ (für große Werte von p) zu finden, muß man die Singularitäten der Funktion $\varphi(t)$ auf dem Konvergenzkreise der Reihe (184) entdecken und studieren. Dabei kommen die in Nr. **34** erwähnten Prinzipien zur Anwendung. Es ist ziemlich leicht, alle diejenigen Werte von t zu finden, die überhaupt singulär für die verschiedenen Zweige der Funktion $\varphi(t)$ sein können. Schwieriger ist es, zwischen allen diesen verdächtigen Werten diejenigen zu entdecken, welche auf dem Konvergenzkreise der Reihe (184) liegen und für diese Entwicklung wirklich singulär sind.

Die wirkliche Durchführung der Untersuchung geschieht auch von Féraud wieder für den Fall von Kreisbahnen in verschiedenen Ebenen und für den Fall eines Kreises und einer Ellipse in derselben Ebene.

Falls die Exzentrizitäten Null sind, während die Neigung einen beliebigen Wert hat, ist $g(x, y) \equiv xy\frac{\Delta^2}{a^2}$ ein Polynom zweiten Grades von x bzw. y.

Weiter ist in diesem Falle $V = 1$, $\Omega_0 = \Omega_1 = 0$. Féraud studiert zuerst eine Funktion $\Phi(x, t)$, welche für $|x| = 1$, $|t| > 1$ durch das Integral

$$\Phi(x, t) = \int_{|y|=1} \frac{dy}{x^b y^d \left(1 - \frac{x^a y^c}{t}\right) \sqrt{xy \cdot g(x, y)}}$$

definiert wird. Die Singularitäten von $\Phi(x, t)$, als Funktion von x betrachtet, werden nach den Prinzipien der Nr. **33** gefunden. Dabei werden 8 feste (von t unabhängige) Singularitäten erhalten, und zwar die 4 Verzweigungspunkte $\pm\mu$, $\pm\frac{1}{\mu}$ (alle reell) der durch die Gleichung

$$g(x, y) = 0 \tag{186}$$

definierten Riemannschen Fläche nebst den 4 auf der imaginären Achse dieser Fläche liegenden Punkten, wo $y = 0$ oder $y = \infty$. Weiter werden dann auch bewegliche Singularitäten gefunden, welche durch die Relation

$$t = x^a y^c \tag{187}$$

auf der genannten Riemannschen Fläche definiert werden. Diese Riemannsche Fläche besitzt zwei Blätter. Man gelangt von dem einen zu dem anderen über die Querschnitte $-\infty$ bis $-\frac{1}{\mu}$, $-\mu$ bis $+\mu$, $+\frac{1}{\mu}$ bis $+\infty$. Auf dem Kreise $|x| = 1$ ist $|y| < 1$ auf dem unteren

Blatt und $|y| > 1$ auf dem oberen. Darauf geht Féraud zum Aufsuchen der Singularitäten der Funktion

$$\varphi(t) = -\frac{1}{4\pi^2 a}\int \Phi(x, t)dx. \tag{188}$$

Jede Singularität von $\varphi(t)$ (von $t = 0$ abgesehen) muß entweder ein solcher Wert von t sein, für welchen eine bewegliche Singularität von $\Phi(x, t)$ mit einem Verzweigungspunkte zusammenfällt oder auch ein solcher Wert von t, für welchen zwei bewegliche Singularitäten von $\Phi(x, t)$ in einem und demselben Punkte der Riemannschen Fläche sich begegnen. Diese letzteren Werte von t werden erhalten, indem im Ausdrucke (187) für t die gemeinsamen Lösungen des Systems

$$g(x, y) = 0, \quad \frac{\partial(x^a y^c, g)}{\partial(x, y)} = 0 \tag{189}$$

eingeführt werden. Die Resultante dieses Systems ist vom 8. Grade. Ihre Wurzeln sind von der Form $x = \pm \nu_1, \pm\frac{1}{\nu_1}, \pm\sqrt{-1}\,\nu_2, \pm\sqrt{-1}\frac{1}{\nu_2}$, wo ν_1 und ν_2 reell, positiv und < 1 sind. Die Punkte ν_1 und $\frac{1}{\nu_1}$ liegen immer zwischen den Verzweigungspunkten μ und $\frac{1}{\mu}$

Jede Singularität von $\varphi(t)$ ist entweder reell oder rein imaginär. Um auf einer beliebigen der Halbachsen in der t-Ebene die von dem Ursprung entfernteste zulässige Singularität zu finden, läßt Féraud die Veränderliche t diese Halbachse in der Richtung gegen den Ursprung durchlaufen. Die durch die Gleichung (187) auf der Riemannschen Fläche (186) definierten beweglichen Singularitäten von $\Phi(x, t)$ beschreiben dann auf dieser Fläche gewisse Kurven. Wie schon erwähnt, können zwei von diesen Kurven sich nur in denjenigen 8 Punkten schneiden, welche den gemeinsamen Lösungen des Systems (189) entsprechen. Die für große t-Werte mit dem Kreise $|x| = 1$ im unteren Blatt der Riemannschen Fläche zusammenfallende Kurve wird auf dieser Fläche kontinuierlich deformiert, so daß dieselbe den auf dieser Fläche liegenden Singularitäten für $\Phi(x, t)$ ausweicht. Féraud zeigt, daß diese Kurve als Integrationsweg im Integrale (188) angewandt werden kann. Er beweist mit andern Worten, daß $\varphi(t)$ holomorph bleibt, solange die eben betrachtete Kurve in der angedeuteten Weise deformiert werden kann. Féraud findet in dieser Weise schließlich, daß die Singularitäten auf dem Konvergenzkreise der Reihe (184) sind

$$\pm t_\nu \quad \text{wenn} \quad a + c \text{ ungerade},$$
$$+ t_\nu \quad \text{wenn} \quad a + c \text{ gerade ist.}$$

Hier bezeichnet t_ν diejenige von den beiden Größen t_{r_1} und $\frac{1}{t_{r_1}}$, für welche das Modul < 1 ist.

Féraud hat auch die analytische Natur der Entwicklungen der Funktion $\varphi(t)$ in der Nähe von diesen Singularitäten studiert. Durch Anwendung einer von *H. Poincaré*[259]) bei seinen Untersuchungen über Doppelintegrale gegebene Methode findet er, daß

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) \log(t - t_0), \tag{190}$$

wo φ_0 und φ_1 im singulären Punkte t_0 holomorph sind. Mit Hilfe der Methode von Darboux können also asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten $A_{-ap+b,-cp+d}$ gefunden werden.

Im Falle, daß die Bahnebenen zusammenfallen und die eine Bahn kreisförmig ist ($e' = 0$), gilt für Δ^2 der Ausdruck (178). Die Riemannsche Fläche $\Delta^2 = 0$ besteht also aus zwei getrennten Blättern, dem unteren und dem oberen, dem ersten und dem zweiten Faktor des Ausdrucks für Δ^2 entsprechend. Die Funktion $\varphi(t)$ wird wie in der Formel (188) geschrieben. Die Funktion $\Phi(x, t)$, als Funktion von x betrachtet, besitzt in diesem Falle (abgesehen von $x = 0$, $x = \infty$) 6 feste Singularitäten, und zwar die 4 Berührungspunkte der beiden Blätter der Riemannschen Fläche (alle reell und durch die Gleichungen (181) gegeben) nebst den 2 Punkten $x = \tau$ und $x = \tau^{-1}$ auf dieser Fläche, wo $y = 0$ bzw. $y = \infty$. Die beweglichen Singularitäten von $\Phi(x, t)$ werden auf den beiden Blättern der Riemannschen Fläche durch die beiden Gleichungen (179) und (180) definiert (wo nur t anstatt z gedacht wird).

Als anfänglichen Integrationsweg (für große Werte von t) im Integralausdrucke für $\varphi(t)$ wählt Féraud den Kreis $x = 1$ in demjenigen Blatt der Riemannschen Fläche gezogen, wo $|y| < 1$, als $x = 1$. Dieser Weg liegt deshalb im unteren Blatt, wenn $\beta > 1$, dagegen im oberen Blatt, wenn $\beta < 1$. Féraud beweist, daß der Integrationsweg nur deformiert zu werden braucht, um diejenigen Singularitäten für $\Phi(x, t)$ zu vermeiden, welche in demselben Blatt wie der Integrationsweg liegen. Wenn $\beta > 1$, so gibt es also (abgesehen von $t = 0$) keine anderen Singularitäten für $\varphi(t)$ als diejenigen, welche durch Einführen der Wurzeln der Gleichungen (181) und (182) im zweiten Membrum der Formel (179) erhalten werden. Wenn dagegen $\beta < 1$, so werden (abgesehen von $t = 0$) alle Singularitäten gefunden, indem die Wurzeln der Gleichungen (181) und (183) im Ausdrucke (180) eingesetzt werden. Wenn die Gleichung (182) bzw. (183) imaginäre

259) *H. Poincaré*, Acta mathematica 9 (1887), p. 321—380.

Wurzeln besitzt, so gibt es im allgemeinen zwei konjugiert komplexe Singularitäten $t_{\pm i}$ für $\varphi(t)$. Féraud zeigt, daß diese Singularitäten zulässig sind, indem er t mit konstantem Argumente von ∞ gegen $t_{\pm i}$ variieren läßt. Die reellen Singularitäten für $\varphi(t)$ studiert Féraud, indem er t die reellen Halbachsen von $|t| = \infty$ durchlaufen läßt und dabei die beweglichen Singularitäten von $\Phi(x, t)$ graphisch verfolgt. Bei dieser Diskussion treten verschiedene Fälle auf, je nach der relativen Lage der reellen Wurzeln der Gleichungen (181) und (182) bzw. (183). In jedem Falle sucht Féraud diejenige von diesen Wurzeln auf, welche die vom Ursprung am weitesten entfernte, zulässige Singularität von $\varphi(t)$ gibt.

Er zeigt ferner, daß $\varphi(t)$ in der Umgebung einer solchen Singularität von der Natur (190) ist. Die Methode von Darboux liefert also für große Werte von p asymptotische Ausdrücke für die Koeffizienten $A_{-ap+b,-cp+d}$.

VI 2, 14. THEORIE DES ERDMONDES.

Von

ERNEST W. BROWN

IN NEW HAVEN.

(Übersetzt und mit einigen Zusätzen versehen von **A. v. Brunn** in Danzig.)

Inhaltsübersicht.

1. Historischer Überblick.
2. Verhältnis der Mondtheorie zum n-Körperproblem.

I. Das Hauptproblem.

3. Die Kräftefunktion.
4. Bewegungsgleichungen.
5. Spezielle Differentialgleichungen.
6. Formen der Ausdrücke für die Koordinaten.
7. Konvergenz und Divergenz.
8. Intermediäre Bahnen. Lösungsmethoden.
9. Entwicklung der Störungsfunktion.
10. Variation der willkürlichen Konstanten.
11. Eigenschaften der Lösung.

II. Die Lösungsmethoden.

12. Geometrische Methoden: *Newton.*
13. Die wahre Länge als unabhängige Veränderliche: *Laplace, Clairaut, d'Alembert, Damoiseau, Plana.*
14. Polarkoordinaten mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher: *de Pontécoulant, Lubbock, Airy, Neison.*
15. Variation der Konstanten: *Euler, Poisson, Puiseux, Delaunay, Poincaré.*
16. Bewegliche rechtwinklige Koordinaten: *Euler, Hill, Brown, Poincaré.*
17. Mittlere Anomalie und Verhältnis der Entfernung zu einem elliptischen Radiusvektor als abhängige Variable: *Hansen, v. Oppolzer, Weiler.*
18. Wahre Anomalie als unabhängige Veränderliche: *Euler, Gyldén, Brendel.*

III. Planetarische und andere störende Einflüsse.

19. Behandlungsmethoden.
20. Die Figur der Erde und des Mondes.
21. Die direkte Wirkung der Planeten.

22. Die indirekte Wirkung der Planeten.
23. Die säkularen Beschleunigungen.
24. Störungen zweiter Ordnung.
25. Andere mögliche störende Ursachen.
26. Der gegenwärtige Stand der Mondtheorie. Vergleich mit der Beobachtung.
27. Tafeln der Mondbewegung.

Bemerkung. Dieser Artikel behandelt ausdrücklich nur das Problem des Erdmondes. Er nimmt daher nur gelegentlich nebenbei Notiz von Entwicklungen, die zwar aus diesem Problem herstammen, aber entweder auf ähnliche himmlische Systeme oder überhaupt auf andere Probleme anwendbar sind; diese Dinge sind in IV 1, 12 und VI 2, 12, 13 u. 18 behandelt. Andrerseits sind auch Resultate, welche in jenen Artikeln entwickelt sind und auf die Mondtheorie angewandt werden können, im allgemeinen hier nicht wiederholt. Die Litteratur und die Methoden, die sich auf die Bestimmung der Konstanten aus Beobachtungen beziehen, gehören in den Artikel VI 2, 19.

Literatur.

Lehrbücher.

G. B. Airy, Mathematical tracts on physical Astronomy, Cambridge, 1. Aufl. 1826, 2. Aufl. 1831.
H. Godfray, Elementary treatise on the Lunar theory, London, 1. Aufl. 1853, 3. Aufl. 1871.
F. Tisserand, Traité de mécanique céleste 3, Paris 1894.
E. W. Brown, An introductory treatise on the Lunar theory, Cambridge 1896.
J. C. Adams, Lectures on the Lunar theory, Cambridge 1900.
H. Andoyer, Théorie de la Lune. Scientia, Paris 1902.
H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste 2, Paris 1909.
G. Boccardi, Elementi di Astronomia, Torifno, 1912.

Monographieen.

I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London, 1687.
A. C. Clairaut, Théorie de la Lune, 1. Aufl. St. Petersburg 1752, 2. Aufl. Paris 1765.
L. uler, Theoria motus Lunae exhibens omnes ejus inaequalitates (mit einem Additamentum), St. Petersburg 1753.
J. d'Alembert, Recherches sur différents points importants du système du Monde 1, Paris 1754.
L. Euler, Réflexions sur la variation de la Lune, Berl. Acad. Mem. 1766, p. 334—353.
— Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata etc., St. Petersburg 1772.
P. S. Laplace, Traité de mécanique céleste liv. 7, Paris 1802.
M. C. T. Damoiseau, Mémoire sur la théorie de la Lune, Paris mém. prés. 3 sér. 1 (1827), p. 313—598.
G. A. A. Plana, Théorie du mouvement de la Lune (3 Bde.), Turin 1832.
J. W. Lubbock, On the theory of the Moon and on the perturbations of the Planets. Lond. Phil. Trans. 1831, p. 217—66, 1832, p. 1—49, 229—236, 361—381, 601—607, 1834, p. 123—141 = Tracts on the theory of the Moon and on the perturbations of the Planets, London 1834, 1836, 1837, 1840 und, eine Diskussion vieler Fragen enthaltend, 1861.

S. D. Poisson, Mémoire sur le mouvement de la Lune autour de la Terre. Par. mém. prés. 3 sér. 13 (1835), p. 209—335.
P. A. Hansen, Fundamenta nova investigationis orbitae verae, quam Luna perlustrat, Gotha 1838.
P. G. D. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du Monde 4, Paris 1846.
J. C. Adams, On the secular variation of the Moons mean motion, Lond. Phil. Trans. 143 (1853), p. 397—406 = Collected works 1, p. 140—157.
C. Delaunay, Théorie du mouvement de la Lune, Paris mém. prés. 28 (1860) u. 29 (1867).
P. A. Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, Leipzig. Ges. Wiss. Abhdl. 6 (1862), p. 91—498, 7 (1864), p. 1—399.
V. Puiseux, Sur les principales inégalités de la Lune, Ann. éc. norm. sup. Paris, sér. 1 1 (1864), p. 39—80.
G. W. Hill, Researches in the Lunar theory, Amer. Journ. of Math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260 = Works 1, p. 284—335.
— On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and Moon, Cambridge U. S. A. 1877 = Acta math. 8 (1886), p. 1—36. = Works 1, p. 243—270.
J. C. Adams, On the motion of the Moons node etc., Lond. Astr. soc. Monthly Not. 38 (1877), p. 43—49. = Collected works 1, p. 181—188.
H. Gyldén, Die intermediäre Bahn des Mondes, Acta math. 7 (1885), p. 125—172.
G. B. Airy, Numerical Lunar theory, London 1886.
H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 Bde., Paris 1892, 1893, 1899.
Th. v. Oppolzer, Entwurf einer Mondtheorie etc., Wien Denkschr. 51 (1886), p. 69—105, 54 (1888), p. 49—244.
R. Radau, Recherches concernant les inégalités planétaires du mouvement de la Lune, Obs. de Paris ann., mém. 21 (1893), p. 1—114.
S. Newcomb, Action of the planets on the moon, Wash. Astron. Papers 5 (1894), p. 97—295.
E. W. Brown, Investigations in the lunar theory, Amer. Journ. of Math. 17 (1895), p. 318—358.
— Theory of the motion of the moon etc., Lond. Astr. soc. mem. 53 (1897), p. 39—116, (1899), p. 163—202, 54 (1900), p. 1—63, 57 (1905), p. 52—145, 59 (1908), p. 1—103.
H. Poincaré, Sur les équations de la lune, Paris bull. astr. 17 (1900), p. 167—204.
M. Brendel, Theorie des Mondes, Astron. Mitt. d. kgl. Stw. Göttingen 1905. = Gött. Math. Abh. N. F. Bd. 3, Nr. 4.
S. Newcomb, Investigation of Inequalities produced by the action of the planets, Carn. Inst. Publ. 72 (1907).
E. W. Brown, Inequalities produced by the direct action of the planets, Cambridge University Press XII u. 93 p. 1908.

1. Kurzer historischer Überblick.[1]) *I. Newton* (1687) selbst war der erste, der die Bewegungen des Mondes seinem Gesetz vom reci-

1) Nachweisungen siehe unten. Die Hauptquellen, aus denen man sich über die Geschichte der allgemeinen Astronomie unterrichten kann, sind *A. Gautier,*

proken Quadrat der Entfernung unterordnete, indem er aus ihm angenäherte Werte für die hauptsächlichsten Ungleichheiten und Bewegungen ableitete. Eine analytische Methode wandte zuerst *Clairaut* (1747) an, der den Kunstgriff gebrauchte, eine Ellipse mit beweglicher Apsidenlinie in die Gleichungen einzuführen; er erhielt eine zweite Annäherung für die Apsidenbewegung, welche zeigte, daß das *Newton*sche Gesetz allen Tatsachen genüge. Diese Theorie war numerisch. Eine ähnliche rein analytische Theorie arbeitete *d'Alembert* (1751) aus. 1753 publizierte *Euler* den ersten seiner zahlreichen Versuche, brauchbare analytische Darstellungen und Lösungen des Problems zu finden; er benutzte zum ersten Male bewegliche rechtwinklige Koordinatenachsen, die Variation der Konstanten, eine der *Hansen*s analoge Methode, den Ausdruck der Koordinaten durch trigonometrische Funktionen der Zeit, Annäherungen zunächst nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen und erst dann nach Potenzen der störenden Kraft und unendlich unbestimmte Koeffizienten zur Aufstellung und Lösung von Bedingungsgleichungen, um so numerische Werte der willkürlichen Konstanten zu erhalten. *T. Mayer* gab, indem er *Euler*s Methode von 1753 benutzte und Theorie und Beobachtung vereinigte, in den Jahren 1753 und 1770 Tafeln heraus.

Laplace nahm den Gegenstand 1770 auf; seine Untersuchungen sind zum größten Teile im 3. Bande seiner Mécanique céleste (1802) enthalten. Er stellte die allgemeinen Bewegungsgleichungen auf, gab eine generelle Lösungsmethode, die er in beträchtlichem Umfange durchführte, und welche die von der Figur der Erde und der Anziehung der Planeten herrührenden Störungen berücksichtigte, wies auf die Bedeutung der langperiodischen und säkularen Terme hin und klärte die Ursache der Säkularbeschleunigung auf. *Damoiseau* (1827) und *Plana* (1832) entwickelten *Laplace*s Methode bis zu einem viel höheren Grade der Annäherung, jener numerisch, dieser analytisch.

„Essai historique sur le problème des trois corps", (Paris 1817) und die Einleitungen der hauptsächlichsten Monographieen sowie der Lehrbücher von *Tisserand* und *Brown*.

Die nach Gegenständen geordnete „Bibliographie générale de l'Astronomie" von *Houzeau* und *Lancaster* und das „Vademecum de l'Astronomie" von *Houzeau*, Brüssel 1882 und 1887 bzw. 1882, enthalten Titel und Verlagsort der meisten Bücher und Abhandlungen bis 1880. Zur Vervollständigung der mathematischen Kataloge enthält das Paris bull. astr. (seit 1884) ein Verzeichnis der meisten der im betreffenden Jahre erschienenen Werke. Endlich gibt (seit 1900) der „Astronomische Jahresbericht" von *Walther F. Wislicenus* ein nach Gegenständen geordnetes Verzeichnis nebst kurzer Besprechung der Publikationen.

De Pontécoulant und *Lubbock* begannen um 1830 ihre Untersuchungen unter Verwendung der Zeit als unabhängiger Veränderlicher; des ersteren vollständige Resultate wurden 1846 veröffentlicht. In ungefähr dieselbe Zeit fallen *Hansens* erste Publikationen seiner Methoden: Die „Fundamente usw.", die seine Theorie enthalten, erschienen 1838, die „Darlegung usw." mit seinen numerischen Resultaten 1862 und 1864 und die „Tafeln" 1857. *Poissons* Mémoire, welches die Variation der Konstanten anwendete, kam 1835 heraus. *Adams'* Abhandlung von 1853 zeigte, daß *Laplaces* theoretischer Wert der Säkularbeschleunigung trotz der scheinbaren Übereinstimmung mit der Beobachtung um die Hälfte seines Betrages falsch war. *Delaunay* kündigte seine Methode, die Variation des Konstanten anzuwenden, 1846 an und führte sie so weit durch, daß er (1867) eine analytische Entwicklung für die Sonnenstörungen bis einschließlich der Größen 7. Ordnung in der störenden Kraft erhielt, die Sonnenbahn als elliptisch vorausgesetzt. Die Anwendung seiner Methode auf planetarische und andere Ungleichheiten ist durch *Hill, Newcomb, Radau, Brown* und andre gemacht. *Airys* Versuch (1886), numerisch *Delaunays* Resultate zu verifizieren, schlug fehl. *Weiler* (1872), *Neison-Nevill* (1877) und *v. Oppolzer* (1887) haben ebenfalls allgemeine Methoden gegeben.

In *Hills* Schriften von 1877 trat die Idee hervor, eine periodische Bahn anstatt der Ellipse mit beweglicher Apsidenlinie als erste Annäherung zu benutzen. Indem er *Eulers* Gedanken einer Annäherung nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen aufnahm, erhielt er mit hoher Genauigkeit den Teil der Störungen, die von jenen unabhängig sind. Den gleichen Gedanken hatte *Adams* gehabt, dessen Abhandlung über die Bewegung des Knotens unmittelbar folgte. Die angedeutete Methode ist vollständig entwickelt durch *Brown*, der alle Terme einschließt, die Koeffizienten bis zum Betrage von 0″,01 liefern können, und diese auf 0″,001 genau rechnet. Die Anwendung periodischer Bahnen ist von *Poincaré* von der mathematischen Seite aus auf alle Gebiete der Himmelsmechanik ausgedehnt, und ähnliche Probleme sind von *Darwin, Schwarzschild* und anderen behandelt. *Gyldéns* Abhandlung aus dem Jahre 1886 zeigt die Anwendung seiner eigenen Methoden auf die Mondtheorie; *Brendel* (1905) und andere Autoren haben seine Methoden modifiziert und sein Werk fortgeführt, aber es ist nicht zu einer vollständigen Entwicklung gekommen. Im Jahre 1900 hat *Poincaré* eine allgemeine Methode gegeben, die auf der von *Hill* und *Brown* basiert. *Cowell* (1903—5) hat zahlreiche theoretische Koeffizienten durch eine direkte Analyse der Mondbeobachtungen verifiziert.

2. Verhältnis der Mondtheorie zum n-Körperproblem und zur Planetentheorie. Jeder Körper im Sonnensystem kreist scheinbar innerhalb einer ringförmigen Fläche um einen andern, der das Zentrum dieser Fläche einnimmt; letzterer (b) bestimmt den Hauptteil der Bewegung des ersteren (a), und die übrigen Körper (c) „stören" diese Bewegung in höheren oder geringerem Grade. In der Planetentheorie sind diese Körper: a ein Planet, b die Sonne, c die übrigen Planeten; in der Mondtheorie dagegen sind es: a der Mond, b die Erde, c die Sonne und die Planeten. Die Unterscheidung dieser beiden Probleme ist nur vorgenommen, um ihre analytischen Verschiedenheiten hervorzuheben. Es seien nämlich a und n mittlere Entfernung und mittlere Bewegung des gestörten Körpers um den Zentralkörper der Masse E; ebenso m', a', n' Masse, mittlere Entfernung und mittlere Bewegung des störenden Körpers. Dann erfordert die Lösung des Bewegungsproblems eine Entwicklung nach positiven oder negativen Potenzen von $\frac{a}{a'}$, $\frac{n}{n'}$, $\frac{m'}{E}$. In der Planetentheorie ist $\frac{m'}{E} < \frac{1}{1000}$, während $\frac{a}{a'}$ und $\frac{n}{n'}$ $\left(\text{oder } \frac{a'}{a}, \frac{n'}{n}\right)$ die Einheit erreichen können. In der Mondtheorie dagegen, wenn die Sonne der störende Körper ist, hat man:

$$\frac{m'}{E} = 330000; \quad \frac{a}{a'} = \frac{1}{400}, \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{13}$$

ungefähr. In jenem Fall ist die Schwierigkeit die, die merkbaren Glieder 1., selten 2. Ordnung in $\frac{m'}{E}$ zu erhalten, in diesem müssen viele Potenzen davon mitgenommen werden; und daß man im Mondproblem von einer solchen Entwicklung nach der störenden Masse, die ja die Einheit um mehr als das Dreihunderttausendfache übertrifft, überhaupt sprechen kann, hat nur dadurch einen Sinn, daß sich infolge der Eigentümlichkeit des Problems die Gesamtheit der Entwicklungen nach $\frac{m'}{E}$ und $\frac{a}{a'}$ tatsächlich auf eine solche nach $\left(\frac{n'}{n}\right)$ und $\frac{a}{a'}$, reduziert. Und weiter: Während die Apsiden- und Knotenbewegungen der Planeten so langsam vor sich gehen, daß Ausdrücke der Form

$$\sum (A + Bt + \cdots) \sin(\alpha t + \beta), \text{ wo } \alpha = in + jn',$$

zur Darstellung der Elemente für sehr lange Zeit genügen, würden solche für den Mond schon nach Ablauf einiger Monate unbrauchbar werden: Man muß daher so verfahren, daß die Zeit nur in trigonometrischen Funktionen vorkommt, welche von 4 (der Zeit proportionalen) Argumenten abhängen, z. B. den beiden mittleren Längen in der Bahn, der mittlere Perihellänge und der mittleren Knotenlänge

des Mondes. Die zu berücksichtigenden Vielfachen dieser Argumente sind beim Monde nicht hoch, während in der Planetentheorie vielfach ziemlich hohe Werte von i und j noch mitzunehmen sind.

Wegen der im Verhältnis zur Sonne kleinen Massen der Planeten und überhaupt der ganzen Konfiguration des Systems ist es möglich, das gesamte Mondproblem in Unterprobleme zu teilen, die nacheinander getrennt behandelt werden können; und zwar folgendermaßen:

1. Das Hauptproblem: in ihm werden Erde, Mond und Sonne auf ihre Schwerpunkte mit den Massen E, M, m' reduziert (beziehungsweise die Körper als Kugeln mit konzentrischen Kugelschichten gleicher Dichte aufgefaßt). Die Bewegung des Schwerpunktes G von E und M um m' kann als in einer bekannten festen Ellipse vor sich gehend gedacht werden (Nr. **3**—**18**).

2. Die Wirkungen, die durch den Unterschied zwischen angenommener und wirklicher Figur von Erde und Mond hervorgerufen werden (Nr. **20**).

3. Die direkte Anziehung von M durch die als Massenpunkte gedachten Planeten (Nr. **21**).

4. Die Wirkungen der Abweichungen der Bewegung von G von einer festen Ellipse; diese werden durch die Planeten hervorgerufen und sind als deren indirekte Wirkung bekannt (Nr. **22** und **23**).

5. Störungen, die von den Quadraten und Produkten der in 2, 3, 4 genannten Kräfte abhängen (Nr. **24**).

6. Andere Ursachen, deren Wirkungen entweder zu klein sind, um beobachtet werden zu können, oder deren Charakter und Beträge noch größtenteils hypothetisch sind; das sind: Die Gezeiten auf der Erde die Abweichungen vom *Newton*schen Gesetz, Massengewinn oder -verlust, Einfluß eines widerstehenden Mittels usw. (Nr. **25**).

I. Das Hauptproblem.

3. Die Kräftefunktion. Es seien x, y, z, r und x', y', z', r' Koordinaten und Abstand von Mond bzw. Sonne in einem festen Koordinatensystem, dessen Anfang in E liegt; Δ sei der Abstand Mond—Sonne; E, M, m' die Massen von Erde, Mond und Sonne, gerechnet in astronomischen Einheiten. Dann lauten die Bewegungsgleichungen des Mondes[2]):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z},$$

2) *Laplace*, Mécanique céleste, liv. 2, Nr. 14.

wo

$$F = \frac{E+M}{r} + m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)$$

ist.

Die Sonnenkoordinaten sind auf G, den Schwerpunkt von E und M bezogen, und von der Sonne wird vorausgesetzt, daß sie eine feste Ellipse um G als Brennpunkt in der xy-Ebene (Ekliptik) beschreibe; es ist also $z' = 0$. Man setzt nun $xx' + yy' = rr' \cos\vartheta$, wo also $\vartheta = \sphericalangle MEm'$, und entwickelt nach Potenzen von $\frac{r}{r'}$, das ungefähr $\frac{1}{400}$ ist. Es werde außerdem bezeichnet:[3])

$$\varkappa_j = \left(\frac{E}{E+M}\right)^{j-1} - \left(\frac{-M}{E+M}\right)^{j-1}, \quad \lambda = \frac{E+M}{E+M+m'} \text{ ungefähr } = \frac{1}{330\,000}$$

dann ist

$$m' = n'^2 a'^3 (1-\lambda),$$

wo n' und a' mittlere Bewegung und große Halbachse der Sonnenbahn sind. Es sei nun P_j die Kugelfunktion j^{ter} Ordnung von ϑ. Dann kann man schreiben

$$F = \frac{E+M}{r} + \frac{n'^2 a'^3}{r'}(1-\lambda)\sum_{j=2}^{j=\infty} \varkappa_j P_j\left(\frac{r}{r'}\right)^j = \frac{E+M}{r} + R.$$

In den meisten Theorien wird $\lambda = 0$ und $\varkappa_j = 1$ gesetzt. In der Tat bringt auch λ nur eine kaum merkliche Veränderung in der Apsiden- und Knotenbewegung hervor, und den Größen $\varkappa_j$ wird annähernd Rechnung getragen, wenn man in den Schlußresultaten $\frac{(E-M)a}{(E+M)a'}$ statt $\frac{a}{a'}$ setzt.[4]) Die Störungsfunktion ist R; ist sie null, so geht die Mondbewegung in einer Ellipse mit E als Brennpunkt vor sich. Die Zeit tritt in R explizit nur in der Form $n't + \varepsilon'$ und $n't + \varepsilon' - \varpi' = l'$ auf, wo ε' und ϖ' die mittlere Länge und die Perigäumslänge der Sonne für $t = 0$ sind; und zwar kommt $n't + \varepsilon'$ in ϑ nur so vor, daß, wenn man die Bewegung auf ein bewegliches Koordinatensystem bezieht, dessen Anfang in E liegt, und dessen x-Richtung nach dem mittleren Sonnenort zeigt, in F die Zeit t explizit nur durch l' eingeht. Wir können dann R mit Formeln, wie sie für die elliptische Bewegung gelten, nach Kosinus der Vielfachen von l' und Potenzen von e', der Exzentrizität der Sonnenbahn, entwickeln; dabei tritt e'^k in dem Koeffizienten von $\cos kl'$ als Faktor auf.

---

3) *P. Harzer,* Astr. Nachr. 123 (1889), col. 193—200.

4) Für die Begründung dieser Vereinfachung siehe *E. W. Brown,* Treatise on the Lunar theory, Chap. 1, Cambridge 1896.

4. Die Bewegungsgleichungen. Den Bewegungsgleichungen sind vielerlei verschiedene Formen gegeben worden. Einige der wichtigsten sind:

a) Für Polarkoordinaten mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher:[5])

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2) - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = r\frac{\partial R}{\partial r} + 2R - 2n'\int \frac{\partial R}{\partial \varepsilon'}\,dt,$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{h(1+s^2)}{r^2} = \frac{1+s^2}{r^2}\int \frac{\partial R}{\partial v}\,dt,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}\right) + \frac{\mu}{r^3}\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\frac{\partial R}{\partial s} + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\frac{\partial R}{\partial r},$$

wo a und h Integrationskonstanten sind und s die trig. Tangente der Breite über der xy-Ebene, v die sphärische Länge der Projektion von r auf die xy-Ebene von der x-Achse aus gerechnet, ε' die mittlere Länge der Sonne für $t = 0$, und $\mu = E + M$ ist. Wenn $R = 0$ ist, so ist $2a$ die große Achse und $\frac{1}{2}h$ die Flächengeschwindigkeit in der xy-Ebene.

b) Polarkordinaten mit v als unabhängiger Veränderlicher:[6])

$$\frac{d^2u_1}{dv^2} + u_1 = \frac{1}{h^2}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{s}{h^2 u_1}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{h^2 u_1^2}\frac{du_1}{dv}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2}{h^2}\left(\frac{d^2u_1}{dv^2} + u_1\right)\int \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{u_1^2},$$

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s = \frac{s}{h^2 u_1}\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{1+s^2}{h^2 u_1^2}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{1}{h^2 u_1^2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2}{h^2}\left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right)\int \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{u_1^2},$$

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{h u_1^2}\left(1 + \frac{2}{h^2}\int \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{u_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hier hat h eine ähnliche Bedeutung wie in a); $\frac{1}{u_1} = r_1$, ist die Projektion des Radiusvektors auf die xy-Ebene.

c) Rechtwinklige Koordinaten, auf ein bewegliches Achsensystem bezogen.[7]) Es sei die x-Achse stets nach dem mittleren Sonnenort gerichtet und außerdem bezeichnet:

$$F' = F + \tfrac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2).$$

Dann ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n'x = \frac{\partial F'}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F'}{\partial z}.$$

---

5) *Laplace,* Mécanique céleste, liv. 2, Nr. 46 und *de Pontécoulant,* Système du monde 4, Nr. 1.

6) *Laplace,* Mécanique céleste, liv. 2, Nr. 15; 7, Nr. 1.

7) *G. W. Hill,* Researches in the Lunar theory, Amer. Journ. of Math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260. = Works 1, p. 284—335.

Man setze nun:

$$\begin{matrix} u \\ s \end{matrix} = x \pm iy, \quad \xi = e^{i(nt+\varepsilon-n't-\varepsilon')}, \quad i = \sqrt{-1}$$

und führe das Operationszeichen D ein für

$$\xi \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{i(n-n')} \frac{d}{dt};$$

ferner sei

$$m = \frac{n'}{n-n'}, \quad \varkappa = \frac{\mu}{(n-n')^2},$$

$$\frac{2}{(n-n')^2} F' = \frac{2\varkappa}{r} + \frac{3}{4} m^2 (u+s)^2 - m^2 z^2 + \sum_{p=2}^{p=\infty} \Omega_p.$$

Dann ist Ω_p eine homogene Funktion p^{ten} Grades von u, s, z, welche $\left(\frac{1}{a'}\right)^{p-2}$ als Faktor enthält; Ω_2 enthält außerdem e' als Factor. Dann kann man die Differentialgleichungen folgendermaßen umformen:[8])

$$D^2(us+z^2) - DuDs - (Dz)^2 - 2m(uDs - sDu) + \tfrac{9}{4} m^2 (u+s)^2 - 3m^2 z^2$$

$$= C - \sum_{p=2}^{p=\infty} [(p+1)\Omega_p + D^{-1}(D_{\varepsilon'}\Omega_p)],$$

$$D(uDs - sDu - 2mus) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) = \sum_{p=2}^{p=\infty} \left(s \frac{\partial \Omega_p}{\partial s} - u \frac{\partial \Omega_p}{\partial u} \right),$$

$$D(uDz - zDu) - 2mzDu - m^2 uz - \frac{3}{2} m^2 z(u+s) - \sum_{p=2}^{p=\infty} \left(\frac{1}{2} z \frac{\partial \Omega_p}{\partial s} - u \frac{\partial \Omega_p}{\partial z} \right).$$

Hier bedeutet $D_{\varepsilon'}$ die Operation D angewandt auf die Teile von Ω, welche die Zeit explizite enthalten; D^2, die Wiederholung der Operation D, und D^{-1}, die inverse Operation zu D_1, sind so zu verstehen:

$$D^2 f = \xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df}{d\xi} \right), \quad D^{-1} f = \frac{1}{\xi} \int + d\xi,$$

n ist die mittlere Bewegung des Mondes und C eine willkürliche Konstante. Wenn $e' = 0$, so besitzen die Differentialgleichungen das *Jacobi*sche Integral[9]), und C ist die relative Energiekonstante. Wenn $\frac{1}{a'} = 0$ ist, dann sind die Gleichungen in ihrer ersten Form, abgesehen von den Termen $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$, linear in bezug auf x, y, z und bilden die

8) *E. W. Brown,* Investigations in the Lunar theory, Amer. Journ. of Math. 17 (1895), p. 318—358. Die Gleichungen sind zuerst aufgestellt und behandelt unter der Beschränkung $\frac{a}{a'} = e' = z = 0$ durch *G. W. Hill.*

9) *C. G. J. Jacobi,* Paris C. R. 3 (1836) p. 59—61. = Gesammelte Werke 4, p. 37—38.

Grundlage von *Adams* Untersuchungen über die Bewegungen der Apsiden- und der Knotenlinie (Nr. **11**). In der zweiten Form sind sie homogen und vom 2. Grade, abgesehen von der Konstanten C.

d) Kanonische Formen. Setzt man

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2\,^{10}), \quad \Phi = T - F$$

und behandelt x, y, z, x', y', z' als gleichberechtigte abhängige Veränderliche, so nehmen die ursprünglichen Bewegungsgleichungen die kanonische Form an:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \ldots.$$

Poincaré[11]) hat eine Transformation gegeben, die ein System kanonischer Gleichungen liefert, bei dem Φ nicht explizite von der Zeit abhängt. Wenn man sich nach c) eines beweglichen Achsensystems bedient und

$$X = x' - n'y; \quad Y = y' + n'x, \quad Z = z',$$
$$\Phi = \tfrac{1}{2}\{(X + n'y)^2 + (Y - n'x)^2 + Z^2\} - F - \tfrac{1}{2}n'^2(x^2 + y^2) - n'L$$

setzt, dann sind (x, y, z, L), (X, Y, Z, l') kanonische Variable, und Φ ist die charakteristische Funktion des Problems; es besteht also das Integral $\Phi = \text{const.}$ L ist definiert durch $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial l'}$. Ein ähnliches kanonisches System kann bei festen Achsen[12]) benutzt werden, wenn man setzt $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'}$, und $\Phi = T - F - n'L$, wo $T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.

5. Spezielle Differentialgleichungen. Ein Typus von Differentialgleichungen, auf den man immer wieder stößt, ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \sum a_i \cos \alpha_i t.$$

Wenn $\alpha_i \neq n$, so enthält die Lösung nur trigonometrische Funktionen der Zeit; wenn jedoch $\alpha_i = n$, so tritt t als Faktor dieser Funktionen auf. Da Terme dieser Form möglichst vermieden werden müssen, so ist es nötig, daß man auf die Gleichung zurückgeht, aus der der obige Typus hervorgegangen ist. In der Mondtheorie sind das Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = f(x, t),$$

wo f nach Potenzen von x entwickelbar ist und t nur in periodischen Gliedern enthält. Die wichtigsten speziellen Typen, auf die man dabei

10) Die gestrichenen Größen sind Ableitungen nach der Zeit, nicht Sonnenkoordinaten.

11) Paris Bull. astr. Nr. 17 (1900), p. 167 ff.

12) *E. W. Brown*, Amer. Math. Trans. 4 (1903), p. 333—350.

geführt wird, sind die folgenden:

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(n^2 + \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i \cos 2it\right) = 0$ (*Gyldén-Lindstedt*sche Gleichung).

Clairaut[13]) hat zuerst, und zwar auf indirektem Wege, versucht, dieser Gleichung durch rein trigonometrische Funktionen von t zu genügen, wobei Argumente t, $qt + \beta$ auftreten; *D'Alembert*[14]) erreichte das in seinen Untersuchungen direkt. Unsere Gleichung a) ist ein spezieller Fall der linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten (II 2, 7), und ihre Lösung in der Himmelsmechanik hängt eng zusammen mit der von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = a_0 + a_1x + \cdots.^{15})$$

Die Lösung kann im allgemeinen in der Form ausgedrückt werden

$$x = b \sum_{i=0}^{i=\infty} \alpha_i \cos(qt + \beta + 2it),$$

wo die α_i und q allein von n und den a_i abhängen, und b und β Integrationskonstanten sind. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, eine rasch konvergierende Reihe für q zu finden. Das letztere Problem ist zuerst von *G. W. Hill*[16]) und *J. C. Adams*[17]) gelöst, welche die obige Lösung formell in die Differentialgleichung einsetzen und (q ist stets verschieden von einer ganzen Zahl vorausgesetzt), indem sie die Koeffizienten der einzelnen periodischen Terme gleich null setzen, ein System unendlich vieler linearer Gleichungen[18]) mit ebenso unendlich vielen Unbekannten erhalten; damit diese linearen Gleichungen ohne konstantes Glied miteinander verträglich seien, muß die Determinante der Koeffizienten der α_i verschwinden, welche also ebenfalls unendlich viele Zeilen und Kolonnen enthält; dadurch wird eine Bedingung für die Unbekannte q geliefert. Durch Ausnutzung der

13) *Clairaut*, Théorie de la Lune, St. Petersburg 1765.

14) Opuscules, Paris 1768, Bd. 5, p. 328—390.

15) Die Gleichung ist von *Lagrange* auf drei verschiedenen Wegen durch Annäherungsmethoden integriert. Oeuvres 1, p. 476, 554—66. Siehe ferner *Cauchy*, Oeuvres ser. 5, p. 264 und *R. Radau*, Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 481—487.

16) Motion of the Perigee, Cambridge U. S. A. 1877 = Acta math. 8 (1886), p. 1—36. = Works 1, p. 243—270.

17) Motion of the node, Lond. Astr. Soc. Monthly not., Nr. 38 (1877), p. 43—49. = Coll. works 1, p. 181—188, 2, p. 85—103. Andere Methoden gibt er in Coll. works 2, p. 64—67, 132—135.

18) *Poincaré* bemerkt, daß man sie besser als Ungleichungen wie als Gleichungen ansehen sollte, Bull. soc. math. 14 (1886), p. 77—90.

Eigenschaften dieser Determinante gelingt es, q zu isolieren und

$$\frac{\sin^2 q\frac{\pi}{2}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2}}$$

durch eine andere unendliche Determinante auszudrücken, die schließlich in eine Reihe entwickelt wird; die Konvergenz derselben hat *Poincare* bewiesen.[19]) *Gyldén*[20]) führt, indem er unter der Voraussetzung, daß die a_i sehr klein sind, gewisse Termen wegläßt, unsere Gleichung a) auf die *Lamé*sche Differentialgleichung zurück (II 1, 10) und integriert durch elliptische Funktionen. Er hat in ähnlicher Weise auch die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(1 + \psi_1) = \psi_0,$$

wo ψ_1 und ψ_0 periodische Funktionen von t mit verschiedener Periode sind, behandelt[21]) und ebenso auch

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \beta_0 x + \beta_1 x^3.$$[22])

Lindstedt[23]) findet q, im Falle, daß $a_i = 0$ für $i > 1$, durch Kettenbrüche, die auf eine Reihe ähnlich der *Hill*s zurückgeführt werden können; damit sind dann auch die Koeffizienten der periodischen Terme gefunden. Auch die allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \psi_0 + \psi_1 x + \cdots,$$

wo die ψ periodische Funktionen sind, gelingt es *Lindstedt* zu integrieren. *Poincaré*[24]) hat die *Lindstedt*schen Methoden in der *Jacobi*schen Form dargestellt und außerdem noch auf eine andere Weise, wodurch er sie von einer Einschränkung befreit.[25]) Eine Diskussion zwischen *Lindstedt*[26]), *Gyldén*[27]) und *Backlund*[28]) klärte gewisse Schwierigkeiten, die sich in *Gyldén*s Abhandlung finden, auf.

19) Paris Bull astr. 17 (1900), p. 134. Mécanique céleste, chap. 17. Über allgemeine Eigenschaften unendlicher Determinanten siehe I A 2 u. 3.

20) Stockholm Acad. Bih. 6 (1881), Astr. Ges. Vjs. 16 (1881), p. 296—304.

21) Paris C. R. 93 (1881), p. 127—131.

22) Ib. p. 537—538; 122 (1896), 160—165, 585—588. Siehe auch 92 (1881), p. 1033—1038.

23) St. Pét. mém., sér. 7, 1 (1883) Nr. 4, p. 1—20; *Tisserand,* Mécanique céleste 3, chap. 1.

24) Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 57—61.

25) Paris C. R. 108 (1889), p. 21—24.

26) Astr. Nachr. 103 (1882), p. 211—220, 257—268; 104 (1883), p. 145—150.

27) Ib. 103 (1882), p. 321—324.

28) Ib. 103 (1882), p. 323—326.

Beweise für die Existenz der Lösungen unserer Differentialgleichungen hat *Lindstedt*[29]) unter Benutzung der gewöhnlichen Methoden fortgesetzter Annäherungen geliefert. Einige Lücken in der Strenge seiner Beweisführung hat *Bruns*[30]) ausgefüllt und zugleich Reihenentwicklungen der Lösung gegeben. *O. Callandrean*[31]) macht sich die Resultate der Theorie der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten zunutze und gelangt dadurch zu einem kurzen und strengen Existenzbeweis, der außerdem auf eine elegante Form des Ausdrucks zur Bestimmung von q führt.[32]) Eine sehr allgemeine Behandlung von Gleichungen dieses Typus geben *Moulton* und *MacMillan*[33])

b)
$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n'\frac{dy}{dt} + Lx + L'y = R,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n'\frac{dx}{dt} + L'x + L''y = R',$$

wo

$$\begin{matrix} L, L'' \\ L' \end{matrix} = \sum_i \begin{matrix} q_i, q_i'' \cos \\ q_i' \sin \end{matrix} 2i\tau, \quad \begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} = \sum \begin{matrix} r_\varkappa \cos \\ r'_\varkappa \sin \end{matrix} \varkappa\tau, \quad \tau = (n - n')(t - t_0).$$

Im Falle $R = R' = 0$ führt *Hill*[16]) diese Differentialgleichung auf den Typus a) zurück, indem er ein bekanntes partikuläres Integral benutzt, und findet:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \sum_i \begin{matrix} p_i \cos \\ p_i \sin \end{matrix} \{(2i + q)\tau + t_1\}.$$

Die Lösung für R und $R' \neq 0$ hat *E. W. Brown* in einer Form, in der nur Quadraturen vorkommen, gegeben.[34]) Mit den Bezeichnungen von Nr. 4c) gehen nämlich die obigen Gleichungen über in:

$$(D + m)^2 u + Mu + Ns = A; \quad (D - m)^2 s + Ms + \bar{N}u = \bar{A},$$

wo A die Form $\sum_k R_k \xi^k$ hat, M und N von der Form $\sum_i Q_i \xi^{2i}$ und $\bar{N}$ und $\bar{A}$ zu N und A konjugiert sind; $(D \pm m)^2 \begin{matrix} u \\ s \end{matrix}$ sind Symbole

29) Ib. 105 (1883), p. 97—112.

30) Ib. 106 (1883), p. 193—204; 107 (1883), p. 129—132.

31) Ib. 107 (1884), p. 33—38; *Tisserand,* Mécanique céleste 3, chap. 1.

32) Andere Arbeiten stammen von *P. Harzer,* Astr. Nachr. 118 (1888), p. 273—280; 119 (1888), p. 273—294, welcher *Bruns* Methode auf *Gyldéns* Rechnungen zum Zwecke numerischer Resultate ausdehnte und eine analytische Entwicklung in schnell konvergierende Reihen für jede Zahl von Perioden gab; *Andoyer,* Fac. Toul. Ann. 1 (1887), M p. 1—72. Siehe auch *Poincaré,* Mécanique céleste chap. 17.

33) Amer. Journ. Math. 33 (1911), p. 63—96.

34) Cambridge Phil. mem. 18 (1900), p. 94—106. Das Resultat ist schon mitgeteilt London Astr. Soc. Mem. 53 (1899), p. 167.

für $D^2 \begin{matrix} u \\ s \end{matrix} \pm 2mD \begin{matrix} u \\ s \end{matrix} + m^2 \begin{matrix} u \\ s \end{matrix}$. Es seien nun

$$u = u_i, \quad s = s_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

vier linear unabhängige Integrale der obigen Gleichungen im homogenen Fall, $f = C$ ein gewisses erstes Integral derselben; alsdann zeigt *Brown*, daß die allgemeine Lösung der nichthomogenen Gleichung die Form annimmt:

$$Cu = \sum_i \{u_i D^{-1}(s_{i+1} A + u_{i+1} \bar{A}) - u_{i+1} D^{-1}(s_i A + u_i \bar{A})\} \quad i = 1, 3.$$

Poincaré[35]) hat die Methode auf $2n$ Variable ausgedehnt; die Form der Lösung bleibt dabei die gleiche, nur geht i von 1 bis $2n - 1$

c)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(1 + a_2 x^2 + \cdots) \sin y; \\ x \dfrac{dy}{dt} = x(b_0 + b_2 x^2 + \cdots) + a(1 + c_2 x^2 + \cdots) \cos y. \end{cases}$$

Dabei sei x eine kleine Größe.[36]) Um Entwicklungen nach negativen Potenzen von x zu vermeiden, setzt man

$$\xi = x \cos y, \quad \eta = x \sin y$$

und findet damit

$$\frac{d\xi}{dt} = -\eta b_0 + \varphi(\xi, \eta); \quad \frac{d\eta}{dt} = a + \xi b_0 + \psi(\xi, \eta),$$

wo φ und ψ Potenzreihen nach ξ und η sind, die mit den zweiten Potenzen beginnen. Die Lösung erfolgt durch fortgesetzte Annäherungen.

6. Die Formen der Ausdrücke für die Koordinaten. Die Kräftefunktion F ist entwickelbar nach Potenzen von e' und $\frac{1}{a'}$ und enthält, wenn bewegliche Koordinatenachsen benutzt werden, t explizit nur in der Form $\cos kl'$; die Koeffizienten von $\left(\frac{1}{a'}\right)^p$ sind homogene Funktionen von x, y, z vom Grade $p - 2$, und der Koeffizient von $\cos kl'$ hat außerdem $e'^{|k|}$ (Nr. 3) als Faktor. Wenn $e' = \frac{1}{a'} = 0$, so reduzieren sich die Differentialgleichungen auf die *Hills* (Nr. 4c) mit $\Omega_p = z = 0$), der gezeigt hat[37]), daß sie das folgende partikuläre Integral besitzen:

$$\alpha) \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = a \sum a_i \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (2i + 1)D, \quad D = nt + \varepsilon - n't - \varepsilon'; \quad i = 0, \pm 1 \ldots,$$

35) Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 96—104.

36) *C. Delaunay*, Paris Inst. (math.) mém. 28 (1860), p. 106—110. Conn. des temps pour 1861, Add. p. 3—44. *F. Tisserand*, Paris Bull. astr. 7 (1890), p. 265—271.

37) Amer. Journ. Math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260.

wo n und ε willkürliche Konstanten sind, $a^3n^2 = E + M = \mu$ ist, und die a_i nach Potenzen von $m = \frac{n'}{n - n'}$ entwickelt sind. Er hat ferner gezeigt[38]), daß eine erste Annäherung der allgemeinen Lösung durch einen Ausdruck der folgenden Gestalt gegeben ist:

$$\alpha) \quad + a \sum A_i e^{\left|\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right.} \{l + (2i+1)D\},$$

wo $l = cnt + \varepsilon - \varpi$ ist, e und ϖ willkürliche Konstanten und c und A_i Potenzreihen nach m sind. Es folgt hieraus, daß die allgemeine Lösung der *Hill*schen Gleichungen von folgender Form ist:

$$a \sum_{i,j} A_{i,j} e^{|j|} \left|\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right. \{jl + (2i+1)D\} \qquad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

wo $A_{i,j}$ und c nach Potenzen von m und e^2 entwickelt sind. Nimmt man jetzt die Terme hinzu, die auftreten, wenn $e' \neq 0$ und $\frac{1}{a'} \neq 0$, so zeigt die Methode der fortgesetzten Annäherungen, daß die Argumente den Typus $jl + (i+1)D + kl'$ und die Koeffizienten den Typus $aA_{i,j,k} e^{|j|} e'^{|k|} \left(\frac{a}{a'}\right)^{|i'|}$ bekommen, wo die A und c nach Potenzen von m, e^2, e'^2, $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$ entwickelt sind, und $i - i' \equiv 0$, mod 2 ist. Gehen wir weiter zu z, so nimmt die Differentialgleichung für diese Koordinate für $e' = \frac{1}{a'} = 0$, falls man nur die erste Potenz von z berücksichtigt, die Form Nr. 5 a) an, und man findet $z = a\gamma \sum_i A_i \sin(F + 2iD)$, wo $F = gnt + \varepsilon - \vartheta$; dabei sind γ und ϑ Integrationskonstanten — die erstere im Falle des Mondes klein von der Ordnung der Bahnneigung — und A_i und g wiederum Potenzreihen von m. Fährt man so fort, so findet man als allgemeine Ausdrücke für die Koordinaten, bezogen auf ein System, dessen x-Achse nach dem mittleren Sonnenort gerichtet ist, die folgenden:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = a \sum_{i,j,k,p} A_{i,j,k,2p} e^{|j|} e'^{|k|} \left(\frac{a}{a'}\right)^{|i'|} \gamma^{|2p|} \left|\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right. \{(i+1)D + jl + kl' + 2pF\},$$

$$z = a \sum_{i,j,k,p} A_{i,j,k,2p+1} e^{|j|} e'^{|k|} \left(\frac{a}{a'}\right)^{|i'|} \gamma^{|2p+1|} \sin\{iD + jl + kl' + (2p+1)F\},$$

$$l = cnt + \varepsilon - \varpi, \quad F = gnt + \varepsilon - \vartheta, \quad D = nt + c - n't - \varepsilon'$$

$$i, j, k, i', p = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots; \quad i - i' \equiv 0 \text{ mod } 2;$$

$$c, g, A \text{ Potenzreihen von } m, e^2, e'^2, \left(\frac{a}{a'}\right)^2, \gamma^2.$$

Wenn $m = e' = \frac{1}{a'} = 0$ ist, so reduzieren sich die Differentialgleichungen auf die der elliptischen Bewegung, und c und g werden

38) Acta math. 8 (1886), p. 1—36.

$= 1$; e und γ sind Exzentrizität und Sinus der Bahnneigung. Da n' in R als Faktor auftritt (Nr. 3), so müßte der Wert $m = 0$ die Resultate auf die der elliptischen Bewegung reduzieren; daß dies scheinbar nicht der Fall ist[39]), rührt von einer etwas anderen Auffassung der Integrationskonstanten her.[40]) Es muß nun noch die Annahme, daß nur positive Potenzen der Parameter auftreten, als richtig erwiesen werden. Negative Potenzen können nur durch die Integrationsdivisoren auftreten. Alle diese Divisoren haben die Form $i + i'm + i''\pi_1 + i'''\vartheta_1$, wo $\pi_1 = 1 - \frac{c}{1+m}$ und $\vartheta_1 = 1 - \frac{g}{1+m}$ die mittleren Bewegungen der Apsiden- bzw. Knotenlinie sind. Nun sind aber die Terme niedrigster Ordnung in π_1 und ϑ_1:

$$\pi_1 = m^2\left(\frac{3}{4} + \frac{225}{32}m + \cdots\right); \quad \vartheta_1 = m^2\left(-\frac{3}{4} + \frac{9}{32}m + \cdots\right).$$

Es können also Divisoren von der Ordnung m^3 nur auftreten im Falle $i = i' = 0$, $i'' = i'''$. Daß die Divisoren der Ordnung m^2 keine negativen Potenzen von m in die Koeffizienten einführen, geht daraus hervor, daß R bei der Methode der Variation der Konstanten (Nr. **10**) m^2 als Faktor enthält. Der Fall der Divisoren von der Ordnung m^3 ist nicht vollständig untersucht, indes enthält die elliptische Entwicklung der Störungsfunktion (Nr. 9) keine derartigen Glieder, so daß die zweite Annäherung jedenfalls nicht zu negativen Potenzen von m Anlaß gibt.

Die Charakteristik[41]) der niedrigsten Ordnung, in der dieser Divisor auftreten kann, ist $e\gamma^2 e'^4$.[42])

Eine Methode, den Genauigkeitsverlust durch kleine Divisoren zu

---

39) Siehe z. B. die Schlußausdrücke von *Delaunay,* Theorie du Mouvement de la Lune, chap. 11.

40) *Gogou,* Obs. d. Paris ann. mém. 18 (1885) E; *P. H. Cowell,* Lond. Astr. Soc. Monthly not. 56 (1895), p. 3—11.

41) Diese Bezeichnung ist von *E. W. Brown* eingeführt, Lond. Astr. Soc. Mem. 53 (1897), p. 61 und bedeutet den nur von e, e', γ, $\frac{a}{a'}$ abhängigen Faktor eines Koeffizienten. Die Ordnung der Charakteristik des oben gegebenen allgemeinen Koeffizienten von x ist $|j| + |k| + |i| + |2p|$.

42) Über diese Frage und die langperiodischen Sonnenglieder siehe *Laplace,* Méc. cél. 7, Nr. 5. *J. W. Lubbock,* Lond. Phil. Trans. 1834, p. 123—126, Philos. Mag. 17 (1840), p. 338—346; *S. D. Poisson,* Par. Mém. prés. 13 (1835), p. 209—335, Paris C. R. 4 (1837), p. 475—486; *de Pontécoulant,* Paris C. R. 4 (1837), p. 280—291; *V. Puiseux,* Paris école normale sup., série 1, 1 (1864), p. 39—80; *Poincaré,* Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 289—310; *E. W. Brown,* Amer. Journ. math. 17 (1895), p. 356—358, Amer. math. Trans. 3 (1902), p. 159—185.

vermeiden, hat *Brown* gegeben.[43]) *Poincaré*[44]) zeigt, daß bei hinreichender Fortsetzung der Näherungen negative Potenzen von m auftreten. Er unterscheidet diesen Fall von demjenigen, in welchem sehr kleine numerische Divisoren für bestimmte Werte der Konstanten auftreten können.

Alle andern Darstellungen als Summen von harmonischen Gliedern lassen sich leicht aus den obigen ableiten. Für Polarkoordinaten wird die wahre Länge $= nt + \varepsilon +$ Glieder wie die in y, nur daß in den Winkeln iD statt $(i + 1)D$ steht; der Radiusvektor oder die Parallaxe wird wie x mit derselben Änderung in den Winkeln; die Breite wird wie z. *Hansens* Ausdrücke (Nr. **17**) enthalten Terme der Form sin oder cos ($l +$ harmonische Glieder), welche, da die harmonischen Glieder kleine Koeffizienten haben, in Ausdrücke der obigen Art entwickelt werden können.

7. Konvergenz und Divergenz. Die nach Potenzen von m angeordneten Entwickelungen sind wahrscheinlich divergent.[45]) Das hindert aber nicht, daß sie zur Berechnung benutzt werden können, da *Poincaré* gezeigt hat[46]), daß divergente Reihen dazu benutzt werden können, Funktionen bis zu einem beschränkten Grade der Genauigkeit zu berechnen — die übrigens im Falle des Mondproblems jedenfalls größer ist, als es für die Vergleichung mit der Beobachtung erforderlich ist.

Wenn man mit rein numerischen Werten der Parameter operiert und die Reihen nach Vielfachen der Argumente anordnet, liegt die Schranke für die erreichbare Genauigkeit noch höher. Für praktische Zwecke handelt es sich wesentlich um die Frage einer langsamen oder schnellen „numerischen" Konvergenz der ersten Glieder der Reihen. Eine schlechte Konvergenz tritt hauptsächlich bei der grundsätzlichen Entwicklung nach Potenzen von m ein; denn, obgleich $m = 0{,}07$ ist, bewirken große numerische Faktoren, daß die Reihen (nach m) in einigen Koeffizienten nur etwa in demselben Verhältnis konvergieren wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 0,5. Die Methode von *Hill-Brown* (Nr. **16**) und *Brendel* (Nr. **18**) läßt diese Schwierigkeit so ziemlich verschwinden, indem hier Annäherungen nur nach den andern Parametern (e, γ, usw.), nicht nach m gemacht werden, für welches vielmehr von vornherein sein numerischer Wert benutzt wird.

43) Amer. Math. Trans. 3 (1902), p. 159—185.

44) Paris Bull. astr. 25 (1908) p. 321—360.

45) *Poincaré,* Méc. cél. 2, chap. 14.

46) Ib. chap. 8. Siehe auch *E. Borel,* Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901.

Gewisse Gruppen von Gliedern für sich genommen sind konvergent. So bekanntlich die von der Elliptizität der Bahn herrührenden für $e < 0{,}6627432$.[47]) Ferner *Hills* periodische Bahn (Nr. **16**) in dem Falle, den unser Mond tatsächlich darbietet[48]); dann die Terme, die nur von m und den ersten Potenzen von e oder γ abhängen[49]); endlich auch für eine aus Gliedern einer bestimmten Charakteristik gebildeten Reihe, wenn man den numerischen Wert von m benutzt und nach Vielfachen des Argumentes $2D$ anordnet.[50]) Eng verknüpft mit der Frage der Konvergenz ist die nach der Stabilität des Systems, die hauptsächlich von der oberen und unteren Grenze für den Radiusvektor des Mondes abhängt (*Hills*che Grenzkurve.[51]))

8. **Intermediäre Bahnen.** Wenn man die analytische Form der Koordinaten kennt, so könnte man die A, c, g (Seite 682) mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten finden; aber die Kompliziertheit der Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten macht diesen Weg praktisch ungangbar, man muß vielmehr die Arbeit in verschiedene Schritte teilen.

Der erste Schritt führt zur sogenannten intermediären Bahn.[52]) Die meisten älteren Untersuchungen benutzen als solche die ungestörte Ellipse; durch Einsetzen der aus ihre folgenden Koordinatenwerte in die Störungsfunktion erhalten sie eine zweite Annäherung, damit eine dritte usf. Die Ellipse wurde dann dadurch modifiziert, daß man $cnt + \varepsilon - \varpi$ statt $nt + \varepsilon - \varpi$ und $gnt + \varepsilon - \vartheta$ statt $nt + \varepsilon - \vartheta$ einführte, wo c und g durch die Bedingung bestimmt werden, daß für jede Annäherung die der Zeit proportionalen Terme verschwinden. Die Annäherungen schreiten so nach Potenzen der störenden Kräfte fort. Von den moderneren Theorien benutzt *Hansen* (Nr. **19**) eine in der momentanen, *Oppolzer* eine in der mittleren Bahn-

47) *Laplace,* Par. Mém. prés., ser. 2, 6 (1823), p. 61—80.

48) *Liapunoff,* Mosk. Phys. Soc. 8 (1896); *H. Happel,* Diss. Göttingen 1901.

49) *Poincaré,* Paris Bull. astr. 17 (1900), p. 87—96.

50) *E. W. Brown,* Cambr. Phil. Trans. 18 (1900), p. 94.

51) Siehe *Hill,* Researches in the Lunar theory, Amer. Journ. Math. 1 (1877); *Happel,* a. a. O.

52) Die Bezeichnung stammt von *Gyldén*; ihre Bedeutung ist nicht streng definiert, hat aber den Sinn, daß die intermediäre Bahn in gewissem Sinne in der Mitte zwischen der Ellipse und der wahren Bahnkurve liegt: Stock. Acad. Bib. 6 (1881), Nr. 8; Paris C. R. 92 (1881), p. 1262—1265; Astr. Nachr. 100 (1881), p. 97—102; Astr. Ges. Vjs. 16 (1881), p. 296—304. Die Bezeichnungen im Text, die nicht ganz mit denen *Gyldéns* übereinstimmen, werden jetzt vielfach gebraucht. Betreffs einer Erweiterung der Bezeichnung siehe *Thiele,* Astr. Nachr. 102 (1882), p. 65—70.

ebene bewegliche Ellipse; *Delaunay* (Nr. **15**) eine feste unter dem mittleren Winkel gegen eine feste Ekliptik geneigte Ellipse; *Hill* (Nr. **16**) eine periodische Kurve, die nur von dem Parameter m abhängt. *Gyldén* (Nr. **18**) schließt in F eine Anzahl von Termen ein, die dazu dienen, den Hauptgliedern in den Koeffizienten der größten Störungen von vornherein Rechnung zu tragen. *Hill*[53]) hat vorgeschlagen, F auf die Terme $\frac{u}{r} + \frac{1}{2}k(x^2+y^2) + \frac{1}{2}k'z^2$ zu beschränken, wo k und k' Konstanten sind, die so bestimmt werden müssen, daß die mittleren Bewegungen der Apsiden- und der Knotenlinie ihre beobachteten Werte haben. Die Bewegungsgleichungen reduzieren sich damit auf die folgenden:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + \alpha u^{-3} - k(1+s^2)^{-\frac{3}{2}} = 0; \quad \frac{d^2s}{dv^2} + s + \beta s u^{-4} = 0,$$

wo $u = \frac{1}{r}$, $v =$ der wahren Länge, $s =$ tang der Breite; α und β sind gewisse kleine Konstanten, die von k, k' und gegebenen Parametern abhängen.

Die Lösung bewirkt er, indem er zunächst s vernachlässigt, für die erste Gleichung durch elliptische Integrale[54]) oder fortgesetzte Näherungen; dann folgen Annäherungen nach Potenzen von s. Man findet dann u und s als Reihen, die nach Vielfachen der Argumente $c'v + \tau_0$ und $g'v + g_0$ fortschreiten, und t aus einer Gleichung ähnlich der dritten von b) in Nr. **4**. *Perchot*[55]) schlägt vor, von *Delaunays* Gleichungen (Nr. **15**) auszugehen, und wendet, unter der Annahme, daß die mittleren Bewegungen von Perigäum und Knoten kommensurable Werte haben, die sehr nahe mit ihren tatsächlichen Werten übereinstimmen, *Poincarés*[56]) Theorie der periodischen Lösungen an. Die so erhaltene intermediäre periodische Bahn ist frei von dem Mangel, daß Apsiden- und Knotenlinie festliegen. Die Lösung wird durch die Methode von *Poincare* gefunden (Nr. **15**), die in einer Modifizierung der *Delaunay*schen besteht.

Diese speziellen Methoden geben im allgemeinen gute Annäherungen für die großen Glieder und sind in theoretischer Beziehung nützlich, ihr Wert für die Entwicklung einer vollständigen Mondtheorie ist aber bisher noch nicht erwiesen. Weitere Methoden, inter-

53) Astron. Journ. 18 (1897), p. 81—87. = Works 4, p. 136—149.

54) Eine Ableitung dieser Formeln nach *Jacobis* Methode ist von *A. W. Krassnow*, Astr. Nachr. 146 (1898), p. 7—10 337—340, gegeben.

55) Par. Ec. norm. sup., ser. 3 10 (1893) S, p. 3—94.

56) Méc. cél., chap. 3.

mediäre Bahnen abzuleiten, sind von *R. Radau* studiert worden.[57]) *Brendel* (Nr. 18) schließt die Terme, die von m, $\frac{a}{a'}$, $\frac{M}{E}$ abhängen, in seine intermediäre periodische Bahn ein.

9. Die Entwicklung der Störungsfunktion. Mit den Bezeichnungen von Nr. 3 und 4 hat man $\cos\vartheta = (1+s^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(v-v')$, wo v' die wahre Länge der Sonne ist. Entwickelt man danach die P_j nach Potenzen von s, dann ist R eine Funktion von

$$r,\ r',\ r\cos v,\ r\sin v,\ r'\cos v',\ r'\sin v',\ s.$$

Führt man, wie es in einigen Theorien geschieht, die elliptischen Werte für die Koordinaten ein[58]), so finden wir:

$$R = n'^2a^2\sum(1-\lambda)\varkappa_j B e^{i_1}e'^{i_2}\gamma^{2i_2}\alpha^{i_4}\cos N;$$

hier ist

$$\alpha = \frac{a}{a'},$$

$$N = j_1(nt+\varepsilon-\varpi)+j_2(n't+\varepsilon'-\varpi')+2j_3(nt+\varepsilon-\vartheta)+j_4\xi,$$

B ein Quotient von 2 ganzen Zahlen;

und weiterhin gilt:

$$\xi = nt+\varepsilon-n't-\varepsilon',$$

$$j_1, j_2, j_3, j_4 = 0, \pm 1, \pm 2\ldots,$$

$$i_1,\ i_2,\ 2i_3,\ i_4 - j_4 \equiv \text{und} > |j_1|,\ |j_2|,\ |2j_3|,\ 0 \bmod 2.$$

Die Derivierten von R erhält man so:

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = \alpha\frac{\partial R}{\partial\alpha}+2R;\quad \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial\xi}.$$

Dagegen muß $\frac{\partial R}{\partial s}$ aus der Entwicklung in der Form, die sie vor Einsetzen der elliptischen Werte hat, gewonnen werden. Wird v als unabhängige Veränderliche benutzt, so müssen für r und s deren elliptische Ausdrücke durch v eingeführt werden, ferner muß in r' und v' die Zeit durch ihren elliptischen Ausdruck als Funktion der wahren Länge v ersetzt werden. Die Entwicklungen, die für spezielle Methoden gelten, werden im einzelnen bei der Darlegung jener Methoden angegeben. Die höheren Annäherungen in R können durch das *Taylor*sche Theorem erhalten werden, wenn man die entsprechende Annäherung für die Koordinaten gefunden hat.

---

57) Paris Bull. astr. 9 (1892), p. 321—340.

58) Tafeln zu diesem Zweck hat *A. Cayley*, aufgestellt, Lond. Astr. Soc. Mem. 29 (1861), p. 191—306. = Coll. Works 3, p. 360—474.

10. Die Variation der Konstanten.[59]) Die Lösung der Bewegungsgleichungen für die elliptische Bewegung ist die gleiche wie in der Planetentheorie (VI 2, 14), und *Lagranges* Gleichungen für die Variation der Elemente a, e, γ, ε, $\bar{\omega}$, ϑ behalten also dieselbe Gestalt.

Die *Jacobi*sche kanonische Grundform des Problems ist

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \beta_i}; \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} \qquad i = 1, 2, 3,$$

wo sich die kanonischen Elemente durch die elliptischen folgendermaßen ausdrücken:

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon - \bar{\omega}}{n}, \quad \alpha_2 = \bar{\omega} - \vartheta, \qquad \alpha_3 = \vartheta,$$

$$\beta_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \beta_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad \beta_3 = \beta_2 \cos\gamma.$$

Für $R = 0$, also $\alpha_i = \text{const.}$, $\beta_i = \text{const.}$ ergibt sich natürlich die elliptische Bewegung. Man hat noch andere Formen der kanonischen Differentialgleichungen vorgeschlagen, deren jede ihre besonderen Vorzüge hat. Jede Berührungstransformation der 6 Variabeln (Enzyklop. IV 2), verbunden mit einer entsprechenden Änderung der charakteristischen Funktion, erhält ja die kanonische Form der Differentialgleichungen. Die meistbenutzten anderen Formen sind:

a) *Delaunays*[60]) Form, die das Auftreten der Zeit außerhalb des Arguments auf der rechten Seite der Gleichungen vermeidet. Man setze dazu:

$$L = \sqrt{\mu a};\ G = \beta_2;\ H = \beta_3;\ l = n(t+\alpha_1);\ g = \alpha_2;\ h = \alpha_3;\ R = \frac{\mu^2}{2L^2} + R_1,$$

dann ist

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = \left(\frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial}{\partial g}, \frac{\partial}{\partial h}\right) R_1; \quad \frac{d}{dt}(l, g, h) = -\left(\frac{\partial}{\partial L}, \frac{\partial}{\partial G}, \frac{\partial}{\partial H}\right) R_1.$$

Hier ist jetzt R_1 periodisch mit der Periode 2π in bezug auf l, g, h, l', und die Koeffizienten der periodischen Terme sind Funktionen von L, G, H und den festen Konstanten.

b) Die modifizierte *Delaunays*che Form erhält man, indem man setzt:

$$p_1 = L,\ p_2 = G - L,\ p_3 = H - G;\ q_1 = l + g + h,\ q_2 = g + h,\ q_3 = h.$$

Dabei sind p_2 und p_3 von den Ordnungen e^2 und γ^2, und q_1 ist die mittlere Länge, q_2 die Länge des Perihels, q_3 die des Knotens.

---

59) Die Literatur hierüber ist sehr umfangreich. Der Gegenstand ist unter eingehender Literaturangabe behandelt von: *Tisserand,* Méc. cél. 1 und 3; *Dziobek,* Theorie der Planetenbewegungen, Leipzig 1888; *Brown,* Treatise; *Charlier,* Mech. des Himmels 1 (1902), Abschn. 5. Siehe auch die reports von *A. Cayley,* Brit. Ass. 1857, 1862 u. *E. T. Whittaker,* ib. 1899. ferner Encycl. IV 2.

60) Théorie du mouvement de la Lune, chap. 1.

c) *Poincarés*[61]) Transformation. Man setze

$$p_1' = p_1,\ q_1' = q_1,\ -\frac{p_2'}{q_2'} = \sqrt{2(L-G)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\varpi,\ -\frac{p_3'}{q_3'} = \sqrt{2(G-H)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\vartheta,$$

dann ist R entwickelbar nach Potenzen von p_2', q_2', p_3', q_3', e', $\frac{1}{a'}$ und ist mit 2π periodisch in q_1' und l'. Wenn man nun mit dieser Transformation noch den Gedanken (Nr. 4 d) kombiniert, zwei neue Variable p_4', q_4' mit der entsprechenden Änderung in R_1 einzuführen, so erreicht man, daß R_1 allein in q_1' periodisch und nach den übrigen kanonischen Koordinaten p_i', q_i' $(i = 2, 3, 4)$ entwickelbar wird; es ergibt sich aber dann natürlich ein System von vier Paaren kanonischer Differentialgleichungen.

d) *Hansens*[62]) Transformation auf „Pseudoelemente" λ derart, daß

$$d\lambda = \sum^i (A_i dp_i + B_i dq_i)$$

kein vollständiges Differential ist. Diese kann in gewissen Fällen, wo R die λ nicht explizit enthält, nützlich sein (Nr. **17**).

e) *Browns*[63]) Transformation auf das nicht kanonische System n, p_2, p_3, q, q_2, q_3 wird ausgiebig bei der Bestimmung planetarischer und anderer Störungen gebraucht (Nr. **19—24**).

11. Verschiedene Eigenschaften der Lösung. Das erste kanonische System von Nr. **4** d) führt auf 6 willkürliche Konstanten α_i, β_i $^{(i=1,2,3)}$; hier kommen die β_i nur in Argumenten $\omega_i = b_i t + \beta_i$ vor, in denen die b_i Funktionen der α_i und fester Konstanten sind. Bezeichne jetzt f, g irgend zwei dieser Größen[64]); entweder aus dem Satze α_i, β_i oder α_i, ω_i so haben wir:

$$(f,g) = \left(\frac{dx'}{df}\frac{dx}{dg} - \frac{dx'}{dg}\frac{dx}{df}\right) + \left(\frac{dy'}{df}\frac{dy}{dg} - \frac{dy'}{dg}\frac{dy}{df}\right) + \left(\frac{dz'}{df}\frac{dz}{dg} - \frac{dz'}{dg}\frac{dz}{df}\right) = \text{const.}$$

$$[f,g] = \text{const.}$$

Hier sind x, y, z, x', y', z' als durch die willkürlichen Konstanten und t ausgedrückt zu denken. Die Symbole in runder und eckiger Klammer unterscheiden sich nur dadurch, daß entweder die α_i, β_i oder die α_i, ω_i

61) Méc. cél. 1, chap. 1.

62) J. f. Math. 42 (1850), p. 1—31; ferner *A. Cayley*, Lond. Astr. Soc. Mem. 27 (1859), p. 1—29 = Collected works 3, p. 270—292.

63) Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 241—242; ib. 5 (1904), p. 279—284; Lond. Astr. Soc. Mem. 59 (1908), p. 5—9.

64) Dies sind eigentlich neue Variable. Die f, g sind Konstante, wenn man sie aus dem Satz α_i, β_i wählt; die g hängen von der Zeit ab, wenn man den Satz α_i, ω_i wählt.

eingesetzt zu denken sind. Weiter ist nach Nr. 6:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = [a_i, \alpha_j] = [\omega_i, \omega_j] = 0$$
$$(\alpha_i, \beta_j) = [\alpha_i, \omega_j] = \frac{dc_j}{da_i}; \quad b_i = -\frac{dB}{dc_i} \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

wo c_j in B von den β_i unabhängige Konstanten sind. Die Systeme c_i, β_i und a_i, ω_i sind kanonisch; wir haben also:

$$(c_i, \beta_j) = [c_i, \omega_j] = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix},$$

je nachdem

$$\begin{matrix} i = j \\ i \neq j \end{matrix}$$

ist.[65])

Bezeichne ferner $[Q]$ den zeitlichen Mittelwert irgendeines Ausdruckes Q, also den konstanten Teil in der Entwicklung von Q in trigonometrische Reihen nach den von der Zeit abhängigen Argumenten. Dann lassen sich (Nr. 6) $\frac{\pi_1}{n}$, $\frac{\vartheta_1}{n}$, $\left[\frac{a}{r}\right]$ in Potenzreihen nach e^2 und γ^2 entwickeln, deren Koeffizienten ihrerseits Potenzreihen nach m, c'^2, $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$ sind. Wenn man $\frac{a}{a'}\left(\approx \frac{1}{400}\right)$ vernachlässigt, so sind, wie *J. C. Adams*[66]) gezeigt hat, die Koeffizienten von e^2 und γ^2 in $\left[\frac{a}{r}\right]$ gleich null; und ferner ist:

$$\frac{\text{Koeff. von } e^2}{\text{Koeff. von } \gamma^2} \text{ in } \frac{\pi_1}{n} = \frac{\text{Koeff. von } e^4}{\text{Koeff. von } 2e^2\gamma^2} \text{ in } \left[\frac{a}{r}\right];$$
$$\frac{\text{Koeff. von } e^2}{\text{Koeff. von } \gamma^2} \text{ in } \frac{\vartheta_1}{n} = \frac{\text{Koeff. von } 2e^2\gamma^2}{\text{Koeff. von } \gamma^4} \text{ in } \left[\frac{a}{r}\right].$$

E. W. Brown[67]) hat, indem er eine Formel zur Berechnung der Terme $2q^{\text{ter}}$ Ordnung in bezug auf e und γ in der Entwicklung von $\left[\frac{a}{r}\right]$ erhielt, diese Beziehungen erweitert und auf alle Potenzen von e^2 und γ^2 ausgedehnt. Er hat ferner bewiesen[68]), daß

$$\left[\frac{\mu}{r}\right] = B + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$$

ist, und daß diese Beziehung die Theoreme von *Adams* und deren Erweiterungen einschließt. Wir wählen in diesem Falle $\beta_1 = \varepsilon$, $\beta_2 = \varpi$, $\beta_3 = \vartheta$ so daß $b_1 = n$, $b_2 = \pi_1$, $b_3 = \vartheta_1$ werden. Mit den Resultaten von

65) Siehe hierfür *Poincaré*, Sur les équations du mouvement de la Lune, Paris Bull. astr. 17 (1900) p. 167 u. ff.

66) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1878). = Collected works 1, p. 189—204.

67) Investigations, Amer. Journ. Math. 17 (1895), p. 345—356.

68) London Math. Proc. 28 (1897), p. 143—155.

Adams hat sich auch *L. Picard*[69]) beschäftigt, der zu ihrem Beweise die Theorie der Integralinvarianten heranzieht. Eine weitere Reihe von Beziehungen, die gelten, wenn $\frac{a}{a'}$ nicht vernachlässigt wird, hat wiederum *E. W. Brown*[70]) erhalten:

$$(\alpha) \qquad c_i = \left[x' \frac{dx}{d\omega_i} + y' \frac{dy}{d\omega_i} + z' \frac{dz}{d\omega_i}\right],$$

$$(\beta) \qquad [T] + [F] = B + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{dB}{d\alpha} = \left[\frac{d'F}{d\alpha}\right]^{71}),$$

wobei α eine gegebene Konstante ist, die in F, aber nicht in dem Winkel $n't + \varepsilon'$ vorkommt und von n' unabhängig ist, und wo $\frac{d'F}{d\alpha}$ bedeuten soll, daß die Ableitung nach α nur soweit dasselbe in dem ursprünglichen Ausdruck für F explizit vorkommt, genommen werden soll. Ferner

$$T - F - n' C_4 = -B, \quad \text{wo} \quad \frac{dC_4}{dt} = -\frac{d'F}{d\varepsilon'}.^{72})$$

$$(\delta) \qquad \frac{dB}{dn'} - \left[\frac{\partial' F}{\partial n'}\right] = [C_4] = \left[x' \frac{dx}{d\varepsilon'} + y' \frac{dy}{d\varepsilon'} + z' \frac{dz}{d\varepsilon'}\right],$$

wo $\frac{\partial' F}{\partial n'}$ bedeutet, daß die Ableitung des ursprünglichen Ausdruckes von F nach dem explizit auftretenden n' ohne Rücksicht auf sein Vorkommen in $n't + \varepsilon'$ genommen werden soll.

Diese Relationen werden auf beliebige Funktionen der gegebenen Konstanten und von t in einer weiteren Arbeit[73]) ausgedehnt.

Brown[74]) gibt noch eine andere Schar von Beziehungen zwischen den Derivierten von Funktionen der Koordinaten nach den willkürlichen Größen. Insbesondere wird gezeigt, wie Derivierte nach n aus einer Theorie gefunden werden können, in der n numerisch benutzt ist, wenn nur die andern willkürlichen Größen unbestimmt gelassen sind. Es wird zunächst gezeigt für die Systeme b) und c) von Nr. **10** und dann[75]) für Rechnungszwecke erweitert auf die Konstanten e, k seiner Theorie (Nr. **16**).

---

69) Paris C. R. 131 (1900), p. 663—665.

70) Amer. Math. Trans. 4 (1903), p. 333—350.

71) Resultate, welche den (α) u. (β) entsprechen, hat *Newcomb* für das allgemeine 3-Körperproblem erhalten; Smiths. Contr. 21 (1876), Nr. 3.

72) Vgl. auch Nr. 4 d.

73) *E. W. Brown*, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), p. 332—343.

74) Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1903), p. 234—248.

75) Lond. Astr. Soc. Mem. 59 (1908), p. 10—13.

II. Die Lösungsmethoden.

12. Die geometrischen Methoden. Der erste, der die hauptsächlichsten Ungleichheiten der Mondbewegung aus dem Gravitationsgesetze herleitete, war *I. Newton* selbt[76]), der alle seine Ableitungen in eine geometrische Form goß; er erhielt die Koeffizienten der Ungleichheiten — abgesehen von der Evektion — ziemlich genau. Auch die mittleren Bewegungen der Apsiden- und Knotenlinie hat er bestimmt; jedoch ergab sich für erstere nur ungefähr die Hälfte des beobachteten Wertes; aus den Manuskripten[77]) scheint jedoch hervorzugehen, daß es ihm später gelungen ist, ihren Wert innerhalb 8% genau zu finden. Seine Methode ist im wesentlichen die Variation der Konstanten (Nr. **15**); sie ist von einigen späteren Autoren in analytische Form umgegossen worden.[78])

Die Hauptungleichheiten haben die folgenden Bezeichnungen erhalten:

die *elliptischen Ungleichheiten* sind die mit den Argumenten l, $2l$, $3l$ usw.;

die *jährliche Gleichung* ist die mit dem Argument l';

die *Variation* die mit dem Argument $2D$;

die *Evektion* die mit dem Argument $2D - l$;

die *parallaktische Ungleichung* ist der mit $\frac{a}{a'}$, multiplizierte Hauptteil des zum Argument D gehörigen Termes.

Die mittlere Bewegung der Apsidenlinie ist die auf die Zeiteinheit bezogene Veränderung des Argumentes $nt + \varepsilon - l$; die mittlere Bewegung der Knotenlinie jene des Argumentes $nt + \varepsilon - F$ (Nr. 6). Ursprünglich haben sich diese Namen auf den Gesamtbetrag gewisser beobachteter Ungleichförmigkeiten in der Mondbewegung bezogen; heute bezieht man sie lediglich auf die angeführten bestimmten Argumente; sie werden mit Vorteil vor allem bei geometrischen Ableitungen der Mondbewegung benutzt.[79])

13. Die wahre Länge als unabhängige Veränderliche. *Laplace*[80]) benutzt die modifizierte Ellipse (Nr. 8) als intermediäre Bahn und

---

76) Principia, 3. Buch.

77) Portsmouth Collect., Cambridge 1888.

78) *Laplace,* Méc. cél., liv. 16; *J. C. Adams,* Coll. Works 2, p. 227—232; *Tisserand,* Méc. cél. 3, chap. 3.

79) *J. Herschel,* Outlines of Astronomy, London 1883; *Airy,* Gravitation, London 1834; *Möbius,* Elemente der Mechanik des Himmels sect. 3, Leipzig 1843. = Gesammelte Werke 4.

80) Méc. cél. 3, liv. 7. In bezug auf *Laplaces* Methode siehe auch: *Airy,*

setzt die aus ihre folgenden Koordinatenausdrücke in R (Nr. 3), und dann dessen Ausdruck in die zwei ersten Gleichungen Nr. 4 b) ein. Seien u_0, s_0 die der modifizierten Ellipse entsprechenden und $u = u_0 + \delta u$; $s = s_0 + \delta s$ die gesuchten genauen Werte, so kennen wir (Nr. 6 mit v statt $nt + \varepsilon$) für δu und δs den formalen Ansatz als trigonometrische Reihe mit unbestimmten Koeffizienten; die durch das Einsetzen in die Differentialgleichungen sich ergebenden Bedingungsgleichungen bestimmen diese letzteren.

In δu treten zwei neue Integrationskonstanten in der Form $A \cos(cv + \alpha)$ auf; *Laplace* setzt $\alpha = -\varpi$, und für A einen Wert, so daß der formelle Ausdruck der hauptsächlichsten elliptischen Ungleichung in Länge ungeändert bleibt; c wird aus den Bedingungsgleichungen der anderen Terme dieses Arguments durch die Forderung bestimmt, daß v nicht außerhalb trigonometrischer Funktionen vorkommen soll. Der Hauptterm von δs ist von der gleichen Form; die Integrationskonstanten und g werden auf analoge Weise bestimmt. Wenn δu und δs als Funktionen von v erhalten sind, dann gibt die dritte Gleichung Nr. 4b) t als Funktion von v; die neu auftretenden Integrationskonstanten werden so gewählt, daß stets $nt + \varepsilon$ gleich dem unperiodischen Teil von v wird; nunmehr findet man durch Reihenumkehrung v, und damit endlich u und s als Funktionen von t. Sobald die Bedingungsgleichungen aufgestellt sind, setzt *Laplace*, abgesehen vom Koeffizienten des Hauptgliedes jeder Periode, die numerischen Werte ein (Nr. 6). Die so er haltenen Näherungswerte schließen die zweiten Potenzen der störenden Kraft, also die Quadrate und Produkte der δu und δs und, für gewisse Terme, bei denen kleine Divisoren auftreten, die dritten Potenzen ein.

Clairaut[81]) ist zunächst davon ausgegangen, in Nr. 4b) die Breite zu vernachlässigen, und hat dann die Lösung durch fortgesetzte Näherungen gesucht. Er führte zuerst die modifizierte elliptische Bahn in die Differentialgleichungen ein und veröffentlichte einen mit den Beobachtungen genügend nahe übereinstimmenden Wert für c; er hat seine Resultate auf numerischem Wege erlangt. *D'Alembert*[82]) befolgte eine ähnliche Methode, jedoch unter Benutzung analytischer Entwicklungen; er gab auch allgemeine Entwicklungen für die Koordinaten, welche allein periodische Glieder enthalten, und endlich erkannte er

---

Math. Tracts, Cambridge 1831; *Godfray*, Treatise, London 1871; *Résal*, Méc. cél., chap. 12, Paris 1884; *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 7.

81) Théorie de la Lune, St. Petersburg 1752, 1765.

82) Recherches, tome 1.

es auch als wichtig, sich mit der Konvergenz dieser Reihen zu beschäftigen.

Damoiseau[83]) und *Plana*[84]) sind der Methode *Laplaces* gefolgt, ersterer numerisch, letzterer analytisch, und zwar bis zu einem viel höheren Grade der Annäherung. *Plana* gelangte zu Entwicklungen, die bis zu den 5. Ordnungen in den Parametern gehen, aber es schlichen sich viele Irrtümer[85]) in seine Arbeit ein, die ihren Wert vermindern; sie wurde durch *Delaunays* Theorie vollständig in den Schatten gestellt (Nr. **15**). *Laplaces* Methode ist auch vielfach für spezielle Gruppen von Störungsgliedern angewandt, aber die Reihenumkehrung und die Darstellung von $\cos l'$, $\sin l'$ als Funktionen von v, welche bei ihr erforderlich sind, haben ein ernstes Hindernis für ihre Entwicklung bis zu einer modernen Anforderungen genügenden Genauigkeit gebildet.

14. Polarkoordinaten mit der Zeit als unabhängiger Veränderlicher. *De Pontécoulant*[86]) benutzt die Gleichungen Nr. **4** a und löst sie, indem er zunächst s vernachlässigt, vollständig bis zur 5. Ordnung in den kleinen Größen, für gewisse Koeffizienten sogar bis auf höhere Ordnungen; die Methode ist die der unbestimmten Koeffizienten. Für die Breite geht er auf die Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial z}$ zurück, welche einfacher als die Gleichung für s ist; in diese werden die früher erhaltenen Werte für r und v eingesetzt, und man findet dann alle Terme, die von der ersten Potenz von γ oder z abhängen. Die Gleichungen für r und v geben die von γ^2, jene für z die von γ^3 abhängigen usf. Die willkürlichen Konstanten sind so definiert, daß sie ihrer Bedeutung nach mit denen von *Laplace* übereinstimmen, und sie weichen auf diese Weise von ihrer für diese Theorie naturgemäßen Definition ab[87]). *J. W. Lubbock*[88]) befolgte unabhängig fast die gleiche Methode, trieb sie aber nicht bis zu derselben Genauigkeit; jedoch deckte er, indem er häufig seine Resultate mit denen von *Plana* und *de Pontécoulant* verglich, mehrere Fehler auf. Die Arbeit von *Stockwell*[89]) ist

83) Théorie de la Lune, Paris mém. prés. sér. 3 1 (1827), p. 313—598.

84) Théorie du mouvement de la Lune, 3 Bde., Turin 1832

85) *Lubbock*, Lond. Astr. Soc. mem. 30 (1862), p. 1—37; *Adams*, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 13 (1853), p. 262 = works 1, p. 110; *Cayley*, ib. 23 (1863), p. 211—215; 25 (1865), p. 182—189 = works 7, p. 357—360, 361—366.

86) Système du monde, 4, Paris 1846. Die Methode ist im einzelnen auseinandergesetzt in den Lehrbüchern von *Tisserand, Brown, Andoyer.*

87) Siehe *Brown*, Treatise, Art. 152, 159.

88) Siehe das Verzeichnis zu Anfang dieses Artikels.

89) Gesammelt in „Theory of the Moon's motion", Philadelphia 1881.

infolge von Fehlern in der Theorie nicht sehr zuverlässig. Über die Arbeiten von *Airy* und *Cayley* siehe Nr. **15**. *E. Neison* (= *Nevill*)[90]) hat eine Methode skizziert, die Mondtheorie innerhalb der Richtlinien *Pontécoulants* so zu behandeln, daß für jeden Koeffizienten und jedes Argument, welche in der Entwicklung der Glieder der Differentialgleichung vorkommen, ein besonderes Symbol eingeführt wird, welches die Herkunft des Gliedes andeutet. Man kann dann die Gleichungen entwickeln, integrieren und den Wert jedes Koeffizienten nach der Integration einsetzen; so trifft jeder etwa begangene Fehler nur den Term, in dem er begangen ist. Dies ist die Methode der unbestimmten Koeffizienten in ihrer allgemeinsten Form, aber die Kompliziertheit des Verfahrens läßt seinen praktischen Wert zweifelhaft erscheinen. *H. Andoyer*[91]) hat sie jedoch mit Erfolg zu sehr genauen allgemeinen Entwicklungen spezieller Terme (Nr. **6**) verwandt und durch Vergleich mit *Delaunay* (Nr. **15**) viele kleine Fehler bei letzterem berichtigt.

15. Die Variation der willkürlichen Konstanten. Die erste Anwendung dieser Methode auf die Mondtheorie stammt von *Euler*[92]), der sich aber im wesentlichen damit begnügte, die Gleichungen anzugeben. *Poisson*[93]) schlug vor, die Differentialgleichungen für die sechs Elemente $a, e, i, \varepsilon, \varpi, \vartheta$ (VI 2, 15, Nr. **6**) zu einer allgemeinen Entwicklung nach fortgesetzten Näherungen zu verwenden. Er erkannte indessen schon, daß sie am nützlichsten bei der Behandlung der langperiodischen und säkularen Terme sein müßte, und seine Beispiele betreffen zum größten Teil Berechnungen einzelner von diesen; es steht jedoch allgemein fest, daß die Methode für eine vollständige Entwicklung nicht brauchbar ist. *V. Puiseux*[94]) hat sie modifiziert, indem er in der Störungsfunktion nur die für den besonderen Zweck erforderlichen Terme beibehielt. Er kommt so zu einer schnelleren Berechnungsweise für gewisse säkulare und langperiodische Ungleichheiten, besonders die, welche von der Wirkung der Planeten herrühren.

---

90) Lond. Astr. Soc. mem. 44 (1879), p. 1—49.

91) Fac. Toul. Ann. 6 (1892), J; 7 (1893), E = Toul. Obs. Ann. 3 (1899), B, C; Paris Bull. Astr. 18 (1901), p. 177—208; 19 (1902), p. 401—418; 24 (1907), p. 395—412. In der letzten Arbeit ist die Methode modifiziert. Siehe auch das Buch des Verfassers im Literaturverzeichnis. Die modifizierte Methode wendet *P. Coubet*, Fac. Toul. Ann. Ser. (3) 1 (1909), p. 381—471 auf von der Neigung abhängige Ungleichungen an.

92) Theoria motus Lunae, St. Petersburg 1753, Appendix; Berl. Acad. mém. 1763 (publ. 1770), p. 141—193.

93) Mémoire sur le mouvement usw., Paris mém. prés. (3) 13 (1835), p. 209—335.

94) Paris Éc. norm. sup. Ann. sér. 1 (1864), p. 39—80.

Delaunays Theorie[95]) geht von den Gleichungen Nr. 10a aus, wo der Wert von R unter der Voraussetzung der elliptischen Bahn entwickelt (Nr. 9) und damit implizit durch die Variabeln l, g, h, L, G, H ausgedrückt ist. Man setzt $R_1 = -B - A\cos\vartheta + R_2'$, wo $-B$ der Teil von R_1 ist, der unabhängig von l, g, h, l' und $-A\cos\vartheta$ einer der periodischen Terme in R_1 ist. Man löst diese Gleichungen, indem man zunächst $R_2' = 0$ setzt. Dann erscheinen statt der elliptischen Werte l, g, h, L, G, H neue willkürliche Konstanten $l_1, g_1, h_1, L_1, G_1, H_1$. Will man nun R_2' berücksichtigen, so sind diese Größen nicht mehr konstant. Es zeigt sich aber, daß sich die Differentialgleichungen, aus welchen sie zu bestimmen sind, wiederum auf die kanonische Form bringen lassen; also

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{\partial R_2}{\partial l_1}, \ldots; \quad \frac{dl_1}{dt} = -\frac{\partial R_2}{\partial L_1}, \ldots,$$

wo R_2 sich von R_1 dadurch unterscheidet, daß einmal die alten Größen $l \ldots H$ durch die neuen $l_1 \ldots H_1$ ausgedrückt sind, und daß ferner eine gewisse Funktion von L_1, G_1, H_1 hinzugefügt werden muß. Der Effekt dieses Verfahrens ist, daß in der neuen Funktion R_2 das Glied $A\cos\vartheta$ *nicht* mehr vorkommt. Dasselbe Verfahren wird nunmehr unter Heraushebung irgendeines periodischen Gliedes in R_2 usf. so lange wiederholt, bis alle merklichen periodischen Glieder eliminiert sind. Die Differentialgleichungen reduzieren sich dann auf:

$$\frac{dL_n}{dt} = 0, \ldots; \quad \frac{dl_n}{dt} = -\frac{\partial R_{n+1}}{\partial L_n}, \ldots,$$

welche unmittelbar gelöst werden können. Allerdings treten in diesem Verfahren bei jedem Schritt neue periodische Terme in R_p auf, aber dieselben sind jeweils von höherer Ordnung als die bereits eliminierten; auf die Weise braucht der Prozeß nur so lange fortgeführt zu werden, als die Koeffizienten noch merklich sind. Die Modifikationen und Einzelheiten findet man bei *Delaunay*[95]) in Kap. 3 und in späteren Auseinandersetzungen der Methode durch verschiedene Autoren[96]).

Nachdem diese Operationen erledigt sind, müssen die verschiedenen Transformationen, welche die Integrationskonstanten hintereinander erlitten haben, in die elliptischen Reihenentwicklungen für Breite, Länge und Parallaxe $\left(\text{oder } \frac{1}{r}\right)$ eingesetzt werden, die damit Funktionen von t und den endgültigen willkürlichen Konstanten werden. Endlich

95) Théorie de la Lune, Paris mém. prés. 28 (1860), 29 (1867); er gibt seine Methode auch in Conn. des Temps, Add. (1861), p. 3—44.

96) *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 11, 12; *Brown*, Treatise, chap. 9. Siehe auch die späteren Noten dieser Nr.

müssen diese letzteren aus praktischen Gründen noch einmal durch neue ergänzt werden, welche folgenden Anforderungen entsprechen: 1) $nt + \varepsilon$ ist der nichtperiodische Teil der Länge; 2) der hauptsächlichste Term sowohl in Länge als in Breite (Argumente: $cnt + \varepsilon - \varpi$, $gnt + \varepsilon - \vartheta$) müssen für ihre Koeffizienten denselben Ausdruck haben wie in der elliptischen Bewegung; 3) $\varepsilon - \varpi$ bzw. $\varepsilon - \vartheta$ sind die konstanten Teile dieser Argumente; 4) $n^2 a^3 = \mu = E + M$. Alle Entwicklungen sind bei *Delaunay* bis zum 7. Grade einschließlich in den kleinen Größen ($m = \frac{1}{13}$ als kleine Größe erster Ordnung betrachtet) geführt, abgesehen von einigen Koeffizienten, die weiter geführt sind, wegen auftretender großer numerischer Multiplikatoren, welche ihre Konvergenz verlangsamen[97]). *Airy*[98]) und *Cayley*[99]) schlugen vor, *Delaunays* Endresultate durch Einsetzen in die Gleichungen Nr. 4a) zu kontrollieren und nachzusehen, welcher Korrektionen sie bedürfen; ersterer führte diese Arbeit auch in ziemlichem Umfange durch, verfiel aber in Irrtümer[100]). Die Methode ist auch unvollständig[101]), weil *Delaunay* $\frac{1}{r}$ nur bis zur 5. Ordnung gibt, während man für Gleichung Nr. 4a) diesen Ausdruck bis zu demselben Genauigkeitsgrade braucht wie Länge und Breite. Tafeln, die auf *Delaunays* Theorie gegründet sind, sind von *Radau* veröffentlicht worden.[102])

Der wesentliche Punkt von *Delaunays* Theorie ist der Übergang von einem Satze kanonischer Differentialgleichungen zum andern; er selbst erreicht dies durch direkte Transformation, *Brown*[103]) durch die Methode der willkürlichen Variationen, *Tisserand*[104]) und, kürzer,

97) Die numerischen Ausdrücke der Koordinaten sind von *Delaunay* gegeben: Conn. des Temps pour 1869, Add. p. 3—42; die vollständigen analytischen Ausdrücke von Knoten- und Apsidenlinie in Paris C. R. 74 (1872), p. 17—21; die analytischen Ausdrücke der Koordinaten in Conn. des Temps 1865, Add. p. 3—87 sind ohne die Zusätze gegeben, die er durch ergänzende Untersuchungen — Paris mém. prés. 29 (1867), chap. 10 — fand, welche unternommen waren, um langsam konvergierende Koeffizienten bis zu höheren Ordnungen genau zu erhalten.

98) London Astr. Soc. Monthly Not. 34 (1874), p. 89—98; Greenw. obs. 1875, App. p. 1—68; Numerical Lunar Theory, London 1886.

99) London Astr. Soc. Monthly Not. 52 (1892), p. 2—5 = works 13, p. 206—209.

100) Ibid. 49 (1889), p. 2.

101) *R. Radau*, Paris Bull. astr. 4 (1887), p. 274—286 = Lond. Observatory 10 (1887), p. 339—345, 377—383; *J. C. Adams*, London Astr. Soc. Monthly Not. 48 (1888), p. 319—322 = Coll. Works 1, p. 264—267; *E. J. Stone*, London Astr. Soc. Monthly Not. 52 (1892), p. 68—69.

102) Paris 1911.

103) Treatise, chap. 9.

104) J. de Math. (2) 13 (1868), p. 255—303; Méc. cél. 3, chap. 11.

Brown[105]) durch die Benutzung der *Jacobi*schen Methode. Die Lösung jedes Satzes kommt auf die folgender Gleichungen hinaus:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dA}{d\Theta}\cos\vartheta + \frac{dB}{d\Theta} + in'; \quad \frac{d\Theta}{dt} = A\sin\vartheta.$$

Diese Gleichungen ergeben als Lösung:

$$A\cos\vartheta + B + in'\Theta = C = \text{const.}$$

und

$$t + c = \int \frac{d\Theta}{\sqrt{A^2 - (C - B - in'\Theta)^2}};$$

A und B sind Funktionen von Θ, und i ist der Koeffizient von l' in ϑ. In der Mondtheorie ergeben diese Gleichungen Θ als periodische Funktionen von $\vartheta_0(t + c)$, wo ϑ_0 eine bestimmte Konstante ist. Das Integral ist vollständig für alle Fälle von *Poincaré*[106]) studiert worden. Die Gleichungen sind im allgemeinen vom Typus Nr. 5c), und es müssen also in speziellen Fällen die dort gegebenen Modifikationen eintreten.

Poincaré[107]) hat darauf hingewiesen, daß die kanonischen Gleichungen Nr. **10**b) mit Vorteil vor den *Delaunay*schen benutzt werden können, indem es dann unnötig ist, sowohl G und H als ε und γ in den Formeln hervorzuheben, und *Brown*[108]) zeigte weiter, daß, wenn man Nr. **10**b) verwendet, man die Lösung in einer Form vornehmen kann, die jede Anzahl von periodischen Gliedern einzuschließen gestattet. Endlich haben *Bohlin*[109]) und *Poincaré*[110]) eine Methode gefunden, welche die Transformationen von einem Satz kanonischer Gleichungen zum nächsten zu vermeiden gestattet; in *Poincarés* Auseinandersetzung stellt sich die Methode als eine Entwicklung dar, welche dadurch erreicht wird, daß die „Hauptfunktion" ihrerseits in der Form:

$$S = S_0 + mS_1 + m^2S_2 + \cdots$$

entwickelt auftritt, wo die S_0, S_1 usw. durch Rekurrenzen bestimmt werden.

Für *Perchots* Modifikation von *Delaunays* Methode vgl. Nr. 8.

16. Rechtwinklige Koordinaten mit beweglichen Achsen. In seiner späteren Theorie benutzt *Euler*[111]) rechtwinklige xy-Achsen,

105) London math. proc. 27 (1896), p. 385—390.

106) Méc. cél., chap. 19.

107) Méc. cél., chap. 1, p. 30; *O. Callandreau* [Paris Bull. Astr. 12 (1895), p. 369—372] zeigt, wie die Rechnung in diesem Fall vor sich geht.

108) London Math. Proc. 28 (1897), p. 146.

109) Bih. Stockholm Akad. 14 (1889), Nr. 5.

110) Méc. cél., chap. 19.

111) Theoria motuum Lunae etc., St. Petersburg 1772.

die sich in der Ebene der Ekliptik mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Mondes bewegen, während die z-Achse konstant senkrecht zur Ekliptik steht. Die Lösung des Problems wird als in der folgenden Form entwickelbar vorausgesetzt:

$$A + B_1 e + B_2 e^2 + \cdots + C_1 e' + C_{11} e' e + \cdots i^2 D_2 + \cdots,$$

wo die A, B, C, usw. aus periodischen Gliedern bestehen. Das ist nun möglich bis zur zweiten Ordnung, jedoch nicht für die höheren Ordnungen, indem auch die Bewegungen der Apsiden- und Knotenlinie die Potenzen von e^2, e'^2 usw. enthalten. Indessen vermeidet *Euler* diese Schwierigkeit, indem er die aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte dieser mittleren Bewegungen anwendet und deren theoretische Werte nur zur Verifikation benutzt. Er erhält dann eine Reihe von Systemen von Differentialgleichungen für die sukzessive Bestimmung der A, B usw., und jedes System kann dann nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten integriert werden, da ja die Ausdrücke der Form noch bekannt sind. Er gibt die Lösung von 31 solchen Systemen von Differentialgleichungen und berechnet danach Tafeln für die Bewegung. Seine Methode ist von *J. T. Schubert*[112]) weitergeführt, der die von e^2 und e'^2 abhängigen Terme mit ziemlicher Vollständigkeit erhält. Er benutzt diese letzteren, um *Laplaces* Wert für die Säkularbeschleunigung (Nr. 23) wiederzufinden, muß aber zu dem Zweck zu festen Achsen übergehen.

G. W. Hill[113]) schlug vor, die Bewegung auf Achsen zu beziehen, die sich mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit der Sonne in der Ekliptik bewegen, und die Störungen in Gruppen nach Maßgabe ihrer Charakteristiken abzuteilen. Er behandelt zunächst die Glieder mit der Charakteristik 1 (d. h. diejenigen, welche von e, e', γ, $\frac{a}{a'}$ unabhängig sind). Das Resultat ist *Hills* erste intermediäre Bahn, auf die in Nr. 8 Bezug genommen wurde; es ist die partikuläre Lösung (α) in Nr. 6 der Gleichung Nr. 4 (c), falls gesetzt wird $\Omega_p = z = 0$; und zwar enthält sie nur zwei von den erforderlichen vier willkürlichen Konstanten und ist periodisch in bezug auf die beweglichen Achsen[114]). *Hill* setzt diese Lösung, $x = x_0$, $y = y_0$, formal in die

112) Petersb. Nova Acta 13 (1802), p. 418—462.

113) Amer. Journ. math. 1 (1877), p. 5—26, 129—147, 245—260 = Works 1, p. 284—335.

114) Diese Bahn kann man auch als „Variationsbahn" bezeichnen, da ihr hauptsächlichster periodischer Term eben das Hauptglied der „Variation" (vgl. Nr. 12) ist. Schon *Euler* hat ihre Wichtigkeit erkannt (Hist. Mem. Berl. Acad. 1766 (publ. 1768), p. 334—353) und gemeint, daß ihre vollständige Bestimmung viele Schwierigkeiten der Mondtheorien lösen würde.

Differentialgleichungen ein und löst die Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten numerisch bis auf 15 Dezimalstellen und analytisch bis m^9; er untersucht dann diese Bahn auch für andere Werte von m (siehe Nr. 1). In einer anderen Abhandlung[115]) beginnt er die vollständige Lösung der reduzierten Gleichungen, indem er setzt

$$x = x_0 + \delta x; \quad y = y_0 + \delta y$$

und alle Produkte von δx und δy wegläßt; die dadurch neu hinzutretenden Glieder sind die mit der Charakteristik e. Für δx und δy ergeben sich auf diese Weise zwei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich mit Hilfe bekannter Integrale auf eine einzige zweiter Ordnung reduzieren lassen[116]); ihre Form und Lösung ist in Nr. 5 (a) gegeben. Bei der numerischen Auswertung beschränkt er sich auf die Berechnung des Teiles der Bewegung des Perigäums (d. i. q in Nr. 5 a)), welcher von m allein abhängt, und zwar bis auf 15 Stellen. In einer späteren Schrift[117]) wendet er die Methode an, um auch analytisch die Perihelbewegung bis m^{11} zu finden. Bezüglich der Konvergenz dieser Entwicklungen sei auf Nr. 7 verwiesen.

J. C. Adams[118]) hat eine ähnliche Untersuchung über die Knotenbewegung veröffentlicht, nachdem er vorher dieselbe intermediäre Bahn auf eine ganz andere Art wie *Hill* bestimmt, aber nichts darüber veröffentlicht hatte. Wenn r_0 den aus der intermediären Bahn folgenden Radiusvektor darstellt, so bestimmt *Adams* den Hauptteil von z durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{\mu}{r_0^3} + n'^2\right) z = 0,$$

welche also bereits die Form Nr. 5 (a) besitzt. Der hieraus sich ergebende Teil der Knotenbewegung wird auf 15 Stellen berechnet. Die

---

115) Motion of the Lunar perigee, Cambridge, U. S. A., 1877 = Acta math. 8 (1886), p. 1—36 = works 1, p. 243—270.

116) *G. H. Darwin* [Acta math. 21 (1897), p. 133—139 = Math. Ann. 51, p. 538—543 = Works 4, p. 27—32, zuerst publiziert bei *Brown*, Treatise, p. 211) und *J. C. Adams* [Lectures, p. 85—88 = Coll. Works 2, p. 81—84] haben gezeigt, daß diese Gleichung die einer senkrechten Verrückung von der Variationsbahn aus ist. *E. A. Hermann* [London Astr. Soc. Monthly 63 (1903), p. 541—543] hat eine kurze Ableitung dieses Resultats gegeben.

117) *G. W. Hill,* Amer. Ann. Math. 9 (1895), p. 31—41 = Works 4. p. 41—50. *Hills* Variationsbahn und Perihelbewegung hat *A. W. Krassnow* nach *Jacobis* Methode abgeleitet, Astr. Nachr. 170 (1906), p. 309—318; 173 (1907), p. 49—56; 174 (1907), p. 129—134.

118) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1878), p. 43—49 = Coll. Works 1, p. 181—188.

Störungsglieder mit den Charakteristiken $\left(\frac{a}{a'}\right)^i$ $[i = 1, 2, 3]$ hat *E. W. Brown*[119]) durch eine Vervollständigung der *Hill*schen Gleichungen bis zu eben diesen Gliedern erhalten. Er hat auch *Hills* Arbeit über die Apsidenbewegung fortgeführt[120]), indem er die periodischen Terme der Charakteristiken e, e^2, e^3 und den Teil der Perigäumsbewegung mit der Charakteristik e^2 fand. Die periodische Lösung, welche streng alles berücksichtigt, was von m und $\frac{a}{a'}$ allein abhängt, einschließlich der Teile der Störungsfunktion, die $\frac{M}{E}$, λ enthalten (Nr. 3), hat wiederum *G. W. Hill*[121]) gegeben[122]). Die Methode, die er hier verwendet, um die Korrektionen zu ermitteln, die seine eignen und *Browns* Resultate erfordern, ist eine Modifikation der Gleichungen von *Laplace* (Nr. 4 (b)) Die Glieder mit den Charakteristiken γ, γ^2, γ^3 und den Teil der Knotenbewegung, der γ^2 als Faktor enthält, verdankt man *P. H. Cowell*[124]). Endlich hat noch *Hill* die Glieder mit der Charakteristiken $e'\left(\frac{a}{a'}\right)^i$ berechnet, indem er sich einer früher angegebenen Methode bedient[125]), und hat *Andoyer*[126]) nach einer modifizierten Methode von *Hill* die Koeffizienten, die von m, e' und der ersten Potenz von e abhängen, analytisch abgeleitet.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Alle diese Arbeiten haben die Auffindung von Gliedern ganz bestimmter Charakteristiken zum Ziel; eine generelle Methode zur strengen Behandlung des ganzen Problems ist von *E. W. Brown*[127]) skizziert. Er erhält zunächst die allgemeinen Gleichungen Nr. 4 (c) und entwickelt, indem er setzt:

$$u = u_0 + \delta u; \quad s = s_0 + \delta s,$$

nach Potenzen von δu, δs, z, so daß die Ordnung der Charakteristik von $(\delta u)^i (\delta s)^j z^k$ $i + j + k$ ist. Indem nun die Bestimmung der

119) Amer. Journ. Math. 14 (1892), p. 141—160; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 52 (1892), p. 71—80.

120) Amer. Journ. Math. 15 (1893), p. 244—263; 321—338.

121) Astron. Journ. 15 (1895), col. 136—143 = Works 4, p. 78—93. *Moulton* [Trans. Amer. math. Soc. 7 (1906), p. 537—571], der Polarkoordinaten gebraucht, erhält sie analytisch mit großer Genauigkeit. Vgl. auch *Brendel* (Nr. 18).

122) Ein kleiner Fehler *Hills* in der Reduktion von *Browns* Resultaten bewirkte, daß die Korrektionen groß zu sein schienen; *Hills* endgültige Resultate sind aber trotzdem korrekt.

124) Amer. Journ. Math. 18 (1896), p. 99—127.

125) Astr. Journ. 20 (1899), p. 115—124 = Works 4, p. 153—168.

126) Fac. Toul. Ann. 6 (1892) J; 7 (1893) E.

127) Investigations, Amer. Journ. Math. 17 (1895), p. 318—358.

Störungsglieder einer bestimmten Charakteristik auf die Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen der Form Nr. 5 (b) zurückgeführt wird, werden sukzessive die Störungen einer bestimmten Charakteristik erhalten. Die Integrationskonstanten a, ε, ϖ, ϑ werden in der gewöhnlichen Weise definiert; die Konstante a als Hauptterm der „Variationsbahn" so, daß $a = af(m)$, wo $a^3n^2 = \mu$; die Konstante ae als Koeffizient der hauptsächlichen elliptischen Glieder in x; endlich ak als die des Hauptgliedes in z. Alsdann werden zusammen mit denen gewisser Charakteristiken dritter Ordnung die Koeffizienten der Charakteristiken zweiter Ordnung in der Apsiden- und Knotenbewegung bestimmt, indem für sie lineare Gleichungen erhalten werden, die frei sind von allen unbestimmten Koeffizienten. Dieser eben skizzierte Plan ist in einer Reihe von Abhandlungen im Detail ausgearbeitet[128]). Zuerst werden die rechtwinkligen Koordinaten des Mondes abgeleitet, wobei von Anfang an der numerische Wert von m eingesetzt wird, während die andern Konstanten unbestimmt bleiben. Alle früheren Resultate mit Ausnahme von *Hills* Variationsbahn[129]) werden neu gerechnet oder kontrolliert. Die Hauptarbeit reduziert sich auf Multiplikation aufsteigender und absteigender Potenzreihen mit numerischen Koeffizienten, wobei jedes Reihenprodukt leicht kontrolliert werden kann. Auch werden verschiedene Wege zur Kontrolle der Gesamtresultate benutzt. Am durchgreifendsten sind dabei die aus *Adams'* Theorem (Nr. **11**) folgenden Relationen. Meistens wird mit den komplexen Variabeln in ihrer ursprünglichen Form gerechnet, nur für Terme und Charakteristiken der Ordnung 5, 6 werden die homogenen Formen (Nr. 4 (c)) gebraucht. Die Resultate werden auf Polarkoordinaten transformiert, die Konstanten a, e, k in diejenigen von *Delaunay* (Nr. **15**) übergeführt und ihre numerischen Werte eingesetzt, so daß alle Koeffizienten schließlich in Bogensekunden ausgedrückt sind. Fast alle Koeffizienten in Länge und Breite über 0″.001 und in Parallaxe über 0″.0001 werden erhalten, ohne Ausnahme die über 0″.01 bzw. 0″.001. Die jährlichen mittleren Bewegungen von Perigäum und Knoten werden auf 0″.01 genau bestimmt. In der letzten Arbeit werden andere bekannte Schwerewirkungen (Nr. **20—25**) ebenso genau berechnet[130]). Tafeln, die alle diese Störungen einschließen, sind gegenwärtig in Ausführung[131]).

128) Theory of the Motion of the Moon, siehe das eingangs gegebene Verzeichnis von Monographieen. Eine andere Darstellung gibt *Poincaré*, Leçons de Méc. cél. 2, chap. 24—28.

129) Amer. Journ. Math. 1 (1877), p. 248 = Works 1, p. 324.

130) Die Endergebnisse finden sich in Lond. Astr. Soc. Mem. 57 (1905),

Poincaré[132]) hat eine Modifikation dieser Methode angegeben, die, falls man auf eine rein analytische Entwicklung ausgeht, eine Abkürzung der Arbeit darstellt. Er geht dabei von den Eigenschaften des Klammerausdruckes $[f, g]$ (Nr. **11**) aus. Wenn nämlich Q irgendeine Koordinate oder Geschwindigkeitskomponente bezeichnet, so hat $\frac{\partial Q}{\partial l}$ den Faktor e, $\frac{\partial Q}{\partial F}$ den Faktor γ (entsprechend den Bezeichnungen von Nr. **6**), so daß, wenn man für f: $nt + \varepsilon$, n, für g der Reihe nach: e, l oder γ, F usw. setzt und außerdem voraussetzt, daß die Koeffizienten von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ nach Potenzen von e, e', γ, $\frac{a}{a'}$ entwickelt sind, die Ableitungen der Koordinaten und Geschwindigkeiten nach f in ihren Charakteristiken um eine Ordnung niedriger sind als die nach g. Infolge dieser Tatsache hängt die Berechnung der Störungsterme einer bestimmten Charakteristik von je einem Paar linearer Differentialgleichungen ab, die etwas einfacher sind als die von *Brown* (Nr. **5** (b)). Es werden die Gleichungen von Nr. **4** (d) benutzt und nach *Poincarés* Modifikation von *Delaunays* Methode (Nr. **15**) behandelt; dabei wird eine spezielle Untersuchung über die Apsiden- und Knotenbewegung und für einige andere Terme erforderlich, deren Koeffizienten nicht durch die Gleichungen $[f, g] = \text{const.}$ geliefert werden.

17. Mittlere Anomalie und Verhältnis der Entfernung zu einem elliptischen Radiusvektor[133]) **als abhängige Variable.** *P. A. Hansen*[134]) geht aus von einer Ellipse fester Größe und Form in der instantanen Bahnebene. Die Längen werden von einem „Anfangs-

p. 130—145; 59 (1908), p. 94—103 mit Verbesserungen in Lond. Monthly Not. 70 (1910), p. 3, 148; 74 (1914), p. 424. Verschiedene Nebenresultate und Diskussionen in Artikeln in den Lond. Monthly Not. 1891—1910.

131) *E. W. Brown,* Lond. Monthly Not. 70 (1909), p. 148—175; 71 (1911), p. 639—650, 651—660.

132) Paris Bull. Astr. 17 (1900), p. 167—204; Leçons de Méc. cél., chap. 29.

133) Dieses Verhältnis ist zuerst von *Euler* (siehe Nr. **18**) als abhängige Veränderliche benutzt.

134) *Hansen* hat seine Methoden in einer Reihe von Veröffentlichungen dargelegt mit dem Titel: Disquisitiones circa theoriam perturbationum, quae motus corporum coelestium afficiunt, Astr. Nachr. 7 (1829), col. 417—448, 465—484; 11 (1834), p. 49—104, 309—368; 12 (1835), p. 321—364; 13 (1836), p. 97—142. Die auf die Mondtheorie bezüglichen Teile sind gesammelt und vervollständigt in den Fundamenta nova usw., Gotha 1838; die „Darlegung usw.", Sächs. Ges. Abh. 6 (1862), p. 91—498; 7 (1864), p. 1—399, ist hauptsächlich zur Verifikation früher ausgeführter Rechnungen geschrieben, aber sie enthält zugleich die leichteste Darstellung im allgemeinen. Es empfiehlt sich, die der Planetentheorie gewidmeten Schriften ebenfalls zu Rate zu ziehen: Encycl. VI 2, 15.

punkt“[135]) aus gerechnet, der dadurch definiert ist, daß sich bei einer infinitesimalen Drehung der Bahnebene die Längen nicht ändern. Die Apsidenlinie hat in der Bahnebene von diesem Anfang gerechnet, die gleichförmige Bewegung $n_0 y$. Bezeichnet $n_0 z$ die mittlere Anomalie in dieser Ellipse, so hat man $z = t +$ const. für eine rein elliptische, $z = t +$ const. $+ \delta z$ in der tatsächlichen Bewegung. Sind nun $\bar{v}$ und $\bar{r}$ Länge und Radiusvektor in der Ellipse, v und r in der tatsächlichen Bahn, so setzt *Hansen*:

$$v = \bar{v}; \quad r = \bar{r}(1 + \nu),$$

so daß also die Bewegung in der wahren Bahn auf die Bestimmung von δz und ν reduziert ist. Es seien weiter: $2a_0$, e_0, $\bar{f}$ große Achse, Exzentrizität und wahre Anomalie in der Hilfsellipse, ferner

$$n_0^2 a_0^3 = \mu = h_0 n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2};$$

bedeuten endlich $\bar{\varrho}$, $\bar{\varphi}$ dieselben Funktionen einer Variabeln ζ, wie $\bar{r}$, $\bar{f}$ von z sind, und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$ die Komponenten der störenden Kraft in Richtung des Radiusvektors und senkrecht dazu in der instantanen Bahnebene, dann ergeben sich für z und ν folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \overline{W} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{\bar{r}}{a_0}\right)^2,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{y(1+\nu)}{\sqrt{1-e_0^2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\bar{r}}{a_0}\right)^2.$$

Dabei ist

$$\frac{h_0}{h} = \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2 \frac{dz}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2,$$

und $\overline{W}$ wird erhalten, indem man z statt ζ nach Integration der folgenden Differentialgleichung setzt:

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = h_0 \mathfrak{T} r\left[2\frac{\bar{\varrho}}{r}\cos(\bar{f} - \varphi) - 1 + 2\frac{h^2}{h_0^2}\frac{\bar{\varrho}}{a_0(1-e_0^2)}\{\cos(\bar{f} - \varphi) - 1\}\right]$$
$$+ 2h_0\frac{\bar{\varrho}}{r}\mathfrak{P} r \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) + \frac{n_0 y}{\sqrt{1-e_0^2}}\left[\left(\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\right)^2\frac{\partial W}{n_0 \partial \zeta}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(W + \frac{h_0}{h} + 1\right)\frac{d}{n_0 d\zeta}\left(\frac{\bar{\varrho}}{a_0}\right)^2\right]$$

unter der Annahme, daß $\zeta =$ const. ist[136]). y wird so bestimmt, daß

---

135) Der englische Ausdruck „Departure point“ ist als Terminus von *A. Cayley*, Quart. Journ. Math. 1 (1857), p. 112—125 = Coll. Works 3, p. 19 eingeführt.

136) Methoden, zu diesen Differentialgleichungen zu gelangen, sind gegeben von *Zech*, Astr. Nachr. 41 (1855), col. 129—142, 205—208; *Hansen*, ibid. 42 (1856), col. 273—280; *Brünnow*, ibid. 64 (1865), col. 259—266; *A. Cayley*, Quart. Journ.

nur periodische Glieder in der Lösung vorkommen. Indem man zunächst die elliptischen Werte:

$$z = t + \text{const.}, \quad \nu = 0, \quad h = h_0, \quad W = 0$$

in die rechte Seite der Differentialgleichung für $\overline{W}$ einsetzt, erhält man eine zweite Annäherung für diese Funktion und damit dann aus den Gleichungen ν und z solche für diese Funktionen usf.

Um die Bewegung der Bahnebene zu finden, ersetzt *Hansen* die Gleichungen für die Veränderungen von Knoten und Neigung (Encycl. VI 2, 15 Nr. 22) wie folgt: Seien

$$N_0 + K_0 - N - K, \quad -n_0(\alpha - \eta)t;$$
$$N_0 - K_0 - N + K, \quad -n_0(\alpha + \eta)t$$

bezgl. die periodischen und Säkularteile der Mondknotenbewegung in der momentanen Bahnebene bzw. der momentanen Ekliptik; J der Winkel zwischen diesen Ebenen; $-\mu'$ die mittlere Länge des Mondknotens in der momentanen Ekliptik; i' und σ' Neigung und Knotenlänge der momentanen in einer festen Ekliptik gegebenen Epoche — die Länge gerechnet von einem „Anfangspunkt" in der ersteren Ebene. Bezeichnet man ferner:

$$P = 2\sin\frac{J}{2}\sin(N - N_0), \quad p' = \sin i' \sin\sigma',$$

$$Q = 2\sin\frac{J}{2}\cos(N - N_0), \quad q' = \sin i' \cos\sigma',$$

dann sind die Gleichungen, denen P, Q, K Genüge leisten müssen:

$$\frac{dP}{dt} = -n_0\alpha Q - h\left(\frac{\partial R}{\partial P}\cos^2\frac{J}{2} + \frac{1}{4}P\frac{\partial R}{\partial K}\right) + \frac{\cos\frac{J}{2}}{\cos i'}\left(\frac{dp'}{dt}\cos\mu' + \frac{dq'}{dt}\sin\mu'\right),$$

$$\frac{dQ}{dt} = n_0\alpha P + h\left(\frac{\partial R}{\partial Q}\cos^2\frac{J}{2} - \frac{1}{4}Q\frac{\partial R}{\partial K}\right) + \frac{\cos\frac{J}{2}}{\cos i'}\left(\frac{dp'}{dt}\sin\mu' - \frac{dq'}{dt}\cos\mu'\right),$$

$$\frac{dK}{dt} = n_0\eta + \frac{1}{4}h\left(P\frac{\partial Q}{\partial P} + Q\frac{\partial R}{\partial Q}\right) + \frac{1}{4\cos i'\cos\frac{J}{2}}\left\{\left(Q\frac{dp'}{dt} + P\frac{dq'}{dt}\right)\cos\mu' + \left(Q\frac{dq'}{dt} - P\frac{dp'}{dt}\right)\sin\mu'\right\}.$$

Math. 1 (1857) = Works 3, p. 13—24; *G. W. Hill*, Amer. Journ. Math. 4 (1881), p. 256—259 = Works 1, p. 348—350; *W. Scheibner*, Sächs. Ges. Abh. 25 (1899), p. 131—156. Eine Schwierigkeit bei der Integration der Differentialgleichungen ist von *E. W. Brown*, London Astr. Soc. Monthly Not. 56 (1896), p. 52—53, aufgeklärt worden.

Wenn die störende Kraft vernachlässigt wird, so ist

$$P = 0, \quad Q = 2\sin\frac{J_0}{2}, \quad K = K_0.$$

In den höheren Näherungen sind α und η stets so zu bestimmen, daß P, Q, K nur periodische Glieder enthalten.

Zu bemerken ist, daß hier μR statt R die Störungsfunktion ist. In den Entwicklungen von R[137]) führt *Hansen* den numerischen Wert von $\frac{m'}{\mu}$ ein und setzt ferner

$$r = \bar{r}(1+\nu),$$

$$\cos\vartheta = \cos(\bar{f}+\omega)\cos(\bar{f}'+\omega') + \sin(\bar{f}+\omega)\sin(\bar{f}'+\omega')\cos J,$$

wo ω und ω', die Abstände der Apsidenlinien der beweglichen Hilfsellipsen für Mond und Sonne vom gemeinsamen Knoten sind; ferner sollen $\bar{f}'$, n_0', ν', y' dieselbe Bedeutung für die Erdbahn haben wie $\bar{f}$, n_0, ν, y für die Mondbahn; dann läßt sich R entwickeln nach Potenzen von ν, ν', e_0, e_0', $\frac{a_0}{a_0'}$, $\sin^2\frac{J}{2}$ und nach Kosinus der Aggregate von Vielfachen von $n_0 z$, $n_0' z$, $\omega \pm \omega'$. Die Kraftkomponenten $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ sind zunächst durch die partiellen Derivierten von R nach e_0 und ω ausgedrückt. Endlich aber gestatten die Definitionsgleichungen für P und Q zusammen mit

$$\omega + \omega' = n_0 t(y + y' + 2\alpha) + 2N; \quad \omega - \omega' = n_0 t(y - y' - 2\eta) + 2K$$

R durch P, Q, K auszudrücken.

In den Endresultaten bezeichnen dann ω und ω' nur die nichtperiodischen Bestandteile der vorher durch diese Buchstaben bezeichneten Funktionen, während g und g' die nichtperiodischen Anteile von $n_0 z$ und $n_0 z'$ sind, so daß also zu *Delaunays* endgültigen Bezeichnungen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$g = l; \quad g' = l'; \quad g + \omega = F; \quad g + \omega - g' - \omega' = D.$$

Schließlich wird der Übergang von der instantanen Bahnebene auf die instantane Ekliptik vollzogen. *Hansens* Resultate sind, da sie die indirekten Planetenstörungen durch Berücksichtigung von ν', $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$ usw. einschließen, allgemeiner als die anderen Theorien, die sich mit dem Hauptproblem beschäftigen. Aber seine Theorie ist keineswegs frei von empirischem Einschlage, da sie für die Perigäums- und Knoten-

137) *Hansen*, Fundamenta, Sect. IV, Sächs. Ges. Abh. 2 (1855), p. 181—281; 283—376. Siehe auch *Cayley*, Lond. Astr. Soc. Mem. 27 (1859), p. 69—95; 28 (1860), p. 187—215; 29 (1861), p. 191—306 = Works 3, p. 293—318, 319—343, 360—474.

bewegung die beobachteten Werte einführt, mit denen die berechneten nicht ganz übereinstimmen (Nr. 25). Bei der Bildung seiner Tafeln (Nr. 27) bringt er außerdem noch andere empirische Korrektionen an, und später haben noch weitere hinzugefügt werden müssen, um die Tafeln mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu bringen. *Hansens* Resultate sind auch verschiedentlich umgeformt werden, um sie mit anderen Theorien, besonders der von *Delaunay* vergleichbar zu machen, so von *Wilding*[138]) und von *Newcomb* und *Maier*[139]). Man hat vielfach versucht, die Darlegung der Theorie zu vereinfachen[140]).

Th. v. Oppolzer[141]) folgt *Hansen*, insofern er die Störungen in der Bahnebene zur mittleren Anomalie hinzufügt. Die Länge und Parallaxe werden in gleicher Weise wie bei *Hansen* ausgedrückt, aber die dritte Koordinate ebenso wie die Parallaxe behandelt. Die Bewegung wird auf die mittlere instantane Bahnebene bezogen, d. h. diejenige, welche statthaben würde, wenn man alle periodischen Störungen der instantanen Bahnebene beiseite läßt und nur die säkularen beibehält. Die drei Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten ergeben sich dann in folgender Form:

$$(\alpha)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+(\mu+\mu')\frac{x}{r^3}=X;\quad \frac{d^2y}{dt^2}+(\mu+\mu')\frac{y}{r^3}=Y;\quad \frac{d^2z}{dt^2}+(\mu+\mu')\frac{z}{r^3}=Z,$$

wo μ und μ' Konstante sind, und X, Y, Z sowohl die Komponenten der eigentlichen störenden Kraft als auch die von den Bewegungen der Achsen herrührenden Reaktionskräfte enthalten. *Oppolzer* setzt dann

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=\frac{r}{(r)}=\frac{1}{1+\gamma},\qquad \zeta=f(t),$$

---

138) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 40 (1880), p. 8—10.

139) Wash. Astr. Pap. 1 (1880), p. 57—107. Hierher gehört auch eine Arbeit von *Cowell* (Lond. Monthly Not. 64 (1904), p. 159—168) der die *Hansen*schen Tafelformeln, welche von den theoretischen Formeln verschieden sind, umgeformt hat.

140) Eine Übersicht über die „Fundamenta" und „Darlegung" hat *E. W. Brown*, Treatise chap. 10, gegeben. *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 17, gibt ebensolche für die „Darlegung". Weitere Auseinandersetzungen von *Hansens* Methode findet man bei *Hansen*, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 201—216; 18 (1841), p. 237—288; 19 (1842), p. 33—92; *Delaunay*, Journ. des Sav. 1858, p. 16—17. Eine Vergleichung der Theorien von *Clairaut*, *Hansen*, *Oppolzer*, *Gyldén* gibt *R. Radau*, Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 433—449; 475—487. Siehe auch *R. Radau*, Bull. des Sc. math., sér. II, 5 (1881), p. 270—295; *Scheibner*, Sächs. Ges. Abh. 25 (1899), p. 131—156; Encycl. VI 2.

141) Wien. Denkschr. 51 (1886), p. 69—105; 54 (1888), p. 59—244; letzteres von *R. Schramm* herausgegeben. Eine frühere Abhandlung bezieht sich hauptsächlich auf die Planetentheorie.

so daß wir jetzt also die 6 Variabeln x_0, y_0, z_0, γ, ζ, t statt der alten x, y, z, t haben. Die zwei willkürlichen Bedingungen, denen diese Größen demnach noch unterworfen werden können, definiert er durch:

$$\frac{d^2x_0}{d\zeta^2} + (\mu + \mu')\frac{x_0}{r_0^3} = 0; \quad \frac{d^2y_0}{d\zeta^2} + (\mu + \mu')\frac{y_0}{r_0^3} = 0$$

zusammen mit $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, so daß also der Punkt x_0y_0 eine Ellipse mit der mittleren Anomalie ζ beschreibt. Die Gleichungen (α), die zweiter Ordnung sind, werden so ersetzt durch 6 Gleichungen erster Ordnung. Von diesen sind 3 die Differentialgleichungen für die Projektionen der Flächengeschwindigkeiten auf die drei Koordinatenebenen, von denen die auf die xy-Ebene bezogene die Gestalt annimmt:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{x_0}{a}\frac{lY}{1+\gamma} - \frac{y_0}{a}\frac{lX}{1+\gamma},$$

wo a, l Konstanten sind. Zwei weitere Gleichungen geben den Betrag der Geschwindigkeitsänderung in der xy-Ebene, und die letzte, die ζ gibt, lautet:

$$\frac{d\zeta}{dt} = (1 + I)(1 + \gamma)^2.$$

Wenn diese Gleichungen durch fortgesetzte Näherung nach Potenzen der störenden Kraft gelöst sind, so findet man die Koordinaten durch Einsetzen von ζ in ihre elliptischen Ausdrücke; der Wert von γ (welcher als Funktion der sechs benutzten Variabeln erhalten wird), gibt die Parallaxe, und z_0 wird in ähnlicher Weise ausgedrückt. Nach des Autors Tode sind seine Resultate insoweit vervollständigt, als es sich um eine vollständige analytische Entwickelung der Ausdrücke auf der rechten Seite der Differentialgleichungen, abgesehen von der für $\frac{d\zeta}{dt}$, handelt, herausgegeben worden; sie sind also fertig für die Durchführung der ersten Näherung in bezug auf die störende Kraft; das erstrebte Endziel an Genauigkeit war dasjenige von *Delaunay*, jedoch so, daß numerische Werte für die Konstanten benutzt werden sollten.

A. Weiler[142]) schlägt als intermediäre Bahn eine bewegliche Ellipse von veränderlicher Größe, aber konstanter Gestalt in der instantanen Bahnebene vor. Sowohl für die gestörte als die ungestörte Bewegung gelten die Gleichungen

$$\frac{k}{r} = \frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos f; \quad \frac{df}{dt} = n\left(\frac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2},$$

142) Astr. Ges. Publ. 12 (1872). Diese Abhandlung gründet sich auf eine frühere Arbeit, ibid. 3 (1866), die sich hauptsächlich mit dem allgemeinen Dreikörperproblem beschäftigt. Seine späteren Entwickelungen sind im wesentlichen in verschiedenen Nrn. der Astr. Nachr. enthalten, von denen sich aber viele nicht speziell auf die Mondtheorie beziehen.

wo n, e konstant sind und f die wahre Anomalie ist. Diese Gleichungen geben r und f als Funktionen von a und t. Die Länge v und die Länge des Perigäums ϖ, gerechnet zunächst längs der Bahn bis zum Knoten und von da in der Grundebene bis zu einem festen Anfangspunkt, hängen durch $v = f + \varpi$ zusammen; so erhält man v und r, wenn a und ϖ bekannt sind; die Beziehung $n^2a^3 = \mu$ gilt hier in der gestörten Bewegung nicht mehr in aller Strenge. Die Störungen von i, ϑ bestimmen die Bewegung der Bahnebene. Die Gleichungen, die man für ϖ, ϑ, i erhält, sind erster, die für a (oder p) ist dritter Ordnung; diese letztere wird durch 3 Gleichungen erster Ordnung für die abhängigen Veränderlichen h, k, q ersetzt, die so definiert sind:

$$\frac{1}{2}\frac{r}{p}(p^2 - p_0^2) = k\cos v + h\sin v; \quad \frac{dk}{dt}\cos v + \frac{dh}{dt}\sin v = 0,$$

wo p_0 der ungestörte Wert von p ist; für q gilt eine Gleichung, die der Energiegleichung einigermaßen analog ist. Alsdann werden die störenden Kräfte eingeführt und die 6 Gleichungen mannigfach umgeformt; schließlich wieder die Lösung in Näherungen nach Potenzen der störenden Kräfte durchgeführt. Die gleichzeitige Gültigkeit der obigen Gleichungen gestattet die Integration von $\left(\frac{r}{p}\right)^n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mv$ (wo n, m ganze Zahlen sind) durch endliche Ausdrücke. Die Konvergenz der der für p erhaltenen Reihen, die *Weiler* behauptet, scheint nicht streng bewiesen zu sein[143]).

18. Die wahre Anomalie als unabhängige Veränderliche. *Euler* geht in seiner ersten Theorie[144]) von den auf Zylinderkoordinaten bezogenen Gleichungen:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} - r_1\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \mathfrak{P}_1; \quad \frac{1}{r_1}\frac{d}{dt}\left(r_1^2\frac{dv}{dt}\right) = \mathfrak{T}_1; \quad \frac{d^2}{dt^2}(r_1 s) = \mathfrak{Z}_1$$

aus, wo r_1 und v die Projektion des Radiusvektors und die Länge sind. Er transformiert dann die Gleichungen auf die wahre Anomalie f als unabhängige Variable. Dann setzt er

$$r = \frac{a(1-e^2)(1+v)}{1+e\cos f}$$

und gelangt zu einer Differentialgleichung erster Ordnung für v und einer zweiter Ordnung für v, die diese Größen als Funktionen von f

143) Zusammenfassungen und Auseinandersetzungen der Theorie sind gegeben worden durch *R. Radau*, Bull. des Sc. math., sér. II, 5 (1881) p. 270—295 und *A. Weiler*, Astr. Nachr. 106 (1883), p. 65—76 und Astr. Ges. Vjs. 35 (1900), p. 319—322.

144) Theoria motus Lunae, St. Petersburg 1753.

zu bestimmen gestatten. Die Lösung der ersteren Gleichung ist $v = \text{const.} + \frac{f}{c} +$ periodische Glieder; dabei ist offenbar $1 - c$ die mittlere Apsidenbewegung. *Euler* setzt nun für c seinen beobachteten Wert ein und zeigt, daß in dem Kraftgesetz, welches er in der Form $\frac{\mu}{r^2} - \delta$ voraussetzt, δ sehr klein sein muß. Statt der dritten der obigen Gleichungen führt er die Variationen von Knoten und Neigung ein. Um die willkürlichen Konstanten zu bestimmen, rechnet er mit seinen Resultaten 13 Finsternisse und bestimmt dann durch Vergleich mit den Beobachtungen die Konstanten.

H. Gyldén[145]) verwendet eine modifizierte wahre Anomalie v_0 als unabhängige und zwei Größen u und χ als abhängige Veränderliche, die folgendermaßen definiert sind:

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{r_0^2} u^2 \sqrt{c}; \quad v = v_0 + \chi, \quad \text{wo } c = \text{constans.}$$

Er erhält seine intermediäre Bahn, indem er F (Nr. 3) auf die Teile beschränkt, die für $\lambda = 0$, $k_j = 1$, $j = 2$, $s = 0$ übrig bleiben; die Gleichungen für die intermediäre Bahn ergeben sich dann so:

$$\frac{d^2u}{dv_0^2} + u\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 = \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial u}; \quad \frac{d^2\chi}{dv_0^2} = \frac{1}{cu^2}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Die Absicht bei dieser Formulierung ist, in der intermediären Bahn die Hauptteile der größten Glieder zu berücksichtigen; dafür genügt es, in der ersten Näherung in R zu setzen:

$$v - v' = mv_0 + \text{const.},$$

wodurch von Gliedern, die kleine Divisoren erhalten, erst die 4. Ordnung vernachlässigt wird.

Gyldén setzt nun

$$u = a(1 + \varrho_0) = a + aE\sqrt{1 + \eta_1 \cos(\lambda v_0 - A)},$$

wo a, η_1, λ, A Konstanten sind; für E ergibt sich dann eine Gleichung von der Form Nr. 5(a). *Gyldén* selbst löst dieselbe durch elliptische

145) Acta math. 7 (1885), p. 125—172. Vgl. auch *Andoyer,* Toul. Fac. Ann. 1 (1887) M, und *Tisserand,* Toul. Fac. Ann. 2 (1888) D; Méc. cél. III, chap. 8. Die Methode ist analog zu *Gyldéns* allgemeiner Behandlung der Störungstheorie, VI 2, 15 Nr. 31. Für die nähere Auseinandersetzung der Theorie sei auch verwiesen auf: *Gyldén,* Astr. Nachr. 100 (1881) p. 97—102; *O. Callandreau,* Paris C. R. 93 (1881), p. 779—81, Paris Bull. Astr. 3 (1886), p. 353—57, 7 (1890), p. 471—497; *O. Backlund,* Astr. Nachr. 101 (1882), p. 19—22; *M. Brendel,* Astr. Nachr. 116 (1886), p. 161—166; *R. Radau,* Paris Bull. Astr. 3 (1886), p. 433—449; *Shdanow,* Dissertation Stockholm 1885.

Integrale. *Tisserand*[146]) weist aber darauf hin, daß die Einführung solcher nicht erforderlich ist, und führt die Lösung durch trigonometrische Reihen durch. Für die Weiterbehandlung werden nun drei neue Variable S, ξ, ψ und zwei Funktionen Q_1 und P_1 folgendermaßen eingeführt:

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{r_0}{r} = 1 + \psi; \quad dt = (1+S)\frac{r^2 dv_0}{\sqrt{c}} = \frac{1+S}{\sqrt{c}} \frac{r_0^2 dv_0}{\left(1 + \frac{r_0 \xi}{a}\right)^2};$$

$$\frac{a r^2}{c}\frac{\partial F}{\partial r} = P_0 + P_1; \quad (1+S)\frac{r^2}{c}\frac{\partial F}{\partial v} = (1+S)Q_0 + Q_1,$$

wo P_0 und Q_0 diejenigen Anteile sind, welche der intermediären Bahn entsprechen. Die Gleichungen für die Abweichungen der wahren von der intermediären Bahn werden dann:

$$\frac{dS}{dv_0}\left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right) + (2S + S^2)(Q_0 + Q_1) = -Q_1$$

$$\frac{d^2\xi}{dv_0^2} + \left(1 + \frac{d\chi}{dv_0}\right)^2 \xi - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d\xi}{dv_0} - \frac{a\mu}{c}(2S + S^2) - \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv_0}\frac{d}{dv_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)$$
$$= -P_1 - (2S + S^2)(P_0 + P_1).$$

Gyldén selbst hat diese Gleichungen nicht weiter behandelt, da es ihm nur auf die intermediäre Bahn selbst ankam, hat auch die von der Neigung abhängigen Störungen nicht berücksichtigt. *Tisserand*[147]) hat die Behandlung der letzteren aufgenommen, indem er die zweite Gleichung von Nr. 4 (b) benutzt, dieselbe in *Gyldén*s Sinne umformt und sie dadurch auf die Form Nr. 5 (a) bringt. Die Methode ist weiter durchgeführt von *Shdanow*[148]), der bis zur 2. Näherung einschließlich geht und damit die Apsiden- und Knotenbewegung auf $\frac{1}{650}$ bzw. $\frac{1}{1000}$ ihres wahren Wertes erhält.

M. Brendel[149]) hat die Modifikation der *Gyldén*schen Methoden, die er in seiner Theorie der kleinen Planeten[150]) benutzt hat, auch auf den Mond angewandt, so daß Entwicklungen nach den Charakteristiken leicht zu erhalten sind. Mit v als mittlerer Anomalie in der oskulierenden Ellipse setzt er:

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \quad r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{M' a(1-\eta^2)}}{1+S},$$

wo

$$M' = \frac{E^3}{(E+m')^2}$$

ist.

146) Toul. Fac. Ann. 2 (1888) D; Méc. cél. 3, chap. 8.
147) Toul. Fac. Ann. 2 (1888) D.
148) Dissertation Stockholm 1885.
149) Gött. Ges. Abh. N. F. (3) 4 (1905), p. 1—97.
150) Ib. I, 2 (1898), p. 171 usw.

Dabei ist der Ursprung der Schwerpunkt des Systems Erde-Mond. Er setzt ferner:

$$\varrho = (\varrho) + R = \eta \cos(v - \pi) + R,$$

$$\eta \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \pi = k \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (\xi v + \Gamma) + k' e' \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \varpi'.$$

Hier sind k und Γ Konstanten, die der Exzentrizität und Perihellänge entsprechen, ξ ist die mittlere Bewegung der Apsidenlinie; k', das $\frac{a}{a'} = \alpha$ als Faktor enthält, verschwindet, wenn die Sonne sich in einer festen Ellipse bewegt. Ist die Mondbewegung ungestört, so verschwinden R und S.

Die Gleichungen für S und ϱ werden:

$$-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d}{dv}\eta^2,$$

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d}{dv}\eta^2 + (1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv} + 2S + S^2 - (1+S)^2 P$$

$$-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2}{dv^2}\eta^2 + \frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d}{dv}\eta^2\right)^2 + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} Q \frac{d}{dv}\eta^2\right\}(1+\varrho),$$

wo

$$P = r^2\frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

ist und Ω die Störungsfunktion bedeutet. Der Ausdruck von t als Funktion von v wird in der Form angesetzt:

$$nt + \text{const.} = v + \sum B_i \sin i(v - \pi) + W,$$

wobei $n^2 a^3 = M'$ ist. Das zweite Glied rechts ist dabei die Mittelpunktsgleichung, mit η und π als Exzentrizität und Perihellänge gerechnet. Für W ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{\{1+\eta\cos(v-\pi)\}^2}\left\{\frac{1+S}{\left[1+\frac{R}{\{1+\eta\cos(v-\pi)\}}\right]^2} - 1\right\}$$

$$-\frac{d'}{dv}\left\{\sum B_i \sin i(v-\pi)\right\},$$

wobei $\frac{d'}{dv}$ die Ableitung nach v, nur soweit es in η und π auftritt, bedeutet. Die Kräfte P, Q werden nach Potenzen von η, e', R, W entwickelt. *Brendel* erhält zuerst eine intermediäre Bahn, indem er η und e' vernachlässigt. Diese fällt zusammen mit der zuerst von *G. W. Hill*[114]) numerisch berechneten. *Brendel* läßt die Entwicklungen zunächst allgemeiner, löst aber dann auch ein System von Gleichungen mit in Strenge unendlich vielen Unbekannten rein numerisch auf. Weiter werden dann die von η und e' abhängigen Terme bestimmt, wobei die beobachtete Apsidenbewegung eingesetzt und nachträglich an der Theorie geprüft wird.

III. Planetarische und andere störende Einflüsse.

19. Behandlungsmethoden. Jeder kleinen störenden Ursache kann man Rechnung tragen, indem man der Kräftefunktion ein Glied $\alpha\Omega$ hinzufügt, wo α eine kleine Konstante ist, deren Quadrat selten merklich ist. Ω bedeutet eine Funktion der Zeit, der Koordinaten, und eventuell der Geschwindigkeiten des Mondes.

Meist wird die Methode der Variation der Konstanten verwandt, wobei aber als neue Variabele nicht die Konstanten der elliptischen Bewegung, sondern die des Hauptproblems gewählt werden müssen, da jeder überhaupt in Betracht kommende Term durch die Wirkung der Sonne wesentlich beeinflußt wird.[151])

Wenn man von den kanonischen Gleichungen für die Variationen ausgeht, so braucht man nur auf Grund der *Delaunay*schen Theorie (Nr. **15**) den entsprechenden Schritt weiter zu gehen, indem man, falls α^2 vernachlässigt werden darf, in $\alpha\Omega$ die aus dem Hauptproblem sich ergebenden Werte der Konstanten einsetzt. *G. W. Hill*[152]) hat die Integration der Gleichungen für diese störenden Einflüsse auf eine Form gebracht, die unmittelbarer Anwendung fähig ist. Er findet nämlich, daß einem Gliede in $\alpha\Omega$ von der Form:

$$f(a, e, \gamma)\ \alpha k \cos(i_1 l + i_2 g + i_3 h + pt + p') = A \cos(\mu t + \mu'),$$

wo α, k, p, p' unabhängig von den Mondelementen sind, eine zugehörige Änderung der Elemente von folgender Form entspricht:

$$\frac{\delta a}{a},\ \delta e,\ \delta\gamma = (\Sigma i_q a_q)\frac{A}{\mu n' a^2}\cos(\mu t + \mu'),$$

$$\delta\varepsilon,\ \delta\varpi,\ \delta\vartheta = \left(\Sigma i_q b_q + \frac{1}{\mu}\Sigma j_q c_q\right)\frac{A}{\mu n' a^2}\sin(\mu t + \mu'), \qquad q = 1, 2, 3$$

wo

$$j_1 = a\frac{df}{da},\quad j_2 = e\frac{df}{de},\quad j_3 = \gamma\frac{df}{d\gamma}$$

und a_q, b_q, c_q numerische Größen sind, die für jedes Element verschiedene Werte haben und nur von den Derivierten der endgültigen *Delaunay*schen Elemente L, G, H nach a, e, γ abhängen, in denen die numerischen Werte von $m, e, e'\ \gamma, \frac{a}{a'}$, eingesetzt sind. *Radau*[153]) und *Newcomb*[154]) haben ähnliche Gleichungen, aber mit etwas anderen Werten

151) Fast alle früheren Behandlungen kranken daran, daß diese Überlegung nicht berücksichtigt worden ist.

152) Wash. Astr. Pap. 3 (1891), p. 390 = works 2, p. 336. Eine Skizze davon gibt *R. Radau*, Paris Bull. astr. 9 (1892), p. 361–63.

153) Paris Obs. Mém. 21 (1895) B, p. 35—36.

154) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 211—212; Carnegie Inst. Publ 72, chap. 2.

für a_p, b_p, c_p erhalten. Die Schwierigkeit, diese Werte genau zu berechnen, rührt von der langsamen Konvergenz der Potenzreihen nach m her, besonders bei den Koeffizienten, die Ableitungen nach n enthalten. *E. W. Brown*[155]) hat Gleichungen ähnlicher Form direkt aus seiner Theorie abgeleitet, wobei der numerische Wert von m auf Grund des letzten Resultates in Nr. **11** substituiert ist. Statt der obigen Form für A benutzt er die Derivierten von A nach n, e, k, den Konstanten seiner Theorie vor dem Übergang von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten, was in seinem Falle das bequemste ist. So werden die Variationen der Variabeln n, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 (Nr. **10**e) gefunden. In einzelnen Fällen werden von *Brown* die *Delaunay*schen Entwicklungen benutzt, diese aber kontrolliert und die aus der langsamen Konvergenz entspringenden Fehler als unmerklich nachgewiesen.

20. Der Einfluß der nichtsphärischen Figur der Erde und des Mondes. *Erde:* Sind A, B, C, J die Trägheitsmomente um die drei Hauptträgheitsachsen und um die Verbindungslinie der Mittelpunkte von Erde und Mond, so ist in hinreichender Näherung gemäß der Entwicklung des Erdpotentials in Kugelfunktionen

$$\alpha\Omega = \frac{A + B + C - 3J}{r^3}$$

oder, da man die beiden äquatorialen Trägheitsmomente der Erde als gleich annehmen kann, also $A = B$,

$$\alpha\Omega = \frac{3(C-A)}{2r^3}\left(\frac{1}{3} - \sin^2\delta\right),$$

wo δ die Deklination des Mondes ist.

Die Differenz $C - A$ von polarem und äquatorealem Trägheitsmoment kann durch Pendelbeobachtungen oder durch die Gleichung

$$\tfrac{3}{2}(C - A) = ER^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta)$$

bestimmt werden, wo E, R, α Masse, Äquatorealradius und Abplattung der Erde sind und β das Verhältnis von Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnet. Sind ferner λ_m, β_m, $\bar{\varepsilon}$ ekliptische Länge und Breite des Mondes und Schiefe der Ekliptik, so ist nach den gewöhnlichen Formeln der sphärischen Astronomie

$$\sin\delta = \sin\beta_m \cos\bar{\varepsilon} + \cos\beta_m \sin\lambda_m \sin\bar{\varepsilon}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man $\alpha\Omega$ als Funktion der Zeit und der Mondelemente ausdrücken. Bestimmungen der sich so ergebenden

155) Adams Prize Essay, Cambridge 1908, p. 10. Die verbesserte endgültige Form findet sich in Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 14, wo die Transformation von p_2, p_3 auf e, Y, gegeben ist.

Ungleichheiten in der Mondbewegung sind durchgeführt von *Laplace*[156]), *de Pontécoulant*[157]), *Hansen*[158]) — ziemlich vollständig auf Grund seiner Methode —, *Hill*[159]) — sehr vollständig nach der Methode von *Delaunay* —, *Brown*[160]) — vollständig bis auf 0″,01 in Länge und Breite. *Hill* drückt die Ungleichungen als Zusätze zu den Koordinaten, *Brown* als solche zu den Integrationskonstanten aus, was eine kürzere Darstellung gibt.

Mond: Laplace[160a]) betrachtete den Einfluß und bezeichnete ihn als unmerklich. *Hansen* (Nr. **25a**) schob eine (jetzt als nicht bestehend erkannte) Abweichung von Theorie und Beobachtung auf diese Ursache. *E. W. Brown*[160b]) findet mit den neuesten Bestimmungen der Abplattungen des Mondes kleine Zusätze zur Bewegung des Perihels und Knotens, die in letzterem Falle gerade an das Beobachtbare heranreichen.

21. Die direkten Planetenstörungen. Die Formeln für R in Nr. **3** sind für die direkten Planetenstörungen ohne weiteres benutzbar, wenn man statt x', y', z', m', r' die geozentrischen Koordinaten, Masse und geozentrischen Entfernung des Planeten: ξ, η, ζ, m'', D einsetzt. Für die Koordinaten des Mondes in der Störungsfunktion $\alpha\Omega$, welche sich so ergibt, sind die Werte einzusetzen, die das Hauptproblem ergibt, für die Planetenkoordinaten ihre als bekannt vorausgesetzten Funktionen der Zeit. Hat man alsdann die Störungsfunktion entwickelt, so ist die Methode von Nr. **19** anwendbar. *Hill*[161]) hat die Störungsfunktion in eine Summe von Produkten zerlegt, von denen je das eine nur von den geozentrischen Mondkoordinaten, das andere nur von den heliozentrischen Erd- und Planetenkoordinaten abhängt, von der Form:

$$\alpha\Omega = m''\left[\frac{r^2 - 3z^2}{4}\left(\frac{1}{D_0^3} - \frac{3\zeta^2}{D_0^5}\right) + \cdots\right].$$

156) Méc. cél. Livre 7, chap. 2; Livre 16, chap. 3; Paris Inst. .(math.) mém. 3 (1801), p. 198—206; Conn. des Temps pour 1823, p. 219—225; 332—35 (eine Neuberechnung der Resultate in der Méc. cél.); ibid. 232—239 = Oeuvres 13, p. 189—197, 205—212, 221—228 (der Anteil, der von der eventuellen Verschiedenheit der Hemisphären herrührt).

157) Système du monde 4, chap. 4.

158) Darlegung usw., Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 6 (1864), p. 459—474; ibid. 7 (1865), p. 273—322.

159) Wash. Astron. Papers 3 (1884), p. 201—344 = works 2, p. 179—320.

160) Lond. Monthly Not. 68 (1908), p. 454—455; Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 78—80. Eine Verbesserung in Lond. Monthly Not. 70 (1910), p. 3.

160a) Méc. Cél. Liv. 7, Nr. 21.

160b) Lond. Astron. Mém. 59 (1908), p. 80—81.

161) Amer. Journ. Math. 6 (1883), p. 115—130 = Works 2, p. 47—63.

Ist γ'' der Sinus der halben Neigung zwischen Planetenbahn und Ekliptik, h'' die Knotenlänge der Planetbahn, V'', r'' heliozentrische Länge und Radiusvektor des Planeten V' die Länge der Erde, so findet man:

$$\frac{1}{D^q} = \frac{1}{D_0^q} + \frac{q\gamma''^2 r' r''}{D_0^{q+2}} \{\cos(V' + V'' - 2h'') - \cos(V' - V'')\} + \cdots$$

wo

$$D_0^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(V' - V'').$$

Die verschiedenen Entwicklungen von D_0^{-q} werden in der Theorie der Hauptplaneten (VI 2, 13 Nr. 2) mitgeteilt.[162]) Im allgemeinen würden diese Störungen wegen der Kleinheit der Massen m'' und des Verhältnisses $\frac{a}{a''}$ unmerklich sein, wenn nicht bei den langperiodischen Störungen infolge des Auftretens kleiner Divisoren, d. h. der Kleinheit von μ (Nr. **19**) eine enorme Vergrößerung einträte, und einzelne Glieder sehr wohl merklich machte. Bei dem Fehlen einer allgemeinen Methode, um zu entscheiden, ob ein bestimmter Term langer Periode einen merklichen Koeffizienten gibt, und bei der großen Zahl solcher Terme ist die Untersuchung mühselig.

Nur zwei Terme mit Koeffizienten über 1″ in Länge sind bekannt.[162a]) Der eine stammt von Venus und hat bei einer Periode von 273 Jahren einen Koeffizienten über 14″.[162b]) Der andere ist bekannt als die „Jupiterevektion", die Periode ist nahe die der Evektion (Nr. **12**), und der Koeffizient ist 1″,14.[163])

---

162) In diesem Zusammenhange sei, als speziell auf die Mondtheorie bezüglich, für die Berechnung von Ungleichheiten hoher Ordnung verwiesen auf: *Flamme,* Diss. Paris 1887; *O. Callandreau,* Paris C. R. 115 (1892), p. 386—89; École pol. Journ., sér. II, 7 (1902), p. 29—99; *M. Hamy,* Paris Bull. astr. 10 (1893), p. 41—56, 84—92.

162a) *Gogou,* Obs. de Paris ann. mém. 17 (1883) A 1—101, zeigt, daß der Koeffizient von 7″,55, den *E. Neison* (Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 38 (1878) p. 49—53) einer von Mars herrührenden Ungleichheit zuschreibt, in Wirklichkeit unmerkbar ist; er erklärt den Irrtum in Lond. Astr. Soc. Mem. 48 (1885), p. 419—437.

162b) Diese Störung wurde von *Hansen* entdeckt, Astr. Nachr. 25 (1847), p. 325—332, Paris C. R. 24 (1847), p. 795—99; Lond. Astr. Soc. Mem. 16 (1847), p. 465—476, der für den Koeffizienten zu verschiedenen Zeiten die Werte 16″, 27″, 23″ fand. Dieser ist genau berechnet worden von *Delaunay,* Conn. des Temps, pour 1862, Addition, p. 3—58, und von *Tisserand,* Paris C R. 113 (1891), p. 5—9. Für eine andere Ungleichheit von 239jähriger Periode gab *Hansen* den Koeffizienten 23″ an, *Delaunay* hat jedoch gezeigt, daß derselbe in Wirklichkeit $< 0''{,}3$ ist: Paris C. R. 49 (1859), p. 923—27, Conn. des Temps pour 1863, Add., p. 1—56; siehe auch *Hamy, Radau, Newcomb, Brown,* Fußn. 162, 153, 154, 155, 160.

163) Entdeckt durch eine Analyse der Beobachtungen von *Newcomb,* Trans. Venus Pap. 3 (1876) und erklärt von *Neison* (= Nevill), Lond. Monthly Not. 37

Außer den erwähnten sind Berechnungen spezieller Ungleichheiten von *E. Neison* (Nevill)[164]), *E. v. Haerdtl*[165]) und anderen Mondtheoretikern[166]) ausgeführt worden.

Der erste Versuch, eine vollständige Liste der Planetenstörungen aufzustellen, stammt von *Radau*[167]), der *Hills* Teilung der Störungsfunktion und dessen Variationsgleichungen mit wenig veränderten numerischen Werten (Nr. **19**) benutzt. Er entwickelt jeden Planetenfaktor nach Potenzen der Planetenelemente und benutzt für die Mondfaktoren *Delaunays* Theorie. Es werden über 120 Terme in Länge erhalten. *Newcomb*[168]) gab 1894 eine allgemeine Methode zur Behandlung des Problems, die er später durchführte.[169]) Jeder Planetenfaktor wird numerisch aus speziellen Werten entwickelt, während die Mondfaktoren und ihre Ableitungen teils aus *Delaunays*, teils aus *Browns* Theorie entnommen werden. Er benutzt seine eigene Gleichungsform (vgl. Nr. **19**). Seine Liste ist etwas umfangreicher als die *Radaus* bei etwa gleicher mittlerer Genauigkeit. Beide Autoren schließen die indirekte Wirkung (vgl. Nr. **22**) ein.

Brown[170]) nimmt sich vor, alle Planetenstörungen über 0″,01 zu ermitteln. Er teilt mittels einer allgemeinen Formel die Störungsfunktion in *Hills* Art und zeigt, daß die Planetenfaktoren als Ableitungen von $\frac{1}{D}$ nach a', ε', γ'', h'' dargestellt werden können. *Leverriers* Buchstabenentwicklung von $\frac{1}{D}$ kann daher zur Ableitung aller dieser Faktoren benützt werden, statt jeden einzelnen entwickeln zu müssen. Kurze Verfahren[171]) zur Berechnung der auftretenden Funktionen von $\frac{a'}{a''}$ werden eingeführt und die numerischen Werte in Tafeln gegeben. Die Mondfaktoren und ihre Derivierten entnimmt *Brown*

(1877), p. 248, der auch (ib. p. 359) den richtigen Koeffizienten berechnete, wie verschiedene spätere Untersuchungen bestätigten. Der Koeffizient schließt die indirekte Wirkung ein.

164) Lond. Astr. Soc. Monthly Not., vols. 37, 38, 42, 45, 46, 47; jedoch ist zu bemerken, daß einzelne seiner Resultate angezweifelt worden sind.

165) Wien Denkschr. 59 (1892), p. 385—408; Paris Bull. Astr. 10 (1893), p. 124—130; 12 (1895), p. 145—48.

166) Siehe *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 18.

167) Par. Obs. Ann. 21 (1895), B p. 1—114.

168) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 97 - 295.

169) Carnegie Inst. Publ. 72 (1907), p. 1—160.

170) Adams Prize Essay, Cambr. 1908, p. 1—93. Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 24—77.

171) Weiter verbessert von *R. T. A. Innes*, Lond. Monthly Not. 69 (1909), p. 633—638; 70, p. 194—196.

seiner eigenen Theorie unter Beachtung des letzten Satzes aus Nr. **11**. Mittels einer Näherungsformel, die unmittelbar eine obere Grenze für den Betrag jeder Störung liefert, vermag er etwa hundert Terme auszusondern, die allein Koeffizienten über 0″,01 geben können. Diese nebst den kurzperiodischen Termen werden genau berechnet. *Browns* schließliche Liste[172]) enthält, die indirekten Störungen eingeschlossen, über 400 Terme.

22. Die indirekten Planetenstörungen. Diese rühren von den Störungen der Erdbahn durch die Planeten her. Sie werden gleich von vornherein formal berücksichtigt in den Theorien von *Hansen* und *Brendel* (Nr. **17**, **18**), bleiben dagegen in den anderen Theorien einer besonderen nachträglichen Bestimmung überlassen. Die ursprünglichen elliptischen Werte x', y', z' erhalten dadurch kleine Zuwächse $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, so daß die Zusatzstörungsfunktion lautet:

$$\alpha\Omega = \delta R = \frac{\partial R}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial R}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial R}{\partial z'}\delta z'.$$

Vielfach ist es bequemer, diese Störungen so zu berücksichtigen, daß man die Zuwüchse $\delta a'$, $\delta e' \ldots$ benutzt, welche die Sonnenelemente erhalten. Da nun in dem Hauptproblem eine feste Ekliptik als Bezugsebene benutzt wird, so sind die Sonnenelemente, welche die Lage dieser Ebene bestimmen, nicht die instantanen; es ist also noch eine besondere Untersuchung erforderlich, um den Einfluß der Bewegung der Ekliptik auf die Mondbahn zu bestimmen. Die Säkularbeschleunigungen, obwohl aus indirekten Planetenstörungen herrührend, sollen in Nr. **23** besonders behandelt werden.

Umfassende Untersuchungen über die entsprechenden periodischen Ungleichheiten sind zusammen mit den direkten Störungen angestellt von *Adams*, *Newcomb*, *Brown* (siehe Nr. **21** und die dort angegebenen Zitate). *Newcomb*[173]) hat das Problem als nochmals gestörtes Dreikörperproblem aufgefaßt. Er bestimmt die Variationsgleichungen der Elemente des Systems, wenn eine äußere störende Kraft wirkt. Er zeigt, wie sich diese in zwei Gruppen teilen lassen, von denen sich die eine hauptsächlich auf die Störungen der Erdbewegung, die andere auf die der Mondbewegung bezieht. Im Verlaufe der Arbeit entdeckt

172) Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 94—103. In Lond. Montly Not. 68 (1908), p. 148—170 wird mit den von *Radau* und *Newcomb* berechneten Formen verglichen, und es werden die meisten Unstimmigkeiten aufgeklärt.

173) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 105—203. Die Methode dieser Abhandlung ist kurz dargestellt und vervollständigt von *E. W. Brown,* Lond. Math. Proc. 28 (1897), p. 130—142. Es ist dabei in § X ein kleiner Irrtum untergelaufen; siehe *E. T. Whittacker,* Brit. Ass. Rep. 1899, p. 156.

er ein bemerkenswertes Theorem über die Wirkung säkularer Änderungen der Erdbahn auf die Mondbewegung (vgl. Nr. 23).

Brown hat bei zwei Gelegenheiten[174]) den Fall behandelt, daß die Parameter in einem dynamischen Gleichungssystem zeitlich variabel werden; hierunter gehören indirekte Störungen jeder Art. Ist u eine Funktion von t und den Parametern und erzeugen kleine variable Zusätze in diesen Parametern die Zusätze δu und $\delta \frac{du}{dt}$ in u und $\frac{du}{dt}$, so erhält man die Wirkung der Veränderlichkeit der Parameter, indem man zur Störungsfunktion einen Betrag $U\left(\frac{d}{dt}\,\delta u - \delta \frac{du}{dt}\right)$ hinzufügt, wo U eine gewisse Funktion der Zeit und der Parameter ist, die aus dem ursprünglichen Problem gewonnen wird. Man hat dann die Variationsgleichungen für die Integrationskonstanten des ursprünglichen Problems zu bilden und aufzulösen und die gefundenen variabeln Werte der Integrationskonstanten wie der Parameter in die ursprüngliche Lösung zu substituieren. *Newcombs* erwähntes Theorem wird als ein Spezialfall wiedergefunden. Bei der Anwendung auf die Mondtheorie ergibt sich für langperiodische Terme, wo δ^2 vernachlässigt werden kann, daß der kleine Divisor in der Mondbewegung höchstens im Quadrat auftritt, selbst wenn die entsprechende Ungleichung in der Erdbewegung sein Quadrat enthält.

Eine besondere Untersuchung, die hierunter fällt, ist die Bestimmung des Einflusses, den die Veränderlichkeit der Ebene der Erdbahn auf die Mondbewegung ausübt.

Das Hauptglied, das von der Bewegung der Ekliptik hervorgerufen wird, hat in Breite einen Koeffizienten von 1″,4, in Länge von 0″,3. *Laplace*[175]) hatte dieses Glied für unmerklich gehalten, und erst *Hansen*[176]) konnte zeigen, daß, wenn auch kleine, so doch merkliche periodische Glieder entstehen. Später sind nach verschiedenen Methoden die indirekten Planetenstörungen untersucht von *Adams*[177]), *Lespiault*[178]), *A. Cayley*[179]), *G. B. Airy*[180]), *G. W. Hill*[181]), *Radau*[182]),

---

174) Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), p. 333—350; 6 (1905), p. 332—343. Der Beweis in Art. 17 des ersten Aufsatzes ist falsch; oben ist auf den zweiten Bezug genommen.

175) Méc. cél. Livre 7, Nr. 3.

176) Astr. Nachr. 29 (1849), p. 193—196; Darlegung (1860), p. 118—120, 480—91.

177) In Artikel 113 von *Godfray*, Lunar theory (1. Ed. 1853); Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 41 (1881), p. 385—403 = Works I, p. 231—52.

178) Bordeaux phys. mém. 2 (1861), p 7—58.

179) Lond. Astr. Soc. Mem. 31 (1863), p. 43—56 = Works 3, p. 505—15.

180) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 41 (1881), p. 264—71, 375.

Newcomb[183]) und *Brown*[184]), der auch die Wirkungen kleiner periodischer Schwankungen der Ekliptik berücksichtigt.

23. Die säkularen Beschleunigungen. 1693 fand *Halley*[185]) bei einer Berechnung alter Finsternisse, daß die mittlere Umlaufszeit des Mondes nicht ganz konstant sein könne. Seither haben verschiedene Autoren (vgl. Nr. 26) dieses Element aus den Beobachtungen hergeleitet mit dem Resultat einer Zunahme der mittleren Länge von $6''t_s^2$ bis $13''t_s^2$, wo t_s die Anzahl der Jahrhunderte ist: der Koeffizient von t_s^2 wird säkulare Beschleunigung genannt. Die letzten sind *Newcomb*[186]), der 8″ erhält, und *Cowell*[187]), der Beschleunigungen von 7″ bzw. 2″,4 in den Winkelabständen der Sonne vom Mond bzw. vom Mondknoten findet. Die Werte hängen wesentlich von der Bewertung der alten Finsternisberichte ab.[188])

Als analytisch-dynamische Ursache der Erscheinung entdeckte *Laplace*[189]) 1786 die Veränderlichkeit von e'; die erste Näherung ergab etwa 10″ für diese Störung in guter Übereinstimmung mit der damaligen Berechnung aus den Beobachtungen. Seine unmittelbaren Nachfolger *Plana* und *Pontécoulant* verfuhren, um die höheren Näherungen zu erlangen, fälschlicherweise so, daß sie die Differentialgleichungen integrierten, als ob e' konstant wäre, und erst nach erfolgter Integration die zeitliche Veränderlichkeit dieses Elementes berücksichtigten; sie erhielten auf diesem Wege nur unwesentliche Änderungen von Laplaces Wert. Erst *Adams*[190]) führte, als er eine strenge Berechnung der Säkularbeschleunigung vornahm, richtigermaßen die Veränderlichkeit von e' bereits in die Differentialgleichungen ein und fand auf die Weise andere Terme höherer Ordnung, welche den Laplaceschen (richtigen) ersten Näherungswert auf fast die Hälfte reduzierten. Seine Resultate und Methoden wurden bestritten[191]) von *Hansen*[192]), *Plana*

181) Amer. Ann. math. 1 (1884), p. 5—10, 25—31, 52—58 = Works 2, p. 64—79.

182) Paris Bull. Astr. 9 (1892), p. 363—373.

183) Carnegie Inst. Publ. 72 (1907), p. 127—132.

184) Lond. Monthly Not. 68 (1908), p. 450—454; Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 46—48.

185) Lond. Phil. Trans. 17 (1693), p. 913—921.

186) Lond. Monthly Not. 69 (1909), p. 167.

187) Lond. Monthly Not. 66 (1906), p. 352.

188) Wichtig hierfür sind Arbeiten von *J. K. Fotheringham,* in den Lond. Monthly Not. 69 (1909).

189) Paris Inst. Mém. 2 (1788), p. 126—182 = Works 11 (Ed. 1895), p. 243—271.

190) Lond. Phil. Trans. 143 (1853), p 397—406 = Works 1, p. 140—157; Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 40 (1880), p. 472—482 = Works 1, p. 211—223; Works 2, p. 120—29, 237—38.

und *de Pontecoulant*[193]), jedoch späterhin bestätigt durch *Delaunay*[194]), der[195])die vollständigste analytische Entwicklung des Koeffizienten der Säkularbeschleunigung gegeben hat, *Plana*[196]), *Cayley*[197]), *Lubbock*[198]) und *P. Puiseux*[199]). Weitere numerische Bestimmungen sind dann noch von *Newcomb*[200]), *Brown*[201]), *Andoyer*[202]) und *v. Brunn*[203]) durchgeführt worden. *Laplace*[204]) konnte nun zeigen, daß, ebenfalls wegen der säkularen Veränderlichkeit der Erdexzentrizität, auch die mittleren Bewegungen von Apsiden und Knotenlinie Beschleunigungen erfahren, und gab das Verhältnis der Werte dieser beiden Beschleunigungen an. Er hat für beide die ersten (gleichen) Näherungswerte gegeben. Weiterhin haben dann auch die meisten der vorerwähnten Autoren Werte dafür erhalten.

Die älteren Methoden zur Berechnung der Säkularakzelerationen sind bei größeren Genauigkeitsansprüchen sehr mühsam. Die meisten der erwähnten Autoren, die überhaupt korrekt rechneten, haben sich mit den ersten zwei oder drei Gliedern nach m begnügt. *Delaunay* hat indessen nach seiner Methode eine allgemeine Entwicklung gegeben, die nach einer Korrektur durch *Andoyer*[202]) noch die genaueste in dieser Form ist. Die Rechenarbeit ist durch die Theoreme von Newcomb und Brown einfach geworden. *Newcomb*[205]) zeigte, daß, wenn die Werte der Koordinaten im Hauptproblem durch Delaunays Endwerte von L, G, H (vgl. Nr. **15**) ausgedrückt werden, der variable

---

191) Die Diskussion wurde hauptsächlich geführt in Paris C. R. und Lond. Astr. Soc. Monthly Not. von 1859—66. Ihre Geschichte ist zusammengefaßt worden von *Delaunay*, Conn. des Temps 1864, Add. p. 21—68; *Glaisher*, Adams Works 1, p. XXXV—XXXIX, *Tisserand*, Méc. cél. 3, chap. 13, 19.

192) *Hansen* gibt schließlich die Richtigkeit von Adams Theorie zu, Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 26 (1866), p. 173.

193) Paris C. R. 48 (1859), p. 137—8, 817—827; 49 (1859), p. 309—14; Conn. des Temps 1862 App., p. 59—68; 1864 Add., p. 21—68.

194) Paris C. R. 72 (1871), p. 495—96. Teile davon sind geprüft von *Andoyer*.

195) Ib. 74 (1872), p. 152—3.

197) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 22 (1862), p. 173—228 = Works 3, p. 522—561.

198) Lond. Astr. Soc. Mem. 30 (1862), p. 38—52.

199) Paris Éc. norm. ann. 8 (1879), p. 361—444.

200) Carnegie Inst. Publ. 72, p. 119.

201) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 57 (1897), p. 342—349.

202) Paris C. R. 135 (1902), p. 432.

203) Die Säkularbeschleunigung des Mondes, Diss., Göttingen 1905.

204) Paris Inst. (math.) mém. 2 (1799), p. 126—182 = Oeuvres 12, p. 191—234; Conn. des Temps 1800, p. 362—378 = Oeuvres 13 (Ed. 1895), p. 3—4.

205) Wash. Astr. Pap. 5 (1894), p. 191.

Wert von e' für den konstanten Wert eingesetzt werden darf, wo immer er in diesen Ausdrücken auftritt. Wenn dann L, G, H durch n, e, Y, e' ausgedrückt werden, so können die Änderungen von n, e, Y aus denen von e' gefunden werden mittels der Bedingung:

$$O = \delta L = \frac{\partial L}{\partial n}\delta n + \frac{\partial L}{\partial e}\delta e + \frac{\partial L}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial L}{\partial e'}\delta e'$$

und zweier ähnlicher für δG und δH. Die Säkularänderungen der mittleren Bewegung, des Perigäums und des Knoten werden dann gegeben durch

$$\int \delta n dt, \quad \int \delta \pi dt, \quad \int \delta \theta dt,$$

wo π und θ die mittleren Bewegungen von Perigäum und Knoten sind. *Brown*[206]) zeigte ferner: Wenn aP das konstante Glied in der schließlichen trignometrischen Entwicklung von a/r im Hauptproblem ist, und wenn p_2, p_3 die kanonischen Konstanten aus Nr. **10**b sind, dann können bei Vernachlässigung von $(a/a')^2$ — das nur unmerkliche Glieder gibt — die Veränderungen von n, e, Y aus den drei Gleichungen erhalten werden:

$$p_2\delta\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} + p_3\delta\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{3}{2}n^2a^3\delta\frac{\partial P}{\partial \alpha} \qquad (\alpha = n, e, y)$$

wo:

$$\delta = \delta n\frac{\partial}{\partial n} + \delta e\frac{\partial}{\partial e} + \delta Y\frac{\partial}{\partial Y} + \delta e'\frac{\partial}{\partial e'},$$

p_2, p_3 läßt sich direkt finden (vgl. Nr. **11**). Da P die ersten Potenzen von e^2, Y^2 nicht enthält und p_2, p_2 bzw. diese Faktoren enthalten, so wird speziell der Teil von δn, der nur von m und $\delta e'$ abhängt, gleich:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\delta n = -\frac{\partial^2 P}{\partial n \partial e'}\delta e'.$$

Durch Kombination der allgemeinen Entwicklungen mit seiner halbnumerischen Theorie findet er[208]), mit $\delta e' = -[6{,}5968 - 10]$ im Jahrhundert und unter Berücksichtigung eines Terms zweiter Ordnung[209]) (vgl. Nr. **24**), für die totalen Säkularbeschleunigungen

mittl. Bewegung $6''{,}02 \pm 0''{,}02$; Perigäum $-38''{,}2 \pm 0''{,}1$;
Knoten $6''{,}36 \pm 0''{,}02$,

wobei die Fehler die größtmöglichen aus allen bekannten Unvollkommenheiten der Mondtheorie hervorgehenden sind. Die Werte stimmen innerhalb $0''{,}2$ mit den erwähnten von *Delaunay-Andoyer*,

206) Lond. Math. Proc. 28 (1896), p. 154.

208) Lond. Month. Not. 57 (1897), p. 342—349; Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 56. Andoyer erhält denselben Wert, siehe Fußnote 202.

209) Lond. Month. Not. 70 (1909), p. 148.

Newcomb und *v. Brunn* überein, wenn der angeführte *Newcomb*sche Wert[210]) von $\delta e'$ benutzt wird.

Es bleibt demnach, wenn man die mittlere Länge durch

$$nt + \varepsilon + 6'',0\frac{t^2}{100}$$

darstellt (t in Jahren gerechnet), eine Differenz von $2''$ in dem mit t^2 multiplizierten Gliede zwischen Theorie und Beobachtung bestehen. Versuche, diese Differenz aus der Gravitationstheorie allein zu erklären, hat *V. Puiseux*[211]) gemacht, indem er die höheren Glieder, die von t^3, t^4 abhängen, und den Einfluß der Säkularänderung der Ekliptik[210]) prüfte; er fand diese Einflüsse unmerklich innerhalb historischer Zeiträume. Zum gleichen Resultat gelangt *v. Brunn*[211a]), der für Erdexzentrizität und -perihellänge statt der säkularen die langperiodische Form einführt. *A. Weiler*[212]) glaubte, daß die Figur der Erde die Differenz erklären könnte, aber *Seeliger*[213]) und *Hill*[214]) zeigten, daß dadurch keine Glieder der erforderten Art hervorgebracht werden können; diese Berichtigung wurde dann von *Weiler* selbst vollkommen bestätigt.[215])

Die Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung werden jetzt meist auf die Wirkung der Flutreibung geschoben, die die Umdrehungsdauer der Erde (unser Zeitmaß) und die mittlere Bewegung des Mondes ändert. *P. H. Cowell*[216]) glaubt auch an eine Beschleunigung der mittleren Länge der Erde; aber die von ihm gefundenen Abweichungen können ebenso gut unbekannten Änderungen der mittleren Länge des Mondes und seines Knotens zur Last fallen.

24. Störungen zweiter Ordnung. In den Nummern **20—23** sind allein Glieder von erster Ordnung in den störenden Kräften betrachtet; die aus den Quadraten und Produkten der störenden Kräfte entspringenden Glieder studiert *Brown*[217]). Es zeigt sich, daß die kleinen Divisoren in dieser zweiten Näherung im allgemeinen nicht in höherer Ordnung auftreten als in der ersten. Es ergeben sich einige langperiodische Terme mit kleinen Koeffizienten.

---

210) Wash. Astr. Pap. 6 (1895), p. 9.

211) Paris Mém. div. Sav. 21 (1875), p. 263—391.

211a) Diss. Göttingen 1905.

212) Astr. Nachr. 90 (1877), col. 369—82; 91 (1878), col. 1—12, 17—30, 33—48.

213) Ibid. 91 (1878), col. 193—206.

214) Ibid., col. 251—54 = Works 1, p. 282—283.

215) Ibid. 92 (1878), col. 289—300, 305—318, 321—328.

216) Lond. Month. Not. 66 (1906), p. 3—5.

217) Lond. Astr. Mem. 59 (1908), p. 82—93.

Eine von *Stockwell*[218]) zuerst bemerkte säkulare Änderung ergibt sich aus der Kombination der Bewegung der Ekliptik mit Termen, die der Abplattung der Erde entspringen. *Brown*[219]) findet als Zusätze zu den Säkularbewegungen der mittleren Länge, des Perigäums und des Knotens bzw. + 0″,20, + 0″,11, — 0″,10.

25. Andere mögliche störende Ursachen[216]). Es sind zu erwähnen:

a) Die Annahme, daß der Exponent des Attraktionsgesetzes nicht streng $= -2$, sondern $= -2-\delta$ ist (*Halls*[216a]) Hypothese). Der Wert $\delta = 0{,}00000015$ würde die bekannte Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur erklären, ohne die Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung bei den übrigen Planeten zu stören[217a]). Die gleiche Annahme würde in der Mondtheorie eine Vermehrung der jährlichen mittleren Apsidenbewegung um 1″,5 hervorbringen, ohne die Knotenbewegung merklich zu beeinflussen. *Hansens* Theorie zeigt in der Apsidenbewegung gerade diese Differenz[218a]), welche *Hansen* selbst einem Unterschied zwischen Schwerpunkt und Figurmittelpunkt zuschrieb[219a]), aber er findet gleichzeitig auch eine Differenz in der Knotenbewegung von — 2″,86. *Browns*[220]) Rechnungen haben endlich gezeigt, daß die theoretischen mittleren Bewegungen mit dem Beobachteten innerhalb 0″,3 übereinstimmen, so daß δ keinesfalls größer sein kann als 0,00000004. Vgl. Fußn. 233a).

b) Eine Änderung der Periode der Erdrotation infolge der Ge-

---

218) Theory of the moons motion, Philadelphia 1881, p. 363. Er setzt die veränderliche Neigung statt der konstanten in die fertige Lösung. Der theoretische Fehler macht in diesem Falle praktisch fast nichts aus.

219) Lond. Month. Not. 70 (1909), p. 143—148.

216a) Vgl. auch den Artikel VI 2 (*Oppenheim*).

217a) *Newcomb,* Astronomical Constants, Washington 1895, p. 119.

218a) *Hansen* [Astr. Nachr. 19 (1842), col. 191—198] sagt, daß ein Fehler von 0″,1 in der Evection einen solchen von 1″,47 in der jährlichen Apsidenbewegung hervorbringt und *Wand* [Astr. Nachr. 126 (1891), col. 129—138] stellt fest, daß die Koeffizienten der periodischen Terme bei *Hansen* nicht zuverlässig genug sind, um die Apsidenbewegung auf mehr als 2″ genau garantieren zu können.

219a) Lond. Astr. Soc. Mem. 24 (1856), p. 29—89; Darlegung, p. 175, 474—479; *Newcomb* [Phil. Mag. (4) 37 (1869), p. 32—35] ist der Meinung, daß die Korrektion unberechtigt ist. Aber seine Argumente wurden von *Hansen* nicht anerkannt, Leipz. Ber. 23 (1871), p. 1—12.

220) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903), p. 396—397. Eine frühere Diskussion des Gegenstandes durch den gleichen Autor findet sich ibid. 57 (1897), p. 332—341. Siehe auch *P. H. Cowell,* ibid. 65 (1905), p. 275.

zeitenreibung[221]), säkulare Kontraktion des Erdkörpers oder Massenzuwachs durch herabfallende Meteore[222]). Es ist möglich, daß die beiden erstgenannten Ursachen merkbare Änderungen hervorbringen[223]), dagegen ist es unwahrscheinlich, daß die letztere eine beobachtbare Wirkung haben kann.

c) Der Einfluß eines widerstehenden Mittels ist höchstwahrscheinlich zu klein, um sich in den Beobachtungen bemerkbar zu machen.

d) Eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwerkraft nach irgendeinem wahrscheinlichen Gesetz wird schwerlich imstande sein, die Mondbewegung merklich zu beeinflussen, ohne zugleich auf die Planetenbewegung mehr, als es die Erfahrung zuläßt, einzuwirken[225]).

e) Elektrodynamische Theorien der Gravitation und das Relativitätsprinzip. Diese würden sich wahrscheinlich nur in den Bewegungen des Knotens und der Apsidenlinie äußern.

Die einzigen annehmbaren Erklärungen für die Unstimmigkeiten bei der Säkularbeschleunigung dürften die beiden ersten unter b) genannten Ursachen sein.

Brown[226]) hat sich auch bemüht, *Newcombs* langperiodische empirische Terme (vgl. Nr. **26**) zu erklären. Magnetische Kräfte hält er trotz anderer Andeutungen magnetischer Wirkungen für unwahrscheinlich. Eine mögliche Wirkung der Mondlibration bleibt aus Mangel an Beobachtungsmaterial noch offen. Eine nahe Koinzidenz zwischen der Sonnenrotation und dem drakonitischen Monat würde genügen, wenn die Sonne eine Abplattung von $^1/_{2200}$ hätte. *D. St. Blancat*[227]) prüft die Wirkung eines etwaigen intramerkuriellen Planeten, dessen Masse aber dann der des Merkur vergleichbar angenommen werden müßte.

---

221) *Delaunay,* Paris C. R. 61 (1865), p. 1023—1032 = Journ. de Math. (2) 10 (1865), p. 401—411; *W. Ferrel,* Astron. Journ. 3 (1854), p. 138—141; *Airy,* Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 26 (1866), p. 221—235.

222) *Dufour,* Bull. Soc. Vaud. Laus. 9 (1868), p. 252—254.

223) *Thomson and Tait,* Natural Philosophy 2, App. G.

225) *R. Lehmann-Filhés* [Münch. Ber. 25 (1895), p. 371—422] zeigt einmal, daß eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft keine Beschleunigung, sondern eine Verzögerung hervorbringt, und zweitens, daß diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Ordnung 1000000 × Lichtgeschwindigkeit sein müßte, wenn nicht unmöglich große Störungen sich ergeben sollen.

226) Amer. Journ. Sc. ser. 4, 29 (1910), p. 529—539.

227) Fac. Toulouse Ann. (2) 9 (1907), p. 1—103.

26. Der gegenwärtige Stand der Mondtheorie. Eine zusammenfassende Darstellung vom gegenwärtigen Stande der Mondtheorie geben *Tisserand*[228]) und *Newcomb*[229]). Die vollständigste theoretische Bestimmung der Mondbahn, die zum Vergleich mit der Beobachtung zur Verfügung steht, ist noch immer die von *Hansen* (Nr. **17**), wenn man folgende Korrektionen daran anbringt: (1) eine Ungleichheit von 239 Jahre Periode und von 21″,47 Amplitude in Abzug bringt (Nr. **21**), deren Koeffizient in Wahrheit nur 0″,3 beträgt; (2) statt des empirischen Wertes von 12″,2 für die Säkularbeschleunigung, den *Hansen* verwendet, den theoretischen von 6″,0 einsetzt; (3) kleine Änderungen der Konstanten vornimmt, die teils von den Änderungen (1) und (2) und von eingeführten empirischen Termen herrühren, teils von den modernen Beobachtungen gefordert werden; und (4) einen oder zwei kleine zufällige Fehler berichtigt. Indeß ist es nicht vollkommen sicher, in welchem Umfange empirische Daten in die Theorie eingeführt sind (vgl. Nr. **17**). Immerhin bleiben, wenn man *Hansens* Resultate nach Anbringung der oben erwähnten Korrektionen als den gegenwärtigen Stand der eigentlichen Theorie des Mondes gelten läßt, eine Reihe nicht unerheblicher Differenzen zwischen Theorie und Beobachtungen, die *Newcomb*[230]), *Tisserand*[231]), *Neison*[232]) und *Cowell*[233]) zu eingehenden Untersuchen veranlaßt haben. Folgende empirischen Korrektionen nach *Newcomb* scheinen die Beobachtungen seit 1620 am besten darzustellen: 1. Eine Ungleichung mit einem Koeffizienten von ungefähr 13″ und einer Periode von 270 Jahren, die aber gegen das langperiodische Venusglied eine Phasenverschiebung von etwa 60° zeigt. 2. Eine Ungleichheit von 2—3″ Amplitude und der Periode von 60—70 Jahren. 3. Einige Terme kurzer Periode mit Koeffizienten bis an 1″. Ein Grund für diese Abweichungen ist nicht bekannt (vgl. Nr. **25**).

Eine ausführliche Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung hat *Cowell*[234]) unternommen, der die verbleibenden Differenzen auf Glieder von der Periode vorgegebener theoretischer Terme geprüft und so deren Koeffizienten empirisch bestimmt hat. Die Veri-

228) Méc. cél. 3, chap. 19 = Paris Bull. Astr. 8 (1891), p. 481—503.

229) Rome Math. Congress 1 (1908), p. 135—143.

230) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 63 (1903), p. 316—324.

231) Méc. Cél. 3, p. 414.

232) Lond. Astr. Soc. Mem. 48 (1884), p. 283—418.

233) Lond. Month. Not. 65 (1905), p. 34—53. Vgl. auch die Diskussion in den Lond. Month. Not. 1903—1909.

234) Zahlreiche Arbeiten in der Lond. Month. Not. 1903—1907.

fikation von etwa 300 Koeffizienten bestätigt die allgemeine Verläßlichkeit der theoretischen Werte.[233a])

Vollständige Vergleichungen der Resultate verschiedener moderner Theorien sind ausgeführt von *Newcomb* und *Maier*[235]), die *Hansens* Theorie in *Delaunays* Form überführten und mit letzterer verglichen; von *Cowell*[236]), der die Terme in *Hansens* Tafeln in ähnlicher Weise transformierte; und von *Brown*[237]), der die Koeffizienten seiner Theorie im Hauptproblem mit denen von *Hansen* und[238]) in den planetaren Gliedern mit denen von *Radau* und *Newcomb* verglich. Eine teilweise Vergleichung der Resultate seiner noch unpublizierten Theorie mit *Hansen* und *Brown* führte *E. Nevill*[239]) aus.

27. Tafeln der Mondbewegung. *Clairaut*[240]) war der erste, der Tafeln zur Berechnung des Mondortes zu jeder beliebigen Zeit angab, die allein auf die Gravitationstheorie gegründet waren; sie wurden in verbesserter Gestalt 1765[241]) neu herausgegeben. Auch *Euler*[242]) brachte seine Ergebnisse in Tabellenform. Eine eigenartige Stellung nehmen die Tafeln von *Tobias Mayer*[243]) ein, indem für ihre Herstellung die Argumente aus der Theorie hergenommen, die Koeffizienten jedoch aus einer größeren Reihe von Beobachtungen bestimmt wurden; sie sind späterhin unter Benutzung der inzwischen zahlreich ange-

---

233a) *Newcombs* letzte Arbeit (Wash. Astr. Pap. 9 (1913) Part. 1) enthält eine Vergleichung von Sternbedeckungen seit 1620 mit der nach *Browns* Theorie korrigierten *Hansen*schen Theorie. *Brown* hat in Fortsetzung von *Cowells* Untersuchungen ähnlich eine Vergleichung der *Greenwich*er Meridianbeobachtungen seit 1750 ausgeführt (Lond. Monthly Not. 73 (1913), p. 692—714; 74 (1914), p. 156—167, 396—424, 552—568). Die allgemeinen Schlüsse haben sich hierdurch nicht geändert, und es ist jetzt sicher, daß die empirischen Terme nicht auf Beobachtungsfehlern beruhen. *Brown* zeigte, daß innerhalb der Genauigkeit von Theorie und Beobachtung die theoretischen Werte der mittleren Bewegung von Perigäum und Knoten mit den beobachteten übereinstimmen, wenn man der Erdabplattung den Betrag 1/293.5 gibt. Die Unterschiede in den jährlichen Bewegungen sind dann kleiner als 0″.03 (vgl. Nr. 25a). Diese Arbeiten enthalten auch die letzten Werte der Integrationskonstanten. Die letzte Zusammenfassung siehe *Brown*, Lond. Observatory 37 (1914), p. 206—211.

235) Wash. Astr. Pap. 1 (1880), p. 57—107.

236) Lond. Month. Not. 64 (1904), p. 159—168.

237) Ibid. 65 (1905), p. 276—296.

238) Ibid. 68 (1908), p. 148—170.

239) Ibid. 65 (1905), p. 658—662.

240) Théorie de la Lune, 1. Aufl., St. Petersburg 1752.

241) Théorie de la Lune, 2. Aufl., St. Petersburg 1765.

242) Theoria motuum Lunae (2. Theorie), St. Petersburg 1772

243) London 1755; verbessert 1770.

häuften Beobachtungen verbessert worden von *C. Mason*[244]), *J. T. Burg*[245]), *J. K. Burckhardt*[246]). *Damoiseau*[247]) hat auf Grund seiner Theorie Mondtafeln veröffentlicht, die, neben denen *Burckhardts*, bis zum Erscheinen der *Hansen*schen am meisten im Gebrauch waren. Die Tafeln *Hansens* endlich[248]) mit den von *Newcomb* für dieselben angegebenen Korrektionen[249]) liegen allen Mondephemeriden bis auf den heutigen Tag zugrunde.

Auch nach *Planas* Theorie sind nach Anbringung einiger Korrektionen von *B. Peirce*[250]) Tafeln gerechnet worden.

Tafeln, die unter *R. Radaus* Leitung aus *Delaunays* Theorie mit Verbesserungen und Zusätzen aus verschiedenen Quellen konstruiert sind[251]), werden zukünftig für die Mondephemeride der Connaissance des Temps gebracht werden. *E. W. Brown* hat Tafeln auf Grund seiner Theorie in Arbeit (Nr. **16**).

244) London 1787.
245) Paris 1806.
246) Paris 1812.
247) Tables de la Lune, Paris 1828.
248) Tables de la Lune, London 1857.
249) Corrections to *Hansen*'s Tables etc., Papers publ. by Venus Commission Pt. III, p. 1—51.
250) Washington 1853/4.
251) Paris 1911.

(Abgeschlossen Juli 1914.)

VI 2, 15. THEORIE DER PLANETEN.

VON

KARL F. SUNDMAN

IN HELSINGFORS

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Numerische Verhältnisse.
2. Die Differentialgleichungen der Bewegung.
3. Die erste Annäherung. Das Zweikörperproblem.
4. Die Störungen.

I. Die Methode der Variation der Konstanten.

5. Anwendungsweise der Methode in der Störungstheorie.
6, 7. Die Methode der Variation der elliptischen Elemente. Differentialgleichungen.
8. Integration.
9. Verschiedene Arten von Gliedern und deren Klassifikation.
10. Säkulare Störungen.
11, 12. Angenäherte Berechnung der säkularen Werte der Elemente.
13. Die säkularen Störungen der kleinen Planeten.
14. Säkulare Glieder höheren Grades.
15. Berücksichtigung der säkularen und langperiodischen Störungen in den periodischen Gliedern.
16. Langperiodische Glieder.
17. Die Lücken in den mittleren Bewegungen der kleinen Planeten. Libration.
18. Die Methode von Poincaré.

II. Die Hansensche Methode.

19. Vorbemerkung.
20. Die Hansenschen beweglichen Koordinaten. Ideale Koordinaten.
21. Die Differentialgleichungen der Bewegung in der instantanen Bahnebene.
22. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der Bahnebene und die Lage der x-Achse.
23. Differentialgleichungen zur Bestimmung des Radiusvektors und der mittleren Anomalie.
24. Bestimmung der Funktion $\overline{W}$.
25. Bestimmung der Breite.

26. Weitere Ausführung der Methode.
27. Integration mit der Zeit als unabhängiger Veränderlichen.
28. Die exzentrische Anomalie als unabhängige Veränderliche.

III. Koordinatenstörungen.

29. Störungen der rechtwinkeligen Koordinaten.
30. Störungen der polaren Koordinaten.

IV. Theorie von Gyldén.

31. Vorbemerkung.
32. Differentialgleichungen der Gyldénschen Koordinaten.
33. Zerlegung der Variablen.
34. Entwicklung der Größen P, Q und R. Fundamentale Entwicklung.
35. Diastematische Entwicklung.
36. Einteilung der Glieder.
37. Integration.
38. Integration der elementaren und charakteristischen Glieder.
39. Spezielle Ausarbeitungen und Anwendungen der Gyldénschen Methode. Methode von Brendel.

V. Verschiedene Methoden.

40. Methode von Backlund.
41. Die Jupitergruppe.
42. Angenäherte Störungen.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.

P. S. Laplace, Traité de mécanique céleste I—V. Paris 1799—1827. (Cit.: méc. cél.)

P. G. de Pontécoulant, Théorie analytique du système du monde I, III. Paris 1829—1834.

P. A. Hansen, Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1831.

U. J. J. Leverrier, Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris, 1855—1877.

P. A. Hansen, Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Abh. I—II—III. — Abh. d. K. S. Ges. d. Wiss. III—IV—V. Leipzig 1857—1861.

J. F. Encke, Über die allgemeinen Störungen der Planeten. Berliner Astr. Jahrbuch für 1857, Berlin 1854.

H. Resal, Traité élémentaire de mécanique céleste, 2e édition. Paris 1884.

O. Dziobek, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888.

F. Tisserand, Traité de mécanique céleste I, IV. Paris 1889, 1896.

H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I—III. Paris 1892—1899.

O. Backlund, Über die Bewegung einer gewissen Gruppe der kleinen Planeten. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, VIIe Ser., 38 Nr. 4. St. Petersburg 1892.

H. Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales I. Stockholm 1893, II. 1909.
K. Bohlin, Formeln und Tafeln zur gruppenweisen Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ser. III. Upsala 1896.
N. Herz, Artikel „Mechanik des Himmels" in Valentiners Handwörterbuch der Astronomie. Breslau 1898.
M. Brendel, Theorie der kleinen Planeten I—IV. Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Neue Folge I, VI, VIII. Berlin 1898—1911.
F. R. Moulton, An Introduction to Celestial Mechanics. New York 1902.
C. V. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels I, II. Leipzig 1902, 1907.
H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste I. Paris 1905.

1. Numerische Verhältnisse. Da eine strenge und allgemeine Lösung des Problems der Planetenbewegung nicht gelungen ist, mußte man für praktische Zwecke geeignete Annäherungsmethoden suchen. Dabei sind gewisse rein numerische Verhältnisse im Sonnensystem von wesentlicher Bedeutung. Es seien daher einige solche angeführt.

Nach ihrer Größe teilt man die unsere Sonne umkreisenden Planeten in zwei Gruppen: große oder Hauptplaneten und kleine Planeten (Asteroiden oder Planetoiden). Zurzeit sind 8 Hauptplaneten bekannt, und zwar Merkur (☿), Venus (♀), Erde (♁), Mars (♂), Jupiter (♃), Saturn (♄), Uranus (♅) und Neptun (♆). Die Anzahl der Entdeckungen von Asteroiden in dem letzten Jahrhundert geht aus folgender Tafel hervor:

Jahre	Anzahl	Jahre	Anzahl
1801—1807	4	1871—1875	45
1808—1844	0	1876—1880	62
1845—1850	9	1881—1885	34
1851—1855	24	1886—1890	49
1856—1860	25	1891—1895	107
1861—1865	23	1896—1900	54.
1866—1870	27		

Bis zum Jahre 1912 sind zusammen etwa 750 Asteroiden gefunden worden. Um in einfacher Weise diese zu unterscheiden, wird jedem nach Vorschlag von *Encke* außer einem Namen eine in einen Kreis oder durch eine Parenthese eingeschlossene Nummer beigelegt, z. B. (108) Hekuba, (153) Hilda.

Nach *J. Bauschinger*[1]) seien hier die Logarithmen der großen Halbachsen (a), mittlere tägliche Bewegung (n), Exzentrizitätswinkel

1) *J. Bauschinger,* Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig 1901. — Veröffentl. d. Kgl. Astr. Recheninstituts Nr. 16, Berlin 1901.

($e = \sin \varphi$), Neigung gegen die Ekliptik (i) und die Masse (m) für die Hauptplaneten und einige typische Asteroiden angeführt.[2])

	Epoche	$\log a$	n	φ	i	$\frac{1}{m}$
Merkur	1900.0	9.5878	14732″.4	11°52′	7° 0′	6000000
Venus	1900.0	9.8593	5767″.7	0°23′	3°24′	408000
Erde	1900.0	0.0000	3548″.2	0°58′	0° 0′	329390
Mars	1900.0	0.1829	1886″.5	5°21′	1°51′	3093500
(46) Hestia	1865.0	0.4025	883″.7	9°28′	2°18′	
(108) Hekuba	1878.9	0.5063	617″.4	5°54′	4°24′	
(153) Hilda	1884.0	0.5965	452″.2	9°44′	7°53′	
(279) Thule	1891.1	0.6297	403″.2	4°43′	2°23′	
Jupiter	1850.0	0.7162	299″.1	2°46′	1°19′	1047.355
Saturn	1850.0	0.9795	120″.5	3°13′	2°30′	3501.6
Uranus	1900.0	1.2831	42″.23	2°42′	0°46′	22869
Neptun	1900.0	1.4781	21″.53	0°29′	1°47′	19700

Die Bahnen der Asteroiden liegen zwischen Mars und Jupiter. Ausnahmen sind (433) Eros, dessen Bahn teilweise innerhalb der Marsbahn liegt, und die vier Asteroiden der sog. Jupitergruppe, deren Bahnen nahe dieselbe große Achse haben wie die Jupiterbahn. Die Bahnen der großen Planeten haben, Merkur ausgenommen, kleine Exzentrizitäten und Neigungen. Dagegen kommen bei den Asteroiden Exzentrizitäten bis 0.4 und Neigungen bis 35° vor.

Die Massen der Asteroiden sind sehr klein. Nach *Bauschinger*[1]) dürfte die Summe der Massen aller Asteroiden nicht mehr als $\frac{1}{296\,000\,000}$ der Sonnenmasse betragen, und von dieser Gesamtsumme kommt die Hälfte auf Vesta und Ceres allein. Die Einwirkung eines Asteroiden auf die übrigen Planeten ist daher unmerklich. Nur wenn zwei Asteroiden einander sehr nahe kommen, ist eine merkbare Einwirkung möglich. Unter den vielen Untersuchungen über die kleinsten Abstände (Proximitäten) zwischen den Asteroiden sei nur diejenige von *A. Galle*[3]) angeführt, welcher Abstände bis zu $\frac{1}{5000}$ der großen Halbachse der Erdbahn herab findet.

---

2) Vollständige Elementenverzeichnisse werden im Berliner Astronomischen Jahrbuch publiziert. Die Elemente der Planeten in Bezug auf die unveränderliche Ebene finden sich bei *A. A. Psilander,* Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förhandl. 1900, Nr. 8, Stockholm 1901 = Meddelanden från Lunds astr. observatorium Nr. 16, abgedruckt in *C. V. L. Charlier,* Die Mechanik des Himmels, Tafel I und III, Leipzig 1902.

3) *A. Galle,* Zur Berechnung der Proximitäten von Asteroidenbahnen. Diss. Breslau 1883.

2. Die Differentialgleichungen der Bewegung. Um die Bestimmung der Bewegung eines von Satelliten umkreisten Planeten zu vereinfachen, zerlegt man sie in die folgenden drei:

a) die Bewegung des Schwerpunkts G des von dem Planeten und seinen Satelliten gebildeten Systems P;

b) die Bewegung des Schwerpunkts des Planeten um G, und

c) die Bewegung des Planeten um seinen Schwerpunkt.

Diese Bewegungen sind im allgemeinen nicht ganz unabhängig. Wie die Verhältnisse im Sonnensystem sind, hat jedoch die letztgenannte Bewegung keine merkbare und die unter b) genannte nur ausnahmsweise eine zu berücksichtigende Einwirkung auf die erstgenannte Bewegung. Sobald die Bewegungen der Satelliten um ihren Hauptplaneten durch die Mondtheorien bekannt sind, folgt die unter b) genannte Bewegung aus der bekannten linearen Gleichung zwischen den Koordinaten des Planeten, der Satelliten und des Schwerpunktes G. (Vgl. *Jung* IV 2, 2.) Die eigentliche Aufgabe der Planetentheorien ist die unter a) genannte Bewegung zu bestimmen.

Seien x, y, z die rechtwinkligen auf im Raume feste Achsen bezogenen Koordinaten des Schwerpunkts G eines Planeten. Nach dem sogenannten Schwerpunktssatz[4]) sind dann die Bewegungsgleichungen

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

wo t die Zeit, X, Y, Z die Summe der x-, bzw. y- und z-Komponenten aller auf den Planeten und seine Satelliten wirkenden äußeren Kräfte und m die Summe der Massen des Planeten und seiner Satelliten bezeichnen. Die Gleichungen (1) gelten auch für die Bewegung des Schwerpunkts der Sonne.

Unter den äußeren Kräften sind zunächst die nach dem Newtonschen Gesetz wirkenden Anziehungen der bekannten Himmelskörper unseres Sonnensystems zu berücksichtigen. Würden die Himmelskörper aus homogenen konzentrischen sphärischen Schalen gebildet sein, so dürfte man vollkommen streng bei der Berechnung der Kraftkomponenten annehmen, daß ihre Massen in ihre resp. Schwerpunkte konzentriert seien.[5]) Da die Massenverteilung in den Körpern unseres Sonnensystems nicht viel hiervon abweicht und dazu die Entfernungen zwischen den Planeten im Verhältnis zu ihren Dimensionen groß sind,

4) Vgl. *Stäckel*, IV 6, 29; *P. Appell*, Traité de mécanique rationnelle II, p. 18 und 224, Paris 1904 und übrigens alle Lehrbücher der Mechanik.

5) Wie *Laplace*, Méc. cél. I, p. 143 = Oeuvres I p. 160 zeigt, hat nur ein Anziehungsgesetz von der Form $Ar + \frac{B}{r^2}$ diese Eigenschaft (A und B Konstanten).

kann man in den Planetentheorien ohne merklichen Fehler diese Annahme machen. Bis auf Größen höherer Ordnung ist nämlich der Fehler, den man bei dieser Annahme in der Berechnung der Komponenten der zwischen zwei einander anziehenden Himmelskörpern wirkenden Kraft begeht, im Verhältnis zu dieser Kraft absolut genommen kleiner als

$$9\,\frac{\varrho^2+\varrho'^2}{r^2},$$

wo r die Entfernung der Schwerpunkte der Körper, ϱ und ϱ' die größten von ihren resp. Schwerpunkten aus gerechneten Erstreckungen der Körper bezeichnen.

Man betrachte zwei Systeme von Körpern P und P', jedes bestehend aus einem Planeten und den ihn umkreisenden Satelliten. Seien m_i, $x+x_i$, $y+y_i$, $z+z_i$ die Masse und die Cartesischen Koordinaten der verschiedenen zum System P gehörigen Körper P_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$, wobei x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes G des Systems bezeichnen sollen. Die entsprechenden Größen bei dem System P' seien G', P_j', m_j', x', y', z', $x'+x_j'$, $y'+y_j'$, $z'+z_j'$.

Die Summe der Komponenten der Kräfte, welche die Körper des Systems P' auf die Körper des Systems P ausüben, sind dann gleich den partiellen Ableitungen nach x, y und z der Funktion

$$\overline{U}=k^2\sum_i\sum_j\frac{m_i m_j'}{\Delta_{i,j}},$$

wobei

$$\Delta_{i,j}=\sqrt{(x+x_i-x'-x_j')^2+(y+y_i-y'-y_j')^2+(z+z_i-z'-z_j')^2}$$

die Entfernung der Körper P_i und P_j' bezeichnet und k die Gaußsche Attraktionskonstante[6]) ist. Unter der Voraussetzung, daß die Entfernungen zwischen den Körpern P_i untereinander und zwischen den Körpern P_j' untereinander klein sind im Verhältnis zur Entfernung

6) Die Konstante k hat nach *C. Fr. Gauß* (Theoria motus, p. 2 = Werke VII, p. 14) den Wert $k=0.017\,202\,099$ [$\log k=8.2\,355\,814\,414$], wobei er als Zeiteinheit den mittleren Sonnentag, als Masseneinheit die Sonnenmasse und als Längeneinheit die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne wählte. Später, als die Erdbewegung genauer bekannt war, hätte man wohl einen genaueren Wert von k berechnen können. Um die mit dem Gaußschen Wert von k berechneten Tafeln nicht verändern zu müssen, behält man nach *U. J. J. Leverrier* (Obs. de Paris ann. 1 (1855), p. 189) für die Gaußsche Konstante den obigen Wert bei, verändert aber die Einheit der Länge um ein Unbedeutendes. In theoretischen Untersuchungen pflegt man die Zeiteinheit so $(=\frac{1}{k}=58.13\,244\,087$ mittlere Sonnentage) zu wählen, daß die Gaußsche Konstante gleich 1 ist.

der Schwerpunkte G und G':

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \tag{2}$$

läßt sich $\overline{U}$ durch Reihenentwicklung in zwei Teile

$$U_0 = k^2 \frac{mm'}{\Delta} \tag{3}$$

und

$$U_1 = -k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j' [(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-z_j')^2]}{2\Delta^3}$$
$$+ 3k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j [(x-x')(x_i-x_j')+(y-y')(y_i-y_j')+(z-z')(z_i-z_j')]^2}{2\Delta^5}$$
$$+ \text{Glieder höherer Grade in } x_i-x_j',\ y_i-y_j',\ z_i-z_j'$$

zerlegen, wo

$$m = \sum_i m_i, \qquad m' = \sum_j m_j'$$

die Massen der Systeme P und P' bezeichnen.

Im allgemeinen kann man U_1 vernachlässigen und $\overline{U} = U_0$ setzen, was bedeutet, daß man die Massen der Systeme in ihre resp. Schwerpunkte konzentriert. Nach *P. S. Laplace*[7]) ist die aus U_1 stammende Störung merkbar nur bei dem System Erde-Mond. In den Planetentheorien versteht man auch überall (wie auch stets im folgenden), wo kein Mißverständnis zu fürchten ist, unter einem Planeten eben den materiellen Punkt, der erhalten wird, wenn die Masse des Planeten und diejenigen seiner eventuellen Satelliten in ihrem gemeinsamen Schwerpunkt konzentriert gedacht werden. Die Differentialgleichungen der Bewegung des Planeten P schreiben sich dann einfach

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo

$$U = k^2 \sum \frac{m'}{\Delta}$$

ist und das Summenzeichen angibt, daß jeder Planet (außer P selbst) und die Sonne ein zu $k^2 \frac{m'}{\Delta}$ analoges Glied in die Funktion U einführen.

Weil die Sonne als Zentralkörper eine besondere Stellung einnimmt, pflegen die Astronomen öfters die Koordinaten der Planeten in bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt in den Schwerpunkt der Sonne fällt, anzugeben. Seien jetzt m, x, y, z die Masse

7) *P. S. Laplace,* Méc. cél. livre 6, chap. 4 (1802) = Oeuvres 2 p. 63.

und die Koordinaten des Planeten P in bezug auf die Sonne, deren Masse gleich 1 angenommen wird. Die Differentialgleichungen der relativen Bewegung sind dann

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)x}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)y}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)z}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases}$$

wobei

$$(5)\quad \begin{aligned} \Omega &= \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) \\ &= \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right) \end{aligned}$$

die sog. Störungsfunktion (eingeführt von *J. L. de Lagrange*[8]); Name von *Laplace*) ist. Es bezeichnen hierbei m', x', y', z' die Masse und die Koordinaten des Planeten P' in bezug auf die Sonne. Ferner sind

$$(6)\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$(7)\quad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$(8)\quad \Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}$$

die Abstände der Planeten P und P' von der Sonne und voneinander. H ist der von r und r' eingeschlossene Winkel. In dem angegebenen Wert von Ω ist nur die Einwirkung eines Planeten berücksichtigt. Jeder weitere einwirkende Planet fügt zu dem in Gleichung (5) gegebenen Ω ein der rechten Seite von (5) analoges Glied hinzu. Weil aber zunächst am besten jedes Glied von Ω besonders behandelt wird, pflegt man meist wie oben nur ein Glied von Ω anzuschreiben.

Die Differentialgleichungen der Bewegung von P' werden erhalten, wenn man in den Gleichungen (4) und (5) die gestrichenen und ungestrichenen Größen vertauscht. Dadurch geht Ω in

$$\Omega' = \frac{m}{1+m'}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r'\cos H}{r^2}\right)$$

über. Bei der Entwicklung der Störungsfunktion pflegt man anzunehmen, daß der Planet P' weiter von der Sonne entfernt ist als der Planet P. Öfters läßt man auch die konstanten Faktoren $\frac{m'}{1+m}$ und $\frac{m}{1+m'}$ weg.

3. Die erste Annäherung. Das Zweikörperproblem. Wie schon hervorgehoben, kann man die Bewegungsgleichungen (4) nicht streng integrieren. Man muß bei ihrer Integration zu Annäherungen und

8) *J. L. de Lagrange,* Nouv. Mém. de Berlin 1777 = Oeuvres 4, p. 401.

Reihenentwicklungen greifen. Um die Lösungen zu vereinfachen, hat man sich an die tatsächlich vorhandenen Bewegungsverhältnisse im Planetensystem zu halten. Je genauer man die Bewegungen übersehen kann, um so vorteilhafter wird man im allgemeinen das Integrationsverfahren anlegen und die jedesmaligen erleichternden Bedingungen ausnützen können. Für die Astronomen ist es ja vor allen Dingen nötig, leicht und sicher berechenbare Ausdrücke zu erhalten.

Unter den Umständen, welche im Planetensystem die Lösung erleichtern, ist zunächst der zu nennen, daß die Anziehungskraft der Sonne auf einen Planeten groß ist im Verhältnis zu der der anderen Planeten, was von der Kleinheit der Massen und den großen Entfernungen zwischen den Planeten herrührt.

Die Massen der Asteroiden sind so klein, daß ihre Einwirkung auf die übrigen Planeten bis jetzt unmerkbar ist. Man kann daher erst die Bewegungen der Hauptplaneten unter alleiniger Berücksichtigung der Anziehung der Sonne und ihrer gegenseitigen Anziehungen bestimmen. Es zeigt sich, daß nur die einander nächsten Planeten größere Einwirkungen aufeinander ausüben. Bei der Bestimmung der Bewegung eines Asteroiden braucht man nur die Einwirkung der Hauptplaneten zu berücksichtigen.

Die Methoden der Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung sind für große und kleine Planeten wesentlich dieselben. Die Verschiedenheiten hängen nur von dem größeren oder kleineren Umfang der einzelnen Teile der Formeln ab.

In der ersten Annäherung vernachlässigt man die gegenseitigen Anziehungen der Planeten. Dies wird erreicht, wenn man rechts in den Differentialgleichungen die Massen und also Ω gleich Null setzt, wodurch die Bewegungsgleichungen eines Planeten in dem solcherweise entstehenden Zweikörperproblem die folgenden werden:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{k^2(1+m)z}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen x, y und z als Funktionen von t und sechs Integrationskonstanten, wobei es sich zeigt, daß die Bewegung des Planeten nach den Keplerschen Gesetzen vor sich geht. Wählt man als Integrationskonstanten die Keplerschen Elemente: a die große Halbachse, e die Exzentrizität, i die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik, Ω die Knotenlänge, π den Abstand zwischen Perihel und

Knoten (oder anstatt π die Perihellänge $\varpi = \pi + \Omega$), ε die mittlere Länge zur Epoche ($t = 0$), so sind die Koordinaten durch die Formeln

$$n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}, \tag{10}$$

$$M = nt + \varepsilon - \varpi = l - \varpi, \tag{11}$$

$$M = E - e \sin E, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E, \tag{13}$$

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos v}, \tag{14}$$

$$u = v + \pi = v + \varpi - \Omega, \tag{15}$$

$$\begin{cases} x = r[\cos(u + \Omega) + \sin u \sin \Omega(1 - \cos i)], \\ y = r[\sin(u + \Omega) - \sin u \sin \Omega(1 - \cos i)], \\ z = r \sin u \sin i \end{cases} \tag{16}$$

zu berechnen. Vgl. den Artikel VI 2, 9, Nr. **1—3** (*Herglotz*).

4. Die Störungen. Die bei der ersten Annäherung erhaltene Keplersche Bewegung stellt nur für kurze Zeiten die Beobachtungen dar. Der Einfluß der vernachlässigten rechten Seiten der Gleichungen (4) macht sich im Laufe der Zeit geltend durch Abweichungen (*Störungen* genannt) von der sonst stattfindenden Keplerschen Bewegung, welche daher ungestörte Bewegung genannt wird. Die tatsächlich stattfindende Bewegung heißt *gestörte Bewegung*. Der Planet, dessen Bewegung man untersucht, heißt *gestört*, während die übrigen Planeten als *störende* bezeichnet werden. Diese Bezeichnungen sind in den klassischen Planetentheorien, wie sie z. B. von *Laplace*, *Leverrier*, *Hansen* entwickelt sind, durchgängig. Je nachdem man die Abweichungen in den Elementen oder in den Koordinaten betrachtet, spricht man von Elementenstörungen oder Koordinatenstörungen. In bezug auf die Prinzipien, auf welche die Lösungsmethoden der Bewegungsgleichungen gegründet sind, sei auf den Artikel von *Whittaker* (VI 2, 12, Nr. **9—11**) verwiesen.

I. Die Methode der Variation der Konstanten.

5. Anwendungsweise der Methode in der Störungstheorie. Es seien für einen Planeten die Gleichungen (4) und für die übrigen $n - 1$ Planeten ganz analoge Gleichungen zu integrieren. Alle diese Gleichungen können durch das System der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dx_i'}{dt} + P_i = Q_i, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 3n), \tag{17}$$

ersetzt werden, wo jedes Glied von Q_i eine der Massen der störenden Körper als Faktor hat und die Funktionen P_i im allgemeinen so gewählt werden, daß die Lösungen der Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \quad \frac{dx_i'}{dt} + P_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 3n),$$

welche die erste Annäherung geben, leicht und einfach erhalten werden können. Seien c_ν Integrationskonstanten und

$$x_i = f_i(t, c_\nu), \quad x_i' = f'(t, c_\nu), \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, 3n \\ \nu = 1, 2, \ldots, 3n \end{pmatrix} \tag{18}$$

diese Lösungen. Nach den Prinzipien der genannten Methode fordert man, daß die Lösung der Gleichungen (17) durch die Formeln (18) gegeben ist, muß dann aber die Größen c_ν nicht mehr als Konstanten, sondern als mit t veränderliche Größen ansehen. Die Bedingungsgleichungen, welche die c_ν zu erfüllen haben, sind dann

$$\sum_\nu \frac{\partial f_i}{\partial c_\nu} \frac{dc_\nu}{dt} = 0, \qquad \sum_\nu \frac{\partial f_i'}{\partial c_\nu} \frac{dc_\nu}{dt} = Q_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n),$$

aus welchen man ein Gleichungssystem der Form

$$\frac{dc_\nu}{dt} = F_\nu(t, c_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 3n)$$

ableitet (vgl. *Vessiot*, II A, 4b, Nr. 22). Je nach der Wahl der veränderlichen Konstanten erhält man spezielle Fälle dieser Methode.

6. Die Methode der Variation der elliptischen Elemente. Differentialgleichungen. Untersuchungen über die Veränderungen der Elemente durch Störungen findet man schon bei *L. Euler*[9]), aber die wirkliche Grundlegung dieser Methode verdankt man *J. L. de Lagrange*[10]). Unter den vielfachen Anwendungen dieser Methode seien als Stellen, die vor allem die Anlage der praktischen Rechnung unter verschiedenen Umständen wiedergeben, genannt: die Theorien der großen Planeten von *U. J. J. Leverrier*[11]), die Neptunstheorie von *S. Newcomb*[12]), die Pallastheorie von *C. Fr. Gauß*[13]), die Vestatheorie von *J. Perrotin*[14]).

9) *L. Euler*, Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Acad. des Sciences (Paris) VI, Nr. 6 (1749), VII, Nr. 2 (1752) und VIII (1756 gedruckt 1771), Berl. hist. Mém. (1749), Petersb. Commentarii (1747/8). Die Formeln von Euler sind indessen nicht alle richtig.

10) *J. L. de Lagrange*, Turin mél. III (1766) = Oeuvres I (1867), p. 471. Paris mém. prés. 10 (1785) = Oeuvres 6, p. 403 und vor allem in Paris Inst. (math.) mém. (9) 1 (1808) = Oeuvres 6, p. 713.

11) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann., mém. 1, 2, 4, 5, 6, 10—12, 13, 14 (1855—1877).

12) *S. Newcomb*, Smiths. contr. 15 (1867).

Die Gleichungen (10)—(16) geben in der ungestörten Bewegung x, y und z als Funktionen der Zeit und der elliptischen Elemente a, e, ε, $\bar{\omega}$, Ω und i. Nach den in voriger Nummer dargestellten Prinzipien der Lagrangeschen Methode sind die Ableitungen der Elemente nach der Zeit aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x}{\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial x}{\partial i}\frac{di}{dt}=0,\\
&\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y}{\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial y}{\partial i}\frac{di}{dt}=0,\\
&\frac{\partial z}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial z}{\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial i}\frac{di}{dt}=0,\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial i}\frac{di}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial i}\frac{di}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial e}\frac{de}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial t}\frac{di}{dt}=k^2(1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Um zu vermeiden, daß t explizite als Faktor von gewissen Gliedern in den Ableitungen auftritt, ersetzt man nt in der Gleichung (11) durch

$$\varrho=\int n\,dt, \tag{19}$$

so daß M und l durch die Gleichungen

$$M=\int n\,dt+\varepsilon-\bar{\omega},\quad l=\varrho+\varepsilon \tag{20}$$

zu berechnen sind und M oder l nicht bei Bildung der Ableitungen nach a als veränderlich betrachtet werden.

Unter Anwendung der Gleichungen (10)—(16) gewinnt man aus den obigen Gleichungen durch eine ziemlich verwickelte Elimination[15]) die Formeln

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=2na^2\frac{\partial\Omega}{\partial l},\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-2na^2\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}+\frac{nae\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial e},
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

13) *C. Fr. Gauß,* Werke 7, Nachlaß p. 489—577 (1906). Bei *G. Struve,* Die Darstellung der Pallasbahn durch die Gaußsche Theorie für den Zeitraum 1803 bis 1903. Diss. Berlin (1911) findet man interessante Tafeln über die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung.

14) *J. Perrotin,* Obs. de Toulouse 1 (1880).

15) Bezüglich der geeignetsten Methoden, diese oder entsprechende Differentialgleichungen abzuleiten, sei auf die Lehrbücher der Himmelsmechanik verwiesen.

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{na\sqrt{1-e^2}}{e}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \varpi} - \dfrac{nae\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\dfrac{\partial \Omega}{\partial l}, \\ \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{na\sqrt{1-e^2}}{e}\dfrac{\partial \Omega}{\partial e} + \operatorname{tg}\dfrac{i}{2}\sin i\dfrac{d\Omega}{dt}, \end{cases}$$

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial \Omega}{\partial i}, \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{na}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \Omega} - \dfrac{na\operatorname{tg}\dfrac{i}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial l} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \varpi}\right), \end{cases}$$

in welchen $\frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$, und die $\frac{d\Omega}{dt}$ enthaltenden Glieder mittels der ersten Gleichung (23) eliminiert werden könnten, so daß die rechten Seiten dieser Gleichungen nur von den Elementen und den partiellen Ableitungen der Störungsfunktion nach den Elementen abhängig werden. Diese Möglichkeit wurde gleichzeitig von *Lagrange*[16]) und *P. S. Laplace*[17]) gefunden. Die veränderlichen Elemente nennt man auch *oskulierende*, weil die durch sie bestimmte Bahn und Bewegung sich für jeden Augenblick der wirklichen Bahn und Bewegung möglichst anschmiegen und für dieselbe sowohl den Ort als die Geschwindigkeit des Planeten richtig angeben.

Man könnte auch Elemente durch andere Bedingungen zu definieren suchen, um anderen Verhältnissen als den wesentlich formalistischen der Lagrangeschen Methode Rechnung zu tragen. Solch ein Vorschlag ist auch von *M. Brendel*[18]) gemacht worden.

Wenn i klein ist, wird das erste Glied der rechten Seite von (23) groß und diese Gleichungen selbst unzweckmäßig zur Bestimmung von i und Ω. *Lagrange*[19]) vermeidet diesen Übelstand, indem er statt i und Ω die Elemente

$$(24)\qquad p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega$$

einführt.

Bei den Gleichungen (22) tritt derselbe Übelstand ein, wenn e klein wird. Man vermeidet ihn gleicherweise durch Einführung der Elemente

$$(25)\qquad g = e\cos\varpi, \quad h = e\sin\varpi.$$

Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von g, h, p und q sind:

16) *J. L. de Lagrange,* Paris Inst. (math.) mém. 9, Nr. 1 (1808) = Oeuvres 6, p. 713.

17) *P. S. Laplace,* Suppl. au Méc. cél. = Oeuvres 3 p. 325—348.

18) *M. Brendel,* Astr. Nachr. 187 (1911) p. 97; Göttingen, Ges. Wiss. Neue Folge (8) 1 (1911) p. 89—98.

19) *J. L. de Lagrange,* Paris hist. (2) mém. (1774) = Oeuvres 6, p. 635.

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dg}{dt} = -na\left[\sqrt{1-g^2-h^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial h} + \dfrac{g\sqrt{1-g^2-h^2}}{1+\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \dfrac{h\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial i}\right], \\ \dfrac{dh}{dt} = na\left[\sqrt{1-g^2-h^2}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial g} - \dfrac{h\sqrt{1-g^2-h^2}}{1+\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial l} + \dfrac{g\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{\sqrt{1-g^2-h^2}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial i}\right], \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{na}{\sqrt{1-e^2\cos^3 i}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial q} - \dfrac{nap}{2\sqrt{1-e^2\cos i\cos^2\frac{i}{2}}}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\right), \\ \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{na}{\sqrt{1-e^2\cos^3 i}}\,\dfrac{\partial\Omega}{\partial p} - \dfrac{naq}{2\sqrt{1-e^2\cos i\cos^2\frac{i}{2}}}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varpi}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial l}\right). \end{cases}$$

7. Fortsetzung. Die rechten Seiten der Gleichungen (4) sind den x-, y- und z-Komponenten der störenden Kraft gleich. Wenn diese sich nicht als partielle Ableitungen einer Funktion ausdrücken lassen, wie das z. B. bei verschiedenen Widerstandskräften eintritt, ist es nötig, die Ableitungen der Elemente unmittelbar durch die Komponenten der störenden Kraft auszudrücken. Zwei verschiedene Komponentensysteme kommen in praxi vor: Die Komponenten R, S, W parallel zur Verlängerung des Radiusvektors, zur Senkrechten auf dem Radiusvektor in der Bahnebene (positiv nach der Seite wachsender Längen gezählt) und zur Normalen auf der Bahnebene (positiv nach Norden). Andrerseits die Komponenten T, N und W; T parallel zur Tangente an die Bahn (positiv in Richtung der Bewegung), N parallel zur Normale auf die Tangente in der Bahnebene (positiv nach der Seite der Sonne), W wie oben.

Die Differentialgleichungen der Elemente werden:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\,(Re\sin v + S(1+e\cos v)), \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{2r}{na^2}R + \dfrac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\dfrac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\dfrac{i}{2}\,\dfrac{d\Omega}{dt}, \\ \dfrac{de}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\,[R\sin v + S(\cos v+\cos E)], \\ \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{ena}\left[-R\cos v + S\,\dfrac{2+e\cos v}{1+e\cos v}\sin v\right] + \sin^2\dfrac{i}{2}\,\dfrac{d\Omega}{dt}, \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,W\cos(v+\varpi-\Omega), \\ \dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,W\sin(v+\varpi-\Omega), \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2a(2a-r)}{cr}T, \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{2\sqrt{1-e^2}}{c}\left(\dfrac{e\sin v}{1+e\cos v}T - N\right) + \dfrac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\dfrac{d\varpi}{dt} \\ \qquad + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\dfrac{i}{2}\dfrac{d\Omega}{dt}, \\ \dfrac{de}{dt} = \dfrac{2(\cos v + e)}{c}T - \dfrac{r\sin v}{ac}N, \\ \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{2\sin v}{ec}T + \dfrac{1}{e}\left(2 + \dfrac{r\cos v}{ae}\right)N + \sin^2\dfrac{i}{2}\dfrac{d\Omega}{dt}, \end{cases}$$

wo abkürzend

$$c = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}},$$

gesetzt worden ist. Sie sind sogar einfacher direkt abzuleiten, als die Gleichungen (21), (22) und (23), und werden besonders wichtig, wenn man sich über die Einwirkung irgendeiner Kraft auf die Elemente orientieren will.

8. Integration. Um die Gleichungen (21)—(23) zu integrieren, entwickelt man im allgemeinen die Elemente nach Potenzen der störenden Massen und bestimmt durch aufeinanderfolgende Annäherungen die Glieder erster, zweiter, . . . Ordnung. Die *Ordnung* eines Gliedes ist gleich der Anzahl der in ihm enthaltenen Massenfaktoren. Dagegen nennt man *Grad* eines Gliedes die Anzahl der eingehenden Faktoren von Exzentrizitäten und Neigungen, wenn nach Potenzen dieser Größen entwickelt wird.

Es bezeichne η_0 ein Element oder eine Funktion nur von Elementen und absoluten Konstanten. Nach Potenzen der störenden Massen entwickelt sei

$$(30)\qquad \eta_0 = \eta + \delta_1\eta + \delta_2\eta + \cdots = \eta + \delta\eta,$$

wo η von nullter und $\delta_\nu\eta$ von ν^{ter} Ordnung ist. Um die Integration analytisch ausführen zu können, muß man Ω zweckmäßig entwickeln. Der Störungsfunktion kann man die Form (vgl. *v. Zeipel*, VI 2, 13)

$$(31)\qquad \Omega = \sum N\cos D$$

geben, wo

$$(32)\qquad D = jM + j'M' + C = jl + j'l' + C'$$

ist und die Größen N, C und C' nur von den Elementen der Planeten abhängig sind (j und j' ganze Zahlen). Entwickelt man nach Potenzen der $\delta\eta$, so wird

$$(33)\qquad \Omega = \Omega_0 + \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \cdots,$$

wo Ω_0 erster, $\delta_\nu\Omega$ $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist.

Weil Ω erster Ordnung ist, folgt aus den Gleichungen (21)—(23), daß die Teile nullter Ordnung der Elemente Konstante sind, welche auch als Integrationskonstante betrachtet werden können. Ω_0 wird aus Ω erhalten, wenn man allen Elementen diese konstanten Werte gibt. Dann folgt, daß

$$\begin{cases} M = nt + c, \\ M' = n't + c', \end{cases} \tag{34}$$

wird, und Ω_0 nimmt die Form an

$$\Omega_0 = \sum N_{j,j'} \cos D_0, \qquad (D_0 = jnt + j'n't + \bar{c}), \tag{35}$$

wo c, c', $\bar{c}$, $N_{j,j'}$ Konstanten sind.

Die rechten Seiten der Gleichungen (21)—(23) haben dieselbe Form wie Ω_0, wenn nur Glieder erster Ordnung berücksichtigt werden. Durch Integration jedes Gliedes unter Anwendung der Formel

$$\int \cos D_0 \, dt = \frac{\sin D_0}{jn + j'n'} \tag{36}$$

werden die Störungen erster Ordnung der Elemente in der Form

$$\delta_1 \eta = \bar{N}_{0,0} t + \sum \frac{\bar{N}_{j,j'}}{jn + j'n'} \sin D_0 \tag{37}$$

erhalten. Um M zu erhalten, hat man noch die Integration der Gleichung (19) oder nach (10) der Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -3n^2 a \frac{\partial \Omega}{\partial l} \tag{38}$$

auszuführen. Die rechte Seite dieser Gleichung und diejenige der ersten Gleichung (21) enthalten selbstverständlich nur in l und also in t periodische Glieder. Daraus folgt das Theorem von Laplace, daß $\delta_1 a$ kein mit t und ϱ kein mit t^2 proportionales Glied enthalten kann. ϱ hat daher die Form

$$\varrho_0 + \delta_1 \varrho = nt + \sum \frac{\bar{N}_{j,j'}}{(jn + j'n')^2} \sin D_0. \tag{39}$$

Hierbei ist vorausgesetzt daß keiner der *Integrationsdivisoren* $jn + j'n'$ gleich Null ist.

Werden in den Differentialgleichungen der Elemente die eben erhaltenen in erster Ordnung genauen Werte der Elemente eingeführt und nach Potenzen der $\delta_1 \eta$ entwickelt, so erhält man zur Bestimmung der Glieder zweiter Ordnung Gleichungen der Form

$$\frac{d\,\delta_2 \eta}{dt} = N_0 + \sum N_1 \cos D_0 + t \sum N_2 \sin D_0,$$

woraus unter Anwendung der Formel (36) und

$$\int t \cos D_0 \, dt = \frac{t \sin D_0}{jn + j'n'} + \frac{\cos D_0}{(jn + j'n')^2} \tag{40}$$

für die $\delta_2\eta$ die Form folgt

$$\delta_2\eta = N_0 t + \sum \frac{\overline{N}_1}{jn+j'n'} \sin D_0 + \sum \frac{\overline{N}_2}{(jn+j'n')^2} \cos D_0 + t \sum \frac{\overline{N}_3}{jn+j'n'} \sin D_0.$$

Mittels der Glieder zweiter Ordnung erhält man in analoger Weise die Glieder dritter Ordnung der Elemente. Bei den aufeinanderfolgenden Annäherungen hat man nur Integrale der Form

$$\int t^m \cos(vt+c)\, dt$$

auszuführen, was mittels der Formel

$$(41) \quad \int t^m \cos(vt+h)\, dt = \sum_{p=0}^{m} \frac{m!}{(m-p)!} \frac{\sin\left(vt+h+p\frac{\pi}{2}\right)}{v^{p+1}} t^{m-p}$$

oder, falls $v = 0$, mittels der Formel

$$(42) \quad \int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{m+1}$$

geschieht.

Man bestimmt so nach und nach die Glieder der aufeinanderfolgenden Ordnungen, was also einfach und schematisch vor sich geht[20]). Die Anzahl der Glieder von gegebenem Grade wächst jedoch ungeheuer schnell und würde die ganze Methode praktisch unbrauchbar machen, wenn man höhere Ordnungen als die zweite ganz mitnehmen müßte. Zufolge der Kleinheit der Massen ist die Konvergenz jedoch oft hinreichend, um die Methode anwenden zu können.

9. Verschiedene Arten von Gliedern und deren Klassifikation. Nach dem Obigen überblickt man leicht, daß die Darstellung der Elemente bei fortgesetzter Annäherung von der Form

$$\sum N t^p \cos D$$

wird, wo die Argumente D von der Form

$$jM + j'M' + j''M'' + \cdots + \bar{c} = vt + (c)$$

sind (die j ganze Zahlen; die M mittlere Anomalien der verschiedenen Planeten).

Die Glieder, bei denen $p = 0$, sind *periodisch* und werden nach der Größe von v in *langperiodische* und *kurzperiodische* Glieder geteilt.

---

20) Eingehende ausführliche Formeln zur Berechnung der Glieder zweiter Ordnung sind von *U. J. J. Leverrier* [Obs. de Paris mém. 2 (1856), p. 43—57 und 10 (1874), p. 192ff.] gegeben. Die Glieder dritter Ordnung behandelt *M. A. Gaillot* [Paris Bull. Astr. 5 (1888), p. 329—344, 377—384].

Langperiodisch ist ein Glied, wenn ν klein ist im Verhältnis zur mittleren Bewegung des gestörten Planeten. Ein langperiodisches Glied in der Störungsfunktion (eigentlich in den Ableitungen der Elemente nach der Zeit) wird durch die Integration vergrößert in die Elemente übergehen. Infolgedessen sind die langperiodischen Glieder sehr wichtig, vor allem, wenn ν sehr klein ist.

Ein Glied, für welches $p \geqq 1$, nennt man *säkular*. Ist speziell $\nu = 0$, so wird es nach *Poincaré rein säkular* genannt, sonst aber *gemischt säkular* (séculaire mixte). Das einzelne rein säkulare Glied wird mit der Zeit unendlich groß. Das gemischt säkulare Glied schwankt, wenn t wächst, zwischen immer größeren Grenzen. Die säkularen Glieder sind daher besonders für große Werte von t zu berücksichtigen.

Die Größe eines Gliedes in den Störungsausdrücken ist wesentlich abhängig von seinem Grad, seiner Ordnung (s), dem Exponenten (p) von t und der Anzahl (q) seiner kleinen Integrationsdivisoren. *H. Poincaré*[21]) bezeichnet als „Rang" eines Gliedes die Zahl

$$s - p$$

und als „Klasse" eines Gliedes die Zahl

$$s - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}.$$

Über die Bedeutung eines Gliedes geben sein Grad, seine Ordnung, sein Rang und seine Klasse einen gewissen genäherten Aufschluß. Je größer der Grad, die Ordnung oder die Klasse eines Gliedes ist, um so kleiner ist es.

Die relative Bedeutung der Ordnung, der Klasse und des Ranges hängt von der Länge der Zeit ab, für welche man die Bewegung darstellen will. Wenn man die Bewegung für kürzere Zeiten betrachtet, sind die Glieder der niedrigsten (1ter) Ordnung die wichtigsten. Wünscht man eine Darstellung für ziemlich lange (mit den Perioden der langperiodischen Glieder vergleichbare) Zeiten, so sind die Glieder niedrigster Klasse die wichtigsten, Für sehr lange Zeiten schließlich treten die Glieder niedrigsten Ranges in den Vordergrund.

Aus den von *H. Poincaré*[22]) für kanonische Elemente bewiesenen Sätzen über das Vorkommen von Gliedern eines gewissen Ranges und gewisser Klassen folgert man die Sätze:

1. Es gibt keine Glieder, deren Klasse negativ wäre; die konstanten Teile ausgenommen ist die Klasse aller Glieder in den Ent-

21) *H. Poincaré,* Leçons de méc. cél. I, p. 129, Paris 1905.
22) *H. Poincaré,* ibid. p. 131, 341.

wicklungen der Elemente a, g, h, p, q (in den Gleichungen (26) und (27)) immer $\geqq \frac{1}{2}$.

2. In den Entwicklungen der Elemente g, h, p, q, ε und ϱ (das Glied nt ausgenommen) ist der Rang aller Glieder $\geqq 0$.

3. Der Rang der periodischen und derjenige der gemischt säkularen Glieder ist $\geqq 1$.

4. Das konstante Glied ausgenommen ist in der Entwicklung von a der Rang aller Glieder $\geqq 1$.

Der letztgenannte Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von *Lagrange* über die Invariabilität der großen Halbachsen (siehe *Whittaker* VI 2, 12, Nr. **13**). Der folgende von *H. Poincaré*[23]) bewiesene Satz gibt unmittelbar eine Verallgemeinerung des Poissonschen Satzes:

In der Entwicklung von a gibt es keine rein säkularen Glieder vom Range 1.

Zu bemerken ist auch, daß ϱ keine rein säkularen Glieder des Ranges Null hat.

10. Säkulare Störungen. Die säkularen Störungen, deren Rang $\geqq 1$ ist, sind unbedeutend im Verhältnis zu denen des Ranges Null. Da in a keine Störungen des Ranges Null vorkommen und alle Glieder des Ranges Null rein säkular sind, werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Glieder des Ranges Null erhalten, wenn man in den Formeln (21), (26) und (27) in der Störungsfunktion Ω alle in ε und ε' periodischen Glieder wegläßt. Sei $\overline{\Omega}$ der solcherweise erhaltene sogenannte säkulare Teil der Störungsfunktion, d. h. die Summe aller nichtperiodischen Glieder von Ω. Da $\overline{\Omega}$ von ε und ε' unabhängig ist, können die säkularen Glieder vom Rang Null in den Elementen $e, \overline{\omega}, i$ und Ω oder g, h, p und q getrennt von solchen Gliedern in ε und ε' bestimmt werden. Nachdem man die genannten Glieder in den g, h, p, q, g', h', p' und q' bestimmt hat, werden die Glieder in ε durch eine einfache Quadratur erhalten.

Auch die rein säkularen Störungen können nur durch Annäherungen erhalten werden, und zwar wird dabei öfters die in 8 dargestellte Methode, die Glieder der sukzessiven Ordnungen zu bestimmen, angewandt.

Wir wollen für die rein säkularen Teile der Elemente dieselben Bezeichungen anwenden, wie für die Elemente selbst. Zur Bestimmung der säkularen Glieder erster Ordnung erhält man die Differentialgleichungen aus den Gleichungen (21), (26) und (27), wenn man in diesen überall Ω durch $\overline{\Omega}$ ersetzt und in den rechten Seiten

23) *H. Poincaré*, ibid. p. 307.

allen Elementen konstante Werte gibt. Wenn die Elemente g, h, p, q, g', . . . klein sind, kann Ω und also $\overline{\Omega}$, welches übrigens nur Glieder geraden Grades enthält, nach Potenzen dieser Größen entwickelt werden, und man kann die rechten Seiten der genannten säkularen Gleichungen ohne andere Schwierigkeit als die Länge der Rechnung numerisch finden. Aus den so erhaltenen Gleichungen der Form

$$\frac{d\eta}{dt} = H,$$

gewinnt man unmittelbar das Glied erster Ordnung

$$\eta = Ht.$$

In dieser Weise hat *U. J. J. Leverrier*[24]) die säkularen Änderungen der Elemente der Hauptplaneten berechnet. Wenn die Konvergenz der Entwicklung von $\overline{\Omega}$ schwach ist, oder wenn man die säkularen Störungen erster Ordnung genauer berechnen will, wendet man die von *C. F. Gauß*[25]) gegebene Methode zur Berechnung der rechten Seiten der Differentialgleichungen der Störungen an. Geht man von den Gleichungen (28) oder (29) aus anstatt von den Gleichungen (21), (22) und (23), so findet man, daß die Ableitungen nach t der säkularen Störungen erster Ordnung in der Form

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(U\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial A}+V\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial B}+W\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial C}\right)dM\,dM'$$

erhalten werden, wo A, B, C die rechtwinkligen Koordinaten des gestörten Körpers und U, V, W unabhängig von der mittleren Anomalie M' ist. Bezüglich der Berechnung sei auf den Artikel von *v. Zeipel* (VI 2, 13, Nr. 54) verwiesen.

11. Angenäherte Berechnung der säkularen Werte der Elemente. In dem Falle, daß die Exzentrizitäten und Neigungen klein sind, kann man sich auf die Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung und ersten Grades in den Differentialgleichungen der säkularen Störungen beschränken. Indem die g, h, p und q für die n verschiedenen Planeten durch untere Indizes kenntlich gemacht werden, erhält man zur Bestimmung der genannten Größen die folgenden linearen Gleichungen

24) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann., mém. 2 (1856), p. 87—105 und II 1 (1876). Unter Berücksichtigung nur der Glieder ersten Grades berechnete *P. S. Laplace* (Méc. cél. III, Ch. VII) die säkularen Änderungen der Elemente der sieben innersten Planeten.

25) *C. F. Gauß,* Gott. comm. rec. 4 (1818) = Werke 3, p. 331—355.

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{dh_\nu}{dt} = g_\nu \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu') - \sum_{\nu'}{}' [\nu, \nu'] g_{\nu'}, \\ \dfrac{dg_\nu}{dt} = -h_\nu \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu') + \sum_{\nu'}{}' [\nu, \nu'] h_{\nu'}, \end{cases} \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_\nu}{dt} = -q_\nu \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu') + \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu') q_{\nu'}, \\ \dfrac{dq_\nu}{dt} = p_\nu \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu') - \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu') p_{\nu'}, \end{cases} \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Größen (ν, ν') und $[\nu, \nu']$ nur von den Massen und den großen Halbachsen der Planeten P_ν und $P_{\nu'}$ abhängen und also als Konstanten betrachtet werden können. Der Strich bei dem Σ-Zeichen gibt an, daß bei der Summation ν' nicht gleich ν werden darf. Die Bestimmung der Größen g_ν und h_ν ist also bei dieser Annäherung von der der Größen p_ν und q_ν unabhängig.

Die linearen Gleichungen (43) können streng integriert werden. Ihre Lösungen sind bekanntlich von der Form (siehe *Vessiot*, II A, 4b, Nr. 28):

$$(45)\quad \begin{cases} g_\nu = \sum_\alpha N_\nu^{(\alpha)} \cos(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha), \\ h_\nu = \sum_\alpha N_\nu^{(\alpha)} \sin(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha), \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Verhältnisse der Konstanten $N_\nu^{(\alpha)}$ durch die n Gleichungen

$$(46)\quad \begin{cases} (A_{1,1} - \sigma_\alpha) N_1^{(\alpha)} + A_{1,2} N_2^{(\alpha)} + A_{1,3} N_3^{(\alpha)} + \cdots + A_{1,n} N_n^{(\alpha)} = 0, \\ A_{2,1} N_1^{(\alpha)} + (A_{2,2} - \sigma_\alpha) N_2^{(\alpha)} + A_{2,3} N_3^{(\alpha)} + \cdots + A_{2,n} N_n^{(\alpha)} = 0, \\ A_{3,1} N_1^{(\alpha)} + A_{3,2} N_2^{(\alpha)} + (A_{3,3} - \sigma_\alpha) N_3^{(\alpha)} + \cdots + A_{3,n} N_n^{(\alpha)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,1} N_1^{(\alpha)} + A_{n,2} N_2^{(\alpha)} + \cdots\cdots + (A_{n,n} - \sigma_\alpha) N_n^{(\alpha)} = 0, \end{cases}$$

$$\left(A_{\nu,\nu} = \sum_{\nu'}{}' (\nu, \nu'), \quad A_{\nu,\nu'} = -[\nu, \nu']\right)$$

bestimmt werden, sobald die Größen σ_α erhalten sind, welche die Wurzeln der „Saeculardeterminante"

$$(47)\quad \begin{vmatrix} A_{1,1} - \sigma, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots, & A_{1,n} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} - \sigma, & A_{2,3}, & \ldots, & A_{2,n} \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3} - \sigma, & \ldots, & A_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, & A_{n,3}, & \ldots, & A_{n,n} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

bilden. Die Koeffizienten $A_{\nu,\nu'}$ haben solche Werte, daß die Determinante in eine symmetrische Determinante derselben Form übergeht, wenn man die ν^{te} Zeile mit $a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}$ und die ν'^{te} Kolonne mit $\frac{1}{a_{\nu'}\sqrt{m_{\nu'}n_{\nu'}}}$ multipliziert. Man kann daher, ohne die Wurzeln σ zu verändern, die $A_{\nu,\nu'}$ in (46) und (47) durch die Gleichungen

$$A_{\nu,\nu'} = -\frac{a_\nu}{a_{\nu'}}\sqrt{\frac{m_\nu n_\nu}{m_{\nu'}n_{\nu'}}}[\nu,\nu']$$

definieren und hat dann

$$A_{\nu,\nu'} = A_{\nu',\nu}.$$

Die $A_{\nu,\nu'}$ sind reelle Größen, weil in unserem Planetensystem alle Planeten in demselben Sinne sich um die Sonne bewegen ($n_\nu > 0$). Die n Wurzeln der Gleichung (47) sind alle reell, was *P. S. Laplace*[26]) unter Anwendung des aus den Gleichungen (43) abzuleitenden Integrales

$$\sum_\nu m_\nu\sqrt{1+m_\nu}\sqrt{a_\nu}(g_\nu^2+h_\nu^2)$$

$$=\sum_\nu m_\nu\sqrt{1+m_\nu}\sqrt{a_\nu}e_\nu^2 = \text{Konstans} \tag{48}$$

zuerst allgemein bewies. Dagegen ist der von *Laplace* (a. a. O.) gegebene Beweis, daß nicht mehrere Wurzeln σ_α gleich sein können, unrichtig. Daß gleiche Wurzeln nicht möglich sind, findet man im Falle $n = 2$ unmittelbar. Im Falle $n = 3$ ist dies von *H. v. Seeliger*[27]) bewiesen. *C. V. L. Charlier*[27a]) untersucht, wie die säkularen Störungen sich ausdrücken lassen, wenn zwei Wurzeln gleich sind. Aus der Gleichung (48) folgert *Laplace* auch, daß die Exzentrizitäten immer klein bleiben. Wie *Lagrange* bemerkte, ist das indessen nicht stichhaltig, wenn eine Masse m_i klein ist, weil dann das zugehörige e_i groß werden kann. Übrigens ist ja die Gleichung (48) nur bis auf Glieder vierten Grades richtig.

Die Auflösung der Gleichung (47) und die Berechnung der Verhältnisse der $N_\nu^{(\alpha)}$ aus den Gleichungen (46) für das System der Hauptplaneten ist sehr weitläufig. *J. L. de Lagrange*[28]) gab die Lösung

26) *P. S. Laplace,* Paris hist. (2) mém. (1784) = Oeuvres 11, p. 88—92. Siehe weiter *A. Cauchy,* Exercices de Math. IV (1829), p. 140; *C. Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834); *J. A. Grunert,* Arch. d. Math. 29 (1857), p. 442; *Sourander,* J. de Math. 3, Ser. 5 (1879), p. 195—209.

27) *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 93 (1878), p. 353—364.

27a) *C. V. L. Charlier,* Öfversigt of K. Vet. Soc. Förh. Nr. 97, Stockholm 1900 = Meddelanden fr. Lunds Obs. Nr. 15.

28) *J. L. de Lagrange,* Berl. Mém. de l'Akad. 1782 = Oeuvres 5, p. 211—344.

für die damals bekannten Hauptplaneten. *M. G. Pontécoulant*[29]) und *U. J. J. Leverrier*[30]) führten die Rechnung für die sieben innersten Planeten durch. Nach der Entdeckung des Neptun haben *U. J. J. Leverrier*[31]), *J. M. Stockwell*[32]) und *P. Harzer*[33]) die Rechnungen für alle acht Hauptplaneten ausgeführt.

Bei den Hauptplaneten wird die Auflösung der Gleichung (47) dadurch vereinfacht, daß das System der vier inneren und das System der vier äußeren Planeten aufeinander nur eine geringe Einwirkung haben und die Gleichungen (46) dementsprechend in zwei fast unabhängige Systeme von je vier Gleichungen zerfallen. Ebenso zerfällt die Gleichung (47) in zwei fast unabhängige Gleichungen. Wie man die numerische Berechnung der Wurzeln von (47) durch allmähliche Vereinfachung dieser Gleichung bewerkstelligt in der Weise, daß in der Determinante der linken Seite die Elemente außerhalb der Diagonale nach und nach verkleinert werden, hat *C. G. J. Jacobi*[34]) gezeigt.

Um die Größe der Wurzeln beurteilen zu können, seien hier die Werte, welche *J. M. Stockwell*[32]) bei den Hauptplaneten gefunden hat, angeführt. Sie lauten:

$$\sigma_1 = 5''.463802, \qquad \sigma_5 = 0''.6166849,$$
$$\sigma_2 = 7''.2484279, \qquad \sigma_6 = 2''.7276592,$$
$$\sigma_3 = 17''.0143734, \qquad \sigma_7 = 3''.7166075,$$
$$\sigma_4 = 17''.7844562, \qquad \sigma_8 = 22''.4608479,$$

wobei als Zeiteinheit das Julianische Jahr genommen ist. *Stockwell* gibt auch Formeln, um Änderungen in den angenommenen Massenwerten berücksichtigen zu können.

12. Fortsetzung. Die Werte von g_ν und h_ν werden für eine bestimmte Zeit aus den Beobachtungen entnommen. Nachdem die Verhältnisse zwischen den Größen $N_\nu^{(\alpha)}$ und $N_1^{(\alpha)}$ aus den Gleichungen (46) berechnet sind, erhält man die Konstanten γ_α und die $N_1^{(\alpha)}$ aus den Formeln

---

29) *M. G. Pontécoulant,* Théor. Anal. du Syst. du Mond, Bd. 3 (1834). Seine Werte sind jedoch mit zu wenig Dezimalen gerechnet.

30) *U. J. J. Leverrier,* J. de Math. 5, p. 220ff. = Conn. des temps pour 1843.

31) *U. J. J. Leverrier,* Obs. de Paris ann., mém. 2. p. 105—170.

32) *J. N. Stockwell,* Smiths. contr. 18, Washington 1870.

33) *P. Harzer,* Preisschriften der Fürstl. Jablonowsk. Ges., Leipzig 1895. In dieser Arbeit bedient er sich der sog. kanonischen Elemente anstatt elliptischer.

34) *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 30 (1846), p. 51—94 = Werke 7, p. 97.

$$N_1^{(\alpha)} \sin(\Theta_\alpha t + \gamma_\alpha) = \frac{\sum_\nu \frac{m_\nu h_\nu}{n_\nu a_\nu} \frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}}{\sum_\nu \frac{m_\nu}{n_\nu a_\nu} \left(\frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}\right)^2},$$

$$N_1^{(\alpha)} \cos(\Theta_\alpha t + \gamma_\alpha) = \frac{\sum_\nu \frac{m_\nu g_\nu}{n_\nu a_\nu} \frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}}{\sum_\nu \frac{m_\nu}{n_\nu a_\nu} \left(\frac{N_\nu^{(\alpha)}}{N_1^{(\alpha)}}\right)^2}.$$

Um zu sehen, wie sich die Perihellänge ϖ_ν des Planeten P_ν verändert, bildet man aus den Gleichungen (25) und (45) die Relation

$$\operatorname{tg}(\varpi_\nu - \Theta_\alpha t - \gamma_\alpha) = \frac{\sum_{\alpha'} N_\nu^{(\alpha')} \sin((\Theta_{\alpha'} - \Theta_\alpha)t + \gamma_{\alpha'} - \gamma_\alpha)}{\sum_{\alpha'} N_\nu^{(\alpha')} \cos((\Theta_{\alpha'} - \Theta_\alpha)t + \gamma_{\alpha'} - \gamma_\alpha)}.$$

Wenn der Nenner der rechten Seite nicht Null werden kann, folgt, daß $\varpi_\nu - \Theta_\alpha t - \gamma_\alpha$ von seinem Mittelwert nicht mehr als 90^0 abweichen kann, und daß also ϖ_ν eine mittlere Bewegung gleich Θ_α hat, was für die Beurteilung der Bahnlage und der Veränderungen der störenden Kräfte von Nutzen sein kann. Die Kriterien für das Bestehen einer mittleren Bewegung sind noch nicht vollständig entwickelt. Betrachtet man nur zwei Planeten ($n = 2$), so hat ϖ_ν immer eine mittlere Bewegung. Ist für einen gewissen Wert von α

$$2|N_\nu^{(\alpha)}| > \sum_{\alpha'} |N_\nu^{(\alpha')}|,$$

so hat ϖ_ν die mittlere Bewegung Θ_α.[35]) Im Falle $n = 3$ hat *P. Bohl*[36]) gefunden, daß in gewissen Fällen eine Entscheidung der Frage bezüglich der Existenz einer mittleren Bewegung unmöglich ist, weil eine noch so kleine Veränderung in den aus den Beobachtungen entnommenen Konstanten bewirken kann, daß eine vorhandene mittlere Bewegung zu existieren aufhört oder umgekehrt.

Nach den Rechnungen von *Stockwell* (a. a. O.) haben die Perihellängen der Planeten Merkur (Θ_1), Mars (Θ_4), Jupiter (Θ_7), Saturn (Θ_8), Uranus (Θ_7) und Neptun (Θ_5) mittlere Bewegungen.

Die Integration der Neigungsgleichungen (44) wird ganz wie die der Gleichungen (43) ausgeführt. Zu bemerken ist dabei nur, daß

35) *J. L. de Lagrange,* Mém. de l'Akad. de Berlin (1782) = Oeuvres 5, p. 285.

36) *P. Bohl,* J. f. Math. 135 (1906), p. 189—283. Daselbst findet man über die Versuche, diese Frage zu lösen, referiert.

eine der entsprechenden Wurzeln σ_α gleich Null ist, was mit dem Bestehen des Flächensatzes zusammenhängt.

13. Die säkularen Störungen der kleinen Planeten. Bei den Asteroiden hat man die Vereinfachung in den Gleichungen (43) und (44), daß die zu den Hauptplaneten gehörenden g_ν, h_ν, p_ν, q_ν als bekannt angesehen werden können. Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von g und h sind dann von der Form[37])

$$\frac{dh}{dt} = g\sum_\nu (0,\nu) - \sum_\nu [0,\nu] g_\nu,$$

$$\frac{dg}{dt} = -h\sum_\nu (0,\nu) + \sum_\nu [0,\nu] h_\nu,$$

oder

$$\frac{dh}{dt} = g\sum_\nu (0,\nu) - \sum_\alpha M_\alpha \cos(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha),$$

$$\frac{dg}{dt} = -h\sum_\nu (0,\nu) + \sum_\alpha M_\alpha \sin(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha).$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$h = M\sin\Big(t\sum_\nu (0,\nu) + \gamma\Big) + \sum_\alpha \frac{M_\alpha}{\sum_\nu (0,\nu) - \sigma_\alpha} \sin(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha),$$

$$g = M\cos\Big(t\sum_\nu (0,\nu) + \gamma\Big) + \sum_\alpha \frac{M_\alpha}{\sum_\nu (0,\nu) - \sigma_\alpha} \cos(\sigma_\alpha t + \gamma_\alpha),$$

wo M und γ Integrationskonstanten bedeuten. Wenn σ_α gleich $\sum_\nu (0,\nu)$ wäre, würden g und h unendlich große Werte erhalten können. Dies würde indessen nur anzeigen, daß die Integrationsmethode nicht anwendbar ist, weil wir ein Resultat erhalten, das gegen die vorausgesetzte Kleinheit von g und h verstößt. *C. V. L. Charlier*[38]) hat indessen gefunden, daß für die Asteroiden zwischen Mars und Jupiter σ_α nicht gleich $\sum_\nu (0,\nu)$ wird.

Für die Größen p und q erhält man analoge Differentialgleichungen und Lösungen. Dabei zeigt sich jedoch, daß für einen Asteroiden, dessen Abstand von der Sonne $= 1.98$ ist, der $\sum_\nu (0,\nu) - \sigma_\alpha$ entprechende Integrationsdivisor Null ist. *U. J. J. Leverrier*[39]) schließt

---

37) Die numerischen Werte der Koeffizienten (0, 0) und [0, 0] findet man bei *G. Noreń* und *S. Raab*, Lunds Univ. Årsskrift 36, Afd. 2, Nr. 8 = K. Fysiogr. Sällsk. Handl. 11, Nr. 8 = Meddel. fr. Lunds obs. Ser. II, Nr. 2, (1901).

38) *C. V. L. Charlier*, Mech. d. Himmels I, p. 424, Leipzig 1902.

39) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann., mém. 2, p. 165 und Add. p. 35.

daraus, daß ein kleiner Planet, welcher sich in diesem Abstand von der Sonne bewegt, sich von seiner ursprünglichen Bahn entfernen muß und eine große Neigung gegen die Ebene der Jupiterbahn erhalten würde. Dies sei also ein Fall, wo man bei der Berechnung der säkularen Glieder der Neigung nicht mit den Gliedern ersten Grades auskomme, obwohl die Neigung ursprünglich klein wäre. Über die Maximalwerte der Neigung kann man indessen nichts sagen, ohne daß man die Glieder höheren Grades mitnimmt. Bei Berücksichtigung dieser finden *M. F. Tisserand*[40]) und *C. V. L. Charlier*[41]), daß die singuläre Stelle bei $a = 2.05$ liegt, und daß die Schwankungen in der Neigung innerhalb ziemlich enger Grenzen liegen.

14. Säkulare Glieder höheren Grades. *Lagrange* und *Laplace* hatten angenommen, daß die Glieder höheren Grades eine so kleine Einwirkung hätten, daß man sie unberücksichtigt lassen könnte. *U. J. J. Leverrier*[42]) versuchte die Glieder dritten Grades zu berücksichtigen. Er wendet die Methode der sukzessiven Annäherungen an und berechnet in den Differentialgleichungen die Glieder dritten Grades mittels der bei bloßer Berücksichtigung der Glieder ersten Grades erhaltenen Werte. Durch eine kleine Veränderung der in den letztgenannten Gliedern enthaltenen Konstanten kann er die Lösung noch in periodischer Form erhalten, wobei in den Argumenten auch lineare Verbindungen der ursprünglichen Argumente mit ganzen Koeffizienten auftreten. Indessen finden sich in der Lösung sehr kleine Integrationsdivisoren, welche bewirken, daß die Konvergenz der Annäherungen sehr fraglich ist. Bei dem jetzigen Stande der Himmelsmechanik scheint es in der Praxis am besten zu sein, wenigstens die Glieder höheren Grades nicht in periodische Form zu bringen, sondern sie als Entwicklungen nach Potenzen der Zeit zu geben, deren Konvergenzverhältnisse man freilich untersuchen müßte. Selbstverständlich sind auch die Glieder des Ranges eins, zwei, . . . zu berücksichtigen, da besonders aus langperiodischen Gliedern entstandene säkulare Glieder höheren Ranges sehr merkbar sein können.

15. Berücksichtigung der säkularen und langperiodischen Störungen in den periodischen Gliedern. Um in einfacher Weise die Genauigkeit der Berechnung der periodischen Glieder zu steigern, pflegen die Astronomen oft diese Glieder nicht mit den konstanten Werten der Elemente, sondern mit der Summe der konstanten Werte

40) *M. F. Tisserand*, Obs. de Paris ann., mém. 16 (1882), p. 56—57.
41) *C. V. L. Charlier*, Mech. d. Himmels I, p. 432.
42) *U. J. J. Leverrier*, Obs. de Paris ann., mém. 2, Add. p. 38—51.

der Elemente und ihrer säkularen Störungen zu berechnen. Nennen wir der Kürze wegen diese Summe säkulares Element. Nachdem man die säkularen Elemente bestimmt hat, berechnet man in der ersten Annäherung die rechten Seiten der Differentialgleichungen der Elemente mit den säkularen Elementen. Jedes Element $\eta = (\eta) + \delta\eta$ ist dann aus einer Gleichung der Form

$$\frac{d(\eta)}{dt} + \frac{d\delta\eta}{dt} = A + \sum B_{i,i'} \sin(in + i'n')t + \sum C_{i,i'} \cos(in + i'n')t$$

zu bestimmen, wo A, $B_{i,i'}$ und $C_{i,i'}$ Funktionen der säkularen Elemente sind (i und i' ganze Zahlen). Die Gleichung

$$\frac{d(\eta)}{dt} = A$$

definiert die säkularen Elemente selbst. Der periodische Teil $\delta\eta$ des Elementes η wird erhalten durch partielle Integration nach der Formel

$$\delta\eta = -\sum \frac{\cos(in + i'n')t}{in + i'n'} \left\{ B_{i,i'} - \frac{\frac{dC_{i,i'}}{dt}}{(in + i'n')} - \frac{\frac{d^2B_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}$$

$$+ \sum \frac{\sin(in + i'n')t}{in + i'n'} \left\{ C_{i,i'} + \frac{\frac{dB_{i,i'}}{dt}}{(in + i'n')} - \frac{\frac{d^2C_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}.$$

Die Gleichung (38) gibt zur Bestimmung des periodischen Teils von ϱ eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2\delta\varrho}{dt^2} = \sum B_{i,i'} \sin(in + i'n')t + \sum C_{i,i'} \cos(in + i'n')t,$$

woraus durch partielle Integration wieder folgt

$$\delta\varrho = -\sum \frac{\sin(in + i'n')t}{(in + i'n')^2} \left\{ B_{i,i'} - \frac{2\frac{dC_{i,i'}}{dt}}{in + i'n'} - \frac{3\frac{d^2B_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}$$

$$- \sum \frac{\cos(in + i'n')t}{(in + i'n')^2} \left\{ C_{i,i'} + \frac{2\frac{dB_{i,i'}}{dt}}{in + i'n'} - \frac{3\frac{d^2C_{i,i'}}{dt^2}}{(in + i'n')^2} + \cdots \right\}.$$

Man wendet also eine allgemeinere und genauere Bahn als die Keplersche Ellipse schon in der ersten Annäherung an.

Die Glieder, deren Periode sehr lang ist, haben die Eigenschaft der säkularen Glieder, sich langsam zu verändern, und man kann die Genauigkeit der Rechnung noch erhöhen, wenn man sie bei der Berechnung der periodischen Störungen mit den säkularen Elementen vereinigt. Die größten langperiodischen Glieder finden sich in ϱ. Man

beschränkt sich oft darauf, die langperiodischen Glieder von ϱ in Verbindung mit nt zu halten. In der Theorie von Pallas verwendet z. B. *C. F. Gauß*[13]) in den Argumenten die mit der Hauptstörung der Pallaslänge behaftete Pallaslänge und die mit der sog. großen Ungleichheit der Jupiterlänge behaftete Jupiterlänge. In den Theorien der kleinen Planeten berücksichtigt man immer in dieser Weise die große Ungleichheit von Jupiter.

16. Langperiodische Glieder. In Nr. 8 ist gezeigt worden, daß in den Elementen bei der Integration jedes Gliedes ein Divisor

$$\nu = jn + j'n'$$

eingeführt wird. Bei der Integration der Gleichung (38) dagegen erhält man in ϱ den Integrationsdivisor ν^2. Je länger die Periode des Argumentes eines Gliedes ist, desto kleiner ist ν und desto mehr wird das Glied bei der Integration vergrößert, wodurch große Ungleichheiten in den Elementen und besonders in ϱ entstehen. Um eine möglichst richtige Bestimmung der Ungleichheiten zu erhalten, muß man in den weiteren Annäherungen ν gleich dem Koeffizienten von t in dem Argumente des betreffenden Gliedes setzen, so daß man etwa hat

$$\nu = jn + j'n' + \sigma,$$

wo σ jedenfalls eine sehr kleine Größe von der Ordnung der störenden Massen ist. Ein kleiner Integrationsdivisor entsteht, wenn die mittleren Bewegungen kommensurabel oder nahe kommensurabel sind. Je kleiner die ganzen Zahlen i' und i sind, durch welche man das Verhältnis $n : n'$ ausdrücken kann, desto größer sind im allgemeinen die Koeffizienten des Gliedes mit dem Argument $il - i'l' + c$ in der Störungsfunktion, und desto größer werden die entstehenden Ungleichheiten. Bei den kleinen Planeten z. B. sind die langperiodischen Glieder sehr bedeutend, wenn das Verhältnis ihrer mittleren Bewegungen zu derjenigen des Jupiter nahe gleich 2 (Hekubatypus oder Typus $\frac{1}{2}$), $\frac{2}{3}$ (Hildatypus oder Typus $\frac{2}{3}$), 3 (Hestiatypus oder Typus $\frac{1}{3}$), . . . ist.

Bei den kleinen Planeten kommen mehrere Fälle vor, wo die Kommensurabilität der mittleren Bewegungen mit derjenigen des Jupiter *sehr* scharf und die langperiodischen Glieder die bedeutendsten sind. In dem System der großen Planeten sind besonders bekannt die sog. *große Ungleichheit* in den Bewegungen von Jupiter und Saturn und die sog. *lange Ungleichheit* in der Bewegung der Erde. Die erstgenannte entsteht, weil die 5 malige mittlere Bewegung Saturns nahe gleich der mittleren 2 maligen Bewegung Jupiters ist. Die letztgenannte, weil die 13 fache mittlere Bewegung der Erde nahe gleich

der 8fachen mittleren Bewegung der Venus ist. Die Berechnung von Ungleichheiten, welche größeren Werten von i und i' entsprechen, ist deswegen schwer, weil man die Koeffizienten entfernter Glieder in der Störungsfunktion zu bestimmen hat. Für solche Fälle sind vor allem die asymptotischen Ausdrücke der Koeffizienten benutzt worden (vgl. VI 2, 13 Nr. 59, 60 *v. Zeipel*).

Bei den Gliedern höherer Ordnung treten in den Argumenten lineare Verbindungen der verschiedenen Planetenlängen auf, und dementsprechend erhält man Integrationsdivisoren der Form

$$jn + j'n' + j''n'' + \cdots + j^{(\mu)}n^{(\mu)},$$

wo die $j^{(\nu)}$ ganze Zahlen sind. Wenn die mittleren Bewegungen $n^{(\nu)}$ gegeben sind, kann man leicht Zahlen $j^{(\nu)}$ erhalten, welche den betreffenden Divisor sehr klein machen. Es zeigt sich jedoch im Planetensystem, daß nur wenige solche Glieder merkbare Ungleichheiten geben. Ausgeschlossen ist jedoch nicht, daß die Summe aller derartigen Glieder merkbar würde. Je weiter man die Annäherungen treibt, desto mehr solcher Glieder entstehen, und die Konvergenz wird immer fraglicher. Wie man strenge der Schwierigkeit der kleinen Divisoren entgehen soll, ist noch eine ungelöste Frage. Für kürzere Zeiten entgeht man der Schwierigkeit dadurch, daß man die fraglichen Glieder als säkulare Glieder behandelt. Bei sehr langen Zeiten aber hängt diese Frage mit der Frage der Existenz von mittleren Bewegungen überhaupt zusammen.

P. S. Laplace[43]) hat gefunden, daß zwischen den langperiodischen Teilen $\delta\varrho$ und $\delta\varrho'$ der Größen ϱ und ϱ' zweier einander störender Planeten die angenäherte Gleichung

$$m\sqrt{a}\,\delta\varrho = -\,m'\sqrt{a'}\,\delta\varrho'$$

stattfindet.

17. Die Lücken in den mittleren Bewegungen der kleinen Planeten. Libration. Da die langperiodischen Ungleichheiten bei sehr naher Kommensurabilität der mittleren Bewegungen sehr groß sind, wollte man daraus schließen, daß die Störungen hier so groß würden, daß eine mittlere Bewegung nicht möglich wäre, und suchte darin die Erklärung der von *Kirkwood*[44]) entdeckten Lücken im System der kleinen Planeten für bestimmte mittlere Bewegungen. Die ausgeprägtesten Lücken findet man da, wo die mittleren Bewegungen sich zu derjenigen des Jupiter wie $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{1}$ verhalten. Die in dieser Hinsicht von

43) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 1, p. 334 = Oeuvres I p. 360.

44) *Kirkwood,* Proc. of the Amer. Philos. Soc., Philadelphia 1871.

O. Callandreau[45]), *H. Gyldén*[46]), *F. Tisserand*[47]) und andern angestellten Untersuchungen haben kein entscheidendes Resultat gegeben, weil man über diese Verhältnisse aus den ersten Gliedern der Störungen kein solches erhalten kann. Sie zeigen jedoch wenigstens an, daß in Zeiten von erheblicher Länge nichts passiert, was die Lücken als Folge der Gravitation der gegenwärtig vorhandenen Massen verständlich machte.

In nahem Zusammenhang mit diesen Untersuchungen steht die Frage der *Libration.* Wenn die Störungen bewirken, daß ein Argument in der Störungsfunktion nur zwischen endlichen Grenzen schwankt, sagt man, daß eine *Libration* vorhanden ist. Solche können entstehen, wenn die mittleren Bewegungen der Argumente nahe kommensurabel sind. Da die säkularen Bewegungen der Perihelien und diejenigen der Knoten sehr klein sind im Verhältnis zu den mittleren Bewegungen der Planeten, hat man im allgemeinen nur Librationen einzeln für sich zwischen Perihelbewegungen, Knotenbewegungen und mittleren Bewegungen zu betrachten. Ein besonderes Interesse beanspruchen die Librationen unter den mittleren Bewegungen. Sei

$$D = i\varrho - i'\varrho' + c$$

das betrachtete Argument, wo c eine konstante oder wenigstens sehr langsam veränderliche Größe ist. Mittels der Gleichung (38) und der analogen Gleichung für den störenden Planeten findet man, daß D eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2D}{dt^2} = -\sum_{\nu} h_\nu \sin D_\nu$$

zu erfüllen hat. Auf der rechten Seite dieser Gleichung betrachtet man nur Glieder der Form

$$h_\mu \sin(\mu D + c_\mu), \qquad (c_\mu = \text{Konst.})$$

oder man vereinfacht noch weiter und bestimmt D aus einer Gleichung

$$\frac{d^2D}{dt^2} = -h \sin(D + c_0),$$

welche die Bewegungsgleichung eines schwingenden Pendels ist. Es ist bekannt, daß das durch diese Gleichung bestimmte D je nach den Werten der Integrationskonstanten entweder um einen gewissen Wert schwingt, was eine Libration geben würde, oder mit der Zeit unendlich wächst oder schließlich mit der Zeit sich einer endlichen Grenze asymptotisch nähert. Indessen scheint es unmöglich, etwas

45) *O. Callandreau,* Obs. de Paris ann., mém. 22 (1896).

46) *H. Gyldén,* Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. 52. p. 603, Stockholm 1895.

47) *F. Tisserand,* Méc. cél. 4, p. 417—444.

Bestimmtes daraus für den Verlauf der Planetenbewegungen in äußerst langen Zeiten zu schließen, da der Einfluß der vernachlässigten Glieder nicht hinreichend untersucht ist. Schon *C. F. Gauß*[48]) vermutete, daß zwischen den mittleren Bewegungen von Pallas und Jupiter eine Libration stattfände. Die Untersuchungen von *O. Callandreau*[45]), *F. Tisserand*[47]) und anderen zeigen, wenngleich sie nur angenähert sind, daß wahrscheinlich keine solche Librationsfälle im System der kleinen Planeten sich finden. Die Librationsbewegungen zwischen anderen in den Argumenten vorkommenden mittleren Bewegungen hat *C. V. L. Charlier*[49]) behandelt.

18. Die Methode von Poincaré. Auf die Resultate der allgemeinen theoretischen Untersuchungen und Andeutungen von *H. Poincaré*[50]) versuchten *M. Simonin*[51]) und *M. K. Popoff*[52]) eine Theorie des Planeten Hekuba zu gründen. Der Grundgedanke der Poincaréschen Methode ist, eine periodische Lösung aufzusuchen, welche sich so nahe als möglich der Bewegung des untersuchten Planeten anschließt, und durch Zufügung kleiner Variationen die noch übrigbleibenden Abweichungen zu berücksichtigen. Da in der periodischen Lösung die Bewegung für alle Zeiten bekannt ist, so sollte man erwarten können, dadurch eine wenigstens für sehr lange Zeiten gültige Lösung des Problems zu erhalten. Es scheint jedoch bei der praktischen Ausführung mit Schwierigkeiten verbunden zu sein, periodische Lösungen zu finden, welche sich hinreichend nahe den wahren Bewegungen anschließen. Man müßte, um das Ziel zu erreichen, periodische Lösungen anwenden, deren Periode sehr groß im Verhältnis zu den Umlaufszeiten der Planeten ist. Bezüglich der bis jetzt angewandten periodischen Lösungen sei hier auf den Artikel von *Whittaker* (VI 2, 12, Nr. 5, 6) verwiesen. Die praktische Verwendung der Poincaréschen periodischen Bahnen behandelt *A. Wilkens*[52a]).

Bei diesen Untersuchungen bedient man sich öfters, dem Vorgange von *Poincaré* folgend, der kanonischen Elemente. Man hat dann den Vorteil, daß die Differentialgleichungen der Bewegung die

---

48) *C. F. Gauß*, Werke VII, Nachlaß p. 421, 557—559.

49) *C. V. L. Charlier*, Öfversigt af K. Vet. Soc. Förh. Nr. 2 = Meddel. fr. Lunds Obs. Nr. 12, Stockholm 1900.

50) *H. Poincaré*, Les méth. nouv. de méc. cél. 1, 2, 3, Paris 1892, 1893, 1899; Leç. de méc. cél. 1, Paris 1905; Bull. Astr. 19 (1902), p. 177—198 und 289—310.

51) *M. Simonin*, Obs. de Nice ann. 6, Paris 1897.

52) *M. K. Popoff*, Sur le mouv. de (108) Hécube, Diss. Paris 1912.

52a) *A. Wilkens*, Astr. Nachr. 195 (1913) p. 385—412.

sehr einfache Form

$$(49) \qquad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

haben, wo p_r und q_r die kanonischen Elemente bezeichnen (siehe den Artikel von *Whittaker* VI 2, 12, Nr. 1). Ein Nachteil ist dagegen, daß die Entwicklung der Störungsfunktion komplizierter wird, und daß ein Übergang zu elliptischen Elementen für die praktischen Zwecke der Theorien öfters von den Astronomen gewünscht wird. Außer den im vorgehenden genannten Integrationsmethoden ist bei Anwendung kanonischer Elemente die von *Delaunay* in seiner Mondtheorie angewandte Methode, bei welcher nach und nach jedes Glied streng aus der Funktion H wegintegriert wird, besonders vorteilhaft.[53]) *H. Poincaré*[54]) hat gezeigt, daß die langperiodischen Glieder der niedrigsten Klasse, welche die wichtigsten sind, erhalten werden, wenn man in den Gleichungen (49) alle kurzperiodischen Glieder wegläßt.

II. Die Hansensche Methode.

19. Vorbemerkung. Obgleich die Methode der Variation der Konstanten in analytischer Hinsicht viele Vorteile gewährt und ohne Zweifel das Störungsproblem an seinen innersten Wurzeln faßt, hat sie in praktischer Hinsicht doch mehrere Nachteile. Als solche nennt *P. A. Hansen*[55]) z. B.

1. Man muß für jeden Planeten die Störungen in sechs Elementen berechnen, während man, um seine Lage im Raume zu bestimmen, nur drei Koordinaten nötig hat.

53) *G. W. Hill,* Trans. of the Amer. Math. Soc. I, Washington (1900) p. 205—242 = Werke 4 p. 169—206.

54) *H. Poincaré,* Leç. de méc. cél. 1, Ch. 13, Paris 1905.

55) *P. A. Hansen* hat selbst seine Methode in mehreren Abhandlungen dargestellt. Von diesen seien hier nur die folgenden angeführt: Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831; Astr. Nachr. 15 (1838), p. 201 ff., wo *Hansen* die Prinzipien seiner Methode darstellt; Astr. Nachr. 18 (1841), p. 237 f.; Astr. Nachr. 42 (1856), p. 273 f., und schließlich mit aller Vollständigkeit in „Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten", Leipzig Ges. Wiss. Abhdl. 3 (1857) [Erste Abhandlung], 4 (1857) [Zweite Abhandlung], 5 (1861) [Dritte Abhandlung], welche allgemein als „Auseinandersetzung" 1., 2. oder 3. Abh. zitiert werden. Weiter ist diese Methode beinahe unverändert in seiner Mondtheorie angewandt (vgl. VI, Nr. 15). Die Hansenschen Differentialgleichungen findet man weiter abgeleitet bei: *Brünnow,* Astr. Nachr. 64 (1865), p. 259—266; *O. Lesser,* Untersuchung über die allgemeinen Störungen der Metis, Diss. Marburg 1861; *H. v. Zeipel,* St. Pét. mém. 12 (1902). Ein Beispiel, wie die Hansensche Theorie für einen kleinen Planeten mit den Beobachtungen übereinstimmt, gibt *H. Samter,* Astr. Nachr., Ergänzungshefte Nr. 17. (1910).

2. Die Störungen der Elemente sind im allgemeinen weit größer als die Störungen zweckmäßig gewählter Koordinaten, und um die beabsichtigte Genauigkeit in den Koordinaten zu erhalten, muß man in den Ausdrücken der Elementenstörungen eine größere Anzahl von Gliedern berechnen, die sich nachher bei dem Übergang zu Koordinaten fast ganz aufheben. Dies kommt daher, daß die Veränderungen der Geschwindigkeiten des Planeten in den Elementenstörungen auch einbegriffen sind.

3. Die Störungsfunktion hängt von doppelt so viel Elementen als Koordinaten ab. Bei der Berechnung der Störungen höherer Ordnung hat man daher eine weit größere Anzahl Ableitungen derselben nach den Elementen als nach den Koordinaten zu bilden.

Die genannten Nachteile sucht *Hansen* durch eine Abänderung der Methode zu vermeiden. Er hebt hervor, wie wichtig es ist, sowohl die zu bestimmenden Größen als die Funktionen der Zeit, durch welche man die Störungen ausdrücken will, zweckmäßig zu wählen. Am geeignetsten findet *Hansen* die Störungen der mittleren Länge oder diejenigen der mittleren Anomalie und diejenigen des mit der für die Störungen korrigierten mittleren Anomalie berechneten Radiusvektors[56]) und die Breite über der Bahnebene oder die senkrecht auf ihr stehende Koordinate. In seinen ersten Arbeiten wählte er die mittlere Länge oder die mittlere Anomalie zur unabhängigen Veränderlichen. Später erkannte er, daß es weit vorteilhafter ist, die exzentrische Anomalie des gestörten Körpers als unabhängige Variable zu wählen, indem dann mehrere in den Entwicklungen vorkommende Faktoren aus einer kleinen Anzahl endlicher Glieder bestehen, wodurch an vielen Stellen schwach konvergierende Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität vermieden werden.

Endlich ist hervorzuheben, daß *Hansen*, auf explizite analytische Ausdrücke der Koeffizienten verzichtend, im weitesten Masse numerische Rechnungen anwendet, um langsam konvergierende Reihen zu vermeiden.

20. Die Hansenschen beweglichen Koordinaten. Ideale Koordinaten. In der ungestörten Bewegung vereinfacht sich die Integration der Bewegungsgleichungen dadurch, daß die Bewegung in einer festen Ebene vor sich geht. Die Gleichungen und Konstanten, welche die Bahnebene bestimmen, trennen sich dann unmittelbar von den Gleichungen und Konstanten, welche die Bewegung in der Bahnebene bestimmen. *Hansen* erreicht eine entsprechende Trennung in der ge-

56) Anstatt des Radiusvektor wird bisweilen dessen natürlicher Logarithmus angewandt.

störten Bewegung, indem er anstatt eines festen Koordinatensystems X, Y, Z ein anderes bewegliches Koordinatensystem x, y, z, das seinen Ursprung im Schwerpunkt der Sonne hat, einführt.

Bei der Methode der Variation der Konstanten werden die Veränderungen der Elemente durch die Bedingung bestimmt, daß die auf feste Achsen bezogenen Koordinaten X, Y, Z und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit die gleiche analytische Form in der gestörten wie in der ungestörten Bewegung haben sollen und daß man also die Elemente als Konstanten ansehen kann, wenn man $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$ und $\frac{dZ}{dt}$ durch Differentiation der Ausdrücke von X, Y und Z bildet. Von dem Ort des Planeten abhängige Größen, welche diese Eigenschaft haben, nennt *Hansen „ideale"* Koordinaten. Eine jede Funktion von nur idealen Koordinaten und Konstanten ist wieder eine ideale Koordinate.

Es sei

$$(50)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z, \\ y = \beta X + \beta_1 Y + \beta_2 Z, \\ z = \gamma X + \gamma_1 Y + \gamma_2 Z, \end{cases}$$

wo $\alpha, \alpha_1, \ldots, \gamma_2$ die neun Richtungskosinus der beweglichen Achsen darstellen. *Hansen* will, daß x, y und z ideale Koordinaten werden sollen. Die Richtungskosinus müssen dann die Bedingungsgleichungen

$$(51)\qquad \begin{cases} X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha_1}{dt} + Z\frac{d\alpha_2}{dt} = 0, \\ X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta_1}{dt} + Z\frac{d\beta_2}{dt} = 0, \\ X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma_1}{dt} + Z\frac{d\gamma_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

erfüllen. Setzt man abkürzend

$$A = \beta\frac{d\alpha}{dt} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2\frac{d\alpha_2}{dt},$$

$$B = \alpha\frac{d\gamma}{dt} + \alpha_1\frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2\frac{d\gamma_2}{dt},$$

$$C = \gamma\frac{d\beta}{dt} + \gamma_1\frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2\frac{d\beta_2}{dt},$$

so können diese Gleichungen wie folgt geschrieben werden:

$$(52)\qquad Ay - Bz = 0, \quad Ax - Cz = 0, \quad Bx - Cy = 0.$$

Die Gleichungen (51) stellen also nur zwei unabhängige Bedingungen zwischen den Richtungskosinus dar und besagen geometrisch, daß das bewegliche ideale Koordinatensystem sich jederzeit um den augen-

blicklichen Radiusvektor des gestörten Planeten dreht. Daher bestimmen die sechs bekannten Bedingungen

$$\alpha^2+\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2=1, \quad \alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0,$$
$$\beta^2+\beta_1{}^2+\beta_2{}^2=1, \quad \alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2=0,$$
$$\gamma^2+\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2=1, \quad \beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2=0$$

in Verbindung mit den Gleichungen (51) nicht vollständig die Richtungskosinus des idealen Koordinatensystems. Um dies zu erreichen, wählt *Hansen* als neunte Bedingung

$$z=0, \tag{53}$$

woraus folgt, daß der Radiusvektor stets in der xy-Ebene sich befindet, oder daß die xy-Ebene, welche also die *instantane* Bahnebene ist, sich um den in dieser Ebene sich befindenden augenblicklichen Radiusvektor dreht. Durch diese Bestimmungen wird die x- und somit auch die y- und z-Achse vollkommen bestimmt für jeden beliebigen Zeitpunkt, wenn die Lage der x-Achse in der Bahnebene für eine gegebene Ausgangsepoche gewählt ist.

Um die Lage des Planeten zu erhalten, hat man folglich die Lage der Bahnebene, die Lage der x-Achse in der Bahnebene und die Bewegung des Planeten in dieser Ebene zu bestimmen.

21. Die Differentialgleichungen der Bewegung in der instantanen Bahnebene. Unter Anwendung der Gleichungen (50) und der Differentialgleichungen der Bewegung für die auf feste Achsen bezogenen Koordinaten X, Y, Z leitet man die Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{(1+m)x}{r^3}=(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{(1+m)y}{r^3}=(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial y} \end{cases} \tag{54}$$

ab, wo die Störungsfunktion Ω den vorher (Nr. 2) angegebenen Ausdruck hat und, weil $z=0$, der Radiusvektor durch die Gleichung

$$r^2=x^2+y^2 \tag{55}$$

gegeben ist. Dabei ist $k=1$ gesetzt[6]).

Führt man statt x und y die Polarkoordinaten r und w durch die Gleichungen

$$x=r\cos w, \quad y=r\sin w \tag{56}$$

ein, so geben die Gleichungen (54)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2+\dfrac{1+m}{r^2}=(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ r^2\dfrac{d^2w}{dt^2}+2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dw}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{dw}{dt}\right)=(1+m)\dfrac{\partial\Omega}{\partial w}. \end{cases} \tag{57}$$

Die Gleichungen (54) und (57) sind von den Astronomen oft angewandt worden.[57]) Wie man sieht, kann die Bewegung der Bahnebene, nur soweit Ω davon abhängt, auf die Bewegung in der Bahnebene einen Einfluß ausüben.

22. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der Bahnebene und die Lage der x-Achse. Die Lage der xy-Ebene bestimmt sich am einfachsten durch Angabe ihrer Knotenlänge Ω und ihrer Neigung i in bezug auf eine feste Grundebene XY (z. B. die Ekliptik für eine beliebige Zeit). Die Lage der x-Achse wird gegeben durch den in der Bewegungsrichtung des Planeten gezählten Abstand $\bar{\sigma}$ von der x-Achse bis zum aufsteigenden Knoten der xy-Ebene auf der festen XY-Ebene. Den Wert $\bar{\sigma}_0$, welchen $\bar{\sigma}$ für die Epoche $t = 0$ annimmt, bestimmt *Hansen* durch die Gleichung

$$\bar{\sigma}_0 = \Omega_0, \tag{58}$$

wo Ω_0 die oskulierende Knotenlänge für $t = 0$ bezeichnet. Für die Größe $\bar{\sigma}$ findet man die auch durch geometrische Betrachtungen leicht abzuleitende Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \tag{59}$$

wo $\frac{d\Omega}{dt}$ und i z. B. durch die Gleichungen (23) erhalten werden können.

Sei B der Winkel, den der Radiusvektor mit der XY-Ebene macht und L der Winkel zwischen der X-Achse und der Projektion des Radiusvektors auf die XY-Ebene. Dann ist

$$\begin{cases} X = r \cos B \cos L, \\ Y = r \cos B \sin L, \\ Z = r \sin B, \end{cases} \tag{60}$$

und

$$\begin{aligned} \cos B \sin (L - \Omega) &= \cos i \sin (w - \bar{\sigma}), \\ \cos B \cos (L - \Omega) &= \cos (w - \bar{\sigma}), \\ \sin B &= \sin i \sin (w - \bar{\sigma}). \end{aligned} \tag{61}$$

Diese Gleichungen sind indessen nicht die geeignetsten zur Ermittlung von L und B, weil die konstanten Teile der Elemente nicht von den variablen Teilen derselben getrennt sind. *Hansen* erreicht eine solche Trennung durch Transformation der Gleichungen (61) in die folgenden

57) Sie sind zuerst von *Hansen* gegeben. Nach *Y. Villarceau* (Paris Bur. Long. annales 2 (1882)) hat *Wronski* 1842 dieselben Gleichungen gefunden.

$$(62)\quad \begin{cases} \cos B \sin(L - \Omega_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(w - \Omega_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \dfrac{Q}{\varkappa \cos i_0}\right), \\ \cos B \cos(L - \Omega_0 - \Gamma) = \cos(w - \Omega_0) + \dfrac{sP}{\varkappa}, \\ \sin B = \sin i_0 \sin(w - \Omega_0) + s, \end{cases}$$

wo

$$(63)\quad \begin{cases} P = \sin i \sin(\bar{\sigma} - \Omega_0), \\ Q = \sin i \cos(\bar{\sigma} - \Omega_0) - \sin i_0, \\ \varkappa = \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - Q \sin i_0, \end{cases}$$

$$(64)\quad s = Q \sin(w - \Omega_0) - P \cos(w - \Omega_0)$$

ist, und die Größe Γ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\Omega - \Omega_0 - \Gamma) = \frac{(\cos i + \cos i_0) \sin(\bar{\sigma} - \Omega_0)}{(1 + \cos i \cos i_0) \cos(\bar{\sigma} - \Omega_0) - \sin i \sin i_0}$$

gegeben ist. Am einfachsten ist jedoch Γ aus der Differentialgleichung

$$(65)\quad \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{hrs}{\varkappa} \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

zu erhalten, wobei

$$(66)\quad h = \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{a(1-e^2)}}$$

gesetzt worden ist.

Die Größen P und Q können auch durch die Gleichungen

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = hr \sin(w - \Omega_0) \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} \cos i, \\ \dfrac{dQ}{dt} = hr \cos(w - \Omega_0) \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} \cos i \end{cases}$$

bestimmt werden, wobei die Integrationskonstanten so gewählt werden müssen, daß P und Q Null werden, wenn $t = 0$ ist.

Die Größen P, Q und s sind von der ersten Ordnung, wogegen Γ zweiter Ordnung ist. In den Gleichungen (62) sind Γ, $\frac{sP}{\varkappa}$ und $\frac{sQ}{\varkappa \cos i_0}$ in den meisten Fällen ganz unmerklich und können unberücksichtigt bleiben.

Ersichtlich sind r, w und nach den letzten Gleichungen (60) und (62) auch s ideale Koordinaten. Aus der Gleichung (64) folgt daher

$$\frac{ds}{dt} = (Q \cos(w - \Omega_0) + P \sin(w - \Omega_0)) \frac{dw}{dt},$$

welche Gleichung in Verbindung mit (64) unmittelbar P und Q gibt, wenn die analytischen Ausdrücke von w und s bekannt sind. Da man immer mit hinreichender Genauigkeit $\varkappa = 2\cos^2 i_0$ setzen kann, ist die Bestimmung der Lage des Radiusvektors in der Hauptsache auf die Ermittlung von w und s zurückgeführt.

23. Differentialgleichungen zur Bestimmung des Radiusvektors und derjenigen der mittleren Anomalie. Anstatt der Veränderlichen r und w führt *Hansen* zwei neue Größen v und ζ oder $n\delta\zeta$ durch die Gleichungen

$$(68)\qquad \begin{cases} v = w - \varpi, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v, \\ r_0 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = a(1-e\cos E), \\ r = r_0(1+v), \quad n^2a^3 = 1+m, \\ n\zeta = nt + c + n\delta\zeta = E - e\sin E \end{cases}$$

ein, wo ϖ, a, e und c Konstante sind, welche am zweckmäßigsten gleich Mittelwerten der elliptischen Elemente ϖ, a, e und ε für die Zeit, welche die Theorie umfassen soll, gewählt werden. Bevor solche bekannt sind, kann man sie gleich den oskulierenden Elementen zur Zeit der Epoche ($t=0$) setzen. Durch diese Wahl wird erreicht, daß v und $\delta\zeta$ Größen erster Ordnung werden.

Aus den Gleichungen (57) und (68) leitet man die Gleichungen

$$(69)\qquad \begin{cases} \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v(1+m)}{r_0^3(1+v)^3} = \frac{1+m}{r_0(1+v)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r_0} - \frac{e\sin v}{a(1-e^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1+m}{r_0^3(1+v)^3}(2S+S^2), \\ \frac{d\delta\zeta}{dt} = \frac{S-2v-v^2}{(1+v)^2}, \end{cases}$$

$$(70)\qquad \frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{1+m}{a(1-e^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

ab, welche nach *Hansen* indessen nicht zur Berechnung allgemeiner Störungen geeignet sind, weil sie auf schwach konvergierende Reihen führen.

Um seine zur Berechnung allgemeiner Störungen anzuwendenden Gleichungen abzuleiten, geht *Hansen* von den für die elliptische Bewegung geltenden Formeln

$$(71)\qquad \begin{cases} w = v_1 + \varpi_1, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1, \\ r = \frac{a_1(1-e_1^2)}{1+e_1\cos v_1} = a_1(1-e_1\cos E_1), \quad n_1^2a_1^3 = 1+m, \\ n_1t + \varepsilon_1 - \varpi_1 = E_1 - e_1\sin E_1 \end{cases}$$

aus, wobei a_1, e_1, ε_1 und ϖ_1 die oskulierenden Elemente sind. Die aus (68) und (71) folgenden Gleichungen

$$r_0^2\frac{dw}{d\zeta} = \sqrt{(1+m)a(1-e^2)}, \quad r^2\frac{dw}{dt} = \sqrt{(1+m)a_1(1-e_1^2)}$$

geben

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{h}{h_1(1+v)^2}, \tag{72}$$

wo

$$h_1 = \frac{a_1 n_1}{\sqrt{1-e_1^2}} = \frac{\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_1}} \tag{73}$$

ist, und h die früher (Gl. (66)) eingeführte Konstante ist. Weil

$$\frac{1}{1+v} = \frac{r_0}{r}$$

ist, bekommt man nach den Gleichungen (68) und (71)

$$\frac{1}{1+v} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 \left(1 + \xi \frac{r_0}{a} \cos v + \psi \frac{r_0}{a} \sin v\right), \tag{74}$$

wo

$$\begin{cases} \xi \cos^2 \varphi = e_1 \cos(\varpi_1 - \varpi) - e, \\ \psi \cos^2 \varphi = e_1 \sin(\varpi_1 - \varpi), \\ e = \sin \varphi \end{cases} \tag{75}$$

ist. Unter Anwendung der Gleichung (74) erhält man aus (72)

$$\frac{d\zeta}{dt} = 1 + \overline{W} + \frac{h}{h_1}\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 \tag{76a}$$

oder nach *G. W. Hill*[58]) besser

$$\frac{d\zeta}{dt} = 1 + \frac{\overline{W} + v^2}{1 - v^2}, \tag{76b}$$

wo

$$\overline{W} = \Xi + \Upsilon \frac{r_0}{a} \cos v + \Psi \frac{r_0}{a} \sin v \tag{77}$$

ist und die sogenannten Hansenschen Elemente durch die Formeln

$$\begin{cases} \Xi = 2\frac{h_1}{h} - \frac{h}{h_1} - 1, \\ \Upsilon = \frac{2h_1}{h}\xi, \\ \Psi = \frac{2h_1}{h}\psi \end{cases} \tag{78}$$

gegeben sind.

Eliminiert man $r \cos v$ und $\frac{h_1}{h}$ aus den Gleichungen (74), (77) und (78), so findet man bis auf Glieder höheren als zweiten Grades in $\overline{W}$ und Ξ die Entwicklung

$$v = -\tfrac{1}{2}\overline{W} - \tfrac{1}{6}\Xi + \tfrac{1}{4}\overline{W}^2 + \tfrac{1}{108}\Xi^2 + \cdots. \tag{79}$$

Oft wendet man indessen diese Gleichung nur zur Kontrolle an und berechnet v aus der Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{n}{2\cos\varphi}(\Upsilon \sin v - \Psi(\cos v + e)), \tag{80}$$

58) *G. W. Hill*, Amer. Journ. of Math. 4 p. 246 (1881) = Works 1 p. 348.

welche man durch Differentiation der Gleichung (75) und Substitution des Wertes (72) für $\frac{d\zeta}{dt}$ erhält, wobei die Elemente als Konstanten betrachtet werden können, weil v eine ideale Koordinate ist.

G. W. Hill[59]) hat noch gezeigt, wie man v aus den ersten Gliedern von $\overline{W}$ berechnen kann, wenn ζ bekannt ist.

24. Bestimmung der Funktion $\overline{W}$. Da Ξ, Υ, Ψ bekannte Funktionen der oskulierenden Elemente sind, so könnte man, um $\overline{W}$ zu erhalten, unter Anwendung der Gleichungen (21) und (22) jede einzelne dieser Größen durch eine Differentialgleichung bestimmen. Um $\overline{W}$ nicht in dieser Weise zerlegen zu müssen, wodurch seine Entwicklung weitläufig gemacht wird, leitet *Hansen* durch Differentiation einen Ausdruck für $\frac{d\overline{W}}{dt}$ ab, wobei indessen nur die Größen Ξ, Υ, Ψ, nicht aber r_0 und v als von t abhängig betrachtet werden. Um die festgesetzte Unabhängigkeit dieser explizite in $\overline{W}$ eingehenden Größen r_0 und v von den in den störenden Kräften eingehenden und von t abhängigen Variablen r_0 und v unzweideutig zu kennzeichnen, führt *Hansen* für sie und die von ihnen abhängigen variablen Größen neue Bezeichnungen ein. Seien in diesem Sinne

(G) $\qquad t,\ v,\ r_0,\ E,\ \zeta$ und $\delta\zeta$

durch

)Γ) $\qquad \tau,\ \omega_0,\ \varrho_0,\ \eta_0,\ \chi_0$ und $\delta\chi_0$

bezeichnet, wonach man die Gleichungen

$$(81)\qquad \begin{cases} n\chi_0 = n\tau + c + n\delta\chi_0 = \eta_0 - e\sin\eta_0, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta_0 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega_0, \\ \varrho_0 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega_0} = a(1-e\cos\eta_0) \end{cases}$$

hat. Die Funktion

$$(82)\qquad W = \Xi + \Upsilon\frac{\varrho_0}{a}\cos\omega_0 + \Psi\frac{\varrho_0}{a}\sin\omega_0$$

geht also in $\overline{W}$ über, wenn überall die Größen (Γ) durch die entsprechenden Größen (G) ersetzt werden, wenn also die Unabhängigkeit der Größen (Γ) von t wieder aufgehoben wird, was von *Hansen* (wie hier) durch einen Strich über der betreffenden Funktion angezeigt wird.

Weil

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{n}{\cos\varphi}(\Upsilon\sin\omega_0 - \Psi(\cos\omega_0 + e))$$

59) *G. W. Hill,* Amer. Journ. of Math. 4 p. 258 = Works 1 p. 350.

ist, kann die Gleichung (80)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \tau}\right) \tag{83}$$

geschrieben werden, wodurch die Bestimmung von v von der Funktion W abhängig gemacht wird.

Differentiiert man die Funktionen W und $\frac{h}{h_1}$ nach t und führt für die Derivierten der Elemente die Ausdrücke (21) und (22) ein, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{dW}{dt} = h\left\{\frac{2\varrho_0}{r}\cos(v-\omega_0) - 1 + 2\left(\frac{h_1}{h}\right)\frac{\varrho_0}{a\cos^2\varphi}\left[\cos(v-\omega_0)-1\right]\right\}\frac{\partial \Omega}{\partial v} + 2h\frac{\varrho_0}{r}\sin(v-\omega_0) r\frac{\partial \Omega}{\partial r} \tag{84}$$

und

$$\frac{d\left(\frac{h}{h_1}\right)}{dt} = h\frac{\partial \Omega}{\partial v} = S, \tag{85}$$

durch welche W und h_1 zu bestimmen sind.

25. Bestimmung der Breite. Zur Bestimmung der durch die störenden Kräfte bewirkten Abweichung der Bahn von der durch Ω und i bestimmten Bahnebene benutzt *Hansen* anstatt s (vgl. Nr. 22) das Produkt

$$u = \frac{r_0}{a}s = \frac{r_0}{a}Q\sin(v+\varpi-\Omega) - \frac{r_0}{a}P\cos(v+\varpi-\Omega). \tag{86}$$

Weil u eine ideale Koordinate ist, kann man wieder bei der Bildung von $\frac{du}{dt}$ die Größen P und Q als Konstanten betrachten. Wird

$$R = \frac{\varrho_0}{a}Q\sin(\omega_0+\varpi-\Omega) - \frac{\varrho_0}{a}P\cos(\omega_0+\varpi-\Omega), \tag{87}$$

gesetzt, so findet man, daß

$$u = \overline{R} \tag{88}$$

und

$$\frac{du}{dt} = \overline{\left(\frac{dR}{d\tau}\right)}, \tag{89}$$

wo der Strich die vorher angegebene Bedeutung hat. Aus diesen beiden Gleichungen muß derselbe Ausdruck für u folgen, was zur Kontrolle dient.

Um R zu bestimmen, wendet man den Ausdruck

$$\frac{dR}{dt} = h_1 r\frac{\varrho_0}{a}\sin(\omega_0 - v)\cos i\frac{\partial \Omega}{\partial z} \tag{90}$$

an, welcher aus den Gleichungen (23) und (87) leicht abzuleiten ist.

26. Weitere Ausführung der Methode. Um $\delta\xi$, ν und u zu erhalten, hat man zunächst W, $\frac{h}{h_1}$ und R aus den Gleichungen (84), (85) und (90) zu bestimmen. Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten jedoch die zu bestimmenden Größen, und man muß Annäherungsmethoden anwenden. Da $\delta\xi$, ν und u kleine Größen erster Ordnung sind, entwickelt *Hansen* nach Potenzen derselben. Schreibt man

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \delta_1 W + \delta_2 W + \cdots, \\ R &= R_0 + \delta_1 R + \delta_2 R + \cdots, \\ \frac{h}{h_1} &= 1 + \delta_0 \frac{h}{h_1} + \delta_1 \frac{h}{h_1} + \delta_2 \frac{h}{h_1} + \cdots, \end{aligned}$$

wo W_0, R_0, $\delta_0 \frac{h}{h_1}$ die Glieder erster Ordnung, $\delta_1 W_0$, $\delta_1 R_0$, $\delta_1 \frac{h}{h_1}$ die Glieder zweiter Ordnung sind usw., so erhält man durch Gleichsetzung der Glieder erster Ordnung in den Gleichungen (84), (85) und (90)

$$(91)\quad \begin{cases} \frac{dW_0}{dt} = h\left\{2\frac{\varrho}{r_0}\cos(v-\omega) - 1 + 2\frac{\varrho}{a\cos^2\varphi}[\cos(v-\omega)-1]\right\}\frac{\partial\Omega}{\partial v} \\ \qquad\qquad + 2h_0\frac{\varrho}{r_0}\sin(v-\omega) r\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \\ \frac{1}{\cos i}\frac{dR_0}{dt} = hr_0\frac{\varrho}{a}\sin(v-\omega)\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \\ \frac{d\delta_0\frac{h}{h_1}}{dt} = h\frac{\partial\Omega}{\partial v}, \end{cases}$$

wo

$$(92)\quad \begin{cases} n\tau + c = \eta - e\sin\eta, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta, \\ \varrho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega} = a(1-e\cos\eta) \end{cases}$$

ist. Um die Glieder zweiter Ordnung zu bestimmen, erhält man weiter

$$(93)\quad \begin{aligned} \frac{d\delta_1 W}{dt} &= A\delta_0\xi + B\nu_0 + C\delta_0\frac{h}{h_1} + Du_0 + E\frac{du_0}{dt} \\ &\quad + F\delta_0\xi' + G\nu_0' + Hu_0' \end{aligned}$$

und analoge Ausdrücke für $\frac{d\delta_1 R}{dt}$ und $\frac{d\delta_1\frac{h}{h_1}}{dt}$, wo $A, B, \ldots, H$ Funktionen von r, ω und den partiellen Ableitungen der Störungsfunktion, $\delta_0\xi$, ν_0, u_0, $\frac{du_0}{dt}$ die in der ersten Annäherung erhaltenen Werte erster Ordnung von $\delta\xi$, ν, u, $\frac{du}{dt}$ und $\delta_0\xi'$, ν_0', u_0' die analogen Größen für

den störenden Planeten sind. Das Glied $E\frac{du}{dt}$ erklärt sich dadurch, daß die Störungsfunktion von den Größen P und Q und diese wieder von s und $\frac{ds}{dt}$ oder u und $\frac{du}{dt}$ abhängen.

27. Integration mit der Zeit als unabhängiger Veränderlichen. Wenn die Exzentrizitäten klein sind, kann man die Zeit als unabhängige Veränderliche anwenden und dabei doch eine genügende Konvergenz erhalten. *Hansen*[60]) selbst und nach ihm *G. W. Hill*[61]) haben in dieser Weise die Theorien verschiedener von den großen und *A. W. Leuschner*[62]) von den kleinen Planeten behandelt.

Die Störungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen entwickelt man in Reihen der Form (siehe den Artikel VI$_2$, 13, *v. Zeipel*)

$$\sum K \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{iM + i'M' + C\},$$

wo $M = nt + c$ und $M' = n't + c'$ die mittleren Anomalien des gestörten und des störenden Körpers, C und K Konstanten, i und i' ganze Zahlen bezeichnen. Die in den Differentialgleichungen enthaltenen Funktionen von ϱ und ω sind in der Form Fourierscher Reihen von $(M) = n\tau + c$ zu entwickeln, so daß schließlich die rechten Seiten der Gleichungen (91) in der Form

$$\sum K \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{\iota(M) + iM + i'M' + C\} \tag{94}$$

erhalten werden (ι eine ganze Zahl). *Hansen*[63]) zeigt, wie man die Koeffizienten K für alle verschiedenen Werte von ι einfach berechnen kann, sobald man K für die speziellen Werte -1, 0 und $+1$ bestimmt hat. Bei der Integration sind nur M und M' von der Zeit abhängig, und man erhält durch lineare Integration gemäß der Formel

$$\int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{\iota(M) + iM + i'M' + C\}\,dt$$
$$= \frac{1}{in + i'n'} \cdot \begin{matrix}-\cos\\ +\sin\end{matrix}\{\iota(M) + iM + i'M' + C\}$$

für W_0, R_0 und $\delta_0 \frac{h}{h_1}$ Ausdrücke der Form (94). Um die Störungen erster Ordnung $\delta_0\xi$, ν_0 und u_0 zu berechnen, hat man in W_0, R_0,

60) *P. A. Hansen*, Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831; Leipzig. Ges. Wiss. Abhdl. 1876.

61) *G. W. Hill*, Wash. Astron. Papers 4 (1890) = Works 3.

62) *A. W. Leuschner*, Mem. of Nat. Acad. of Science 10 (1910).

63) *P. A. Hansen*, Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn, Berlin 1831, p. 26—28.

$\frac{\partial W_0}{\partial \tau}$, $\frac{\partial R_0}{\partial \tau}$ die Zeit t anstatt τ und also M anstatt (M) zu setzen, wodurch die rechten Seiten der aus (76a), (83), (88) und (89) folgenden Gleichungen

$$\frac{d\delta_0\zeta}{dt} = \overline{W}_0, \qquad \frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial W_0}{\partial \tau}}\right),$$

$$u_0 = \overline{R}_0, \qquad \frac{du_0}{dt} = \left(\overline{\frac{\partial R_0}{\partial \tau}}\right)$$

erhalten werden. Um die Störungen zweiter Ordnung zu erhalten, berechnet man die rechte Seite der Gleichung (93) und die analogen Ausdrücke in den Gleichungen für $\frac{d\delta_1 R}{dt}$ und $\frac{d\delta_1 \frac{h}{h_1}}{dt}$, wonach erst $\delta_1 W$, $\delta_1 R$, $\delta_1 \frac{h}{h_1}$ und weiter $\delta_1\zeta$, v_1 und u_1 ähnlich wie die Störungen erster Ordnung erhalten werden. Ähnlich berechnet man nach und nach Störungen höherer Ordnung, wenn dieses nötig ist. Natürlich ist es wichtig, ein zweckmäßiges Rechenschema anzuwenden, um keine merklichen Glieder in den im allgemeinen eine große Anzahl von Gliedern enthaltenden Reihen zu übergehen. Es sei hervorgehoben, daß *Hansen* alle Koeffizienten in numerischer Form hält, wodurch bei der Rechnung die Größe der Glieder gleich hervortritt und die mitzunehmenden Glieder leicht zu finden sind.

28. Die exzentrische Anomalie als unabhängige Veränderliche. Wenn die Exzentrizität des gestörten Körpers, wie es bei den kleinen Planeten öfters statthat, nicht klein ist, vermeidet *Hansen* durch Anwendung der ungestörten exzentrischen Anomalie als unabhängiger Veränderlichen mehrfach schwach konvergierende Reihenentwicklungen. Dementsprechend werden ϱ und ω als Funktionen von η dargestellt, womit erreicht wird, daß η, aber nicht Vielfache von η in den Argumenten eingehen. Mit dieser unabhängigen Veränderlichen ist die Methode von *Hansen* in seinen „Auseinandersetzungen" eingehend dargestellt und ist in der daselbst gegebenen Form vielfach von den Astronomen ganz oder fast ganz unverändert angewandt worden.

Die exzentrische Anomalie, welche hier von *Hansen* benutzt wird, ist die, welche aus der Zeit und den den Störungsrechnungen zugrundegelegten konstanten Elementen folgt. Sie sei der Deutlichkeit wegen mit ε bezeichnet. Man hat dann

$$nt + c = \varepsilon - e \sin \varepsilon$$

und erhält weiter einen dazugehörenden Radiusvektor (r)

$$(r) = a(1 - e \cos \varepsilon).$$

Unter Anwendung der Gleichung

$$n\frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{(r)}{a} \tag{95}$$

folgt aus (91)

$$\begin{cases} \dfrac{dW_0}{d\varepsilon} = Ma\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + Na(r)\dfrac{\partial\Omega}{\partial(r)} = T_0, \\ \dfrac{dR_0}{d\varepsilon} = Qa^2\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\cos i = U_0, \end{cases} \tag{96}$$

wo die Größen M, N und Q durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi M &= -3(1-\tfrac{1}{2}e^2) + 2e\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon + e^2\cos(\eta+\varepsilon) \\ &\quad - 3e\cos\eta + (4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon) - e\cos(\eta-2\varepsilon), \\ \cos^2\varphi N &= e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon + e^2\sin(\eta+\varepsilon) - e\sin\eta \\ &\quad - (2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon) + e\sin(\eta-2\varepsilon), \\ Q &= e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon) - \tfrac{3}{2}e\sin\eta \\ &\quad + (1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon) \end{aligned}$$

gegeben sind. Die Glieder zweiter und höherer Ordnung in W und R werden nach und nach ähnlich wie in Nr. **26** und **27** erhalten. Die Größen $\delta\zeta$, ν und u sind vermittels der aus (76a), (83), (88) und (89) abzuleitenden Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{dn\,\delta\zeta}{d\varepsilon} = \dfrac{(r)}{a}\left\{\overline{W}_0 + \overline{\delta_1 W} + \nu_0^2] + \overline{\left(\dfrac{\partial W_0}{\partial\eta}\right)} n\delta_0\zeta + \cdots\right\}, \\ \dfrac{d\nu}{d\varepsilon} = -\dfrac{1}{2}\left\{\overline{\left(\dfrac{\partial W_0}{\partial\eta}\right)} + \overline{\left(\dfrac{d\,\delta_1 W}{\partial\eta}\right)}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \left[\overline{\left(\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial\eta^2}\right)} - \overline{\left(\dfrac{\partial W_0}{\partial\eta}\right)}\dfrac{ae\sin\varepsilon}{(r)}\right]\dfrac{an\delta_0\zeta}{(r)}\right\} + \cdots, \\ u = \overline{R}_0 + \overline{\delta_1 R} + \overline{\left(\dfrac{\partial R_0}{\partial\eta}\right)}\dfrac{an\delta\zeta}{(r)} + \cdots, \\ \dfrac{du}{d\varepsilon} = \overline{\left(\dfrac{\partial R_0}{\partial\eta}\right)} + \overline{\left(\dfrac{\partial\,\delta_1 R}{\partial\eta}\right)}\dfrac{d\,\delta\zeta}{ds} \\ \qquad\qquad + \left[\overline{\left(\dfrac{\partial^2 R_0}{\partial\eta^2}\right)} - \overline{\left(\dfrac{\partial R_0}{\partial\eta}\right)}\dfrac{ae\sin\varepsilon}{(r)}\right]\dfrac{an\delta\zeta}{(r)} + \cdots, \end{cases} \tag{97}$$

zu bestimmen, wobei jedoch auf den rechten Seiten nur Glieder erster und zweiter Ordnung ausgeschrieben sind.

Aus der Gleichung (72) findet man, daß

$$\frac{h}{h_1} = (1+2\nu+\nu^2)\left(1+\frac{a}{(r)}\frac{dn\,\delta\zeta}{d\varepsilon}\right) \tag{98}$$

ist, kann aber $\frac{h}{h_1}$ bis auf Glieder zweiten Grades durch die aus (85)

abzuleitende Gleichung

$$\frac{d\frac{h}{h_1}}{d\varepsilon} = \overline{\left(\frac{dW_0}{d\varepsilon}\right)} = \overline{T}_0 \tag{99}$$

erhalten.

Die Störungsfunktion und die zur Berechnung der Störungen erster und höherer Ordnung nötigen Ableitungen derselben entwickelt *Hansen* vermittels einer gemischten, numerisch-analytischen Methode (vgl. *v. Zeipel*, VI 2, 13, Nr. **51**, **52**) in Reihen der Form

$$\sum K_{i,i'} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\},$$

wo

$$\mu = \frac{n'}{n}$$

und c', n' die c und n entsprechenden Größen des störenden Planeten sind. Bei diesen Entwicklungen befolgt *Hansen* den Grundsatz, alle Glieder, welche eine vorgeschriebene Größe erreichen, mitzunehmen, was bei der eingeschlagenen numerischen Entwicklung unmittelbar durchgeführt werden kann.

Die oben angeführten Werte von M, N und Q geben in Verbindung mit den Ableitungen der Störungsfunktion für T_0 und U_0 Reihen der Form

$$\sum K_{\lambda,i,i'} \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\lambda\eta + (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c'\mu)\right\},$$

wo λ nur die Werte -1, 0 und $+1$ annimmt. Nach den Gleichungen (96) finden sich dann für W_0 und R_0 Reihen der Form

$$\sum \frac{K_{\lambda,i,i'}}{i - i'\mu} \cdot \begin{matrix}-\cos\\ +\sin\end{matrix}\left\{\lambda\eta + (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\right\}$$

$$+ \sum \varepsilon K_{\lambda,0,0} \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{(\lambda\eta) + k_0 + k_1 \cos\eta + k_2 \sin\eta\right\},$$

wo k_0, k_1 und k_2 von η unabhängige Integrationskonstanten sind. Wenn n und n' kommensurabel oder nahe kommensurabel wären, könnte der Divisor $i - i'\mu$ gleich oder nahe gleich Null sein, ohne daß $i = i' = 0$ sind. In diesen Fällen müßte die Integration anders ausgeführt werden, weil die Konvergenz nach Potenzen der störenden Kräfte nicht mehr stattfindet. *Hansen* nimmt an, daß die mittleren Bewegungen nicht solche Werte annehmen, daß die Divisoren zu klein werden. Um bei kleinen Divisoren die Hansensche Methode anwenden zu können, schlägt *K. G. Olsson*[64]) vor, ähnlich wie in den Gyldénschen Theorien, das in den Argumenten vorkommende $\delta\zeta$ in zwei

64) *K. G. Olsson*, Stockholm, Bih. K. Vet. Akad. (22) 2 (1896).

Teile, wovon der eine, $\delta\xi_l$, nur Glieder von langen Perioden, der andere, $\delta\xi_k$, nur solche von kurzen Perioden enthält, zu zerlegen und nur $\delta\xi_k$ aus den Argumenten durch Reihenentwicklung wegzuschaffen, wogegen $\delta\xi_l$ in den Argumenten stehen bleibt und die einzelnen Glieder durch partielle Integration integriert werden.

Mit den oben angegebenen Werten von W_0 und R_0 findet man nach den Gleichungen (97) und (99) für $\delta_0\xi$, ν_0, u_0 und $\delta_0\frac{h}{h_1}$ Ausdrücke der Form

$$K_0 + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon\cos\varepsilon + K_3\varepsilon\cos\varepsilon + K_4\varepsilon\cos 2\varepsilon + K_5\varepsilon\sin 2\varepsilon + \sum K_{i\,i'}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)\},$$

wo die Integrationskonstanten K_0, K_1, ..., K_5 zweckmäßig zu bestimmen sind. Die Störungen zweiter Ordnung kann man aus den Gleichungen (97) und (99) gewinnen, sobald die Störungen erster Ordnung erhalten sind. Im allgemeinen sind nur die Glieder zweiter und höherer Ordnung merkbar, welche kleine Divisoren enthalten, was ihre Aufsuchung bedeutend erleichtert.

III. Koordinatenstörungen.

29. Störungen der rechtwinkeligen Koordinaten. Seien x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der ungestörten Bewegung, welche also die Geichungen (4) für $\Omega = 0$ erfüllen, und $\delta_\mu x$, $\delta_\mu y$, $\delta_\mu z$ die Störungen μ^{ter} Ordnung des gestörten Körpers. Setzt man in den Gleichungen (4) $k = 1$ und

$$x_0 + \delta_1 x + \delta_2 x + \cdots,$$
$$y_0 + \delta_1 y + \delta_2 y + \cdots,$$
$$z_0 + \delta_1 z + \delta_2 z + \cdots,$$

statt x, y, z, so erhält man durch Gleichsetzung der Glieder derselben Ordnung zur Bestimmung der Störungen μ^{ter} Ordnung Differentialgleichungen der Form

$$(100)\begin{cases} \dfrac{d^2\delta_\mu x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)\delta_\mu x}{r_0^3} - \dfrac{3(1+m)(x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z)}{r_0^5} = X_\mu, \\ \dfrac{d^2\delta_\mu y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)\delta_\mu y}{r_0^3} - \dfrac{3(1+m)(x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z)}{r_0^5} = Y_\mu, \\ \dfrac{d^2\delta_\mu z}{dt^2} + \dfrac{(1+m)\delta_\mu z}{r_0^3} - \dfrac{3(1+m)(x_0\delta_\mu x + y_0\delta_\mu y + z_0\delta_\mu z)}{r_0^5} = Z_\mu, \end{cases}$$

wo

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

ist und X_μ, Y_μ, Z_μ nur von bekannten Größen und von den Störungen bis zur $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängen. Wenn die Bahnen der störenden

Körper nicht bekannt sind, hat man gleichzeitig durch ähnliche Gleichungen deren Störungen zu bestimmen. Man gewinnt nun vermittels der Gleichungen (100) nacheinander

$$\delta_\mu x,\ \delta_\mu y,\ \delta_\mu z \quad \text{für } \mu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 und ihre Ableitungen

$$\xi_0 = \frac{dx_0}{dt},\quad \eta_0 = \frac{dy_0}{dt},\quad \zeta_0 = \frac{dz_0}{dt}$$

sind bekannte Funktionen der Zeit und von sechs Integrationskonstanten (z. B. den elliptischen Elementen) $C_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$, und umgekehrt sind die Konstanten C_ν Funktionen von x_0, y_0, z_0, ξ_0, η_0, ζ_0 und t. Nach *O. Dziobek*[65]) sind die Lösungen der linearen Gleichungen (100) durch die Formeln

$$\delta_\mu x = \sum_{\nu=1}^{6} A_\nu \frac{\partial x_0}{\partial C_\nu},\quad \delta_\mu y = \sum_{\nu=1}^{6} A_\nu \frac{\partial y_0}{\partial C_\nu},\quad \delta_\mu z = \sum_{\nu=1}^{6} A_\nu \frac{\partial z_0}{\partial C_\nu}$$

zu erhalten, wo die A_ν durch die Gleichungen

$$\frac{dA_\nu}{dt} = X_\mu \frac{\partial C_\nu}{\partial \xi_0} + Y_\mu \frac{\partial C_\nu}{\partial \eta_0} + Z_\mu \frac{\partial C_\nu}{\partial \zeta_0}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

bestimmt werden. Eine andere Form der Lösung ist[65])

$$\delta_\mu x = \sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial \xi_0},\quad \delta_\mu y = \sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial \eta_0},\quad \delta_\mu z = \sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial \zeta_0},$$

wo die B_ν aus den Gleichungen

$$\frac{dB_\nu}{dt} = X_\mu \frac{\partial x_0}{\partial C_\nu} + Y_\mu \frac{\partial y_0}{\partial C_\nu} + Z_\mu \frac{\partial z_0}{\partial C_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 6)$$

erhalten werden. Daneben sind noch die Formeln

$$\delta_\mu \xi = \frac{d\delta_\mu x}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial x_0},\qquad \delta_\mu \eta = \frac{d\delta_\mu y}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial y_0},$$

$$\delta_\mu \zeta = \frac{d\delta_\mu z}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{6} B_\nu \frac{\partial C_\nu}{\partial z_0}$$

zu bemerken.

Führt man in die Störungsfunktion anstatt der Koordinaten x, y, z die Werte von x_0, y_0, z_0 als Funktionen der Zeit und der elliptischen Elemente ein, bildet das Integral

$$U = \int_{t_0}^{t} \Omega dt$$

65) *O. Dziobek*, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen, Leipzig 1888, p. 161—165.

und ersetzt in U wieder die Elemente des gestörten Planeten durch ihre Ausdrücke in $x_0, y_0, z_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, so kann man die Störungen erster Ordnung durch die einfachen Formeln[65])

$$\delta_1 x = \frac{\partial U}{\partial \xi_0}, \quad \delta_1 y = \frac{\partial U}{\partial \eta_0}, \quad \delta_1 z = \frac{\partial U}{\partial \zeta_0},$$

$$\delta_1 \xi = -\frac{\partial U}{\partial x_0}, \quad \delta_1 \eta = -\frac{\partial U}{\partial y_0}, \quad \delta_1 \zeta = -\frac{\partial U}{\partial z_0},$$

erhalten, welche eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit den kanonischen Differentialgleichungen zeigen.

J. F. Encke[66]), welcher zuerst die Methode der Berechnung der allgemeinen Störungen in rechtwinkligen Koordinaten entwickelt hat, führt indessen die Integration in anderer Weise aus, indem er das dritte Glied der drei Gleichungen (100) zunächst für sich ermittelt und dadurch das weitere Problem vereinfacht.

Multipliziert man die Gleichungen (4) der Reihe nach mit

$$2\frac{dx}{dt}, \quad 2\frac{dy}{dt}, \quad 2\frac{dz}{dt},$$

addiert und integriert, so folgt:

$$(101) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \frac{2(1+m)}{r} = 2(1+m)\int d'\Omega + K,$$

wo K eine Konstante und

$$(102) \qquad d'\Omega = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt$$

ist. $d'\Omega$ ist also das Differential von Ω, wofern nur die von dem gestörten Körper abhängigen Größen variiert werden. Aus den Gleichungen (4) und (101) findet man

$$(103) \qquad \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \frac{2(1+m)}{r} = 2K + 2(1+m)\left(r\frac{\partial \Omega}{\partial r} + 2\int d'\Omega\right)$$

und dadurch für $\delta_\mu r$ (die Störung μ^{ter} Ordnung von r) die Gleichung

$$(104) \qquad \frac{d^2(r_0 \delta_\mu r)}{dt^2} + \frac{r_0 \delta_\mu r}{r_0^3} = R_\mu,$$

wo R_μ nur von bekannten Größen und von den Störungen bis zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängt. Da

$$x_0 \delta_\mu x + y_0 \delta_\mu y + z_0 \delta_\mu z = r_0 \delta_\mu r + (\delta r)_\mu$$

ist, wo $(\delta r)_\mu$ auch nur von bekannten Größen und den Störungen bis zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängt, kann man nach der Integration der

66) *J. F. Encke*, Berl. astr. Jahrb. f. 1857. *Schubert* hat Tafeln einiger kleiner Planeten nach der Methode von Encke gerechnet. Z. B. Tafeln der Eunomia, Washington 1866.

Gleichung (104) das dritte Glied der Gleichungen (100) als bekannt ansehen. Die Gleichungen (104) und (100) sind dann alle von der Form

$$\frac{d^2\omega}{dt} + \frac{(1+m)\omega}{r_0^3} = Q, \tag{105}$$

wo Q bekannt ist und wo ω nacheinander den Wert $r_0\delta_\mu r$, $\delta_\mu x$, $\delta_\mu y$, $\delta_\mu z$ bekommt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\omega = \frac{y_1\int x_1 Q\,dt - x_1\int y_1 Q\,dt}{\sqrt{1+m}\sqrt{a_0(1-e_0)^2}}, \tag{106}$$

wo

$$x_1 = r_0\cos v_0, \quad y_1 = r_0\sin v_0, \tag{107}$$

ist und v_0, a_0, e_0, die wahre Anomalie, die halbe große Achse und die Exzentrizität der ungestörten Bewegung bezeichnen. Um die Integration auszuführen, werden die Störungsfunktion und ihre Ableitungen in Reihen der Form

$$\sum\alpha\cos(iM_0 + i'M') + \sum\beta\sin(iM_0 + i'M')$$

entwickelt, wo $M_0 = n_0 t + \varepsilon_0 - \varpi_0$ und $M' = n't + \varepsilon' - \varpi'$ die mittleren Anomalien des gestörten resp. des störenden Körpers bezeichnen. Encke[66]) entwickelt x_1 und y_1 in Fouriersche Reihen von M_0 und leitet Formeln ab, wodurch man unmittelbar aus einem Gliede in Q von den Formen

$$\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{iM_0 + i'M'\}, \quad \alpha t\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{iM_0\}$$

das entsprechende Glied in ω erhält, was für die Bestimmung von $\delta_1 r$, $\delta_1 x$, $\delta_1 y$ und $\delta_1 z$ hinreichend ist.

G. W. Hill[67]) hat die Formeln noch kürzer schreiben können, indem er anstatt t die wahre Länge als unabhängige Veränderliche einführt.

Die Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten wachsen verhältnismäßig schnell an. Dadurch wird es früher als bei anderen Methoden nötig, die Störungen höherer Ordnung zu berücksichtigen.

30. Störungen der polaren Koordinaten. Die polaren Koordinaten, Radiusvektor r, Länge w in der beweglichen Bahnebene (im Sinne von Hansen; siehe Nr. **20**), von einer in dieser Ebene festen Linie gerechnet und der Abstand z des gestörten Körpers von einer festen Ebene, wozu öfters die Bahnebene des gestörten Körpers zur Ausgangsepoche gewählt wird, können durch die Gleichungen (57) und die letzte der Gleichungen (4) bestimmt werden. Eine der Glei-

67) *G. W. Hill*, Astr. Nachr. 83 (1874) p. 209—224 = Works 1 p. 151—166.

chungen (57) ersetzt man indessen oft durch die Gleichung (103). Anstatt z sucht man auch $\mathfrak{z} = \frac{z}{r}$ d. h. den Sinus der Breite über der Ausgangsebene.

Seien

$$r = r_0 + \delta_1 r + \delta_2 r + \cdots,$$
$$w = w_0 + \delta_1 w + \delta_2 w + \cdots,$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0 + \delta_1 \mathfrak{z} + \delta_2 \mathfrak{z} + \cdots,$$

wo r_0, w_0, $\mathfrak{z}_0$ $(= 0)$ den Radiusvektor, die Länge und den Sinus der Breite in der ungestörten Bewegung und $\delta_1 r$, $\delta_2 r$, ... die Störungen erster, zweiter, ... Ordnung bezeichnen. Führt man diese Werte in der Gleichung (103) und in der durch r dividierten ersten Gleichung (57) ein, so erhält man die Gleichungen

$$(108)\quad \begin{cases} \frac{d^2 r_0 \delta_1 r}{dt^2} + \frac{(1+m) r_0 \delta_1 r}{r_0^3} = (1+m)\left(r_0 \frac{\partial \Omega}{\partial r_0} + 2\int d'\Omega_0\right) + G_2, \\ 2 r_0^2 \frac{dw_0}{dt} \frac{d\delta_1 w}{dt} + \delta_1 r \frac{d^2 r_0}{dt^2} - r \frac{d^2 \delta_1 r}{dt^2} + \frac{3(1+m) r_0 \delta_1 r}{r_0^3} = -r_0 \frac{\partial \Omega}{\partial r_0} + H_2, \end{cases}$$

wo G_2 und H_2 die Glieder bezeichnen, welche höherer als erster Ordnung sind. Wird $\frac{r_0 \delta_1 r}{r_0^3}$ aus diesen Gleichungen eliminiert, so bekommt man die Gleichung

$$(109)\quad a\sqrt{1-e^2}\frac{d\delta_1 w}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 r_0 \frac{d\delta_1 r}{dt} + \delta_1 r \frac{dr_0}{dt}\right) - 3\int d'\Omega_0 - 2 r_0 \frac{\partial \Omega}{\partial r_0} + H_2,$$

wo H_2 wieder die Glieder zweiter Ordnung bezeichnet. Sie wird von *P. S. Laplace*[68]) in Verbindung mit der ersten Gleichung (108) angewandt, um $\delta_1 r$ und $\delta_1 w$ zu bestimmen.

S. Newcomb[69]) verwendet in seiner Uranustheorie, um die Berechnung der Glieder höherer Ordnung zu erleichtern, etwas modifizierte Gleichungen. Er setzt

$$\varrho = \ln r, \quad \varrho_0 = \ln r_0, \quad \varrho = \varrho_0 + \delta\varrho; \quad w - w_0 = \delta w$$

und erhält aus (103) und (57)

$$(110)\quad \frac{d^2(r_0^2 \delta\varrho)}{dt^2} + \frac{(1+m) r_0^2 \delta\varrho}{r_0^3} = 2\int d'\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} + \frac{(\delta\varrho)^2}{2 r_0} - \frac{d^2(r_0^2 (\delta\varrho)^2)}{dt^2} + G_3.$$

$$(111)\quad \frac{d\delta w}{dt} = \frac{1}{r_0^2}(1 - 2\delta\varrho)\int \frac{\partial \Omega}{\partial v}\, dt$$
$$- 2\sqrt{1+m}\sqrt{a(1-e^2)}\,(\delta\varrho - (\delta\varrho)^2) + H_3,$$

wo G_3 und H_3 die Glieder höherer als zweiter Ordnung bezeichnen.

68) *P. S. Laplace*, Méc. cél. 1 p. 256 = Oeuvres 1 p. 281.

69) *S. Newcomb*, Smiths. contrib. XIX, Washington 1874.

Die letzte der Gleichungen (4) gibt bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$\frac{d^2(r_0\delta_1\zeta)}{dt^2} + \frac{(1+m)r_0\delta_1\zeta}{r_0^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \tag{112}$$

aus welcher man die Störungen erster Ordnung $r_0\delta_1\zeta$ in der dritten Koordinate bestimmt.

Die Gleichungen (108), (110) und (112) sind von der Form (105) und können nach der Formel (106) integriert werden, und man berücksichtigt dabei die Glieder aller Grade in den verschiedenen Ordnungen. Ist indessen die Exzentrizität klein, so daß man nur die Glieder, welche von niedrigen Graden sind, zu berücksichtigen braucht, so ordnet man besser die Integration nach Potenzen der Exzentrizität.

Entwickelt man mit *P. S. Laplace*[70]) $\frac{1}{r_0^3}$ nach Potenzen der Exzentrizität (Mittlere Anomalie $= M$), so wird z. B. die Gleichung (108)

$$\frac{d^2(r_0\delta_1 r)}{dt^2} + n_0^2 r_0\delta_1 r = 2\int d'\Omega_0 + r_0\frac{\partial\Omega}{\partial r_0} \tag{113}$$
$$- 3n_0^2 a_0 r_0\delta_1 r(e\cos M + e^2\cos 2M + \cdots) + \cdots,$$

aus welcher man durch sukzessive Annäherungen $r_0\delta_1 r$ bestimmt.

Ein Glied der rechten Seite dieser Gleichung von der Form

$$\alpha\cos(\nu t + N)$$

gibt in $r_0\delta_1 r$ das Glied

$$\frac{\alpha}{n_0^2 - \nu^2}\cos(\nu t + N),$$

wenn α, $\nu (n \gtrless \nu)$ und N als Konstanten betrachtet werden. Daraus folgt, daß die Glieder der rechten Seite, deren Periode nahe mit der Umlaufszeit des gestörten Planeten übereinstimmt, für welche ν also nahe gleich n ist, bei der Integration sehr vergrößert in $r_0\delta_1 r$ übergehen. Wenn $\nu = n$ ist, erhält man in $r_0\delta_1 r$ das säkulare Glied

$$\frac{\alpha t}{2n_0}\sin(nt + N),$$

welches dadurch berücksichtigt wird, daß man die Elemente mit ihren säkularen Teilen vereinigt.

Weil die Gleichung (112) dieselbe Form hat wie die Gleichung (110), gilt das eben Gesagte auch von den in $r_0\delta_1\zeta$ entstehenden Gliedern.

Um die Gleichung (109) oder (111) zu integrieren, hat man sich ersichtlich der Formeln

$$\begin{cases} \int\alpha\cos(\nu t + N)dt = \frac{\alpha}{\nu}\sin(\nu t + N), \\ \int dt\int\alpha\sin(\nu t + N)dt = -\frac{\alpha}{\nu^2}\sin(\nu t + N) \end{cases} \tag{114}$$

70) *P. S. Laplace*, Méc. cél. 3, p. 5 = Oeuvres 3 p. 5.

zu bedienen, wenn α, ν und N Konstanten sind. In δw werden also diejenigen Glieder bei der Integration am stärksten vergrößert, welche langsam veränderlich sind, und besonders ist das der Fall mit den aus $d'\Omega_0$ oder $\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}$ entstehenden Gliedern, welche durch doppelte Quadratur erhalten werden.

Die Astronomen pflegen indessen von vorneweg die säkularen Störungen der Elemente zu berücksichtigen, so daß α, ν und N langsam veränderliche Größen werden, statt der Formeln (114) hat man dann die folgenden[71])

$$(115)\quad \begin{cases} \int \alpha\cos(\nu t+N)\,dt = \frac{\alpha}{\nu}\sin(\nu t+N) \\ \qquad + \sin\nu t\left\{-\frac{1}{\nu^2}\frac{d(\alpha\sin N)}{dt} - \frac{1}{\nu^3}\frac{d^2(\alpha\cos N)}{dt^2}+\cdots\right\}, \\ \qquad + \cos\nu t\left\{\frac{1}{\nu^2}\frac{d(\alpha\cos N)}{dt} - \frac{1}{\nu^3}\frac{d^2(\alpha\sin N)}{dt^2}+\cdots\right\} \\ \int dt\int \alpha\sin(\nu t+N)\,dt = -\frac{\alpha}{\nu^2}\sin(\nu t+N) \\ \qquad + \sin\nu t\left\{\frac{2}{\nu^3}\frac{d(\alpha\sin N)}{dt} + \frac{3}{\nu^4}\frac{d^2(\alpha\cos N)}{dt^2}-\cdots\right\} \\ \qquad + \cos\nu t\left\{-\frac{2}{\nu^3}\frac{d(\alpha\cos N)}{dt} + \frac{3}{\nu^4}\frac{d^2(\alpha\sin N)}{dt^2}+\cdots\right\}, \end{cases}$$

und ein Glied der Form

$$\alpha\cos(\nu t+N)$$

auf der rechten Seite der Gleichung (113) würde zu $r_0\delta_1 r$ den Beitrag

$$\frac{\alpha}{n_0^2-\nu^2}\cos(\nu t+N) + \cos\nu t\left\{\frac{2\nu}{(n_0^2-\nu^2)^2}\frac{d(\alpha\sin N)}{dt}+\cdots\right\} - \sin\nu t\left\{\frac{2\nu}{(n_0^2-\nu^2)^2}\frac{d(\alpha\cos N)}{dt}+\cdots\right\}$$

liefern.

Bezüglich der langperiodischen Glieder in δr und δw, welche aus $\int d'\Omega$ entstehen und infolge der doppelten Integration durch das Quadrat eines kleinen Divisors dividiert sind und daher zu den bedeutendsten gehören, hat *P. S. Laplace*[72]) gezeigt, daß man sie am einfachsten berücksichtigt, wenn man überall in den elliptischen Werten für r_0 und w_0 die mittlere Bewegung n_0 in dem Ausdruck

$$M = \int n_0\,dt + \varepsilon_0 - \varpi_0$$

71) *P. S. Laplace*, Méc. cél. 1, p. 335; 3, p. 7 = Oeuvres 1 p. 361 u. 3 p. 7.
72) *P. S. Laplace*, Méc. cél. 1, p. 292—293 = Oeuvres 1 p. 315—316.

um die langperiodischen Glieder von

$$\frac{3}{\sqrt{a}\sqrt{1+m}}\int d'\Omega$$

vermehrt.

Die in (115) und anderen ähnlichen Formeln enthaltenen Ableitungen der mit den säkularen Werten der Elemente berechneten Koeffizienten werden gewöhnlich nicht direkt gebildet, sondern man berechnet nach dem Vorgange von *P. S. Laplace*[73]) den Wert der betreffenden Koeffizienten K für zweckmäßig gewählte Zeiten innerhalb des Intervalles, für welches die Theorie gültig sein soll, und bestimmt danach auf interpolatorischem Wege die Koeffizienten

$$K_0, \frac{dK_0}{dt}, \ldots$$

in der Taylorschen Entwickelung

$$K = K_0 + \frac{dK_0}{dt}(t - t_0) + \cdots$$

IV. Theorie von Gyldén.

31. Vorbemerkung. Bei den bisher besprochenen Methoden wurden die Annäherungen nach Potenzen der störenden Massen (oder der schon annähernd ermittelten Störungsbeträge) geordnet, und Potenzen der unabhängigen Veränderlichen traten multipliziert mit Konstanten sowie mit periodischen Gliedern auf, wodurch man auf eine Entwickelung geführt war, welche teilweise nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschritt. Die erhaltenen Ausdrücke der Störungen könnten daher, auch wenn sie konvergent wären, was indessen höchst unwahrscheinlich ist, in praxi nur für eine begrenzte Zeit angewandt werden. Das Hauptprinzip der Gyldénschen Methode ist, konsequent alle Entwickelungen nach Potenzen der unabhängigen Variabeln zu vermeiden, wodurch wenigstens die Möglichkeit offen bleibt, für beliebig lange Zeiten brauchbare Ausdrücke zu erhalten.

Um den Integrationsprozeß einzuleiten und die Annäherungen stärker konvergent zu machen, versuchte *H. Gyldén*[74]) schon in seinen älteren Arbeiten eine Ausgangsbewegung als erste Näherung zugrunde zu legen, die allgemeiner war und sich näher an die wirkliche Bewegung anschließen sollte als die sonst verwandte elliptische Bewegung. Schon in der ersten Annäherung setzte er nicht die störenden Massen gleich Null, sondern nahm aus der störenden Kraft einige vom Radiusvektor r

73) *P. S. Laplace,* Méc. cél. 3, p. 25 = Oeuvres 3 p. 26.

74) *H. Gyldén,* Stockholm Bih. K. Vet. Akad. Handl. (6) 8 u. 16 (1881).

abhängige Glieder mit, welche so gewählt wurden, daß gewisse nachträglich schwer zu integrierende Teile der Störungsfunktion dadurch berücksichtigt wurden, und daß die erhaltene Differentialgleichung doch noch leicht und durch einfache Ausdrücke integriert werden konnte. Die so erhaltene Bahn, in welcher die Perihellänge veränderlich war, nannte *Gyldén intermediäre* Bahn. Nach Gyldén sind auch von anderer Seite bei Störungsproblemen verschieden definierte intermediäre Bahnen vorgeschlagen worden.[75]) Indessen zeigte sich bald, daß auch die intermediäre Bahn zu speziell war, um den genügenden Ausgangspunkt zu bilden. In demselben Gedankengang fortschreitend, gelangte *Gyldén*[76]) zur Einführung der sogenannten *absoluten* Bahn, welche für jeden Planeten von sechs absoluten Konstanten (Elementen) abhängt und so bestimmt sein soll, daß sie sich von der wirklichen Bewegung des Planeten immer nur um Größen von der Ordnung der Planetenmassen unterscheidet.

Die Ausdrücke der Koordinaten in der absoluten Bahn lassen sich nur durch Annäherungen ermitteln. Um die wirkliche Bahn zu erhalten, muß man zu den Koordinaten der absoluten Bahn Glieder zufügen, welche von der Ordnung der störenden Massen sind und deren größter Teil von den augenblicklichen Konfigurationen der Planeten abhängt. Die Glieder in der Störungsfunktion, welche bei der Integration so vergrößert werden, daß sie nullter Ordnung sind, müssen folglich in der absoluten Bahn schon berücksichtigt sein.

Es sei bemerkt, daß bisher kein Beweis geliefert ist, daß die Gyldénschen absoluten Bahnen die obigen Forderungen betreffend ihre Abweichung von der wirklichen Bahn tatsächlich erfüllen.

32. Differentialgleichungen der Gyldénschen Koordinaten. Ebenso wie *Hansen* zerlegt *Gyldén* die Aufgabe in zwei, nämlich die Bestimmung der Bewegung in der Bahnebene und die Bestimmung der Lage der Bahnebene. Als xy-Ebene wählt *Gyldén* wie *Hansen* die augenblickliche Bahnebene, bestimmt aber die Lage der x-Achse in anderer Weise. Bezeichnet, wie oben, w den Winkel zwischen dem Radiusvektor des gestörten Planeten und der Hansenschen in der Bahnebene unbeweglichen x-Achse, so führt *Gyldén* als unabhängige Variable

75) Z. B. *T. N. Thiele,* Astr. Nachr. 102 (1882), p. 65; *C. V. L. Charlier,* Lunds Meddelanden 21 (1904); *M. H. Andoyer,* Contribution à la théorie des orbites intermediaires, Paris thèse 1886.

76) *H. Gyldén,* Stockholm Bih. K. Vet. Akad. Handl. (7) 2 (1882); Orbites absolues des planètes principales 1 u. 2, Stockholm 1893 resp. 1908 [zitiert: Orbites abs.].

den durch die Gleichung

$$v = \frac{w}{1+\bar{g}} \tag{116}$$

definierten Winkel v ein, wo $\bar{g}$ eine Konstante ist, die so bestimmt werden soll, daß die durch die Gleichung

$$\bar{g}v + \bar{G} = \bar{\sigma} - \Omega \tag{117}$$

eingeführte Funktion $\bar{G}$ keine mit v proportionalen Glieder enthält, wobei $\bar{\sigma}$ wie in Nr. 22 der Winkel zwischen der Hansenschen x-Achse und dem aufsteigenden Knoten auf der Grundebene ist. Die Gyldénsche x-Achse, die zur Unterscheidung als ξ-Achse bezeichnet werde, ist beweglich in der Bahnebene und bildet mit der Hansenschen x-Achse einen Winkel gleich $\bar{g}v = \frac{\bar{g}}{1+\bar{g}}w$ in der Bewegungsrichtung des Planeten, woraus folgt, daß v der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der ξ-Achse ist. Der Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten auf der Grundebene und der ξ-Achse in der Bewegungsrichtung des Planeten ist $= \Omega + \bar{G}$ und unterscheidet sich also nur durch die periodische Funktion $\bar{G}$ von der Knotenlänge.

Aus den Gleichungen (59) und (117) folgt:

$$\bar{g} + \frac{d\bar{g}}{dv} = -2\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dv}, \tag{118}$$

woraus hervorgeht, daß $\bar{G}$ keine anderen Argumente hat als die in i und Ω enthaltenen. Da die Koordinaten des Planeten in bezug auf im Raume feste Achsen durch r, v und trigonometrische Funktionen von i, Ω und $\bar{G}$ ausgedrückt werden können, so folgt daraus, daß $\bar{G}$ keine neuen Argumente in die Formeln einführt. Würde man die Hansensche Achse anstatt der Gyldénschen ξ-Achse und demgemäß w als unabhängige Veränderliche anstatt v anwenden, so scheint es, als würde man bei den auf feste Achsen bezogenen Koordinaten ein Argument mehr erhalten, indem das Argument $\frac{\bar{g}}{1+\bar{g}}w$ dann in den Richtungskosinussen der beweglichen Achsen vorkommt. Auf Grund der Relation (116) schließt man jedoch, daß man ebensogut w anstatt v als unabhängige Variable anwenden kann, ohne fremde Argumente einzuführen. Man würde nur für die Konstanten etwas veränderte Werte erhalten. So benutzt z. B. *M. Brendel* bei seiner Verwendung der Gyldénschen Methode w anstatt v.

In Analogie mit den Formeln der elliptischen Bewegung setzt Gyldén

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\varrho}, \tag{119}$$

$$r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{(1+m)\,a\,(1-\eta^2)}}{1+S} \tag{120}$$

wo a eine Konstante (Protometer genannt) und η eine langperiodische positive Funktion ist, die etwa der Summe des konstanten und des säkularen Teils der Exzentrizität entspricht und welche später genauer bestimmt werden wird. Vermittels der Gleichungen (57) findet sich leicht, daß ϱ und S durch die Differentialgleichungen

$$(121)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varrho}{dv^2} + \left[\dfrac{3}{2}\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2} - \dfrac{\frac{dS}{dv}}{1+S}\right]\dfrac{d\varrho}{dv} \\ \quad + \left[(1+\bar{g})^2 + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\right)^2 + \dfrac{\frac{d^2\eta^2}{dv^2}}{1-\eta^2} - \dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\dfrac{\frac{dS}{dv}}{1+S}\right]\varrho \\ = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\right)^2 - \dfrac{\frac{d^2\eta^2}{dv^2}}{1-\eta^2} + \dfrac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2}\dfrac{\frac{dS}{dv}}{1+S} + 2S + S^2 - 2\bar{g} - \bar{g}^2 \\ \quad + (1+S)^2 P, \end{cases}$$

$$(122)\quad \frac{\frac{dS}{dv}}{1+S} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{d\eta^2}{dv}}{1-\eta^2} + \frac{(1+S)^2}{1+\bar{g}}\,Q,$$

erhalten werden, wobei gilt:

$$(123)\quad P = +\,a(1-\eta^2)\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho},$$

$$(124)\quad Q = -\frac{a(1-\eta^2)}{(1+\varrho)^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Bei der Bildung von $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$ sind dabei alle von v abhängigen Glieder, welche sich auf die Lage der Planetenbahn beziehen, als konstant anzusehen.

Die Länge L in der festen Grundebene berechnet sich nach der Formel

$$\operatorname{tg}(L-v) = -\frac{\sin\bar{G} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin(v-\Omega-\bar{G})\cos(v-\Omega)}{\cos\bar{G} - 2\sin^2\tfrac{1}{2}i\sin(v-\Omega-\bar{G})\sin(v-\Omega)}$$

oder durch die Gleichungen

$$(125)\quad \begin{cases} \cos B\cos L = \cos(v-\bar{G}) + (1-\cos i)\sin\Omega\sin(v-\bar{G}-\Omega), \\ \cos B\sin L = \sin(v-\bar{G}) - (1-\cos i)\cos\Omega\cos(v-\bar{G}-\Omega). \end{cases}$$

Auf Grund der Gleichungen

$$(126)\quad \begin{cases} \zeta = \sin i\sin(v-\Omega-\bar{G}) \\ \dfrac{d\zeta}{dv} = (1+\bar{g})\sin i\cos(v-\Omega-\bar{G}) \end{cases}$$

wird die Bewegung der Bahnebene durch den mit ζ bezeichneten Sinus der Breite B über der festen Grundebene erhalten. Weil

$$(127)\quad z = r\zeta$$

ist, leitet man aus der dritten Gleichung (4) nach einigen Transformationen die Differentialgleichung

$$(128)\quad \frac{d^2\zeta}{dv} + (1+\bar{g})^2\zeta = (1+S)^2\left[(\zeta' - \zeta\cos H)R + \frac{Q}{1+\bar{g}}\frac{d\zeta}{dv}\right]$$

ab, wo ζ' den Sinus der Breite des störenden Planeten über der Grundebene bedeutet und

$$(129)\quad R = \frac{a(1-\eta^2)}{(1+\varrho)^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}$$

ist. Zu bemerken ist noch die Gleichung

$$(130)\quad Q = -R\frac{\partial\cos H}{\partial v}.$$

Aus den Gleichungen (118) und (126) findet man

$$(131)\quad \begin{cases} \bar{g} + \dfrac{d\bar{G}}{dv} = -\dfrac{\zeta\left(\dfrac{d^2\zeta}{dv^2} + (1+\bar{g})^2\zeta\right)}{2(1+\bar{g})\cos i\cos^2\dfrac{i}{2}} \\ = -\dfrac{1}{2}\zeta\left(\dfrac{d^2\zeta}{dv^2} + (1+\bar{g})^2\zeta\right)\left(1 - \bar{g} + \dfrac{3}{4}\sin^2 i + \dfrac{5}{8}\sin^4 i + \cdots\right), \end{cases}$$

welche Gleichung $\bar{g}$ und $\bar{G}$ bestimmt, indem $\sin^2 i$ aus (126) folgt und $\bar{g}$ gleich den konstanten Gliedern der rechten Seite zu setzen ist.

Zur Bestimmung der Zeit als Funktion von v dient die Gleichung (120), die in der Form

$$(132)\quad n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho)^2}(1+S)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$(133)\quad n = \frac{\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

die absolute mittlere Bewegung bezeichnet.

33. Zerlegung der Variablen. Die Grundgleichungen (121), (122), (128) und (132) müssen für die beabsichtigte Form der Lösung zur Integration noch weiter transformiert werden. Es handelt sich hierbei in erster Linie darum, in den zu bestimmenden Größen die Glieder, welche mit den störenden Massen nicht verschwinden, von den Gliedern zu trennen, welche mit den störenden Massen verschwinden. Wenn die Massen verschwinden, muß die Summe der erstgenannten Glieder in die entsprechenden Größen bei der ungestörten Bewegung übergehen und die Elemente derselben bestimmen. Diese Glieder werden daher *elementare* genannt. *Gyldén* setzt

$$(134)\quad \varrho = (\varrho) + \delta\varrho$$

und bezeichnet mit $\delta\varrho$ die Summe aller nichtelementaren Glieder.

Die Summe (ϱ) aller elementaren Glieder von ϱ kann in der Form

$$(135) \qquad (\varrho) = \varkappa \cos(v - \omega) + \sum_i \varkappa_i \cos(v - \omega_i)$$

geschrieben werden. Dabei bezeichnet $\varkappa$ eine positive Integrationskonstante, den sog. diastematischen Modul, und $\varkappa_i$ Konstanten, die sog. diastematischen Koeffizienten, welche von den störenden Massen abhängen, aber mit denselben nicht verschwinden. Indem Λ, Γ, Γ_i konstante Winkel bezeichnen, von welchen Λ und Γ Integrationskonstanten sind, gilt weiter für die Winkel

$$(136) \qquad \begin{cases} \omega = \varsigma(v - \Lambda) + \Gamma, \\ \omega_i = \varsigma_i(v - \Lambda) + \Gamma_i, \end{cases}$$

wobei ς und ς_i kleine mit den störenden Massen verschwindende Konstanten sind.

Die früher eingeführte Funktion η und der Winkel Π werden nun durch die Gleichungen

$$(137) \qquad \begin{cases} \eta \cos(\Pi - \Gamma) = \varkappa + \sum_i \varkappa_i \cos(\omega - \omega_i), \\ \eta \sin(\Pi - \Gamma) = -\sum_i \varkappa_i \sin(\omega - \omega_i), \end{cases}$$

definiert. Nach (135) wird somit

$$(138) \qquad (\varrho) = \eta \cos F$$

erhalten, wo der Winkel

$$(139) \quad F = v - \omega - (\Pi - \Gamma) = v - \varsigma(v - \Lambda) - \Pi = v - (\omega)$$

das sog. diastematische Argument ist. Wenn $|\varkappa| > \sum|\varkappa_i|$ ist, so liegt $\Pi - \Gamma$ immer zwischen -90^0, und $+90^0$ und der säkulare Teil des Winkels F ist in $v - \omega$ abgesondert, welcher also die mittlere Bewegung $1 - \varsigma$ hat. Wäre dagegen ein Koeffizient $\varkappa_j$ größer als die Summe von $\varkappa$ und der übrigen $|\varkappa_i|$, so würde man analog

$$F = v - \omega_i - (\Pi_i - \Gamma_i)$$

finden, wobei $-90 < \Pi_i - \Gamma_i < +90^0$, und der Winkel F hätte die mittlere Bewegung $1 - \varsigma_i$.

Gyldén[77]) hat versucht nachzuweisen, daß das Argument F eine mittlere Bewegung hat, auch in anderen als diesen beiden Fällen, jedoch ohne überall durchzudringen. Die Bedeutung der Existenz einer mittleren Bewegung liegt darin, daß dann das Argument $\Pi - \Gamma$ resp. $\Pi_i - \Gamma_i$ für alle Zeiten innerhalb konstanter Grenzen liegt. Hier werden wir mit Gyldén die Form (139) voraussetzen.

Ganz ebenso wie die Funktion ϱ zerlegt wurde, wird dies auch

77) *H. Gyldén*, Stockholm Obs. Astr. Iakttagelser etc. (5) 4 (1896).

mit $\mathfrak{z}$ gemacht, indem

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \delta\mathfrak{z} \tag{140}$$

gesetzt wird. Indem Θ, Θ_i konstante Winkel und τ, τ_i kleine mit den störenden Massen verschwindende Konstanten bezeichnen, setzt man

$$\begin{cases} \vartheta = -\tau(v - \Lambda) + \Theta, \\ \vartheta_i = -\tau_i(v - \Lambda) + \Theta_i, \end{cases} \tag{141}$$

$$\begin{cases} J\cos(\Omega - \Theta) = \iota + \sum \iota_i \cos(\vartheta - \vartheta_i), \\ J\sin(\Omega - \Theta) = -\sum \iota_i \sin(\vartheta - \vartheta_i), \end{cases} \tag{142}$$

wo ι, ι_i Konstanten sind, von welchen ι anastematischer Modul und die ι_i anastematische Koeffizienten genannt werden, und erhält

$$(\mathfrak{z}) = J\sin U, \tag{143}$$

wobei das sogenannte anastematische Argument folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$U = v - \vartheta - (\Omega - \Theta) = v + \tau(v - \Lambda) - \Omega = v - (\vartheta). \tag{144}$$

Die Zeit t zerfällt in zwei Teile

$$t = (t) + \delta t, \tag{145}$$

wobei (t), das reduzierte Zeit genannt wird, durch die Gleichung

$$n\frac{d(t)}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+(\varrho))^2} \tag{146}$$

definiert wird. δt wird Zeitreduktion genannt.

In Analogie mit den Formeln der elliptischen Bewegung setzt *Gylden* weiter

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F, \tag{147}$$

$$G = E - \eta\sin E, \tag{148}$$

wodurch

$$(r) = \frac{a(1-\eta^2)}{1+(\varrho)} = a(1 - \eta\cos E) \tag{149}$$

erhalten wird. Vermittels der Gleichung (146) findet man für das sogenannte mittlere Argument G den Ausdruck

$$G = (1-\varsigma)n(t) + \Lambda - \Pi + (1-\varsigma)X, \tag{150}$$

wobei X aus der Gleichung

$$\begin{aligned} &(1-\varsigma)\frac{dX}{dv} \\ &= -\frac{\sqrt{1-\eta^2}(2+\eta\cos F)\sin F\left(\cos(\Pi-\Gamma)\frac{d(\eta\cos(\Pi-\Gamma))}{dv} + \sin(\Pi-\Gamma)\frac{d(\eta\sin(\Pi-\Gamma))}{dv}\right)}{(1+\eta\cos F)^2} \\ &-\frac{1}{\eta}\left(\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos F)^2} - 1\right)\left(\cos(\Pi-\Gamma)\frac{d(\eta\sin(\Pi-\Gamma))}{dv} - \sin(\Pi-\Gamma)\frac{d(\eta\cos(\Pi-\Gamma))}{dv}\right) \end{aligned} \tag{151}$$

erhalten wird. Im allgemeinen ist X sehr klein und kann oft gleich Null gesetzt werden.

Um noch mehr Freiheit zu haben, hat *Gyldén*[78]) versucht, die unabhängige Variabele v auch in zwei Teile zu zerteilen. Es sei hier nicht auf diese weitere Komplikation eingegangen.

34. Entwicklung der Größen P, Q und R. Fundamentale Entwicklung. Um die Integration der Gleichungen (121), (122), (128) und (132) ausführen zu können, müssen die Größen P, Q und R zweckmäßig entwickelt werden.

Wenn von der Betrachtung des zweiten Teiles der Störungsfunktion, welcher leicht zu berücksichtigen ist (siehe den Artikel von *v. Zeipel* VII2, 13 Nr. 27), und konstanten Faktoren abgesehen wird, hat man

$$\frac{a}{\Delta}$$

zu entwickeln. *Gyldén* setzt

$$\mathrm{w} = v - v' - (\bar{G} - \bar{G}') \tag{152}$$

$$\cos H = \cos \mathrm{w} + h, \tag{153}$$

und erhält nach Potenzen von h entwickelt

$$\frac{a}{\Delta} = \sum_{m=0}^{+\infty} W^{(m)} h^m, \tag{154}$$

wo

$$W^{(m)} = \frac{(\frac{1}{2}, m)}{(1, m)} \left(\frac{2}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'}\right)^m \left(\frac{a}{D}\right)^{2m+1} \tag{155}$$

ist. (Die akzentuierten Größen beziehen sich auf den störenden Planeten.) Dabei wurde

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \quad D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \mathrm{w} \tag{156}$$

$$(\gamma, i) = \gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + i - 1), \quad (\gamma, 0) = 1$$

gesetzt. In Fouriersche Reihen entwickelt gelte

$$W^{(m)} = W_0^{(m)} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} W_n^{(m)} \cos n\mathrm{w}, \tag{157}$$

und

$$\left(\frac{a}{D}\right)^{2m+1} = U_0^{(m)} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} U_n^{(m)} \cos n\mathrm{w}. \tag{158}$$

Nach (155) hat man dann

$$W_n^{(m)} = \frac{(\frac{1}{2}, m)}{(1, m)} \left(\frac{2}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'}\right)^m U_n^{(m)}. \tag{159}$$

78) *H. Gyldén*, Orbites abs. I, p. 515.

Die Größe

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^{2m+1} U_n^{(m)}$$

ist Funktion nur der Größe α und von

$$\chi = 1 - \left(\frac{r}{a}\frac{a'}{r'}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2}\right)^2 \left(\frac{1+\varrho'}{1+\varrho}\right)^2. \tag{160}$$

Nach Potenzen von χ entwickelt hat man dann

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^{2m+1} U_n^{(m)} = \vartheta_0^{m,n} - \vartheta_1^{m,n}\chi + \vartheta_2^{m,n}\chi^2 - \cdots \tag{161}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n \left(\frac{r'}{a'}\right)^{n+2m+1} U_n^{(m)} = \gamma_0^{2m+1,n} - \gamma_1^{2m+1,n}\chi + \gamma_2^{2m+1,n}\chi^2 - \cdots, \tag{162}$$

welche Gleichungen die Gyldénschen ϑ- und γ-Transzendenten definieren, und aus welchen noch die Relation

$$\vartheta_i^{m,n} = \gamma_i^{2m+1,n} + \frac{n}{2}\gamma_{i-1}^{2m+1,n} + \frac{n}{2}\frac{n-2}{4}\gamma_{i-2}^{2m+1,n} + \cdots + \frac{n}{2}\frac{n-2}{4}\frac{n-4}{6}\cdots\frac{n-2i}{2i}\gamma_0^{2m+1,n}$$

zwischen den beiden Transzendenten folgt. Betreffs derselben sei auf den Artikel von *v. Zeipel* verwiesen (VI 2, **13**, Nr. 8 und 24). Entwickelt man $\frac{r}{a}$, $\frac{r'}{a'}$, und χ nach Potenzen von η^2, η'^2, ϱ', so erhält man aus den Gleichungen (159), (161) und (162) Entwicklungen der Form

$$W_n^{(m)} = \sum y^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'}, \tag{162a}$$

wo $y^{(m)}$ Polynome in den $\gamma_i^{2m+1,n}$ oder $\vartheta_i^{m,n}$ Transzendenten sind. Die Koeffizienten dieser zuerst von *P. Harzer*[79]) gegebenen Polynome von γ-Transzendenten hängen von m und n ab und sind für größere Werte vom n mühsam zu berechnen. Die Logarithmen einiger dieser Koeffizienten gab *H. Masal*[80]).

Eine bedeutende Vereinfachung erreichte Gyldén durch Einführung der ϑ-Transzendenten, weil die Koeffizienten der Polynome dann nur von m abhängen. In den Anwendungen werden nur die niedrigsten Werte von m gebraucht.

Es bezeichne N eine beliebige der Funktionen $a\Omega$, P, Q oder R. Da

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \frac{\partial \Omega}{\partial h}$$

ist, schließt man aus den Gleichungen (123), (129) und (130), daß bis auf das zu Q hinzuzufügende Glied $-P\frac{\partial h}{\partial v}$, N in der Form

$$N = \sum N^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'} h^m \varrho^s, \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} nw \tag{163}$$

79) *P. Harzer,* St. Pét. mém. 7. Reihe (34) 12 (1886).

80) *H. Masal,* Stockholm K. Vet. Akad. Handl. (23) 7 (1889).

geschrieben werden kann, wo bei der Summation m, n, s, s', ν und ν' alle ganzzahligen Werte zwischen 0 und $+\infty$ annehmen und die Koeffizienten $N^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$ als Polynome der Koeffizienten $y^{(m)}$ oder der γ oder der ϑ-Transzendenten ausgedrückt werden können.

Aus den Gleichungen (125) und (126) findet man, daß h nach Potenzen von $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}$ entwickelt werden kann, und daß

$$(164)\quad h = -\frac{1}{2}(\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2)\cos w + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} - \mathfrak{z}'\frac{d\mathfrak{z}'}{dv'}\right)\sin w + \mathfrak{z}\mathfrak{z}' + \cdots$$

ist, wobei die Glieder höheren als dritten Grades weggelassen sind. Wird hier $(\mathfrak{z}) + \delta\mathfrak{z}$, $(\mathfrak{z}') + \delta\mathfrak{z}'$ für $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}'$ eingeführt, so kann man wieder

$$(165)\qquad h = (h) + \delta h$$

schreiben, wobei jedes Glied von δh wenigstens eine der sogenannten anastematischen Ungleichheiten $\delta\mathfrak{z}$, $\delta\mathfrak{z}'$ oder ihrer Ableitungen $\frac{d\delta\mathfrak{z}}{dv}$, $\frac{d\delta\mathfrak{z}'}{dv'}$ als Faktor hat.

Es ist hiernach ersichtlich, daß N in der Form

$$(166)\qquad N = \sum N_{\alpha,\beta,\gamma}(\delta h)^\alpha(\delta\varrho)^\beta(\delta\varrho')^\gamma$$

entwickelt werden kann, und daß die $N_{\alpha,\beta,\gamma}$ ihrerseits von der Form

$$(167)\quad N_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum N^{(m)}_{\alpha,\beta,\gamma}(n, s, s')_{\nu,\nu'}(h)^m(\varrho)^s(\varrho')^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}nw$$

sind. Die hier auftretenden Koeffizienten folgen nach der Formel

$$N^{(m)}_{\alpha,\beta,\gamma}(n, s, s')_{\nu,\nu'} = \frac{(m+1, \alpha)}{(1, \alpha)}\frac{(s+1, \beta)}{(1, \beta)}\frac{(s'+1, \gamma)}{(1, \gamma)}N^{(m)}(n, s, s')_{\nu,\nu'}$$

sofort aus den Koeffizienten der für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ gültigen Entwicklung (163).

Die Entwicklung von N nach Vielfachen von w und nach Potenzen von

$$(h),\ (\varrho),\ (\varrho'),\ \eta,\ \eta',\ \delta h,\ \delta\varrho,\ \delta\varrho'$$

nennt Gyldén die fundamentale Entwicklung.

35. Diastematische Entwicklung. Um die Integration der Differentialgleichungen (121), (122) und (128) möglichst einfach ausführen zu können, muß man, soweit als möglich, ihre rechten Seiten als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken, was indessen nur durch sukzessive Annäherungen und Integrationen zu erreichen ist, indem die Größen $\delta\varrho$, $\delta\varrho'$, $\delta\mathfrak{z}$, δh und δt nur solcherweise zu erhalten sind.

Aus der Gleichung (143) und der analogen Gleichung

$$(168)\qquad (\mathfrak{z}') = J'\sin U'$$

folgt, daß

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = J\cos U + (\xi),\quad \frac{d(\mathfrak{z}')}{dv'} = J'\cos U' + (\xi'),$$

wo (ξ) und (ξ') kleine und leicht zu erhaltende Größen von der Ordnung der Masse bezeichnen, welche auch oft vernachlässigt werden können, und das Argument

$$(169)\quad U' = v' - \vartheta' - (\Omega' - \Theta') = v' + \tau'(v' - \Lambda') - \Omega' = v' - (\vartheta')$$

ist. Vereinigt man der Kürze wegen die aus (ξ) und (ξ') entstehenden Glieder mit δh, so ergibt sich aus (164) daß (h), welches wenigstens vom zweiten Grade ist, nach Potenzen von J und J' und nach Kosinussen der Vielfachen von w, U und U' entwickelt werden kann.

Die in § 34 mit N oder $N_{\alpha,\beta,\gamma}$ bezeichneten Funktionen, ebenso wie die auf den rechten Seiten der Gleichung (128) sich befindenden, von denselben abhängigen Ausdrücke können daher zunächst in der Form

$$(170)\quad N = \sum (N) J^{\lambda} J'^{\lambda'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} (\varrho)^{s} (\varrho')^{s'} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \{ nw + qU + q'U' \}$$

geschrieben werden.

Für den störenden Planeten hat man nun die Gleichungen

$$(171)\quad F' = v' - \omega' - (\Pi' - \Gamma') = v' - \varsigma'(v' - \Lambda') - \Pi' = v' - (\omega'),$$

$$(172)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E' = \sqrt{\frac{1-\eta'}{1+\eta'}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F', \quad G' = E' - \eta' \sin E',$$

$$(173)\quad G' = (1-\varsigma')n'(t') + \Lambda' - \Pi' + (1-\varsigma')X',$$

$$(174)\quad t = (t') + \delta t',$$

$$(175)\quad (\varrho') = \eta' \cos F'.$$

Durch diese Gleichungen und die entsprechenden der gestörten Planeten ist auch die Abhängigkeit der Länge v' von v gegeben.

Die zur Einführung von v anstatt v' und umgekehrt nötigen Formeln sind von *H. Gyldén*[81]) vollständig gegeben. Der von ihm beschrittene Weg ist etwa der folgende. Durch Elimination von t, (t) und (t') aus den Gleichungen (145), (150), (173) und (174) findet er

$$G' + \Pi' - \Gamma' = \varphi(G - F) + \overline{V} + \overline{U},$$

wo

$$(176)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1-\varsigma'}{1-\varsigma}\mu, \quad \mu = \dfrac{n'}{n}, \\ \overline{V} = \varphi(v - \omega) + \varphi(\Gamma - \Lambda) - (\Gamma' - \Lambda'), \\ \overline{U} = (1-\varsigma')[\mu(n\delta t - X) - (n'\delta t' - X')]. \end{cases}$$

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$(177)\quad \overline{H} = F' - G' - \varphi(F - G)$$

81) *H. Gyldén,* Orbites abs. 1, p. 133—151.

hat man dann

$$(178)\qquad \begin{cases} \omega' = \Gamma' + \mu\frac{\varsigma'}{\varsigma}(\omega - \Gamma) + \varsigma'\frac{\overline{H}+\overline{U}}{1-\varsigma'}, \\ \vartheta' - \Theta' = \mu\frac{\tau'}{\tau}(\vartheta - \Theta) - \tau'\frac{\overline{H}+\overline{U}}{1-\varsigma'}, \end{cases}$$

wo noch $\overline{H}$ als Funktion von v darzustellen ist, was indessen selten nötig ist, da $\overline{H}$ immer klein und ς' von der Ordnung der Masse ist. In „Orbites absolues", p. 143—147, gibt Gyldén Formeln, um $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} \alpha\overline{H}$ in trigonometrische Reihen von v oder v' zu entwickeln (α eine Konstante).

Vermittelst der Entwicklung

$$(179)\quad G - F = \sum_{\nu=1}^{+\infty} B_\nu \sin\nu F,\quad B_\nu = (-1)^\nu 2\left(\frac{1}{\nu} + \sqrt{1-\eta^2}\right)\left(\frac{\eta}{1+\sqrt{1-\eta^2}}\right)^\nu$$

leitet Gyldén die nach Potenzen von η und der Konstante λ entwickelbaren Koeffizienten $Y_\nu(\lambda, \eta)$ der Entwickelung

$$e^{-i\lambda(G-F)} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} Y_\nu(\lambda, \eta) e^{-i\nu F}$$

ab ($i = \sqrt{-1}$ und e die Nepersche Basis). Andererseits hat man die Entwickelung (ν und ν' ganze Zahlen)

$$e^{-im(F-G)} = \sum_{\nu'=-\infty}^{+\infty} X_{\nu'}(m, \eta)\, e^{-i\nu' G}.$$

Zwischen den Koeffizienten der beiden Entwickelungen existiert die Beziehung

$$(\lambda + \nu) Y_\nu(\lambda, \eta) = \lambda X_\nu(-\lambda - \nu, \eta).$$

Unter Anwendung der vorstehenden Gleichungen erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} e^{-im(\vartheta'-\omega')} &= e^{-im(F'-G')-im(G'+\Pi'-\Gamma')}, \\ &= \sum_{\nu'} X_{\nu'}(m, \eta') e^{-i[(m+\nu')(G'+\Pi'-\Gamma')-\nu'(\Pi'-\Gamma')]}, \\ &= \sum_{\nu'} X_{\nu'}(m, \eta') e^{-i[(m+\nu')\varphi(G-F)+(m+\nu')(\overline{V}+\overline{U})-\nu'(\Pi'-\Gamma')]}, \\ &= \sum_{\nu,\nu'} X_{\nu'}(m,\eta') Y_\nu(\varphi(m+\nu'),\eta) e^{-i[\nu F+(m+\nu')(\overline{V}+\overline{U})-\nu'(\Pi'-\Gamma')]} \end{aligned}$$

und daher schließlich nach einigen Reduktionen

$$(180)\quad e^{i[m(\vartheta-\vartheta')} = \sum_{\nu,\nu'} X_{\nu'}(m, \eta') Y_\nu(\varphi(m+\nu'),\eta) e^{i[(m-\nu)\vartheta-(m+\nu')(\mu\vartheta+B)+\nu(\omega)+\nu'(\omega')]}$$

wobei

$$(181) \quad B = A' - \mu A + \mu(n\delta t - X) - (n'\delta t' - X') + \frac{\varsigma' H}{1-\varsigma'}$$

ist und durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile für sich die Entwickelung von $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{m(v-v')\}$ erhalten wird.

Die Formeln (178) und (180) gestatten alle in den Argumenten vorkommenden von v' abhängigen Größen in einfacher Weise durch v auszudrücken. In „Orbites absolues", p. 198—320, gibt Gyldén die Ausdrücke in v von

$$(\varrho)^s(\varrho')^{s'} \cos mw, \quad (s + s' \leqq 5),$$

bis auf Glieder sechsten Grades in η und η', und von verschiedenen (δ), (δ'), $\left(\frac{d\delta}{dv}\right)$, $\left(\frac{d\delta'}{dv'}\right)$ enthaltenden Gliedern.

Nach der Gleichung (167) übersieht man nun, daß die Funktionen N, nachdem v' durch die vorstehenden Formeln eliminiert ist, in der folgenden Form erhalten werden:

$$(182) \quad N = \sum \bar{A}_{s,s'}(p,p',q,q') \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{sv - s'(\mu v + B) + p(\omega) + p'(\omega') + q(\vartheta) + q'(\vartheta') - (s+p+q)(\bar{G} - \bar{G}')\},$$

wo die ganzen positiven oder negativen Zahlen s, s', p, p', q, q' die Gleichung

$$s + p + q = s' - p' - q'$$

erfüllen. Die Koeffizienten $\bar{A}$ haben die Form

$$\bar{A}_{s,s'}(p,p',q,q') = \sum A_{s,s'}(p,p',q,q')_{\lambda,\lambda',\nu,\nu'} \eta^{|p|+2\lambda} \eta'^{|p'|+2\lambda'} J^{|q|+2\nu} J'^{|q'|+2\nu'}$$
$$(\lambda, \lambda', \nu, \nu' = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

wo die A-Koeffizienten Polynome von $\varphi = \mu\frac{1-\varsigma'}{1-\varsigma}$ sind, deren Koeffizienten sich aus den Koeffizienten der Fundamentalentwicklung zusammensetzen. Die Entwickelung (182) nennt Gyldén die diastematische Entwickelung. Streng genommen wäre noch die in B enthaltene Größe $\frac{\varsigma'}{1-\varsigma'}\overline{H}$, welche oft vernachlässigt werden kann, sowie (ω') und (ϑ') durch v auszudrücken.

Die expliziten Ausdrücke der Koeffizienten der diastematischen Entwickelung von P, Q und R gibt Gyldén in Orbites abs. 1 p. 448—453 und 2 p. 242—270 für alle Glieder von niedrigerem als viertem Grad in η und η', sowie für die wichtigsten Glieder vom vierten, fünften und sechsten Grad.

H. Masal[80]) drückt diese Koeffizienten bis auf Glieder einschließlich dritten Grades in η und η' durch γ-Transzendenten aus und gibt Formeln und Tafeln zu ihrer Berechnung.

In seinen „Hilfstafeln“[82]) hat Gyldén Formeln für die zur Berechnung der Hauptungleichheiten der kleinen Planeten nötigen Koeffizienten gegeben und ihre Berechnung durch ausgedehnte numerische Tafeln erleichtert.

36. Einteilung der Glieder. Unter den auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen der Bewegung vorkommenden Gliedern treten vier Formen auf, welche besondere Schwierigkeiten bei der Integration darbieten. Erstens hat man die beiden Formen

$$\text{(A)}\quad a\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{\sigma v + A\}, \qquad \text{(B)}\quad b\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{(1-\sigma)v - B\},$$

wo a, b, A, B Konstanten sind und die σ mit den störenden Massen verschwinden. Diese immer auftretenden Glieder sind nach der Gyldénschen Terminologie elementare Glieder. Diesen zur Seite treten im Falle angenäherter Kommensurabilität der mittleren Bewegungen Glieder der beiden Formen

$$\text{(C)}\quad c\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{\Delta v + C\}, \qquad \text{(D)}\quad d\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{(1+\Delta)v + D\},$$

wo $c\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{C$ und $d\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\{D$ aus Gliedern der Form (A) zusammengesetzt sind und, indem das Verhältnis μ der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten nahe gleich dem ganzzahligen Bruche $\frac{p}{q}$ angenommen wird,

$$\Delta = p - q\mu$$

ist. Die Glieder der Formen (C) und (D) nennt Gyldén „charakteristische“. Die Formen (A) und (C) sind langperiodische, (B) und (D) dagegen kurzperiodische. Bei dem Integrationsprozeß können die Glieder der Form (C) Divisoren von der Ordnung Δ^2, diejenigen von der Form (D) aber Divisoren von der Ordnung Δ erhalten. Die elementaren Glieder, welche den säkularen Gliedern der anderen Theorien entsprechen, erhalten Integrationsdivisoren von der Ordnung der Masse und geben also Veranlassung zu Gliedern, die formell von der nullten Ordnung sind.

Die Glieder (A), (B), (C) und (D) sind mindestens vom Grade resp.

$$2,\ 1,\ |q-p|,\ |(|q-p|-1)|.$$

Die nicht zu den genannten vier Formen gehörenden Glieder werden „gewöhnliche“ genannt.

---

82) *H. Gyldén*, Astr. Ges. Publ. XXI, Leipzig 1896.

37. Integration. Die Bestimmung der Größen ϱ, S, ζ und δt nach den Gleichungen (121), (122), (128) und

$$(183)\quad \begin{cases} n\dfrac{d\,\delta t}{dt} = \dfrac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+(\varrho))^2}\left\{S - \dfrac{(1+S)(2+2(\varrho)+\delta\varrho)\delta\varrho}{(1+(\varrho)+\delta\varrho)^2}\right\} \\ \qquad = (1-2\eta\cos F+\cdots)S-(2+3\eta^2+\cdots)(1+S)\delta\varrho+\cdots, \end{cases}$$

welch letztere aus (132), (145) und (146) folgt, vereinfacht Gyldén dadurch, daß er diese Größen in mehrere Teile spaltet und ebenso die Differentialgleichungen in solche für diese Teile zerlegt. Das hierbei befolgte Prinzip besteht darin, alle die Glieder, welche von derselben Form sind und etwa dieselben Schwierigkeiten bieten, in eine Gleichung zu vereinigen.

Seien gewöhnliche Glieder und Glieder der Formen (A), (B), (C), (D) einer Größe durch die bezüglichen Indizes g, a, b, c, d gekennzeichnet. Aus den genannten Gleichungen ergeben sich dann für (ϱ), $\delta\varrho_a, \ldots, \delta\varrho_g$, $S_a, \ldots, S_g$, $\delta t_a, \ldots, \delta t_g$, (ζ), $\delta\zeta_a, \ldots, \delta\zeta_g$, $(\delta\zeta_b = \delta\zeta_b = 0)$ resp. Gleichungen der Formen

$$(184)\quad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + (1+b)\varrho = R, \qquad (\varrho = (\varrho), \delta\varrho_a, \delta\varrho_c, \delta\varrho_d, \delta\varrho_g),$$

$$(185)\quad \frac{dS}{dv} = (S), \qquad (S = S_a, S_b, S_c, S_d, S_g),$$

$$(186)\quad \frac{d\,\delta t}{dt} = T, \qquad (\delta t = \delta t_a, \delta t_b, \delta t_c, \delta t_d, \delta t_g),$$

$$(187)\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + (1+a)\zeta = Z, \qquad (\zeta = (\zeta), \delta\zeta_a, \delta\zeta_c, \delta\zeta_d, \delta\zeta_g),$$

wo a und b kleine Konstanten erster Ordnung sind und R, (S), T, und Z die resp. Glieder der Differentialgleichungen von ϱ, S, δt und δz bezeichnen, welche von der Form der zu bestimmenden Teile sind.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich nur durch fortgesetzte Annäherungen bestimmen, denn sie enthalten die gesuchten Größen selbst, wenn auch mit kleinen Faktoren multipliziert. Eine Ausnahme bilden δt und $\delta t'$, welche in die Argumente mit Faktoren nullter Ordnung multipliziert eingehen.

Handelt es sich darum, die Theorien der Hauptplaneten auszuarbeiten, so erhält man für jeden ein System von Gleichungen wie (184), (185), (186), (187), und alle diese Systeme sind dann gleichzeitig zu integrieren. Solch eine Integration, die mit ganz bedeutenden Schwierigkeiten verbunden sein muß, ist niemals ausgeführt worden.

Die diesbezügliche Arbeit von Gyldén (Orbites absolues) ist leider unabgeschlossen geblieben. Aber auch wenn es sich um die Bahnen

der kleinen Planeten handelt, wo die Bewegungen der Hauptplaneten als bekannt angenommen werden, ist die Integration der genannten Gleichungen mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden, wenn man streng an dem Gyldénschen Prinzip festhält, alle gesuchten Größen als Summen von periodischen Gliedern ausdrücken und keine Entwickelung nach Potenzen der unabhängigen Variablen zuzulassen.

Es sei im folgenden vorausgesetzt, daß die von den störenden Planeten abhängigen Größen bekannt seien.

Aus der Form der Gleichung (184) folgt, daß in ϱ nur diejenigen Glieder der Formen (B) und (D) Schwierigkeiten verursachen, in denen sehr kleine Divisoren auftreten. Die übrigen Glieder können nach der in § 30 gegebenen Formel, ein Glied $\alpha \cos(\nu t + N)$ der Gleichung (113) zu integrieren (α und N langsam veränderlich), erhalten werden. Dabei kann und muß man, ebenso wie öfters auch in den übrigen Gleichungen, die in den Argumenten vorkommenden δt_b, δt_d und δt_g vermittelst Reihenentwickelung wegschaffen.

In den Gleichungen (185) und (186) aber bieten nur Glieder der Formen (A) und (C) Schwierigkeiten. Die übrigen Glieder können nach der ersten Formel (115) integriert werden. Weil S in R (Gleichung (184)) eingeht, ohne die Masse als Faktor zu haben, muß man jedoch auch kleine Glieder in S von der Form (B) oder (D) berücksichtigen. Überhaupt kann man von den Gleichungen (184), (185) (186) sagen, daß sie die verschiedenen Gruppen von Gliedern nur formal trennen, und daß man in Wirklichkeit die Trennung erst durch mühsames Aussuchen bewerkstelligen muß.

38. Integration der elementaren und charakteristischen Glieder. Nach der Gleichung (184) erhält man zur Bestimmung von (ϱ) eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (1 + b_1)(\varrho) = b_0 + b_2(\varrho)^2 + b_3(\varrho)^3 + \cdots \tag{188}$$

wo die Koeffizienten b periodische Reihen in v von der Ordnung der Masse sind. *A. Lindstedt*[83]) zeigte, wie diese Gleichung in periodischer Form formell integriert werden kann (vgl. VI2, 12, Nr. **11** Whittacker). Die Lindstedtschen Reihen sind jedoch im allgemeinen divergent. Um eine konvergente Entwickelung zu erhalten, suchte Gyldén schon in der ersten Annäherung gewisse Glieder höheren und besonders dritten Grades zu berücksichtigen. Unter Anwendung der angenäherten Werte

$$\eta \cos F = (\varrho), \qquad \eta \sin F = -\frac{d(\varrho)}{dv},$$

$$\eta^2 = (\varrho)^2 + \left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2, \qquad \eta^2 \cos 2F = (\varrho)^2 - \left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2, \ldots$$

83) *A. Lindstedt*, Pét. mém. 7. Reihe (31) 4 (1883).

schaffte er aus der diastematischen Form der Entwickelungen die elementar werdenden Glieder weg. Er erhält in dieser Weise die sogenannte verallgemeinerte Fundamentalform, welche in die Differentialgleichung von ϱ eingeführt, zur Bestimmung von (ϱ) eine Gleichung gibt, welche, wenn nur die wichtigsten Glieder explizite ausgeschrieben werden, die Gestalt hat

$$(189)\quad \frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + \left(1 + a_0 + a_1\eta'^2 + a_2\left(\frac{d(\varrho)}{dv}\right)^2 + a_3(\varrho)^2\right)(\varrho) = (R),$$

wo die Koeffizienten a Konstanten erster Ordnung und nullten Grades sind, deren Werte in den Annäherungen nur unbedeutend verändert werden. (R) bezeichnet eine Summe von elementaren Gliedern. Es ist zu zeigen, daß (ϱ) von der antizipierten Form (135) ist, und daß die darin enthaltenen Koeffizienten $\varkappa_i$ so bestimmt werden können, daß die Reihe für (ϱ) konvergiert. Indem die konstanten Teile von η^2 und η'^2 mit $[\eta^2]_0$ und $[\eta'^2]_0$ bezeichnet werden, nimmt die Gleichung (189) unter den aufeinanderfolgenden Annäherungen die Form

$$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (1 + \beta_0 + \Delta\beta + \beta'[\eta'^2]_0 + \beta_1[\eta^2]_0)(\varrho) = (\bar{R})$$

an, wobei β_0, $\Delta\beta$, β' und β_1 Konstanten sind und $\Delta\beta$ so zu bestimmen ist, daß kein Glied der Form $\eta\cos F$ mal einer Konstante in $(\bar{R})$ auftritt. Man kann $(\bar{R})$ die Form

$$(\bar{R}) = \sum\gamma_i \cos(v - \varsigma_i(v - \Lambda) - \Gamma_i)$$

geben und erhält für (ϱ) die antizipierte Form (135), wenn σ und $\varkappa_i$ durch die Gleichungen

$$(190)\quad (1 - \varsigma)^2 = 1 + \beta_0 + \Delta\beta + \beta'[\eta'^2]_0 + \beta_1[\eta^2]_0,$$

$$(191)\quad \varkappa_i = \frac{\gamma_i}{2\varsigma_i - \varsigma_i^2 + \beta_0 + \Delta\beta + \beta'[\eta'^2]_0 + [\eta^2]_0}$$

bestimmt werden. Da nach (137)

$$[\eta^2]_0 = \tfrac{1}{2}\sum\varkappa_i^2$$

und analog

$$[\eta'^2]_0 = \tfrac{1}{2}\sum\varkappa_i'^2$$

ist, so werden die $\varkappa_i$ durch Lösung einer algebraischen Gleichung höheren Grades erhalten. Ist nur ein $\varkappa_i$ zu bestimmen, so ist die Gleichung (191) dritten Grades, und *Gyldén*[84]) zeigt, daß $\varkappa_i$ höchstens von der Größenordnung $\sqrt[3]{\gamma_i}$ ist. Das Vorkommen von $\sum\varkappa_i^2$ in dem Nenner würde also die Größe von $|\varkappa_i|$ begrenzen. Gyldén nennt daher $\sum\varkappa_i^2$ eine horistische Funktion. Vermittels der horistischen Funktion

84) *H. Gyldén*, Acta math. 15 (1891), p. 75—79.

glaubte *Gyldén*[85]) nachweisen zu können, daß man bei Anwendung derselben für (ϱ) eine konvergente Reihe erhalten würde. *H. Poincaré*[86]) hat gezeigt, daß dies unrichtig ist, und daß Gyldén Glieder auf der rechten Seite von (189) vernachlässigt, welche ebenso wichtig sind wie die Glieder der Form Konstante mal (ϱ). Berücksichtigt man aber auch jene Glieder, so dürfte indessen der Gyldénsche Vorgang mit Vorteil angewandt werden können, wenn es sich darum handelt, Ausdrücke zu erhalten, welche für sehr lange, wenn auch nicht beliebig lange Zeiten gültig sein sollen.

Die wichtigsten elementaren Glieder von ϱ hat *Max Wolf*[87]) gegeben.

Die Glieder von ϱ von der Form (D) sind aus einer Differentialgleichung zu bestimmen, welche von derselben Form ist wie die Gleichung für die elementaren Glieder, und können auch in derselben Weise erhalten werden. Oft dürfte es sogar am zweckmäßigsten sein, die Glieder der Formen (B) und (D) gleichzeitig zu behandeln. Die in den Argumenten der Glieder von der Form (D) eingehende Zeitreduktion, berücksichtigt man durch teilweise Integration der langperiodischen Glieder und Reihenentwickelung der übrigen.

Die Glieder der Formen (A) und (C) in den Gleichungen (185) und (186) werden kritisch, wenn die linearen Integrationsdivisoren sehr klein sind, und eine lineare Integration kann dann ganz illusorische Resultate liefern. Eine bessere Integrationsmethode suchte Gyldén zu erhalten, indem er von vornherein das Eingehen der zu bestimmenden Größen in die Argumente berücksichtigte. Wie aus der Gleichung (183) hervorgeht, entsteht der wichtigste Teil von T in der Gleichung für δt_a und δt_c aus S_a resp. S_c, und die wichtigsten Teile von δt_a und δt_c sind daher aus einer Gleichung der Form

$$\frac{d^2\delta t}{dv^2} = \sum A \sin(2\lambda v + s\delta t + 2C) \tag{192}$$

zu bestimmen, wo 2λ eine kleine Konstante, $A \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} C$ aber Konstanten oder Summen von elementaren langperiodischen Gliedern von der ersten Ordnung sind. Hieraus ist ersichtlich, daß δt_a und δt_c bei linearer Integration den kleinen Integrationsdivisor 2λ im Quadrat erhalten und daher sehr vergrößert werden.

Bei den Gliedern der Form (A), wo die Integrationsdivisoren von der ersten Ordnung sind, würde man das Entstehen von Gliedern der

85) *H. Gyldén*, Acta math. 15 (1891) u. 17 (1893).
86) *H. Poincaré*, Acta math. 29 (1905), p. 235—271.
87) *Max Wolf*, Stockholm Obs. Iakttagelser etc. (4) 4 (1891).

Ordnung — 1 oder sogenannten hyperelementaren Gliedern erwarten können. *Gyldén*[88]) hat indessen schon früh gezeigt, daß die Koeffizienten erster Ordnung der elementaren Glieder in (192) sich gegenseitig heben, und daß also hyperelementare Glieder in δt_a sich nicht finden, was nichts anders ist als das Poissonsche Theorem auf die Gyldénsche Theorie übertragen.

Die vielen Versuche Gyldéns[85]), die Gleichung (192) zu integrieren, haben nicht zu definitiven Resultaten geführt. Gewöhnlich zerlegt er δt in mehrere Teile $\delta_1 t$, $\delta_2 t, \ldots$, welche nacheinander bestimmt werden können. Indem nur ein, aber das wichtigte, Glied der rechten Seite von (192) berücksichtigt wird, bestimmt er $\delta_1 t = \frac{2\Theta}{s}$ aus der bekannten Gleichung eines schwingenden Pendels

$$\frac{d^2\Theta}{dv^2} = B \sin 2(\lambda v + \Theta + C),$$

welche, da B und C nach seiner Bestimmung Konstanten sind, vermittelst elliptischer Funktionen integriert werden kann. Der Unterschied $\delta t - \delta_1 t$ wird durch eine Hilfsgröße V vermittelt, die durch eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - [n(n+1)k^2 sn^2 x + h] = X$$

zu bestimmen ist, wo k, h und die in $x = \gamma v + \varphi$ eingehenden zweckmäßig zu bestimmenden Größen γ und φ Konstanten sind und X teils bekannte, teils durch Annäherungen zu erhaltende auch von V abhängige langperiodische Glieder enthält. Die Integration dieser Gleichung sucht Gyldén unter Anwendung der von *Ch. Hermite*[89]) gegebenen Lösung der Laméschen Differentialgleichung zu bewerkstelligen.

Eine andere von Gyldén stammende Methode, die Gleichung (192) zu integrieren, ist von *P. Harzer*[79]) ausgearbeitet worden. Indem wieder nur das bedeutendste periodische Glied explizite ausgeschrieben wird, kann man nämlich der genannten Gleichung die Form

$$\frac{d^2\Theta}{dv^2} + \beta \sin 2(\Theta + \vartheta) = X$$

geben. In erster Annäherung nimmt er β und ϑ als Konstanten und $X = 0$ an und erhält dann für Θ eine zwei Integrationskonstanten enthaltende, durch einfache elliptische Funktionen ausdrückbare Lösung. Die Funktion X und die Variabilität von β und ϑ werden in den

88) *H. Gyldén,* Stockholm K. Vet. Akad. Handl. (7) 2 (1882), p. 137—144; Orbites absolues 1, p. 536—541.

89) *Ch. Hermite,* Paris C. R. 85 (1877), 2te sem. Mehrere Aufsätze.

folgenden Annäherungen durch Variation der Integrationskonstanten berücksichtigt.

Die Einführung der elliptischen Funktionen in die Lösung kompliziert indessen die weiteren Annäherungen ungeheuer, es wird unmöglich zu überblicken, was in den Differentialgleichungen berücksichtigt ist und was nicht. Natürlich muß zugegeben werden, daß in einigen Fällen durch ihre Einführung schwach konvergierende Reihen kürzer geschrieben und berechnet werden können. Viele bei Störungsproblemen vorkommende Entwickelungen der elliptischen Funktionen hat *Gyldén* an den in Fußnote[90]) verzeichneten Stellen gegeben.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß *Gylden*[91]) auch die Zeitreduktion auf die Ermittelung einer Größe V zurückzuführen versucht hat, die ihrerseits aus einer Gleichung der Form

$$\frac{d^2V}{dv^2} - \nu^2 V = X$$

zu bestimmen wäre. Das Vorkommen der horistischen Funktion ν^2 würde das Entstehen beliebig kleiner Divisoren verhindern. Gemäß den Untersuchungen von *H. Poincaré*[86]) ist auch dieser Integrationsversuch unwirksam.

39. Spezielle Ausarbeitungen und Anwendungen der Gyldénschen Methode. Methode von Brendel. *Gyldén* selbst hat keine vollständigen Anwendungen seiner Theorie gegeben. Dagegen sind verschiedene Teile seiner Methode und die bei den verschiedenen Planetentypen am besten geeigneten Formeln von anderen Astronomen weiterentwickelt und ausgearbeitet worden.

P. Harzer[79]) behandelte den Hecubatypus und untersuchte dabei besonders die charakteristischen Glieder.

Die Planeten des $\frac{1}{3}$-Typus untersuchte *M. Brendel*[92]). Die Gyldénschen Differentialgleichungen integrierte er dabei in der Weise, daß die Koeffizienten der angesetzten Reihen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmt wurden. In ähnlicher Weise behandelte *K. G. Olsson*[93]) einen kleinen Planeten desselben Typus, wobei er noch verschiedene Koeffizienten nach Potenzen der Größe $n - 3n'$ entwickelte.

---

90) *H. Gyldén,* St. Pét. mém. 7. Reihe (16) 10 (1871); Stockholm K. Vet. Handl. (11) 9 (1874).

91) *H. Gyldén,* Acta math. 17 (1893); Astr. Ges. Publ. 21, Leipzig 1896, p. XLIV—L.

92) *M. Brendel,* Stockholm Obs. Iakttagelser etc. (4) 3 (1891).

93) *K. G. Olsson,* Stockholm K. Vet. Akad. Handl. (25) 8 (1893).

In seiner später erschienenen Theorie der kleinen Planeten teilt *M. Brendel*[94]) die Planeten nach ihren Kommensurabilitätsverhältnissen in bezug auf Jupiter in drei Klassen:

1. *gewöhnliche,* deren mittlere Bewegung nicht nahe kommensurabel mit derjenigen Jupiters ist;

2. *charakteristische,* deren mittlere Bewegung nahe, aber nicht sehr nahe kommensurabel mit derjenigen Jupiters ist;

3. *kritische,* deren mittlere Bewegung *sehr* nahe kommensurabel mit derjenigen Jupiters ist, so daß strenge Kommensurabilität (Libration) befürchtet werden kann.

Die charakteristischen und kritischen Planeten sind von der ν-ten Klasse, wenn das Verhältnis der mittleren Bewegungen $\frac{n'}{n}$ nahe gleich $\frac{p-\nu}{p}$ ist (p und ν ganze teilerfremde Zahlen).

Bei der Integration wendet *Brendel*[95]) hier öfters die partielle Integration an, indem erst $T, \eta, J, \omega, \ldots$ als Konstanten betrachtet werden. Die aus der Veränderlichkeit des in den Argumenten enthaltenen T in den Lösungen entstehenden Glieder werden „exargumentale", die aus der Veränderlichkeit der elementaren Größen $\eta, J, \omega, \ldots$ entstehenden Glieder werden „Zusatzglieder" genannt. Brendel behandelt speziell die gewöhnlichen und die Planeten der Typen $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}$ und gibt explizite die Hauptglieder der Störungen, sowohl in analytischer Form als auch numerisch tabuliert, wobei indessen für die kritischen Planeten die Behandlung noch nicht ganz durchgeführt ist.

Um die Berechnung einer Ephemeride zu vereinfachen, führt er auch in die erhaltenen Störungsformeln die Zeit als unabhängige Veränderliche ein. Weiter leitet er aus den Störungen der Gyldénschen Koordinaten auch die Störungen in den Elementen ab. Bisweilen findet er es vorteilhaft, statt oskulierender Elemente sogenannte instantane Elemente[18]) anzuwenden, welche so gewählt werden, daß sie zu jeder Zeit die Koordinaten des Planeten, nicht aber auch gleichzeitig deren Ableitungen darstellen.

Nach der Brendelschen Methode haben *H. Ludendorff*[96]) und *J. Kramer*[97]) die Theorien der kleinen Planeten des Typus $\frac{1}{4}$ und *H. Buchholz*[98]) diejenigen des Typus $\frac{2}{5}$ ziemlich ausführlich entwickelt. *Kramer* entwickelt dabei die elementaren Glieder in säkularer Form.

94) *M. Brendel,* Göttingen Ges. Wiss. Abhdl. Neue Folge (1) 2 (1898), (6) 4 (1909), (6) 5 (1910), (8) 1 (1911).

95) *M. Brendel,* Math. Ann. 55 (1901), p. 248—256.

96) *H. Ludendorff,* Die Jupiterstörungen der kl. Pl. vom Hecuba-Typus, Berlin 1897.

V. Verschiedene Methoden.

40. Methode von Backlund. Um die bei Anwendung der wahren Anomalie als unabhängiger Veränderlichen erforderliche komplizierte Entwickelung der Störungsfunktion zu vermeiden und die Störungen durch eine wenig von der Zeit verschiedene Veränderliche auszudrücken, hat *O. Backlund*[99]) auf Grund der Laplaceschen Theorie der Jupitersatelliten[100]) eine neue Methode entwickelt, in welcher übrigens die Gyldénschen Hauptprinzipien bezüglich der Form der Störungsausdrücke zur Anwendung gekommen sind.

Backlund setzt die wie bei Gyldén definierte Länge in der Bahn an:

$$w = nt + \psi + y + \Lambda,$$

wo Λ eine Konstante, ψ eine langperiodische Funktion und y eine kleine Größe ist, nach deren Potenzen die Störungsfunktion entwickelt werden kann. Als unabhängige Veränderliche wählt er

$$\tau = nt + \psi$$

und indem er als zu bestimmende Größen w, den Sinus der Breite ζ und die durch die Gleichung

$$r^2 = a^2(1 + \Theta + \varrho), \qquad n^2a^3 = k^2(1 + m)$$

(Θ eine überzählige Konstante von der Ordnung der Masse, welche so zu bestimmen ist, daß ϱ nur periodische Glieder enthält) definierte Größe ϱ nimmt, folgen aus den Gleichungen (101), (103) und (128) zu ihrer Bestimmung Gleichungen der Form

$$\frac{d^2\varrho}{d\tau^2} + \varrho = R_0 + R_1,$$

$$\frac{dw}{d\tau} = 1 + W_0 + W_1,$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + \zeta = Z_0 + Z_1,$$

wo R_0, W_0, Z_0, R_1, W_1, Z_1 nach Potenzen von Θ, ϱ, y, $\frac{d\varrho}{d\tau}$, $\frac{d\psi}{d\tau}$, ζ und den entsprechenden Größen des störenden Planeten entwickelt sind. R_1, W_1, Z_1 haben die störende Masse als Faktor, R_0, W_0, Z_0 hingegen

97) *J. Kramer,* Die genäherte absolute Bewegung des Planet. (108) Hecuba. Inaug.-Diss. Berlin, Göttingen 1902, Göttingen Ges. Wiss. Neue Folge (2) 2 (1901) und (5) 3 (1907).

98) *H. Buchholz,* Wien. Denkschr. 72 (1902) und 77 (1905).

99) *O. Backlund,* St. Pét., mém. 7. Reihe (38) 11 (1892) und 8. Reihe (6) 10 (1898).

100) *P. S. Laplace,* Traité de méc. cél. 4 (1805), p. 5–82 = Oeuvres 4, p. 1–94; Paris hist. (2) mém. (1788/9) = Oeuvres 11 p. 309–473.

nicht. Die Integration, welche Backlund mit einigen Vereinfachungen nach Gyldéns Muster bewerkstelligt, wird durch das Vorkommen der Größen R_0, W_0, Z_0 ein wenig kompliziert, indem die Annäherungen teilweise nur nach Potenzen der Exzentrizitäten und Neigungen fortschreiten.

Die Methode ist von Backlund für die kleinen Planeten des $\frac{1}{2}$-Typus spezieller entwickelt und bezweckt zunächst nur eine angenäherte Lösung. Hilfstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten hat *A. Iwanow*[101]) gegeben.

41. Die Jupitergruppe. Eine allgemeine Theorie dieser erst nach 1906 entdeckten Planetengruppe ist noch nicht gegeben. Da ihre mittleren Abstände von der Sonne nahe gleich demjenigen Jupiters sind, kann die gewöhnliche Entwicklung der Störungsfunktion nicht angewandt werden. Da aber diese Planeten seit ihrer Entdeckung in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckspunkte verblieben, konnte man die Untersuchungen über die Bewegungen kleiner Massen in der Nähe dieser Punkte anwenden (siehe VI2, 12, Nr. 6, *Whittaker*). Die Störungsfunktion entwickelt man nach den Potenzen des Abstands der Planeten vom Dreieckspunkt. *F. J. Linders*[102]) bestimmte in erster Annäherung die Variationen der Delaunayschen kanonischen Elemente, wobei die Jupiterbahn kreisförmig vorausgesetzt wird. *W. W. Heinrich*[103]) berücksichtigt noch die Jupiterexzentrizität.

42. Angenäherte Störungen. Um die kleinen Planeten wieder zu erkennen oder ihre Örter für die Beobachtungen bis auf einige Bogenminuten genau zu berechnen, braucht man nur angenäherte Lösungen. Eine solche wird z. B. erhalten, wenn man in einer genauen Theorie mit genau bestimmten Konstanten nur die größten Glieder beibehält. In dieser Weise würde man eine für lange Zeiten geltende genäherte Lösung erhalten. Gewöhnlich entwickelt man indessen nur die Hauptglieder der Lösung und fordert nur eine ziemlich kurze Darstellungszeit (höchstens etwa 100 Jahre). Um die Konstanten aus den beobachteten Örtern einigermaßen genau zu erhalten muß man den Einfluß der Vernachlässigungen in der Lösung durch Vermehrung und gleichmäßige Ausdehnung der Beobachtungen über möglichst lange Zeiten abzuschwächen suchen, was indessen nicht immer gelingt, da die Fehler oft systematisch wirken.

---

101) *A. Iwanow*, St. Pét. bull. (10) 1 (1899); (13) 3 (1900).

102) *F. J. Linders*, Stockholm K. Vet. Akad. Arkiv (4) 20 (1908) = Meddelanden från Lunds astr. Obs. 35.

103) *W. W. Heinrich*, Prag. Ges. Wiss. Ber. (Febr. 1913).

Die in Nr. **39** und **40** genannten Methoden sind auch speziell für solche angenäherte Lösungen ausgearbeitet worden. Denselben Zweck hat auch die von *K. Bohlin*[104]) ausgebildete Methode der gruppenweisen Berechnung der Störungen. Er wendet die Hansensche Methode bis auf die Entwicklung der Störungsfunktion (vgl. VI 2, 13, Nr. **26**, *v. Zeipel*) und die Integration an und gibt speziell die für den Typus $\frac{1}{3}$ nötigen Formeln und numerischen Tafeln. In der Entwicklung der Störungsfunktion und derjenigen ihrer Ableitungen führt er anstatt der mittleren Anomalie des störenden Körpers, welche wie bei *Hansen* in der Form

$$M' = n't + c' + n'\delta\zeta'$$

geschrieben sei, die verhältnismäßig langsam veränderliche Größe

$$\theta = \mu_0(E - e\sin E) - M'$$

ein, wobei μ_0 eine einfache Zahl, wie $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist, die nahe dem Verhältnis $\mu = \frac{n'}{n}$ der beiden mittleren Bewegungen liegt, so daß

$$w = 1 - \frac{\mu}{\mu_0}$$

für die betreffende Planetengruppe eine kleine Größe ist. Diese Entwicklungen sind von der Form

$$\sum K \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{iE - i'\mu_0 E + i'\theta + L\right\},$$

wo L und K Konstanten bezeichnen, von denen die letzteren nach Potenzen von w entwickelt sind. Indem als unabhängige Veränderliche die gestörte exzentrische Anomalie E anstatt der in Nr. **28** eingeführten ungestörten Anomalie ε angewandt wird, werden die Differentialgleichungen die den Formeln (96) ganz analogen Formen

$$\frac{dW}{dE} = T, \quad \frac{dR}{dE} = U$$

annehmen. T und U sind in *Fourier*schen Reihen von der Form

$$\sum K \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{iE - i'\mu_0 E + i'\theta + \lambda\eta_0 + L\right\}_E$$

entwickelt, wo η_0 die in den Gleichungen (81) vorkommende Größe ist und λ nur die Werte -1, 0 und $+1$ annimmt. Die Größe W wird daher in der Form

$$W = x + y\cos\eta_0 + z\sin\eta_0$$

erhalten, wo x, y, z von η_0 unabhängig sind.

Nach (81) und (82) findet man dann, daß

$$\Xi = x + ey$$

104) *K. Bohlin*, Nova Acta Reg. soc. sc. Upsaliensis (3) 17 (1896); Stockholm Obs. Jakttagelser etc. 7 (1902).

ist, und da

$$\overline{W} = \Big|_{\eta_0 = E} W = x + y\cos E + z\sin E$$

ist, kann ν nach der Gleichung (79) unmittelbar berechnet werden. u folgt am einfachsten aus der Größe R nach der der Gleichung (88) analogen Formel

$$\bar{u} = \overline{R} = \Big|_{\eta_0 = E} R.$$

Die Störung der mittleren Anomalie $n\delta\zeta$ folgert *Bohlin* aus der Gleichung

$$\theta = \mu_0(w\, n\zeta + (1-w)n\,\delta\zeta) - n'\delta\zeta' + \mu c - c',$$

nachdem θ selbst aus der durch Anwendung der Gleichungen (68) und (76b) abgeleiteten Gleichung

$$\frac{d\theta}{dE} = \mu_0\left\{w + (1-w)\frac{\overline{W}+\nu^2}{1+\overline{W}}\right\}(1 - e\cos E) - \frac{dn'\,\delta\zeta'}{dE} = H$$

bestimmt ist.

Bohlin spaltet nun θ in zwei Teile

$$\theta = \theta_0 + \theta_1$$

und entwickelt alle θ enthaltenden Glieder nach Potenzen von θ_1. Bei den Annäherungen wird H ebenso nach und nach in zwei Teile

$$H = H_\theta + H_E$$

zerlegt, wobei in H_θ alle Glieder von H aufgenommen werden, die θ_0 aber nicht E enthalten. θ_0 und θ_1 bestimmen sich dann aus den Gleichungen

$$\frac{d\theta_0}{dE} = H_\theta, \quad \frac{d\theta_1}{dE} = H_E.$$

Charakteristisch für die Methode von *Bohlin* ist, daß W und R als Funktionen der beiden Veränderlichen θ_0 und E vermittels der partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial E} + H_\theta\frac{\partial W}{\partial \theta_0} = T = T_0 + T_1 w + T_2 w^2 + \cdots, \\ &\frac{\partial R}{\partial E} + H_\theta\frac{\partial W}{\partial \theta_0} = U = U_0 + U_1 w + U_2 w^2 + \cdots \end{aligned} \tag{193}$$

bestimmt werden, ohne daß man θ_0 als Funktion von E zu kennen braucht. Um die Integration auszuführen, spaltet er W und R in derselben Weise wie H in zwei Teile

$$W = W_\theta + W_E, \quad R = R_\theta + R_E$$

und setzt die Glieder der beiden Seiten der Gleichungen (193), welche nur θ_0 enthalten, für sich gleich und ebenso die übrigen Glieder für sich. Wird weiter in den solcherweise erhaltenen Gleichungen für

jede Größe eine vorausgesetzte Entwicklung nach Potenzen von w, z. B.

$$W_\theta = W_{\theta,0} + W_{\theta,1} w + W_{\theta,2} w^2 + \cdots,$$

eingeführt und die Glieder gleichgesetzt, welche dieselbe Potenz von w enthalten, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus welchen die einzelnen Teile von W und R und damit diese Größen selbst leicht zu erhalten sind.

Da μ_0 eine rationale Zahl ist, so werden die Integrationsdivisoren der periodischen Glieder $i - i'\mu_0$ nicht unendlich klein, wohl aber Null, woraus folgt, daß E in den Störungsausdrücken außerhalb der Zeichen sinus und cosinus vorkommt. *H. Poincaré*[105]), der beinahe gleichzeitig mit *Bohlin* dieselbe Integrationsmethode fand, zeigt, daß die erhaltenen Reihen nicht konvergieren. Wie die von *Bohlin*[104]) und anderen gemachten Vergleichungen mit anderweitig abgeleiteten Störungsausdrücken zeigen, liefert die *Bohlin*sche Methode indessen recht gute Darstellungen der Störungen, wenigstens wenn man die ersten Potenzen von w berücksichtigt.

Die speziellen Formeln und Tafeln für den $\frac{1}{2}$-Typus sind von *H. v. Zeipel*[106]), für den $\frac{2}{5}$-Typus von *D. T. Wilson*[107]) gegeben. *v. Zeipel* macht dabei einige Abänderungen. Er spaltet θ nicht, sondern behält es als Argument bei. Indem W und R in der Weise gespalten werden, daß $\frac{\partial W_E}{\partial E}$ und $\frac{\partial R_E}{\partial E}$ keine von E unabhängigen Glieder enthalten, erzielt er, daß E aus den Argumenten nicht heraustritt. Er vermeidet eine konsequente Entwicklung nach Potenzen der Masse m', setzt vielmehr xw für w, $x^2 m'$ für m' und entwickelt die verschiedenen Größen durchgehend nach Potenzen der (zum Schluß wieder gleich 1 zu setzenden) Größe x. Ein Glied, welches x^q als Faktor hat, betrachtet er als vom Range q.

Um die von den langsam veränderlichen Gliedern herrührenden Schwierigkeiten zu vermindern, sollte man bei der Ausarbeitung der Methoden auf die Länge der Zeit, innerhalb deren die Lösung gelten soll, mehr Rücksicht nehmen, als bisher geschehen ist. Die auf die Beherrschung langer Zeiten abzielenden Methoden sind sicherlich nicht die besten für kurze Zeiten.

105) *H. Poincaré*, Les méth. nouv. de la méc. cél. II, p. 315—476, Paris 1893.
106) *H. v. Zeipel*, St. Pét., mém. 8 Série (12) 11 (1902).
107) *D. T. Wilson*, Stockholm Obs. Jakttagelser etc. (10) 1 (1912).

(Abgeschlossen im Februar 1915.)

VI 2. 16. DIE SATELLITEN.

Von

KURT LAVES

in Chikago (Ill.).

Inhaltsübersicht.

Einleitung: Überblick.

A. Die empirische Methode. 1610—1760.

1. Das Jupitersystem
2. Das Saturnsystem.

B. Die analytische Methode. 1760 bis zur Gegenwart.

3. Einführung in die *Lagrange-Laplace*sche Theorie der Galileischen Satelliten und Neuentdeckungen.
4. *Bessel*s Untersuchungen über das Saturnsystem.
5. Die Auffindung der Satelliten von Uranus, Neptun und Mars.
6. Die Störungen in einem Satellitensystem; Bezeichnungsweise.
7. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse des Hauptplaneten.
8. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse der Ringe.
9. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten
10. Die Störungsfunktion R.
11. Die säkularen Ungleichheiten der Knoten und Neigungen.
12. Die Integrale der Gleichungen (12) für die Spezialsysteme:
α) Das Jupitersystem: Die vier *Galilei*schen Satelliten.
β) Das Saturnsystem:
a) Japetus,
b) Titan und Rhea,
c) Hyperion,
d) Dione, Tethys, Enceladus und Mimas,
e) Phöbe und Themis.
γ) Die Satelliten des Mars, Uranus und Neptun.
13. Die säkularen und langperiodischen Ungleichheiten der Exzentrizitäten, der Längen der Perizentren und mittleren Längen,
α) Das Jupitersystem:
a) Die vier Galileischen Satelliten,
b) Die übrigen Satelliten.

β) Das Saturnsystem:
a) Japetus, Titan und Rhea; Phöbe und Themis,
b) Die Satellitenpaare, bei denen Librationsglieder auftreten:
Hyperion-Titan,
Enceladus-Dione,
Tethys-Mimas.
γ) Die übrigen Satellitensysteme.

14. Die kurzperiodischen und die von der Sonne herrührenden Ungleichheiten.

15. Die Bestimmung der Konstanten der Satellitensysteme.

Literatur.

Lehrbücher und Monographien.

Lehrbücher.

P. S. Laplace, Traité de Mécanique céleste, t. IV, Paris 1805 = Oeuvres 4 (1880), p. 1—190.

F. Tisserand, Traité de Mécanique céleste, Paris 1896, t. IV, chp. 1—9.

Das Jupitersystem.

J. Bailly, Essai sur la théorie des satellites de Jupiter, Paris 1766.

J. Lagrange, Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter. Oeuvres VI, p. 67 ff.

J. Delambre, Tables des satellites de Jupiter. Conn. des temps pour 1791 = Lalande Astr. I (1792), p. 236.

M. Cl. de Damoiseau, Tables écliptiques des satellites de Jupiter. Paris Bur. Long. tabl. astr. V (1836), und deren Fortsetzungen von *D. P. Todd*: A continuation of *de Damoiseaus* tables of the satellites of Jupiter. Wash. Americ. Bureau of Navig. 1876 (for 1880—1900), und *L. Pottier,* Par. Bull. astr. 13 (1896), p. 67 u. 107 (für 1900—1920).

C. L. Souillart, Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter I. Lond. Astr. Soc. Mem. 45 (1879).

— Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter II. Paris Mém. 30 (1887).

A. Marth, Formules for positions of satellites and correction of elements. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 47 (1887), p. 333.

— Data for computing the positions of satellites of Jupiter with Tables of the inequalities. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 51 (1891), p. 505.

W. de Sitter, Discussion of Heliometer observations of Jupiters satellites. Groningen (Dissertation) 1901.

— Determination of inclin. and nodes of satellites of Jupiter. Cape obs. ann. XII. Part 3 (1906).

— Libration of the 3 inner satellites of Jupiter. Groningen Laboratory Nr. 17 (1907).

— On the masses and elements of Jupiters satellites and the mass of the system. Amsterdam Akad. 10 (1908).

B. Cookson, Determination of mass of Jupiter and orbits of satellites. Cape obs. ann. XII, Part. 2 (1906).

— Determination of the elements of the orbits of Jupiters satellites. Cape obs. ann. XII, Part. 4 (1907).

R. A. Sampson, A discussion of the eclipses of Jupiters satellites 1878—1893. Harvard obs. ann. 52, Part 2 (1910).
— Tables of the 4 great satellites of Jupiter. Durham obs., 1910, p. 1—299.
F. Cohn, Bestimmung der Bahnelemente des V. Jupitermondes. Astr. Nachr. 142 (1897), p. 289.
H. Struve, Bestimmung der Säkularbewegung des V. Jupitermondes. Berlin Ber. 1906, p. 790.
A. Wilkens, Über die Säkulargleichungen der vier helleren Jupitermonde. Astr. Nachr. 201 (1915), p. 85.

Das Saturnsystem.

F. W. Bessel, Untersuchungen über den Planeten Saturn, seinen Ring und seine vier Trabanten, Königsbg. Archiv für Naturw. u. Math. I (1812), p. 113 = Abh. I, p. 110. Zitiert als *Bessel* I.
— Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnsatelliten, Astr. Nachr. 9 (1831), p. 1, samt erster Fortsetzung Astr. Nachr. 9. (1831), p. 381 u. zweiter Fortsetz. Astr. Nachr. 11 (1834), p. 17 = Abh. I, p. 127, 147 u. 148. Zitiert als *Bessel* II.
— Bestimmung der Lage und der Größe des Saturnringes und der Figur des Saturn, Astr. Nachr. 12 (1835), p. 153 = Abh. I, p. 150. Zitiert als *Bessel* III.
— Theorie des Saturnsystems, Astr. Nachr. 28 (1849), p. 1, 49, 321 u. 371 = Abh. I, p. 160. Zitiert als *Bessel* IV.
H. Struve, Beobachtungen der Saturnstrabanten am 15″ Refraktor. Poulkova obs. Suppl. 1 (1888).
— Beobachtungen am 30zölligen Refraktor. Poulkova obs. (2) XI (1898).
W. Meyer, Recherches sur Saturne, ses anneaux et ses satellites. Mém. Société phys. de Génève 27 (1881), und Le système de Saturne, ibid. 30 (1884). Zitiert als *Meyer* (Génève).
K. Bohlin, Sur les éléments de l'orbite de Téthys. Acad. des Sciences de Suède (1885).
A. Hall, The six inner satellites of Saturn. Wash. obs. 1883, App. 1 (1886).
— The orbit of Japetus. Wash. obs. 1882, App. 1 (1885).
H. Struve, Neue Bestimmung der Libration von Mimas und Tethys. Astr. Nachr. 162 (1903), p. 325.
F. Tisserand, Sur un cas remarquable du problème des perturbations. Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 425.
— Sur les mouvements des apsides des satellites de Saturn. Ann. Toulouse 2 (1886).
— Sur le déplacement séculaire du plane de Japetus. Ann. Toulouse 2 (1886).
S. Newcomb, On the motion of Hyperion (a new case in the celestial mechanic). Wash. Astron. Pap. 3 (1884).
G. W. Hill, On the motion of Hyperion and the mas of Titan. Astron. Journal 8 (1888), p. 57.

Die Satellitensysteme von Mars, Uranus und Neptun.

H. Struve, Bestimmung der Abplattung und des Äquators von Mars. Astr. Nachr. 138 (1895), p. 217.
S. Newcomb, Discussion of observations of the sat. of Uranus and Neptune. Wash. obs. 1873, App. 1 (1875) = Wash. Astr. Pap. 1.
F. Tisserand, Déplacements séculaires de l'équateur d'une planète. Paris Bull. astr. 11 (1814), p. 337.
H. Struve, Beobachtungen des Neptuntrabanten am 30zölligen Refraktor. St. Pét. mém. 42 (1894), Nr. 4.

Einleitung.

Die Entwicklung der Satellitentheorie zerfällt der Zeit nach in zwei Abschnitte:

1. Die Zeit vor der Einführung des *Newton*schen Gravitationsgesetzes 1610—1760,
2. Die Zeit von 1760 bis zur Gegenwart.

Im ersten Abschnitt werden an der Hand der Finsternisbeobachtungen der vier *Galilei*schen Satelliten auf empirischem Wege die Hauptungleichheiten in der Länge bei der Bewegung dieser Satelliten aufgefunden. Die Schwierigkeit, die Ungleichheiten in der Breite zu erschließen, führt vorwiegend zum Aufgeben der empirischen Methode. Dieses geschieht etwa um die Mitte des 18. Jahrhunderts. Seit dem Eintreten von *Lagrange* und *Laplace* beherrscht die analytische Methode das Feld und gewinnt in der *Laplace*schen Satellitentheorie der vier *Galilei*schen Trabanten eine scheinbar endgültige und abschließende Darstellung.

Im Saturnsystem geben *Bessels* heliometrische Feinmessungen die Basis für seine grundlegende Theorie der Saturntrabanten. Wesentliche Weiterführungen der letzteren Theorie sind einmal in der *Newcomb*schen Theorie des Hyperion, und andrerseits in *H. Struves* systematischen Untersuchungen des Gesamtsystems zu sehen.

Die auf der *Laplace*schen Theorie aufgebauten Tafeln der Finsternisse von *Delambre* und *Damoiseau* bringen infolge schwerwiegender Inkonsistenzen die Forschung im Jupitersystem zu einer langjährigen Stagnation. Durch *Souillarts* Weiterführung der *Laplace*schen Theorie und *Marths* vielseitige Bemühungan und endlich durch die systematisch angestellten Feinmessungen von *Gill, Finlay, de Sitter, Cookson,* ferner *Pickering* und *Sampson* ist die Basis für eine spätere moderne Theorie der vier *Galilei*schen Trabanten geschaffen worden.

A. Die empirische Methode. 1610—1760.

1. Das Jupitersystem. Die vier ersten Trabanten des Jupiter wurden von *Galilei*[1]) am 7. Januar 1610, von *Simon Mayer*[2])[3]) unab-

---

Für die ältere Literatur vgl.: *Houzeau* et *Lancaster*: Bibliogr. générale de l'Astr., Bruxelles 1882. Vol. II: 1388—1406; *R. Grant,* History of Physical. Astr., London 1855, p. 76—96, u. *R. Wolf,* Handbuch der Astr., ihrer Geschichte u. Literatur, Bd. I u. II, Zürich 1890 u. 1892.

1) *Sidereus Nuntius,* Opere di *Galileo* 2, p. 5, engl. Ausgabe von *Carlos* 1880.

2) *Oudemans* et *Bosscha, Galilée* et *Marius,* Arch. neerl. Scienc. VIII (1903).

3) *J. Klug, S. Marius* aus Guggenhausen und *Galilei.* München Akad. Abh. 2 (1902), p. 385.

hängig davon am 8. Januar entdeckt. Aus den von *Galilei* noch ungenau bestimmten Umlaufszeiten und Distanzen leitete *Kepler* die Gültigkeit seines dritten Gesetzes für das Jupitersystem ab. 1675 entdeckte *Olaus Römer* aus den Verfinsterungen des I. Satelliten die endliche Fortpflanzungszeit des Lichtes. Die Bestimmung der geographischen Längen[4]) wurde durch die Beobachtung der Verfinsterungen des I. Satelliten wesentlich verbessert und dadurch die Aufmerksamkeit der Astronomen diesen Beobachtungen und ihren tabellarischen Vorausbestimmungen zugewendet. Solche Tabellen werden vor allen von *J. D. Cassini*[5]), *Bradley*[6]) und *Wargentin*[7]) veröffentlicht. Während *Cassini* nur beim I. Satelliten die Lichtgleichung ansetzt, weil die unregelmäßigen Bewegungen der andern Trabanten nicht dadurch behoben zu werden schienen, wird bei den Tafeln von *Bradley* und *Wargentin* sowohl auf die Lichtgleichung Rücksicht genommen, wie auch schon die große Ungleichheit von 437 Tagen in Rechnung gestellt wird. Dieser große Fortschritt wird gleichzeitig und unabhängig von beiden Forschern erreicht, doch gebührt *Wargentin*, der Zeit der Publikation nach, der Vorrang. Spätere Neuausgaben der *Wargentin*schen Tafeln stellen zwei langperiodische Ungleichheiten beim III. Satelliten in die Berechnungen ein. Die starke Exzentrizität der Bahn des IV. Satelliten wurde von *Bradley* zuerst klar erkannt, und von *Maraldi II*[8]) wird der Wert seiner Mittelpunktsgleichung schon sehr genau angegeben. Damit fiel endlich das eine der *Cassini*schen Axiome, daß alle Trabantenbahnen Kreisgestalt haben. Das andere Axiom, wonach die Bahnen gleiche und konstante Neigung im Raume haben sollten, wird ebenfalls als durch die Beobachtungen nicht bestätigt erkannt. Die Neigung des IV. Satelliten[9]) zur Jupiterbahn ist kleiner als diejenige der anderen Satellitenbahnen; bei scheinbarer konstanter Neigung zur Jupiterbahn bewegt sich der Knoten der Bahn in direkter Richtung auf der Jupiterbahn. Zu dieser wichtigen Erkenntnis trat die andere, daß die Neigungen der

4) *J. D. Reuß*, Repert. commentationum a societatibus literariis editarum. Göttingen 1804, tom. 5 (Astron.), p. 258.

5) *J. D. Cassini*, Comparaison des satellites de Jupiter et de Saturne. Paris hist. 1730.

6) *J. Bradley*, Indication de la période de 437 jours des trois premiers satellites de Jupiter, Lond. Phil. Trans. 1726.

7) *P. W. Wargentin*, Tabulae pro calculandis eclipsibus satellitum Jovis. Acta Upsal. 1741.

8) *J. D. Maraldi*, Vgl. Artikel in Paris hist. (2) mém. 1 und 2 von 1732 an.

9) —, Mouvement des noeuds du 4ième satellite. Paris hist. (2) mém. 1758.

drei innern Satellitenbahnen variabel sind und nach *Maraldi*[10]) durch die Annahme einer Libration des Knotens um eine mittlere Lage dargestellt werden. Die Periode dieser Librationen bei den einzelnen Satelliten ist verschieden; sie wächst mit dem Abstande vom Zentralkörper. Diese allgemeinen Andeutungen werden genügen, um anzudeuten, wie außerordentlich erfolgreich die heuristische Methode bei der Diskussion der zahlreichen und relativ sehr genauen Verfinsterungsbeobachtungen gewesen ist. Trotzdem *Bradley*, durchaus klarblickend, die endgültige Aufklärung nur auf der Basis des *Newton*schen Grundgesetzes schon um 1745 voraussagt, bedarf es doch noch einer Reihe wichtiger Vorarbeiten, bis hierfür der Boden reif ist. Dahin kann man *Clairauts* wichtige Arbeiten über die Mondbewegung[11]) und die Gestalt der Erde[12]), ferner *Eulers*[13]) Untersuchung über die Apsidenbewegung eines Satelliten rechnen.

2. Das Saturnsystem. Durch *Galileis*[14]) Entdeckung der unregelmäßigen Gestalt des Saturn war die Anregung geboten, diesen Planeten intensiver mit den neugeschaffenen optischen Mitteln zu beobachten. Die Natur des Ringsystems wurde durch *Huygens*[15]) scharfsinnige Erklärung „annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato" erschlossen. Das hiernach vorausgesagte Verschwinden der Ringe und ihre Wiedererscheinung wurde durch die Beobachtung bestätigt, und eine erste approximative Bestimmung der Neigung der Ringebene zur Ekliptik ermöglicht. Die Entdeckung des größten der Saturnsatelliten, Titan, durch *Huygens*[16]) fällt in das Jahr 1655, in dem auch das Verschwinden der Ringe eintrat. In den Jahren von 1671 bis 1684 gelang es *Cassini I*, vier weitere Trabanten zu entdecken, wovon der als zweiter entdeckte Japetus in nahezu dreifachem Abstande Saturn—Titan erst in 79 Tagen den Zentralkörper umkreist. Die drei andern Satelliten sind Rhea, Dione und Tethys, in den Abständen 9, 6 und 5, wobei der Radius des Saturnkörpers als Einheit genommen ist. Ein volles Jahrhundert sollte verstreichen, ehe die Vervollkommnung der astronomischen Instrumente weitere Neu-

10) *J. D. Maraldi,* Variation de l'inclinaison et libration des noeuds du second satellite. Paris hist. (2) mém. 1768.

11) *Clairaut,* L'orbite de la Lune. Paris hist. (2) mém. 1743, p. 17, u. 1748 p. 421.

12) *Clairaut,* Nouvelle théorie de la figure de la Terre. Paris 1743.

13) *Euler,* Du mouvement des apsides des satellites de Jupiter. Berl. hist. 1773, p. 311.

14) *Galileo,* Opere T. 2; édit. Padua.

15) *Huygens,* Systema Saturnium. Hagae 1659.

16) *Huygens,* De Saturni luna observatio nova. Hagae 1656.

entdeckungen möglich machte. Die in dieser Zeit angestellten sehr spärlichen Beobachtungen des Durchgangs durch die Ringebene sind von *Bessel*[17])[18]) zusammengestellt und diskutiert, sowie auch alle mit Bezug auf die Satelliten gemachten Beobachtungen.

B. Die analytische Methode. 1760 bis zur Gegenwart.

3. Einführung in die Lagrange-Laplacesche Theorie der Galileischen Satelliten und Neuentdeckungen. Der erste Schritt zur Einführung des *Newton*schen Gravitationsgesetzes in die Satellitentheorie geschah durch *Newton*[19]) selbst, der die Bewegung der Bahnebene des IV. Satelliten auf der Jupiterbahn durch die störende Wirkung der Sonne zu erklären suchte. Hierbei ergab sich ihm aber eine retrograde Bewegung statt der durch die Beobachtung erwiesenen direkten. Der Grund für diese Differenz lag, wie sich erst viel später herausstellte, in der Vernachlässigung der störenden Wirkungen des III. Satelliten und der Abplattung. Der nächste Versuch in dieser Richtung war *Baillys*[20])[21])[22]) Übertragung der *Clairaut*schen Mondtheorie auf die Jupitersatelliten. Der Erfolg seiner Arbeiten war, daß er die große Ungleichheit von 437 Tagen wirklich analytisch darstellte und durch geschickte Kombination die Masse des II. Satelliten bestimmte. Dem spezifischen Charakter des Problems der Jupitersatelliten war *Bailly* aber noch nicht nahe gekommen, erst *Lagrange* war dieses vorbehalten. *Lagrange*[23]) gibt in seiner Preisarbeit die Differentialgleichungen der Bewegungen der Satelliten unter Berücksichtigung der gegenseitigen Anziehungen, der Attraktion der ellipsoidischen Jupitermasse und der Sonnenanziehung. Indem er diese Gleichungen zunächst unter Vernachlässigung der Exzentrizitäten und Neigungen integriert, kommt er auf die Ungleichheit von 437 Tagen bei den Verfinsterungen der drei innern Satelliten. Bei der Berücksichtigung der Exzentrizitäten und Neigungen stößt er auf die nämliche Schwierigkeit, die *Euler* und *Lagrange* bei der Theorie von

17) *F. W. Bessel* III.

18) *F. W. Bessel* II.

19) *Newton,* Principia, lib. III prop. 23.

20) *Bailly,* Essai sur la théorie des satellites de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1766.

21) *Bailly,* La cause de la variation de l'inclinaison de l'orbite du second satellite de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1765.

22) *Bailly,* Mouvement des noeuds et variation de l'inclinaison des satellites de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1766.

23) *Lagrange,* Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter. Turin Mel. 3 (1766) = Oeuvr. 6, p. 67.

Jupiter und Saturn erfahren hatten. *Lagrange* verfährt hier ähnlich, wie er es dort getan hat. Er erhält so für jeden Satelliten vier Mittelpunktsgleichungen und vier Breitengleichungen. Diese letztern denkt er sich geometrisch nachgebildet durch vier Ebenen, wovon sich die erste auf der Jupiterbahn bewegt, die zweite auf der ersten, die dritte auf der zweiten und die vierte, welche die Bahnebene des Satelliten selber ist, auf der dritten.

Indem aber *Lagrange* die Neigung zwischen Jupiteräquator und Jupiterbahnebene vernachlässigt, bringt er Glieder zum Verschwinden, die sehr charakteristisch bei den Breitenstörungen sind. Diese Lücke wird von *Laplace*[24])[25])[26]) ausgefüllt, der dann vor allem durch seine Untersuchungen, die sich an die Gleichungen $\mu_1 - 2\mu_2 + 3\mu_3 = 0$ und $l_1 - 2l_2 + 3l_3 = 180^0$ anschließen, die Gesamttheorie auf einen hohen Grad von Vollkommenheit erhebt. Seine Formeln werden von *Bouvard*[27]) numerisch berechnet, doch bleiben noch die 31 Unbekannten darin stehen: die Elemente und Massen der vier Satelliten, die Abplattung Jupiters und die Neigung und Knotenlänge seines Äquators. Die große Arbeit, die Werte dieser 31 Unbekannten aus mehr als 2000 Finsternisbeobachtungen zu bestimmen, wurde durch *Delambre*[28]) ausgeführt. Eine Revision seiner Tafeln der Finsternisse, die sich auf 6000 Beobachtungen stützte, erschien im Jahre 1804. Die Werte der *Delambre*schen Koeffizienten legte *Laplace* seiner Bestimmung der Massen und Elemente der Satelliten sowie der Bestimmung der Abplattung Jupiters zugrunde. Die 1836 erschienenen *Damoiseau*schen[29]) Tafeln sind nicht bloß eine Weiterführung der *Delambre*schen Tafeln, sondern suchen eine Verbesserung der Koeffizienten durch Hinzuziehung weiterer Beobachtungen zu geben. Dabei haben eine Reihe von Koeffizienten Änderungen erfahren, während andere ihre ursprünglichen Werte behielten. Da das Verfahren, nach welchem die Änderungen vorgenommen sind, von *Damoiseau* nicht angegeben ist, ist der Zweifel gerechtfertigt, ob alle

24) *Laplace,* Theorie des satellites de Jupiter. Paris hist. (2) mém. 1788—89.

25) *Laplace,* Mécanique céleste, t. 4, livre 8, chp. 1—16 (1805).

26) *Laplace,* Du mouvement des satellites de Jupiter notice historique. Méc. cél., t. 5, livre 16, chp. 5.

27) Zur Geschichte der Entwicklung der Theorie und der Tafeln der Jupitersatelliten vgl. *A. Souchon,* Traité d'astronomie pratique. Paris 1883. Introduction historique: tables du mouvement des satellites de Jupiter.

28) *Delambre,* Table des satellites de Jupiter. Conn. des temps pour 1791 = Lalande Astr. Paris I (1792), p. 236, und Corrections: Conn. des temps pour 1794.

29) *Damoiseau,* Tables écliptiques des satellites de Jupiter. Paris 1836, samt Fortsetzungen von *Todd* u. *Pottier.* Siehe Literatur.

Ungleichheiten durch ein und dasselbe Elementensystem dargestellt werden können. Das stellt aber den ganzen Wert der *Damoiseau*schen Tafeln in Frage. *Bessel*[37]), *Adams*[36]) und *Souillart*[31]) haben sich in diesem Sinne geäußert.

Von *Souillart*[30])[31]) wird die *Laplace*sche Theorie der *Galilei*schen Trabanten wesentlich weiterentwickelt, und *Marth*[32])[33])[34])[35]) veröffentlicht auf der Basis dieser neuen Theorie Tafeln für die Berechnung der Positionen der Trabanten, ohne die eine Benutzung der Beobachtungen für die Theorie unmöglich war. Durch *Marth* angeregt, werden von 1891 Heliometermessungen der Satelliten untereinander von *Gill* und *Finlay* vorgenommen, die durch photographische Aufnahmen ergänzt werden. *De Sitter*s[38])[39])[40])[41]) und *Cooksons*[42])[43]) Diskussionen dieser und ähnlicher Beobachtungen sowie solcher in Helsingfors und Pulkova[44]) ergeben zum ersten Male eine zuverlässige Bestimmung der Neigungen und Knoten der Satellitenbahnen sowie

30) *L. C. Souillart,* Théorie analytique des satellites de Jupiter I. Lond. Astr. Soc. Mem. 45 (1879).

31) *L. C. Souillart,* Théorie analytique II. Paris Mém. 30 (1887).

32) *A. Marth,* Researches on satellites. Astr. Nachr. 44 (1856), p. 113.

33) *A. Marth,* On the formulae for computing the apparent positions of a satellite. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 47 (1886), p. 333.

34) *A. Marth,* Data for computing the positions of satellites of Jupiter. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 51 (1891), p. 505, ferner regelmäßige Vorausberechnungen in den laufenden Nummern der Monthly Notices.

35) *A. Marth,* Observatory 1890, Aprilnummer: Über Mikrometermessungen im Jupitersystem.

36) *J. C. Adams,* Repetitions on some numerical calculies to the theory of Jupiter's satellites. Scient. Papers 2 (1875), p. 191.

37) *F. W. Bessel,* Bestimmung der Masse des Jupiter. Astr. Untersuch. 2 (1836), p. 25.

38) *W. de Sitter,* Discussion of Heliometer Observ. of Jupiter's satellite. Groningen 1901 = Cape obs. ann. XII, part 1.

39) *W. de Sitter,* Determination of the inclinations and nodes of satellites of Jupiter. Cape obs. ann. XII part 3 (1906).

40) *W. de Sitter,* Some points in the theory of Jupiter satellites. Amsterdam Akad. Proc. X (1907), p. 95.

41) *W. de Sitter,* Über die Libration der 3 großen Jupitersatelliten (holländisch.) Handl. Need. Nat. Geneesk Congress. X 1905, p. 124 = Astr. Lab. Grön. 17 (1907).

42) *B. Cookson,* Determination of the mass of Jupiter and orbits of satellites. Cape obs. ann. XII part 2 (1906).

43) *B. Cookson,* Determination of the elements of the orbits of Jupiter satellites. Cape obs. ann XII part 4 (1907).

44) *F. Renz,* Phot. Positionen der Jupitertrabanten. 1. und 2. Teil. St. Pét. Acad. mém. VIII (1902).

auch der Koeffizienten gewisser kurzperiodischer Ungleichheiten. *De Sitters* Ergebnisse werden im X. Band der Sitzungsberichte der Akademie von Amsterdam[40]) zusammengefaßt. — Parallel hiermit geht *Sampsons*[45])[47])[48]) Reduktion der photometrischen Beobachtungen der Jupitersatelliten am Harvard Observatorium, die von *E. Pickering* in systematischer Weise fast ein Vierteljahrhundert lang ausgeführt worden sind. Im Gegensatz zu der alten Beobachtungsmethode gewähren diese photometrischen Beobachtungen eine Genauigkeit wie die von Heliometermessungen.[49])[50]) *Sampsons*[46]) Tafeln beruhen lediglich auf dem Vergleich dieser Beobachtungen mit der Theorie von *Souillart.* Der von *de Sitter*[41]) gefundene Betrag von 0,158" in der Libration der drei innern Satelliten wird von *Sampson* nicht bestätigt, wie er auch beträchtlich in dem Werte der Dauer dieser Oszillation von *de Sitter* abweicht. Beachtenswert ist der von *de Sitter* geäußerte Wunsch nach einer den dynamischen Bedingungen mehr entsprechenden Theorie der drei inneren Satelliten, bei der der Jupiteräquator als Beziehungsebene benutzt wird. *Griffins*[51]) Arbeit kann voraussichtlich hierfür die Basis bilden. — 1892 wird der V. Satellit von *E. E. Barnard* auf der Licksternwarte aufgefunden. Elementenbestimmungen werden von *F. Cohn*[52]), *E. E. Dobbin*[53]) und *H. Struve*[54]) abgeleitet. Auf die starke jährliche Bewegung des Perijoviums wird zuerst von *Tisserand*[55])[56]), dann *Adams*[57]) und *Callandreau*[58]) hinge-

---

45) *R. A. Sampson,* A discussion of the eclipses of Jupiter satellites 1878—1893. Harv. obs. ann. 52 part 2 (1910), p. 143.

46) *R. A. Sampson,* Tables of the 4 great satellites of Jupiter. Durham Observat. (1910), p. 1.

47) *W. de Sitter, Sampson,* Controverse Bd. 24, 25 des Journal Observatory 1901 ff.

48) *R. T. A. Innes*, Professor *Sampsons* Tables of the satellites of Jupiter. Observatory 33 (1910), p. 478.

49) *A. Obrecht,* Étude sur les éclipses des satellites de Jupiter. Paris 1844.

50) *M. A. Cornu,* Études éxperimentales relatives à l'observations photometriques des satellites de Jupiter. Paris C. R. (1883), p. 1815.

51) *F. L. Griffin,* Periodic Orbits of k finite bodies, revolving about a relatively large central mass. Amer. Math. Soc. Trans. IX p. 1 (1908).

52) *F. Cohn,* Bestimmung der Bahnelemente des V. Jupitermondes. Astr. Nachr. 143 (1897), p. 289.

53) *E. E. Dobbin,* On the orbit of the V. satellite of Jupiter. Astr. Journ. 24 (1904), p. 83.

54) *H. Struve,* Bestimmung der Säkularbewegung des V. Jupitermondes. Berl. Ber. 1906, p. 790.

55) *F. Tisserand,* Sur le mouvement du Vième satellite de Jupiter. Paris C. R. 117 (1893), p. 1024.

wiesen und sie durch *Cohn* und *H. Struve* genauer aus den Beobachtungen hergeleitet. Der VI. und VII. Satellit werden von *Perrine* auf photographischem Wege 1905 und 1906 aufgefunden, *Melotte* in Greenwich findet auf gleiche Weise 1908 den VIII. Satelliten.[59])[60]) Die Neigung aller drei Satelliten zur Jupiterebene ist nahezu 30°, der VI. und VII. bewegen sich, wie es scheint, in derselben Ebene derart, daß sich ihre Bahnen schneiden; der VIII.[61]) in so großer Entfernung vom Planeten, daß die Stabilität[61a]) seiner Bahn zweifelhaft erscheint.

4. Bessels Untersuchungen über das Saturnsystem. Im Jahre 1789 entdeckte *W. Herschel* die beiden innersten Saturnsatelliten Mimas und Enceladus, 1848 fanden fast gleichzeitig *W. Bond* und *Lassell* den Satelliten Hyperion, und auf photographischem Wege gelang es *W. Pickering* 1890 und 1904 Phöbe und Themis zu entdecken.

Konjunktionsbeobachtungen der Satelliten mit Punkten des Planeten oder des Ringes sowie gelegentliche Beobachtungen der nur selten sich ereignenden Verfinsterungen oder Schattenvorübergänge bildeten bis auf *Bessel* das unzulängliche Material, auf das sich eine Theorie der Bewegungen der Satelliten hätte gründen lassen. In voller Erkenntnis dieser Tatsache beschränkte sich *Laplace*[62]) darauf, aus der Theorie die Erklärung für die vom Saturnäquator stark abweichende und variable Bahnlage des Japetus herzuleiten (vgl. Nr. 12 βa). *Bessels*[63]) mikrometrische und heliometrische Messungsreihen, die er bei noch unzureichenden Beobachtungsmitteln schon 1806 in Liliental begann und mit Unterbrechungen am Königsberger Heliometer bis zu seinem Ende fortsetzte, bildeten die Basis für seine

---

56) *F. Tisserand,* Sur excentricité de l'orbite du Vième satellite de Jupiter. Paris C. R. 119 (1894), p. 581.

57) *W. S. Adams,* The polar compression of Jupiter and the Vth satellite. Astr. Journ. 20 (1899), p. 133.

58) *O. Callandreau,* Sur l'anomalie du mouvement du périhelie du Vième satellite de Jupiter. Paris C. R. 130 (1900), p. 17.

59) VI., VII. und VIII. Trabant des Jupiters. Vgl. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 67—72 und Observatory 28—31.

60) *F. E. Ross,* Elemente des VII. Satelliten. Astr. Nachr. 174 (1907), p. 359.

61) *A. C. Crommelin,* The motion of Jupiter VIII satellite from 1908 to 1916. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 71, (1911) p. 50.

61a) *C. Kobb,* Sur un cas d'instabilité possible. Paris Bull. astr. 18 (1901), p. 219.

62) *Laplace,* Méc. céleste, t. IV, lib. 8, chp. 17.

63) *F. W. Bessel* I.

fundamentalen theoretischen Untersuchungen über das Saturnsystem. Aus den Heliometerbeobachtungen des Titan, die über alle vier Quadranten seiner Bahn sich erstreckten, in Verbindung mit überlieferten Konjunktionsbeobachtungen des 17. und 18. Jahrhunderts, gelang es *Bessel*, die Elemente dieser Bahn[18]) so erschöpfend zu bestimmen, daß auch die modernen Beobachtungen noch sicher genug durch diese Elemente dargestellt werden. Neigung und Knotenlänge der Ringebene[64])[17]), die bis dahin nur aus Beobachtungen des Verschwindens und Wiedererscheinens des Ringe bestimmt waren, wurden von *Bessel* aus direkten Heliometermessungen abgeleitet. Die Elongationsmessungen von Rhea, Titan und Japetus bestätigten die Bestimmung der Masse des Saturn, die vorher lediglich aus den Bahnstörungen, die Jupiter von Saturn erfährt, hergeleitet worden waren. Ferner ergab die Diskussion der älteren und neueren Beobachtungen des Verschwindens und Wiedererscheinens der Ringe einen wichtigen Schluß mit Bezug auf die Dicke der Ringe. Daß *Bessel* eine erschöpfende Bearbeitung des Saturnsystems vor Augen gehabt, etwa wie es *Laplace* beim Jupitersystem getan hat, geht einmal aus den leider unvollendet gebliebenen Untersuchungen über das Saturnsystem hervor[65]), dann aber auch aus den Relativmessungen der einzelnen Satelliten untereinander. Diese Beobachtungsmethode, die in der Folgezeit große Bedeutung gewonnen hat, ergab für die Ermittlung der Bahnelemente der anderen Satelliten, wenn sie so mit Titan durch Relativmessungen verbunden wurden, einen gleichen Grad der Genauigkeit wie bei diesem. — Die Beobachtungen von *Lassell, Marth, Bond, Jacob, Meyer*[66]), *A. Hall*[67])[68])[69]) und andern ergaben für die weitere Erschließung der Bewegungen im Saturnsystem wichtiges Beobachtungsmaterial. Jedoch sind es erst die langjährig fortgesetzten systematischen Mikrometermessungen der Satelliten untereinander sowie auch mit Bezug auf das Planetenzentrum, wie sie *H. Struve*[70])[71])[72])[73])

64) *F. W. Bessel,* Über die Neigung der Ebene des Saturnringes. Berl. astr. Jahrb. für 1829, p. 175 = Abh. I, p. 319.

65) *F. W. Bessel* IV. Vgl. dazu auch *Schumacher* (Herausgeber der Astr. Nachr.), Literatur in den Astr. Nachr. bis Band 60 auf p. 194, und *Houzeau Lancaster*, Bibliogr. astr. II, p. 1440—1740.

66) *W. Meyer,* Génève.

67) *A. Hall,* The six inner satellites of Saturn. Wash. obs. 1883, App. 1 (1886).

68) *A. Hall,* The orbit of Japetus. Wash. obs. 1882, App. 1 (1885).

69) *A. Hall,* Determination of the orbit of Titan. Yale Univers. Obs. 1889.

70) *H. Struve,* Bestimmung der Elemente der Saturntrabanten. Astr. Nachr. 111 (1895), p. 1 u. 17.

mit dem 15- und später mit dem 30-zölligen Refraktor zu Pulkova ausführte, durch deren Diskussion *Struve* unsere Kenntnis des Systems wesentlich vertiefte. Diesen Untersuchungen geht *Newcombs*[74]) wichtige Arbeit über das System Hyperion-Titan voraus, deren Resultate erst durch *A. Halls* Beobachtungsreihen mit dem 26-zölligen Refraktor zu Washington möglich gemacht wurden, und an die sich *Hill*[75]) und *O. Stone*[76]) anschließen.

5. Die Auffindung der Satelliten von Uranus, Neptun und Mars. *W. Herschel* entdeckte die beiden äußeren Uranussatelliten Titania und Oberon im Jahre 1787. 1851—52 fanden *Lassell* und *Marth* die zwei innern Ariel und Umbriel auf *Lassells* Sternwarte auf Malta. Die wichtigste Eigenschaft der Bahnen dieser Satelliten ist ihre Neigung von gegen 98° zur Ekliptik. — Neptuns Satellit wurde gleichfalls von *Lassell* entdeckt, 1846; *O. Struve, W. Bond* und *Newcomb*[77]) haben die Elemente der Bahn bestimmt. Die von *Marth* zuerst bemerkte Veränderung der Bahnlage des Satelliten wurde von *Tisserand* als die Störung erkannt, welche die Abplattung des Planeten auf den Satelliten ausübt. — Die Monde des Mars wurden 1877 von *A. Hall* in Washington entdeckt. Auffallend ist die schnelle Umlaufszeit des innern Satelliten Phobos, die etwa nur ein Drittel der Rotationsdauer des Planeten selbst ist, sowie die nahe Koinzidenz der Ebenen beider Satellitenbahnen mit der Äquatorealebene des Mars.

6. Die Störungen in einem Satellitensystem; Bezeichnungsweise. Um die Theorie der Satellitenstörungen in allgemeiner Form darzustellen, wird das Saturnsystem als der allgemeine Fall aufgefaßt. Darnach kann der Hauptplanet als ein konzentrisch geschichtetes Rotationsellipsoid angesehen werden, das von einem Ring enggeschichteter Massenpartikel umkreist wird, die sich alle nahezu in derselben Ebene bewegen. Diese Ringebene fällt nahezu mit der Äquatorebene des Planeten zusammen. Die Massen des Planeten, der Ringe

---

71) *H. Struve,* Beobachtungen der Saturntrabanten am 15″ Refr. Poulkova obs. Suppl. 1 (1888).

72) *H. Struve,* Beobachtungen am 30″ Refraktor. Poulkova obs. (2) XI (1898). Vgl. auch Astr. Nach. 123 (1889), p 251 und 162 (1903) p. 325.

73) *H. Struve,* Beobachtungen des Saturntrabanten Titan. Berlin Ber. 1908.

74) *S. Newcomb,* On the motion of Hyperion, a new case in the celestial mechanic. Wash. Astr. Pap. 3 (1884).

75) *G. W. Hill,* On the motion of Hyperion and the mass of Titan. Astr. Journ. 8 (1888), p. 57.

76) *O. Stone,* On the motion of Hyperion. Annals of Mathematics 3 (1887), p. 161, u. 4, (1888) p. 53.

77) *Houzeau* et *Lancaster:* Bibliographie astr. II, 1470—1740.

und einzelnen Satelliten seien mit m_A, m_R, m_j bezeichnet. Der Koordinatenanfang liege im Schwerpunkt von m_A, und die positiven Achsen der x, y, z weisen resp. nach dem Frühlingspunkt, Sommersolstitium und Nordpol der Ekliptik zur Zeit t. Die Bahnebene des Satelliten m_j ist zur xy-Ebene unter dem Winkel i_j geneigt, die Länge des aufsteigenden Knotens sei n_j; für Äquator und Ringe seien die entsprechenden Größen i_A, n_A, i_R, n_R. Mit Bezug auf die Äquatorealebene seien diese Größen resp. mit γ_j und ϑ_j und mit bezug auf die Bahn des störenden Körpers m_k mit γ_{jk} und ϑ_{jk} bezeichnet. Die *Kepler*sche Bewegung des Satelliten erleidet Störungen folgender Art:

1. Störungen, die von der ellipsoidischen Gestalt des Hauptplaneten,
2. Störungen, die von den Ringen,
3. Störungen, die von den gegenseitigen Anziehungen der Setelliten,
4. Störungen, die von der Sonne

herrühren. Diese Störungskräfte machen sich bemerkbar in zweierlei Hinsicht:

(1) Die Bahnebenen ändern ihre Lagen im Raume, und

(2) die Form der Bahnkurve und die Bewegung in derselben erleiden Veränderungen.

Die Diskussion von (1) bedingt als notwendiges Vorstudium die Untersuchung der rotierenden Bewegung des Hauptplaneten, insofern als die Lage und Neigung seiner Äquatorealebene mit in die Lösung eines Systems von simultanen Differentialgleichungen eingeht. Aus einer erschöpfenden Diskussion von (1) und (2) ergeben sich durch Vergleich mit den Beobachtungen Masse und Gestaltbestimmung des Hauptplaneten, der Ringe und ihrer Lagen im Raum sowie die sieben Elemente jedes einzelnen Satelliten.

7. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse des Hauptplaneten. Die *Poissons*schen Differentialgleichungen sind:

$$\text{(1)} \qquad \sin i_A \frac{dn_A}{dt} = \frac{1}{C_A p_A} \frac{\partial \Omega_A}{\partial i_A}, \qquad \frac{di_A}{dt} = -\frac{1}{C_A p_A} \frac{\partial \Omega_A}{\sin i_A \partial n_A}.$$

Die hier auftretende Größe Ω_A setzt sich zusammen aus den Beiträgen, welche die Sonne, die Satelliten und die Ringe liefern: $\Omega_A = \frac{1}{m_A} \Sigma m_i V_i$. Die Potentiale V_i werden je nach den speziellen Annahmen durch einen der drei folgenden Ausdrücke gegeben:

$$(2)\begin{cases}(a)\ V=\dfrac{m}{r}\Big[1-\dfrac{3\int\delta\, d\,(a^5e^2\sqrt{1-e^2})}{3\cdot5r^2\int\delta\, d\,(a^3\sqrt{1-e^2})}\,y_2 \\ \qquad\qquad +\dfrac{3\int\delta\cdot d\,(a^7e^4\sqrt{1-e^2})}{5\cdot7\cdot r^4\int\delta\cdot d\,(a^3\sqrt{1-e^2})}\,y_4\mp\cdots\Big] \\ (b)\ V=\dfrac{m}{r}\Big[1-\dfrac{3e^2\int\delta\, da^5}{3\cdot5r^2\int\delta\, da^3}\cdot y_2+\dfrac{3e^4\int\delta\, da^7}{5\cdot7r^4\int\delta\, da^3}\,y_4\mp\cdots\Big] \\ (c)\ V=\dfrac{m}{r}\Big[1-\dfrac{3e^2a^2}{3\cdot5r^2}\,y_2+\dfrac{3e^4a^4}{5\cdot7r^4}\,y_4\mp\cdots\Big],\end{cases}$$

wobei (a) das Potential eines aus elliptischen Schichten bestehenden Rotationsellipsoides,
(b) das Potential für den Fall, daß alle Schichten ähnlich sind,
(c) das Potential eines homogenen Rotationsellipsoides ist.

Hierbei bezeichnen δ die Dichte, a die halbe große Achse der elliptischen Schichten, und die y_i sind Kugelfunktionen einer Veränderlichen. Bei der Kleinheit von e und a/r sind diese Reihen äußerst konvergent, so daß ein Mitnehmen des y_4-Gliedes nur bei den innersten Satelliten nötig ist. Durch Wahl des Äquators als Bezugsebene und Einführung von γ und des Arguments der Breite, $u-\Gamma$, in die y-Funktionen (vgl. VI 2 13 § 30 und 14 § 20) wird:

$$(3)\qquad \Omega_A=-\frac{3}{4}k_A\Big\{\frac{m_s}{r_s^3}\sin^2\gamma_s[1-\cos2(u_s-\Gamma_s)]+\frac{m_R}{a_R^3}\sin^2\gamma_R$$
$$+\sum\nolimits_j\frac{m_j}{r_j^3}\sin^2\gamma_j[1-\cos2(u_j-\Gamma_j)]\Big\}$$

wo $k_A=\dfrac{\int\delta\, d\,(a^5e^2\sqrt{1-e^2})}{5\int\delta\, d\,(a^3\sqrt{1-e^2})}$. Setzt man $h_A=\dfrac{2k_A}{C_A}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\int\delta\, d\,(a^5e^2\sqrt{1-e^2})}{\int\delta\, d\,(a^5\sqrt{1-e^2})}$

so werden die Differentialgleichungen (1):

$$(4)\qquad \sin i_A\frac{dn_A}{dt}=-\frac{3}{8}\frac{h_A}{p_A}\frac{\partial R_A}{\delta i_A}\qquad \frac{di_A}{dt}=\frac{3}{8}\frac{h_A}{p_A}\frac{\partial R_A}{\sin i_A\, dn_A}$$

wo $-\frac{4}{3}\Omega_A=R_A$ gesetzt ist.

8. Die Differentialgleichungen der Bewegung der Drehungsachse der Ringe.[78]) Nach Analogie mit (4) sind diese Gleichungen:

$$(5)\qquad \frac{di_R}{dt}=\frac{3}{8}\frac{h_R}{p_R}\frac{\partial R_R}{\sin i_R\,\partial n_R}\qquad \sin i_R\frac{dn_R}{dt}=-\frac{3}{8}\frac{h_R\,\partial R_R}{p_R\partial i_R}$$

die R_R-Funktion ist genau wie die R_A-Funktion gebaut, hier ist $h_R=1$.

78) Vgl. 65) § 3, dann 72) sowie *Tisserand*: Sur le déplacement du plan de Japetus. Ann. Toulouse II (1886), ferner: Mouvement des apsides des satellites de Saturne, ebenda, und Un cas remarquable du problème des perturbations. Paris Bull. astr. 3 (1886), p. 425 u. 504.

9. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten.[65])

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2\dfrac{m+m_A+m_R}{r^3}x = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + k^2\dfrac{m+m_A+m_R}{r^3}y = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + k^2\dfrac{m+m_A+m_R}{r^3}z = \dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases}$$

$$R = V_A + V_R + m_s\left[\frac{1}{\Delta_s} - \frac{xx_s+yy_s+zz_s}{r_s^3}\right] + \sum m_j\left[\frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j+yy_j+zz_j}{r_j^3}\right]$$

Statt der Differentialgl. in x, y und z werden allgemein die in den Bahnelementen bei der Satellitentheorie benutzt. Dieselben sind:

$$(7)\quad \begin{cases} \sin i\,\dfrac{dn}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}}\dfrac{\partial R}{\partial i} \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}}\left\{\dfrac{\partial R}{\sin i\,\partial n} + \operatorname{tg} i/2\left(\dfrac{\partial R}{\partial w} + \dfrac{\partial R}{\partial E}\right)\right\} \\ \dfrac{da}{dt} = 2\sqrt{a}\dfrac{\partial R}{\partial E} \\ \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\dfrac{\partial R}{\partial w} - \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[1-\sqrt{1-e^2}\right]\dfrac{\partial R}{\partial E} \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\dfrac{\partial R}{\partial e} + \dfrac{\operatorname{tg} i/2}{\sqrt{a(1-e^2)}}\dfrac{\partial R}{\partial i} \\ \dfrac{dE}{dt} = -2\sqrt{a}\dfrac{\partial R}{\partial a} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[1-\sqrt{1-e^2}\right]\dfrac{\delta R}{\delta e} + \dfrac{\operatorname{tg} i/2}{\sqrt{a(1-e^2)}}\dfrac{\partial R}{\partial i}. \end{cases}$$

$$(8)\quad R = -\frac{m_A k_A}{2r^3}\left[1-\frac{3}{2}\sin^2\gamma_A[1-\cos 2(u-\Gamma_A)]\right] + \frac{m_R k_R}{2r^3}\left[1-\frac{3}{2}\sin^2\gamma_R[1-\cos 2(u-\Gamma_R)]\right] + m_s\left[\frac{1}{\Delta_s} - \frac{xx_s+yy_s+zz_s}{r_s^3}\right] + \sum m_j\left[\frac{1}{\Delta_j} - \frac{xx_j+yy_j+zz_j}{r_j^3}\right].$$

10. Die Störungsfunktion R.[70])[71])[72])[79]) R wird in bekannter Weise nach säkularen, langperiodischen und kurzperiodischen Gliedern entwickelt. Im Jupiter- und Saturnsystem treten zu den säkularen und langperiodischen Gliedern noch Librationsglieder. Dieses kann unter Umständen die Entwicklung von R bis zum Quadrat der störenden

79) *F. Tisserand,* Méc. cél. IV, p. 9.

Massen notwendig machen. Im allgemeinen sind die Bahnen der inneren Satelliten sehr wenig zur Äquatorialebene des Planeten geneigt, während die der äußeren beträchtliche Neigungen aufweisen. R wird deshalb für beide Fälle verschieden entwickelt werden. Die Sonne, der einzige störende Körper von außerhalb, der zu berücksichtigen ist, bewegt sich in einer scheinbaren Bahn, die bei Jupiter zur Äquatorealebene geringe, bei Mars, Saturn, Uranus und Neptun größere Neigung aufweist.

11. Die säkularen Ungleichheiten der Knoten und Neigungen. Um in den Reihenentwicklungen für R_A, R_R und R_S die säkularen Glieder abzusondern, denkt man sich R nach den mittleren Anomalien des störenden und gestörten Körpers entwickelt. Durch doppeltes Mittelbilden in bezug auf diese Variablen werden die säkularen Glieder erhalten. Es genügt, bis zu den Quadraten der Entwicklungsparameter vorzugehen. Dann enthält R die Variable E nicht mehr und ω nur in den quadratischen Gliedern. Vernachlässigt man diese, die auch in $\frac{di}{dt}$ quadratisch auftreten, so trennen sich die Gleichungen für $\frac{di}{dt}$ und $\frac{dn}{dt}$ gänzlich von den übrigen säkularen Gleichungen. Für ein System von n Satelliten bestehen dann $2n$ simultane Differentialgleichungen, zu denen noch vier weitere Differentialgleichungen für die säkularen Änderungen der Äquatoreal- und Ringebenen treten. Die Störungsfunktion nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$R = -C_A \sin^2 \gamma_A - C_s \sin^2 \gamma_s - \sum C_j \sin^2 \gamma_j, \tag{8a}$$

wo die C-Größen von den Massen der störenden Körper und den Elementen des gestörten und störenden Körpers abhängen.

Die $2n + 4$ Differentialgleichungen sind dann:

$$\left\{\begin{aligned}
\sin i_\lambda \frac{dn_\lambda}{dt} &= -\sum\nolimits_j K_{\lambda j} \sin \gamma_{\lambda j} \cos \gamma_{\lambda j} \cos \psi_{\lambda j} \\
\frac{di_\lambda}{dt} &= \sum\nolimits_j K_{\lambda j} \sin \gamma_{\lambda j} \cos \gamma_{\lambda j} \sin \psi_{\lambda j} \\
\sin i_A \frac{dn_A}{dt} &= -\sum\nolimits_j K_{Aj} \sin \gamma_{Aj} \cos \gamma_{Aj} \cos \psi_{Aj} \\
\frac{di_A}{dt} &= \sum\nolimits_j K_{Aj} \sin \gamma_{Aj} \cos \gamma_{Aj} \sin \psi_{Aj} \\
\sin i_R \frac{dn_R}{dt} &= -\sum\nolimits_j K_{Rj} \sin \gamma_{Rj} \cos \gamma_{Rj} \cos \psi_{Rj} \\
\frac{di_R}{dt} &= \sum\nolimits_j K_{Rj} \sin \gamma_{Rj} \cos \gamma_{Rj} \sin \psi_{Rj},
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

hier ist $\psi_{\lambda j}$ der Bogen der gestörten Bahn, der zwischen Ekliptik und störender Bahn liegt.

Beim Saturnsystem werden später Ring- und Äquatorebene als zusammenfallend angenommen werden, so daß sich bei allen Planeten die Säkularstörungen durch ein System von $2n + 2$ simultanen Differentialgleichungen bestimmen. Wenn die Elemente und Massen bekannt sind, werden durch Gleichungen (9) die Geschwindigkeiten der Pole der Satellitenbahnen für jede Zeit t gegeben, für welche die Elemente bekannt sind. — Durch die Integration der Gleichungen gelangen wir andererseits zur Kenntnis der Verbindungen, die zwischen den Satelliten in säkularer Hinsicht statthaben. Es ist hierzu vorteilhaft, neue Variablen, wie folgt, einzuführen:

$$(10)\qquad \begin{cases} x_j = \sin i_j \cos n_j \\ y_j = \sin i_j \sin n_j \\ z_j = \cos i_j \end{cases}$$

und

$$(11)\qquad \cos \gamma_{jk} = x_j x_k + y_j y_k + z_j z_k = \xi_{jk}.$$

Hierbei bezieht sich der Index j auf sämtliche Mitglieder des Systems inklusive der Sonne. Die Gleichungen nehmen die folgende Gestalt an:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_A}{dt} = [K_{As}\,\xi_{As}\,z_A + K_{AR}\,\xi_{AR}\,z_R + \sum(K_{Aj}\,\xi_{Aj}\,z_j)]\,y_A \\ \quad - [K_{RA}\,\xi_{RA}\,z_A]\,y_R - [K_{As}\,\xi_{As}\,z_A]\,y_s - [K_{A1}\,\xi_{A1}\,z_1]\,y_1 - [\;]\,y_2 \cdots \\ \dfrac{dx_R}{dt} = -[K_{RA}\,\xi_{RA}\,z_R]\,y_A + [K_{Rs}\,\xi_{Rs}\,z_R + K_{RA}\,\xi_{RA}\,z_A + \sum\cdot]\,y_R \\ \quad - [K_{Rs}\,\xi_{Rs}\,z_R]\,y_s - [K_{R1}\,\xi_{R1}\,z_1]\,y_1 \cdots \\ \dfrac{dx_\lambda}{dt} = -[K_{\lambda A}\,\xi_{\lambda A}\,z_\lambda]\,y_A + [K_{\lambda R}\,\xi_{\lambda R}\,z_\lambda]\,y_R + [\;]\,y_s \cdots \end{cases}$$

und ähnliche Gleichungen in den y.

In die Klammerausdrücke rechts gehen nur die z- und ξ-Koordinaten ein.

Wenn x, y und z bekannt sind, bestimmen diese Gleichungen sämtliche Variablen. Die Klammergrößen von (12) werden Konstante und die Gleichungen damit linear und integrierbar, wenn die Kosinus sämtlicher Neigungen, d. h. alle z und ξ, als unveränderlich angenommen werden. *Bessel*[37]) zeigt, wie dann die Integrale von (12) erhalten werden, bei der einen oder anderen der folgenden Annahmen über x und y:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x_s &= \sum h \sin [it + H] \\ y_s &= \sum h \cos [it + H] \end{aligned}$$

oder
$$\text{(b)} \quad x_s = ht \qquad y_s = h't.$$

Soweit bekannt, haben die allgemeinen Untersuchungen *Bessels*, die bis zu diesem Punkt von ihm gebracht sind, keine Fortsetzung gefunden. Die Anwendungen auf die speziellen Systeme sind für Jupiter schon vor *Bessel* durch *Laplace* gegeben worden. Weiterführungen hierfür sind von *Souillart* gegeben. Im Saturnsystem sind für Japetus durch *Laplace*, für die anderen Saturntrabanten teils durch *Bessel*, teils vor allen durch *H. Struve* die speziellen Untersuchungen geführt worden.

12. Die Integrale der Gleichungen (12) für die Spezialsysteme. *α) Das Jupitersystem. Die vier Galileischen Satelliten.* Da die Pole der inneren Satellitenbahnen und auch der der festen Ekliptik nahezu in der Tangentialebene des Poles des Äquators liegen, so können die x und y als ebene Polarkoordinaten dieser Pole mit Bezug auf einen Punkt Q angesehen werden. Nimmt man die vier *Galileis*chen Satelliten zusammen, so stellt sich ein System von zehn Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zur Lösung, das von *Laplace* bereits annähernd aufgelöst worden ist. *Souillart* hat unter Benutzung der genaueren *Stockwells*chen[80]) Werte der säkularen Störungen der Planeten die auf der rechten Seite auftretenden Störungsglieder berücksichtigt. Die Integrale werden dann in bekannter Weise erhalten. Die Differentialgleichungen sind, wie folgt:

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 + a_{1A}y_A = -K_1 y_s \\ \dfrac{dy_1}{dt} + a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 - a_{1A}x_A = +K_1 x_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_4}{dt} - a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 + a_{4A}y_A = -K_4 y_s \\ \dfrac{dy_4}{dt} + a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4 - a_{4A}x_A = +K_4 x_s \\ \dfrac{dx_A}{dt} - a_{A1}y_1 + a_{A2}y_2 + a_{A3}y_3 + a_{A4}y_4 + a_{AA}y_A = -K_A y_s \\ \dfrac{dy_A}{dt} + a_{A1}x_1 - a_{A2}x_2 - a_{A3}x_3 - a_{A4}x_4 - a_{AA}x_A = +K_A x_s \end{cases}$$

und bei Vernachlässigung der rechten Seiten werden die allgemeinen Integrale:

80) *Stockwell*, Secular variations of the elements of the 8 planets. Smithson. Contrib. to Knowledge 17 (1873).

$$(14)\quad \begin{cases} x_\lambda = N_{\lambda 1}\cos(b_1 t + c_1) + N_{\lambda 2}\cos(b_2 t + c_2) + N_{\lambda 3}\cos(b_3 t + c_3) \\ \quad + N_{\lambda 4}\cos(b_4 t + c_4) + N_{\lambda A}\cos(b_A t + c_A) \\ y_\lambda = N_{\lambda 1}\sin(b_1 t + c_1) + N_{\lambda 2}\sin(b_2 t + c_2) + N_{\lambda 3}\sin(b_3 t + c_3) \\ \quad + N_{\lambda 4}\sin(b_4 t + c_4) + N_{\lambda A}\sin(b_A t + c_A) \\ \qquad\qquad \lambda = 1, 2, 3, 4, A, \end{cases}$$

wo die b_i die Wurzeln der Fundamentalgleichung 5. Grades sind; die c_1, c_2, c_3, c_4, c_A und $N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{1A}$ sind die zehn willkürlichen Konstanten. Bei Berücksichtigung der störenden Glieder treten rechts *Fourier*sche Reihen von der Form $\sum S \overset{\sin}{\cos}(st - \sigma)$ auf, wo die Summation sich auf alle störenden Planeten bezieht. Nimmt man nun die zehn Größen $N_{1\lambda}\sin c_\lambda$ und $N_{1\lambda}\cos c_\lambda$ als Funktionen von t an, so ergeben sich z. B. für den I. Satelliten nach der Integration Zusatzglieder von der Form:

$$(15)\quad \begin{cases} \delta x_1 = \sum S\left(\frac{\mathfrak{N}_1}{s-b_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{s-b_2} + \cdots + \frac{\mathfrak{N}_A}{s-b_A}\right)\cos(st-\sigma) \\ \quad + \sum S\left(\frac{\mathfrak{N}_1}{b_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{b_2} + \cdots + \frac{\mathfrak{N}_A}{b_A}\right)\cos\sigma \\ \delta y_1 = \sum S\left(\frac{\mathfrak{N}_1}{s-b_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{s-b_2} + \cdots + \frac{\mathfrak{N}_A}{s-b_A}\right)\sin(st-\sigma) \\ \quad + \sum S\left(\frac{\mathfrak{N}_1}{b_1} + \cdots\right)\cos\sigma. \end{cases}$$

*Souillart*s numerische Berechnungen haben ergeben, daß die Zusatzglieder für den III. und IV. Satelliten eben merklich werden, während sie für die anderen ganz unmerklich bleiben. — Geht man zur Darstellung der Breiten der Satelliten über der augenblicklichen Jupiterbahn über, so setzen sich diese entsprechend dem Vorhergehenden aus vier resp. fünf Sinusgliedern zusammen; der Koeffizient des von der Abplattung herrührenden Gliedes ist dabei weitaus der bedeutendste. Dieses Glied charakterisiert bei jedem der Satelliten die „*Laplace*sche feste Ebene", die durch den gemeinsamen Durchschnitt der Äquator- und Jupiterbahnebene hindurchgeht. Die Neigungen dieser festen Ebenen zur Äquatorebene sind resp. 10″, 67″, 4′, 38″ und 24′ 12″, und die augenblicklichen Satellitenebenen entfernen sich periodisch nur wenig von diesen festen Ebenen.

β) *Das Saturnsystem.* a) *Japetus.* Schon *Laplace* hat die beträchtliche Bahnneigung des Japetus und die Bewegung seiner Knoten auf der Bahnebene auf den störenden Einfluß der Sonne zurückgeführt. Die beträchtliche Neigung der störenden Bahnen zur ge-

störten macht es erwünscht, auf die ursprüngliche Form der Differentialgleichungen zurückzugreifen:

$$(16)\quad \begin{cases} \sin i \dfrac{dn}{dt} = -K_s \sin\gamma_s \cos\gamma_s \cos\psi_s - K' \sin\gamma_A \cos\gamma_A \cos\psi_A \\ \dfrac{di}{dt} = -K_s \sin\gamma_s \cos\gamma_s \sin\psi_s - K' \sin\gamma_A \cos\gamma_A \sin\psi_A. \end{cases}$$

Hier ist $K' = K_A + \sum_j K_j$, wo in K_A die Wirkungen der Abplattung und der Ringe vereinigt gedacht sind. Die Integration dieser Gleichungen geschieht unter der Annahme, daß Äquator- und Planetenebene einen konstanten Winkel A miteinander bilden. Durch die Einführung der *Laplace*schen „festen" Ebene läßt sich die Integration in geschlossener Form vermittels elliptischer Funktionen ausführen. Die feste Ebene geht durch die Schnittlinie der Äquator- und Planetenebenen; ihre Neigung zu der ersteren ist gegeben durch:

$$\operatorname{tang} 2i_A = \frac{K_s \sin 2A}{K' + K_s \cos 2A}.$$

Bezeichnet man mit A, F und S die Pole der drei Ebenen auf der Einheitskugel, so geht der Pol J der Japetusbahn in einer sphärischen Ellipse um F derart, daß F den Ellipsenmittelpunkt bildet. *Tisserand*[78]) hat diese Bewegung näher diskutiert. Die Dauer der Oszillation von J um F ist um so größer, je kleiner K_s und K' sind. Aus einer Diskussion von älteren und neueren Beobachtungen, die etwa 100 Jahre voneinander getrennt sind, bestimmte *H. Struve* $\frac{K_s}{K'} = 0{,}750$ und die Periode zu etwa 3300 Jahren.

b) *Titan und Rhea. Bessel*[18]) hat die Bahn Titans einer mustergültigen Untersuchung unterzogen, sodaß sein Elementensystem noch jetzt die modernen Beobachtungen gut darstellt. Allein bei der Bestimmung von Neigung und Knotenlänge sind *H. Struves*[71])[72])[73]) neuere Untersuchungen als eine wesentliche Verbesserung aufzufassen. *Bessel* begnügte sich, den Einfluß von Abplattung und Ringen genähert anzusetzen, indem er die Bewegung in n als Bruchteil der durch die Sonne verursachten Bewegung des Knotens auf der Saturnbahn voraussetzte. Als eine Folge davon ergab sich eine äußerst geringe Veränderung der Bahnneigung, die auf lange Zeiträume hin unmerklich geblieben wäre. An Stelle dessen zeigen die neueren Beobachtungen mit Evidenz ein allmähliches Anwachsen der Neigung, welches durch die kombinierte Wirkung der Störungen von Sonne, Abplattung und Ringen und Japetus erklärt wird. Rheas Bahnlage wird in ganz ähnlicher Weise wie die von Titan beeinflußt, nur daß

der schon bei Titan geringe Einfluß von Japetus ganz vernachlässigt werden kann. Streng genommen ergibt sich für die beiden Satelliten das folgende System simultaner Differentialgleichungen:

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{dx_T}{dt} = -\beta_T\mu_T \cdot y_T + K_{TS}Y_S + K_{TJ}Y_J + \sum K_{Tj}y_j \\ \frac{dy_T}{dt} = +\beta_T\mu_T \cdot x_T - K_{TS}X_S - K_{TJ}X_J - \sum K_{Tj}x_j \\ \frac{dx_R}{dt} = -\beta_R\mu_R \cdot y_R + K_{RS}Y_S + K_{RJ}Y_J + \sum K_{Rj}y_j \\ \frac{dy_R}{dt} = +\beta_R\mu_R \cdot x_R - K_{RS}X_S - K_{RJ} \cdot X_J - \sum K_{Rj}x_j \end{cases}$$

wo $$\beta_\lambda\mu_\lambda = K_{jA} + \sum K_{\lambda j} \quad \text{und}$$

$$(18)\quad \begin{cases} x_\lambda = \sin i_\lambda \cdot (n_\lambda - n_A) & X_S = -\sin\gamma_S \cos\gamma_S \sin\psi_S \\ y_\lambda = i_\lambda - i_A & Y_S = -\sin\gamma_S \cos\gamma_S \cos\psi_S \\ & X_J = -\sin\gamma_J \cos\gamma_J \sin\psi_J \\ & Y_J = -\sin\gamma_J \cos\gamma_J \cos\psi_J. \end{cases}$$

Sowohl für die Sonne wie für Japetus werden die XY-Größen durch Reihen von der Form gegeben:

$$X = \sum c_\lambda (\sin b_\lambda - h_\lambda t)$$
$$Y = \sum c_\lambda (\cos b_\lambda - h_\lambda t)$$

gegeben. Statt die Gleichungen simultan zu integrieren, genügt es, die zwei Gleichungen für jeden Satelliten separat zu behandeln. Bei genügend eingeschränkter Zeit können auch die $X_S Y_S$ und $X_J Y_J$ als konstant angesetzt werden. Es ergibt sich so:

$$(19)\quad \begin{aligned} x_T &= c_T \sin(b_T - \beta_T\mu_T t) + \frac{K_{TS}}{\beta_T\mu_T} X_{TS} + \frac{K_{TJ}}{\beta_T\mu_T} X_J \\ &\quad + \frac{K_{TR}x_R}{\beta_T\mu_T - \beta_R\mu_R} \\ y_T &= c_T \cos(b_T - \beta_T\mu_T t) + \frac{K_{TS}}{\beta_T\mu_T} Y_{TS} + \frac{K_T}{\beta_T\mu_T} Y_J \\ &\quad + \frac{K_{TR}x_R}{\beta_T\mu_T - \beta_R\mu_R}; \end{aligned}$$

hier ist der Einfluß von Rhea ganz vernachlässigt worden. Bei Rhea kann von Japetus ganz abgesehen werden, während Titan infolge seiner Masse und größeren Nähe berücksichtigt ist. Man erhält so:

$$
\begin{aligned}
x_R &= c_R \sin(b_R - \beta_R \mu_R t) + \frac{K_{RS}}{\beta_R \mu_S} X_{SR} + \frac{K_{RT}}{\beta_R \mu_R} \cdot \frac{K}{\beta_T \mu_T} X_{SR} \\
&\quad + \frac{K_{TR}}{\beta_R \mu_R - \beta_T \mu_T} \cdot c_T \sin(b_T - \beta_T \mu_T t) \\
y_R &= c_R \cos(b_R - \beta_R \mu_R t) + \frac{K_{RS}}{\beta_R \mu_R} Y_{SR} + \frac{K_{RT}}{\beta_R \mu_R} \cdot \frac{K}{\beta_T \mu_T} Y_{ST} \\
&\quad + \frac{K_{RT}}{\beta_R \mu_R - \beta_T \mu_T} \cdot c_T \cos(b_T - \beta_T \mu_T t).
\end{aligned} \tag{20}
$$

c) *Das System Hyperion-Titan.* Bei Hyperions Bahn, die in größter Nähe von Titans Bahn ist, tritt zu den säkularen Wirkungen der Abplattung, der Sonne und des Titan noch das Librationsglied des Titan. Die Störungsfunktion, insofern nur die Störungen der Bahnebene in Betracht kommen, ist:

$$aR = \tfrac{1}{4}\gamma^2[P_0 + P_1 e \cos V + P_2 e^2 \cos 2V + \cdots],$$

wo $V = 4l_H - 3l_T - \varpi_H$ und die Zahlen P von den Entwicklungskoeffizienten B abhängen; γ ist die Neigung der Bahn des Hyperion zu der des Titan. Für die Säkularänderungen setzt man $V = 180$, $e = \text{const.}$, und es wird: $aR = -\tfrac{1}{4}\gamma^2 \cdot P$, wo $P = P_0 - P_1 e + P_2 e^2 \mp \cdots$. Die höheren Koeffizienten sind sehr kompliziert, und die Konvergenz der Reihe tritt erst in den höheren Gliedern ein und ist sehr langsam. Es ist daher besser, wie es *H. Struve* tut, P aus den Beobachtungen zu bestimmen. Setzt man wie früher:

$$
\begin{cases} x_H = \sin i_H \cdot (n_H - n_T) & x_T = \sin i_T \cdot (n_T - n_A) \\ y_H = i_H - i_T & y_T = i_T - i_A \end{cases} \tag{21}
$$

so wird

$$
\begin{cases} \dfrac{dx_H}{dt} = -(K_{HT} + K_{HA}) y_H + (K_{HS} Y_{HS} - K_{TS} Y_{TS}) \\ \qquad\qquad + (K_{TA} - K_{HA}) y_T \\ \dfrac{dy_H}{dt} = +(K_{HT} + K_{HA}) x_H - (K_{HS} X_{HS} - K_{TS} X_{TS}) \\ \qquad\qquad + (K_{TA} - K_{HA}) x_T; \end{cases} \tag{22}
$$

hierbei ist $K_{TH} = m_T \dfrac{\mu_H}{\sqrt{1 - e_H^2}} \cdot \dfrac{P}{2}$.

Die Gleichungen ergeben integriert:

$$
\begin{cases} x_H = c_H \sin(b_H - h_H t) + \dfrac{K_{AS} - K_{TS}}{h_H} X_{ST} \\ \qquad + (K_{AT} - K_{AH}) \left\{ \dfrac{\alpha_T}{h_H} + \dfrac{c_T}{h_H - h_T} \sin(b_T - h_T t) \right\} \\ y_H = c_H \cos(b_H - h_H t) + \dfrac{K_{AS} - K_{TS}}{h_H} Y_{ST} \\ \qquad + (K_{AT} - K_{AH}) \left\{ \dfrac{\alpha_T}{h_H} + \dfrac{c_T}{h_H - h_T} \cos(b_T - h_T t) \right\}. \end{cases} \tag{23}
$$

d) *Dione, Tethys, Enceladus und Mimas.* Der Einfluß von Titan, der bei Rhea Ungleichheiten von 2′ bis 4′ in x und y hervorbringt, geht bei Dione schon auf 0,3′ bis 0,4′ herab. Ungefähr von derselben Ordnung sind die säkularen Ungleichheiten, welche Tethys in der Bahnebene von Dione verursacht. Das von der Sonne abhängige Glied wird bei diesen vier Satelliten ganz unmerklich. Sofern demnach nur die säkularen Störungen in Frage kommen, kann man für die vier Satelliten schreiben:

$$(24) \qquad \begin{cases} x = c \sin (b - \beta \mu t) \\ y = c \cos (b - \beta \mu t). \end{cases}$$

Auf die Librationsglieder, die in jedem der Systeme ähnlich wie bei Hyperion-Titan auftreten, braucht bei den Störungen der Bahnebene nicht Rücksicht genommen zu werden, weil ihre Beträge unterhalb der Beobachtungsfehler verbleiben.

e) *Phöbe und Themis.* Die Bahnen von Themis und Phöbe sind noch zu kurze Zeit bekannt, als daß die Eigentümlichkeiten der Bewegung dieser Satelliten genügend überblickt werden könnten. Es scheint, daß sich Themis[82])[84]) in großer Nähe von Titan und Hyperion bewegt bei einer Bahnneigung von etwa 40° zur Ekliptik. Titans Einfluß auf die Bahnlage von Themis wird fraglos bedeutend sein, doch fehlen noch Angaben, die sich auf gesicherte Beobachtungen stützen. Phöbes[81])[83])[85])[86]) Bahnneigung zur Ekliptik ist gleichfalls bedeutend, bei der überaus großen Entfernung dieses Trabanten von Saturn wird die Sonnenstörung die Bahnlage noch viel stärker beeinflussen, als es bei Japetus der Fall ist. In der Tat bringt die Sonne nach den Berechnungen von *Roß* eine jährliche Knotenbewegung von 0,431° und eine Neigungsänderung von 0,02° zustande. *Roß* hat die Bahnstörungen nach *Delaunays* Methode ausgeführt.

γ) *Die Satelliten des Mars, Uranus und Neptun.* Für die Bahnlagen der Satelliten dieser Systeme gelten Gleichungen (16) Während

---

81) *W. H. Pickering,* The IXth satellite of Saturn, Harvard obs. ann. 53 (1904), Nr. 3.

82) *W. H. Pickering,* An investigation of the Xth satellite of Saturn, Harvard obs. ann. 61 (1908), p. 86.

83) *W. H. Pickering,* Phoebe, the IXth satellite, Harvard obs. ann. 53 (1904), Nr. 5.

84) *W. H. Pickering,* The XIth and Xth satellite of Saturn, Harvard obs. ann. 53 (1905), Nr. 9, p. 173.

85) *F. E. Roß,* Investigations on the orbit of Phoebe, Harvard obs. ann. 53 (1905), Nr. 6, p. 101.

86) *A. Hall,* The orbits of the satellites of Mars, Wash. obs. for 1875 (1878).

bei den Marssatelliten[86][87]) die Knotenbewegung infolge der Sonnenattraktion noch $0{,}1^0$ resp. $0{,}2^0$ beträgt, kann sie beim Uranus- und Neptunsystem ganz vernachlässigt werden. Die Pole der *Laplace*schen festen Ebenen liegen beim Marssystem nahe dem Pol des Planetenäquators — für Phobos in einem Abstand von weniger als 1′, bei Deimos etwa 1^0 —, und um diese Pole bewegen sich die Pole der Satellitenbahnen mit nahezu uniformer Geschwindigkeit. *Marth*[88]), *J. C. Adams*[89]), *Tisserand*[90]) und *Struve*[91])[92]) haben diese Bewegungen unter verschiedenen Annahmen über die Marsabplattung diskutiert.

Die Knotenbewegungen für die beiden innern Uranustrabanten[93])[94])[95])[96])[97]) können vor der Hand nur aus den noch sehr ungenau bestimmten Bewegungen des Periuraniums ermittelt werden. Für die beiden äußeren Trabanten fehlen noch alle Angaben.

Die von *Marth*[98]) zuerst wahrgenommene Bewegung des Knotens des Neptuntrabanten auf der Bahnebene des Planeten wurde von *Tisserand*[99]) und *Newcomb*[100]) zu einer Bestimmung der Lage des Planetenäquators benutzt. *H. Struve*[101]) hat aus fortlaufenden Beobachtungsreihen am 30-zölligen Pulkovaer Refraktor die Dauer der Periode zu 1734 sin γ Jahren berechnet, wobei γ noch nicht bestimmt ist.

87) *Harshman*, The orbit of Deimos, Astr. Journ. 14 (1894), p. 144.

88) *A. Marth*, On the satellites of Mars, Astr. Nachr. 95 (1879), p. 369.

89) *J. C. Adams*, On the ellipticity of Mars and its effect on the motion of the satellite, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 40 (1879), p. 10 = Scient. pap. I, p. 275.

90) *F. Tisserand*, Sur les satellites de Mars, Paris C. R. 84 (1879), p. 961.

91) *H. Struve*, Bestimmung der Abplattung und des Äquators des Mars, Astr. Nachr. 138 (1895), p. 217.

92) *H. Struve*, Über die Lage der Marsachse und die Konstanten im Marssystem, Berl. Ber. 1911, p. 1056.

93) *S. Newcomb*, The Uranian and Neptunian systems, Wash. obs. 1873, App. 1 (1875).

94) *O. Bergstrand*, Über die Bahn des ersten Uranussatelliten, Upsala Nova Acta 20 (1904).

95) *O. Bergstrand*, Sur le mouvement du 2ième satellite d'Uranus, Arkiv for Matem. 6 (1909), p. 6.

96) *O. Bergstrand*, Sur la figure et la masse d'Uranus, Paris C. R. 149 (1909), p. 333.

97) *A. Hall*, The orbits of Oberon and Titania, Wash. obs. 1885, App. 1.

98) *A. Marth*, Ephemeris of the satellite of Neptune, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 46 (1886), p. 504.

99) *Tisserand*, L'applatissement de Neptune, Paris C. R. 107 (1908), p. 804.

100) *S. Newcomb*, Note on the satellite of Neptun, Astr. Journ. 8 (1888), p. 143.

101) *H. Struve*, Beobachtungen des Neptuntrabanten am 30″ Refraktor. St. Pét. mém. 42 (1894), Nr. 4.

13. Die säkularen und langperiodischen Ungleichheiten der Exzentrizitäten, der Längen, der Perizentren und der mittleren Längen. *α) Das Jupitersystem. a) Die vier Galileischen Satelliten.* Die säkularen Ungleichheiten in den Exzentrizitäten und Perijovien müssen mit den langperiodischen Gliedern vereinigt werden, die infolge der nahen Kommensurabilitäten der drei innern Satelliten bedeutende Beträge annehmen. *Souillart* hat *Laplaces* Untersuchungen wesentlich hier ausgedehnt, indem er zu den Gliedern von den Argumenten $2l_2 - l_1 - \varpi_1$ die Zusatzglieder von den Argumenten $4l_2 - 2l_1 - 2\varpi_1$, $4l_2 - 2l_1 - \varpi_1 - \varpi_2$ und $4l_2 - 2l_1 - 2\varpi_2$ und entsprechende für den zweiten und dritten Trabanten hinzufügte. Die Differentialgleichungen für die *Lagrange*schen Koordinaten $h_j = e_j \sin \varpi_j$ und $k_j = e_j \cos \varpi_j$ haben die Form:

$$
(25)\quad
\begin{cases}
\dfrac{dh_1}{dt} - c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + c_{13}k_3 + c_{14}k_4 \\
\qquad = -\tfrac{1}{2}m_2\mu F\cos u + \alpha_{12}(k_1\cos 2u + h_1\sin 2u) \\
\qquad\qquad - \beta_{12}(k_2\cos 2u + h_2\sin 2u) \\
\dfrac{dk_1}{dt} + c_{11}h_1 - c_{12}h_2 - c_{13}h_3 - c_{14}h_4 \\
\qquad = +\tfrac{1}{2}m_2\mu F\sin u + \alpha_{12}(h_1\cos 2u - k_1\sin 2u) \\
\qquad\qquad - \beta_{12}(h_2\cos 2u - k_2\sin 2u) \\
\dfrac{dh_2}{dt} + c_{21}k_1 - c_{22}k_2 + c_{23}k_3 + c_{24}k_4 \\
= -\tfrac{1}{2}\mu_2(m_1G - m_3F')\cos u + (\alpha_{21} + \alpha_{23})(k_2\cos 2u + h_2\sin 2u) \\
\qquad - \beta_{21}(k_1\cos 2u + h_1\sin 2u) - \beta_{23}(k_3\cos 2u + h_3\sin 2u) \\
\dfrac{dk_2}{dt} - c_{21}h_1 + c_{22}h_2 - c_{23}h_3 - c_{24}h_4 \\
= \tfrac{1}{2}\mu_2(m_1G - m_3F')\sin u + (\alpha_{21} + \alpha_{23})(h_2\cos 2u - k_2\sin 2u) \\
\qquad - \beta_{21}(h_1\cos 2u - k_1\sin 2u) - \beta_{23}(h_3\cos 2u - k_3\sin 2u) \\
\dfrac{dh_3}{dt} + c_{31}k_1 + c_{32}k_2 - c_{33}k_3 + c_{34}k_4 \\
\qquad = \tfrac{1}{2}m_2\mu_3 G'\cos u + \alpha_{32}(k_3\cos 2u + h_3\sin 2u) \\
\qquad\qquad - \beta_{32}(k_2\cos 2u + h_2\sin 2u) \\
\dfrac{dk_3}{dt} - c_{31}h_1 - c_{32}h_2 + c_{33}h_3 - c_{34}h_4 \\
\qquad = -\tfrac{1}{2}m_2\mu_3 G'\sin u + \alpha_{32}(h_3\cos 2u - k_3\sin 2u) \\
\qquad\qquad - \beta_{32}(h_2\cos 2u - k_2\sin 2u) \\
\dfrac{dh_4}{dt} + c_{41}k_1 + c_{42}k_2 + c_{43}k_3 - c_{44}k_4 = 0 \\
\dfrac{dk_4}{dt} - c_{41}h_1 - c_{42}h_2 - c_{43}h_3 + c_{44}h_4 = 0,
\end{cases}
$$

wo $\qquad c_{21} = 2l_2 - l_1, \quad c_{32} = 2l_3 - l_2;$

wegen der Beziehung $l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180^0$ ist u_{21} durch u_{32} ausdrückbar, was auf der rechten Seite geschehen ist, wo die Indizes unterdrückt sind.

Die Integration ohne die rechten Glieder führt zu den Integralen:

$$(26)\quad \begin{cases} h_j = \sum_{1,2,3,4}^{\lambda} M_{j\lambda} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ k_j = \sum_{1,2,3,4}^{\lambda} M_{j\lambda} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda), \end{cases}$$

wo die g_λ die Wurzeln der Fundamentalgleichung 4. Grades sind. Von den 16 Größen $M_{j\lambda}$ sind vier willkürlich, diese mit β_1, β_2, β_3, β_4 bilden die acht willkürlichen Integrationskonstanten des Systems.

Berücksichtigt man zunächst rechts in (25) nur die Glieder vom einfachen Argument u_{21} und u_{32}, so ergeben sich die allgemeinen Integrale, wobei noch u_{21} nicht durch u_{32} ausgedrückt ist:

$$(27)\quad \begin{cases} h_1 = \frac{1}{2}\frac{m_2\mu_1 F_1}{\mu_1 - 2\mu_2 + c_{11}} \sin u_{21} + \sum M_{1\lambda} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ k_1 = \frac{1}{2}\frac{m_2\mu_1 F_1}{\mu_1 - 2\mu_2 + c_{11}} \cos u_{21} + \sum M_{1\lambda} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ h_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1\mu_2 G}{\mu_1 - 2\mu_2 + c_{22}} \sin u_{21} + \frac{1}{2}\frac{m_3\mu_2 F_2}{\mu_2 - 2\mu_3 + c_{22}} \sin u_{23} \\ \qquad + \sum M_{2\lambda} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ k_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1\mu_2 G}{\mu_1 - 2\mu_2 + c_{22}} \cos u_{21} + \frac{1}{2}\frac{m_3\mu_2 F_2}{\mu_2 - 2\mu_3 + c_{22}} \cos u_{23} \\ \qquad + \sum M_{2\lambda} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ h_3 = \frac{1}{2}\frac{m_2\mu_3 G_2}{\mu_2 - 2\mu_3 + c_{33}} \sin u_{23} + \sum M_{3\lambda} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ k_3 = \frac{1}{2}\frac{m_2\mu_3 G_2}{\mu_2 - 2\mu_3 + c_{33}} \cos u_{23} + \sum M_{3\lambda} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ h_4 = \sum M_{4\lambda} \sin(g_\lambda t + \beta_\lambda) \\ k_4 = \sum M_{4\lambda} \cos(g_\lambda t + \beta_\lambda). \end{cases}$$

Neuerdings wies *Wilkens*[102]) nach, daß man die Gleichungen (25) direkt integrieren könne. Durch die Substitution

$$h_i \sin u + k_i \cos u = x_i$$
$$h_i \cos u - k_i \sin u = y_i$$

und mit der Berücksichtigung, daß

---

102) *A. Wilkens*, Über die Integration der Grundgleichungen der Theorie der Jupitermonde, Berl. Ber. (1914), p. 552, und: Über die Säkulargleichungen der vier helleren Jupitermonde, Astr. Nachr. 201 (1915), p. 35.

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(2l_2 - l_1) = \frac{d}{dt}(2l_3 - 2l_2) = 2n_2 - n_1 = 2n_3 - n_2$$

konstant ist, gehen sie über in ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstanten rechten Seiten. Ein Vergleich der noch nicht abgeschlossenen numerischen Entwicklungen *Wilkens'* mit denen *Souillarts* zeigt eine genügende Übereinstimmung. Merklichere Unterschiede finden sich nur beim zweiten Monde vor, was seinen Grund haben dürfte in der Kommensurabilität seiner Bewegung sowohl zum ersten wie zum dritten Mond.

Nun sind noch die rechts auftretenden Größen u_{21} und u_{23} Störungen unterworfen, die von den langperiodischen Gliedern der Störungsfunktion abhängen. Für dieselben gelten die Differentialgleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varrho_1}{dt^2} = \dfrac{3}{2} m_2 \mu_1^2 \{ F_1(k_1 \sin u_{21} - h_1 \cos u_{21}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{a_1}{a_2} G_1(k_2 \sin u_{21} - h_2 \cos u_{21}) \} \\ \dfrac{d^2\varrho_2}{dt^2} = \dfrac{3}{2} m_1 \mu_2^2 \{ G_1(k_2 \sin u_{21} - h_2 \cos u_{21}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{a_2}{a_1} F_1(k_1 \sin u_{21} - h_1 \cos u_{21}) \} \\ \qquad + \dfrac{3}{2} m_3 \mu_2^2 \{ F_2(k_2 \sin u_{32} - h_2 \cos u_{32}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{a_2}{a_3} G_2(k_3 \sin u_{32} - h_3 \cos u_{32}) \} \\ \dfrac{d^2\varrho_3}{dt^2} = -3 m_2 \mu_3^2 \{ G_2(k_3 \sin u_{32} - h_3 \cos u_{32}) \\ \qquad\qquad + \dfrac{a_3}{a_2} F_2(k_2 \sin u_{32} - h_2 \cos u_{32}) \}. \end{cases}$$

Bei Mitnahme der in den Massen linearen Glieder ergibt sich für u_{21} die Ungleichheit:

$$(29)\qquad \delta u_{21} = \frac{\mathfrak{A} M_{11} + \mathfrak{B} M_{21} + \mathfrak{C} M_{31}}{(2n_2 - n_1 - g)^2} \sin(u_{21} - gt - \beta) + \ldots,$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ linear in den Massen sind. Ähnlich für u_{23}. Bei Berücksichtigung dieser Glieder auf der rechten Seite von (25) wird die Fundamentalgleichung für g jetzt nicht mehr vom 4. Grade sein, sondern infolge des Nenners in (29) nimmt sie einen höheren Grad an. Ihre approximative Auflösung ergibt dann ein neues (26) entsprechendes System von Gleichungen. Nimmt man nun auf die *Souillart*schen Glieder auf den rechten Seiten von (25) Rücksicht, so werden die Gleichungen (27) die Integrale von (25) darstellen, wenn man in den Nennern die Größen c durch die Größe α sich vergrößert denkt. Die Berücksichtigung entsprechender Glieder in den Gleichungen (28) ist mit keinen weiteren Schwierigkeiten verknüpft. Natürlich treten die Werte von h und k auch in die Ausdrücke für

die Sonnenstörungen ein und bedingen je 4 Glieder, die dem Evektionsglied in der Mondtheorie entsprechen. — Die Glieder vom Quadrat der Massen, die bei der Diskussion der Gleichungen in h und k vernachlässigt wurden, spielen eine wichtige Rolle in den Differentialgleichungen für die mittleren Längen. Setzt man nämlich

$$\vartheta = u_{32} - u_{21} \quad \text{und} \quad \beta^2 = K\left(\frac{m_2 m_3}{a_1^2} + \frac{9 m_3 m_1}{a_2^2} + \frac{4 m_1 m_2}{a_3^2}\right),$$

wo $$K = \text{const.}\,\frac{\mu_1}{\mu_1 - 2\mu_2 + c_{22}},$$

so ergibt sich die von *Laplace* zuerst aufgestellte Differentialgleichung der Libration:

(30) $$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \beta^2 \sin\vartheta.$$

Aus den Beobachtungen ergibt sich angenähert $\vartheta = 180^0$ und dieses führt mit Hilfe von (30) zu den allgemein gültigen *Laplace*schen Relationen:

(31) $$\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3 = 0 \qquad \text{und}$$

(32) $$l_1 - 3l_2 + 2l_3 = 180^0.$$

Dieselben werden, wie *Laplace* gezeigt hat, auch durch von außen eintretende Störungen auf die Dauer nicht in Frage gestellt. Das allgemeine Integral von (30) ist:

(33) $$\vartheta = 180^0 - D \sin(\beta t + E).$$

Delambres Diskussion der Finsternisse hat ergeben, daß die Amplitude von $\vartheta - 180^0$ verschwindend klein ist, was durch *Sampson*[46]) bestätigt zu sein scheint, während *de Sitters*[41]) Diskussion $0{,}158^0$ ergibt. — Mit Benutzung von (32) werden die aus den Integralen von (25) sich ergebenden Störungen der Längen der drei innern Satelliten auf die Form gebracht:

(34) $$\delta\nu_1 = (\text{I}) \sin(Ut + \mu_1' t); \quad \delta\nu_2 = -(\text{II}) \sin(Ut + \mu_2' t);$$
$$\delta\nu_3 = -(\text{III}) \sin(Ut + \mu_3' t - 90^0),$$

wenn man die Zeit von einer gemeinsamen Konjunktion der beiden ersten Satelliten zählt und wenn μ_1', μ_2', μ_3' die mittleren synodischen Bewegungen bezeichnen. Es ist

(34a) $$U = \nu_1 - 2\nu_2 = \nu_2 - 2\nu_3.$$

Souillarts Werte für I, II und III sind: 1634″, 3860″ und 262″, während *Laplace* dafür 1561″, 3737″ und 226″ gefunden hatte, bedeutende Abweichungen, die den Wert der *Souillarts*chen Theorie bestätigen. Die bekannte Finsternisperiode $T = 437{,}659$ Tage ergibt sich aus (34a): $T = \frac{2\pi}{U}$.

b) *Die übrigen Satelliten.* Beim V. Satelliten sind Knoten- und Perijoviumbewegung einander numerisch gleich. Da ein Fall von Kommensurabilität hier nicht auftritt, kann man in dem *Newcomb-Tisserand*schen Satz — vgl. § 12 β — m' gleich Null setzen und erhält:

$$(35) \qquad \begin{cases} h = c \sin(b + \beta\mu t) \\ k = c \cos(b + \beta\mu t). \end{cases}$$

Die Beobachtungen haben die jährliche Bewegung des Perijoviums zu 916° ergeben, ein Wert, der von dem theoretischen Werte *Tisserands*[55][56]) abweicht. — Die Bahnen des VI. und VII. Satelliten sind noch zu wenig bekannt, als daß sich etwas Definitives über die Bewegungen in denselben aussagen ließe. Sollte es sich bestätigen, daß sie in derselben Ebene liegen und sich schneiden, so würde damit ein neuer Fall der Himmelsmechanik vorliegen, der große theoretische Schwierigkeiten bieten wird. — Der VIII. Trabant bewegt sich retrograd in seiner Bahn. *Cowell* und *Crommellin*[61]) haben gefunden, daß *Delaunays* Methode nicht direkt anwendbar ist, weil die Parameter hier zu große Werte annehmen und darum die Reihenentwicklungen zu langsam konvergieren. Nach *Kobb*[61a]) ist die Bahn möglicherweise instabil.

β) *Das Saturnsystem.* a) *Japetus, Titan und Rhea. Phöbe und Themis.* Die Differentialgleichungen für die Länge des Perisaturniums und die Exzentrizität enthalten auf den rechten Seiten die von der Sonne, Abplattung, Ringen und je den benachbarten Satelliten herrührenden Störungen. Es brauchen nur Glieder vom Quadrat des Sinus der Neigung der Bahnebenen und der Exzentrizitäten mitgenommen zu werden. Da keine Kommensurabilitäten zwischen den mittlern Bewegungen stattfinden, treten keine langperiodischen Glieder hier auf.

b) *Die Satellitenpaare, bei denen Librationsglieder auftreten.* Wenn die mittleren Bewegungen, μ und μ', zweier Satelliten so beschaffen sind, daß $(j+1)\mu' - j\mu$ (j ganze Zahl) klein ist im Verhältnis zu μ' und μ, so werden bei einem ellipsoidischen Zentralkörper die Integrale der Differentialgleichungen für $h, k; h', k'$, wenn $V = (j+1)l' - jl$ gesetzt wird, die Form haben:

$$(36) \qquad \begin{cases} h = c \sin(b + \beta\mu t) + Am' \sin V \\ k = c \cos(b + \beta\mu t) + Am' \cos V \\ h' = c' \sin(b' + \beta'\mu' t) + A'm \sin V \\ k' = c' \cos(b' + \beta'\mu' t) + A'm \cos V. \end{cases}$$

A und A' sind gegebene Funktionen der Elemente, c, c' und b, b'

sind die willkürlichen Konstanten. Sind c und c' Null, so ergibt sich das allgemeine Theorem:

Bei zwei ursprünglichen Kreisbahnen werden, wenn die Bewegung des Konjunktionspunktes im Verhältnis zu den Satellitenbewegungen klein ist, die gegenseitigen Störungen wechselseitig eine Exzentrizität erzeugen, und die so erzeugten Apsidenlinien werden bei beiden Bahnen durch den Konjunktionspunkt gehen.

Wenn c und c' klein sind, ohne doch gleich Null zu sein, so wird das System eine Libration um jene Mittellage erleiden. Die Systeme Hyperion-Titan, Mimas-Tethys und Dione-Enceladus können alle unter diesem Gesichtspunkt betrachtet werden.

Hyperion-Titan. A. Hall stellte die Beobachtungen des Hyperion zufriedenstellend dar, indem er für die Länge des Perisaturniums die Formel ableitete:

$$\varpi = 174{,}24^0 - 20{,}344^0 t - 0{,}103^0 t^2.$$

Newcomb[103]) verband diese retrograde jährliche Bewegung von 20^0 mit dem nahezu gleichen Betrag, den $4\mu_H - 3\mu_T$ in einem Jahre annimmt, und erkannte die hohe Wichtigkeit des Argumentes: $V = 4l_H - 3l_T - \varpi_H$. Indem in der Störungsfunktion außer den säkularen Gliedern das erste Glied $e_H C \cos V$ genommen wird, erhält man die Gleichungen:

$$(37) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mu_H}{dt} = +\,3{,}91\, m_T \mu_H^2 \sin V \\ \dfrac{dE_H}{dt} = +\,4{,}22\, m_T \mu_H^2 \cos V \\ \dfrac{d\varpi_H}{dt} = m_T \mu_H (4{,}53 + 3{,}26 \cos V). \end{cases}$$

Für V ergibt sich die Differentialgleichung:

$$(38) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = 15{,}6\, m_T \sin V \left(1 + \frac{dV}{dt}\right).$$

Die Beobachtungen zeigen, daß V um den mittleren Wert π herum schwankt. Macht man $V = 180^0 - H$, so wird angenähert:

$$(39) \qquad \frac{d^2H}{dt^2} = -\,15{,}6\, m_T \sin H.$$

Aus dem Integral dieser Gleichung:

$$(40) \qquad H = \alpha \cos K\mu_H t - \beta \sin K\mu_H t,$$

103) *S. Newcomb*, On the mutual action of the satellites of Saturn, Astr. Journ. 8 (1888), p. 104.

wo $K = \sqrt{15{,}6\, m_T}$ ist, ergibt sich eine Massenbestimmung des Titan, deren genauer Wert aber erst durch Berücksichtigung der andern merklichen Glieder der Störungsfunktion erhalten werden könnte. Nun ist aber die Berechnung der Koeffizienten dieser Glieder infolge des großen Wertes von $\frac{a_T}{a_H}$ mit großen Schwierigkeiten verknüpft, so daß es *Newcomb* vorzog, durch Quadratur ihren Betrag in Rechnung zu stellen. Die Bestimmung der Masse des Titan gelang so mit großer Genauigkeit. *Hill*[75]), *Tisserand*[78]), *O. Stone*[76]) haben ihrerseits durch periodische Lösungen das gleiche Problem sehr elegant behandelt und gleichfalls durch Quadratur die Störung in ϖ_H für einen halben synodischen Umlauf bestimmt und damit auf die Größe der Masse des Titan geschlossen. Eine zufriedenstellende analytische Theorie, welche die wesentlichen Glieder in der Entwicklung von R berücksichtigt und zugleich auf die Exzentrizität der Titanbahn Rücksicht nimmt, ist bisher noch nicht entwickelt worden. Jedoch hat *H. Struve* aus einer Diskussion der Beobachtungen eine Darstellung von V in der Form:

$$V = 180^0 + A \sin\left(\frac{360^0}{T}(t - t_0)\right)$$

gegeben, in der er nicht nur die Konstanten A und t_0, sondern auch T, die Periode der Libration, durch die Beobachtungen bestimmt. *Eichelberger*[104]) hat gleichfalls auf rein empirischem Wege eine Darstellung von V erhalten, bei der zu der Darstellung von *Struve* noch Glieder vom Sinus des Vielfachen des Winkels H treten, der gleich der Differenz der Längen der Perisaturnien der beiden Bahnen ist.

Enceladus-Dione. Aus dem Theorem von *Newcomb* folgt, daß die Exzentrizität und Apsidenbewegung von Enceladus sich aus zwei Teilen zusammensetzt. Wäre die Masse der Dione Null, so wäre $e = c$, $\varpi = b + \beta\mu t$; die Apsidenbewegung wäre in diesem Falle gleich der Knotenbewegung. Ist umgekehrt c sehr klein gegenüber f, wo $f = Am'$ gesetzt ist, so wird genähert $e = f$ und $\varpi = 2l' - l$, die Apsidenbewegung ist dann $2\mu' - \mu$, das Perisaturnium von Enceladus fällt beständig mit dem Konjunktionspunkt der beiden Trabanten zusammen. Die Beobachtungen *Struves* zeigten, daß der letztere Fall der Wirklichkeit entspricht. Aus $e = f = Am'$ folgt, daß die Masse Diones aus dem Mittelwert für e erhalten werden kann. Der Wert von c kann nicht aus den Werten der oskulierenden Werte

104) *Eichelberger,* The orbit of Hyperion, Astr. Journ. 11 (1892), p. 145.

von e bestimmt werden, wohl ist es aber möglich, auf dem Umweg durch die Längen hierzu zu gelangen, wie dieses *Struve*[72]) gezeigt hat. Hierbei ist von Wichtigkeit, daß sich die Werte von $\beta\mu$ für beide Satelliten mit hinreichender Genauigkeit aus den Knotenbewegungen von Tethys und Mimas bestimmen lassen.

Tethys-Mimas. Die merkliche Neigung der Bahnen von Tethys und Mimas zum Saturnäquator haben es möglich gemacht, die säkularen Bewegungen der Knoten aus den Beobachtungen mit Sicherheit zu bestimmen. Darauf fußend, hat *H. Struve*[72]) die merkwürdige Beziehung aufdecken können, die zwischen den mittleren Bewegungen der Trabanten und den säkularen Bewegungen der Knoten besteht und zu der großen Libration zwischen Thetys und Mimas Anlaß gibt. Der Librationswinkel ist hier: $W = 4l_T - 2l_M - \theta_T - \theta_M$. Die Störungsfunktion hat die folgende Form:

$$\Omega = -\frac{\beta}{2a}\gamma^2 - m_1 \frac{B^{(3)}}{4}\gamma\gamma_1 \cos W,$$

wenn man nur die hauptsächlichsten säkularen und Librationsglieder mitnimmt. Aus den Differentialgleichungen für die Elemente ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung in W, die mit genügender Annäherung auf die Gleichung für Pendelschwingungen reduziert werden kann. Die Beobachtungen zeigen, daß in der Tat der Fall des oszillatorischen Pendels statthat, d. h. Librationsbewegung. Die Differentialgleichungen in μ_T und μ_M ergeben durch doppelte Integration die großen Librationsglieder in den Längen beider Satelliten. Unter der Annahme, daß der Ausschlag von W etwa 79° beträgt, wie die Beobachtungen zeigen, ferner daß das Verhältnis der Massen der Trabanten $= \frac{1}{15}$ ist, ergibt sich für die Länge von Mimas eine Amplitude von 45°, für die Länge von Thetys etwa 2,5°, wenn man bei beiden nur die ersten Glieder in Betracht zieht. Das Verhältnis der Koeffizienten der beiden Librationsglieder ergibt einen Wert für das Verhältnis der Massen der beiden Satelliten, während die Periode der Libration sogleich die Masse des großen Satelliten ergibt. Man kann betreffs der Konjunktionen von Mimas und Thetys aussagen, daß sie immer um die Mitte des Bogens statthaben werden, der auf dem Saturnäquator zwischen den aufsteigenden Knoten der beiden Trabanten gelegen ist. Von diesem Punkt können sie sich in maximo bis auf 45° entfernen. Die Dauer der Oszillation ist etwa 68 Jahre.

γ) *Die übrigen Satellitensysteme.* Da Kommensurabilitäten in den Bewegungen der Satelliten dieser Systeme nicht aufzutreten scheinen,

so werden die Gleichungen für die Größen h und k beim Neptun- und wohl auch dem Marssystem sich wie die für den V. Jupitermond schreiben lassen, während bei den Uranustrabanten noch auf die gegenseitigen Anziehungen der Satelliten untereinander wird Rücksicht genommen werden müssen.

14. Die kurzperiodischen und die von der Sonne herrührenden Ungleichheiten werden analog den unter VI 2 B 14 und 15 entwickelten Prinzipien hergeleitet und brauchen daher hier nicht weiter besprochen zu werden. Infolge der nahen Kommensurabilitäten der mittleren Bewegungen der drei inneren älteren Jupitermonde sind diese kurzperiodischen Ungleichheiten sehr bedeutend, wie man aus den Kapiteln 13, 14 und 15 von Bd. IV der Mécanique céleste von *Tisserand* ersehen kann.

15. Die Bestimmung der Konstanten der Satellitensysteme. Durch die beobachteten säkularen Verschiebungen der Knoten und Apsidenlinien werden für jeden Satelliten theoretisch zwei Gleichungen gegeben, in die neben den von den Potentialen des Planeten und der Ringe herrührenden Konstanten k_A, l_A und k_R, l_R die Massen der meßbar einwirkenden Satelliten eintreten. Überall, wo einesteils Abweichungen von der Kreisbahn oder andrerseits Abweichung der Trabantenbahnebene von der Äquatorealebene des Planeten sich nicht haben beobachten lassen, scheiden die betreffenden Satelliten aus den die Massen bestimmenden Gleichungen aus. Die Massen der Planeten ergeben sich aus den Elongationsbeobachtungen vorwiegend der äußeren Satelliten. Der VIII. Satellit Jupiters sowie der IX. Satellit Saturns werden in der Zukunft wohl die allergenauesten Massenbestimmungen ihrer Planeten ergeben. Für die Konstantenbestimmungen im Jupitersystem finden sich in der Mécanique céleste von *Laplace* und ebenso in der von *Tisserand* eingehende Erörterungen, die noch in den Diskussionen von *de Sitter* und *Sampson* im Anschluß an *Souillarts* Werk weitergeführt sind. Den Anteil, den der V. Jupitermond dabei hat, ist von *Cohn* und *de Sitter* näher diskutiert worden. Für das Saturnsystem findet man alles Nötige im 16. und 17. Abschnitt der zweiten Pulkovaer Abhandlung von *H. Struve.* Für Uranus werden erst zukünftige genauere Satellitenmessungen ein verläßliches Resultat erbringen. Aus der Knotenverschiebung des Neptunsatelliten wird sich in nächster Zukunft nicht nur die Lage des Neptunäquators, sondern auch die Größe der Abplattung bestimmen lassen. Auch bei Jupiter und Saturn sind die so errechneten Bestimmungen der Lagen des Planetenäquators den durch direkte Messung gewonnenen Werten überlegen. Das gleiche gilt für den

Planeten Mars[105]), dessen Abplattung mit einiger Genauigkeit bisher fast nur auf diesem Wege bestimmt werden konnte. Betreffs der Figur der Planeten und des Saturnrings vgl. VI 2, B 20 (*Oppenheim*)

105) Vgl. *Hartwig,* Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Mars und Venus, nach Heliometermessungen ausgeführt auf der Kgl. Sternwarte in Straßburg, Astr. Ges. Publ. 15 (1879); ferner: Untersuchungen über den Durchmesser und die Abplattung des Mars, Astr. Nachr. 150 (1899), p. 313, sowie die unter 91) und 92) zitierten Abhandlungen *H. Struves*; endlich die zahlreichen Beobachtungen von *P. Lowell* in Lowell-Obs. Annals I (1898), Observations of the Planet Mars during the opposition 1894—95, made at Flagstaff (Arizona); bes. capt. II, § 3, und ebenda Bull. Nr. 24, 33, 46, 56 (1912).

(Abgeschlossen im Sommer 1916.)

VI 2, 17. BESTIMMUNG UND ZUSAMMENHANG DER ASTRONOMISCHEN KONSTANTEN.

Von

J. BAUSCHINGER

in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1. Die astronomischen Konstanten.
2. Geodätische Konstanten.
3. Physikalische Konstanten.
4. Astronomische und physikalische Einheiten. Die Gravitationskonstante.

Erde.

5. Die Sonnenparallaxe. Trigonometrische Bestimmung.
6. Die Aberrationskonstante.
7. Die Lichtgleichung.
8. Die Mondgleichung in der Erdbewegung. Beziehung zwischen Mondmasse und Sonnenparallaxe.
9. Die Präzessions- und die Nutationskonstante.
10. Die Trägheitsmomente und die Abplattung der Erde.
11. Die Schiefe der Ekliptik und der Frühlingspunkt.
12. Tropisches und siderisches Jahr.
13. Sternzeit und mittlere Zeit.
14. Verwendung der Schweremessungen.
15. Die Erdmasse und ihre Beziehung zur Sonnenparallaxe.

Mond.

16. Die Mondparallaxe.
17. Die parallaktische Ungleichheit in der Mondbewegung.
18. Die Elemente der Mondbahn.
19. Die Störungsglieder der Mondbewegung.
20. Die Mondmasse.

Planeten.

21. Die Theorien der Sonne und der großen Planeten.
22. Bestimmung der Planetenmassen.
23. Ableitung der Massen von Merkur, Venus und Erde aus den Säkularstörungen.
24. Die Massen der Planeten Merkur, Venus und Erde.
25. Die Sonnenparallaxe aus den Gravitationsmethoden.
26. Die Massen von Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun.

Literatur.

Wm. Harkness, The solar Parallax and its related Constants, including the figure and density of the Earth. Washington Observations for 1885 Appendix III, Washington 1891. (Hierin findet man die ältere Literatur.)

S. Newcomb, The elements of the four inner Planets and the fundamental Constants of Astronomy. Suppl. to the American Ephemeris for 1897. Washington 1895. (Zitiert: Fund. Const.)

F. Tisserand, Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du Soleil. Obs. de Paris ann., mém. XVI. 1882.

S. Newcomb, Investigation of the distance of the Sun and of the elements which depend upon it. Wash. obs. 1865 App. II.

D. Gill, Determination of the Solar Parallax. Combination of Results and General Conclusions. Cape Obs. ann. Vol. VI, part 5. 1897.

F. W. Bessel, Fundamenta Astronomiae. Regiomonti 1818.

—, Tabulae Regiomontanae Reductionum. Regiomonti 1830.

U. J. Leverrier, Annales de l'Observatoire de Paris, t. 1—14. 1855—1877.

S. Newcomb, Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington Vol. I—IX. 1882—1912. (Zitiert: Astr. Pap.)

F. R. Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 2 Bände. Leipzig 1880—1884. (Zitiert: *Helmert*, H. G.)

P. A. Hansen, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Leipzig. Ges. Wiss. Abhdl. 6 (1862), p. 91—498, 7 (1864), p. 1—399.

Einleitung.

1. Die astronomischen Konstanten. Als astronomische Konstanten werden hier sowohl diejenigen Größen verstanden, die die Grundeinheiten aller Maßbestimmungen in der Astronomie bilden, wie die Sonnenparallaxe, die Gravitationskonstante u. a., als auch jene, die bei der analytischen Behandlung der Probleme als Integrationskonstante auftreten, wie die Präzessionskonstante, die Planetenelemente u. a. Allen ist gemeinsam, daß sie direkt oder indirekt durch Messung bestimmt werden müssen, daß ihre zahlenmäßige Bestimmung infolge der Fortschritte der Meßkunst also in der Regel eine lange Geschichte hinter sich hat; ferner, daß zwischen ihnen eine ganze Reihe von Zusammenhängen besteht, die nicht nur an sich wichtig sind, sondern auch für die zahlenmäßige Festlegung der Größen und die Prüfung der Theorien bedeutungsvoll werden. Auf die Entwicklungsgeschichte einzugehen, ist hier nicht beabsichtigt; an der Hand der unten zitierten Werke[1]) wird man sie leicht

1) *J. C. Houzeau,* Vade-mecum de l'astronome. App. à la nouv. série des Ann. astr. de l'Obs. de Bruxelles. Bruxelles 1882. — *Wm. Harkness,* The solar Parallax and its related Constants. Washington 1891.

verfolgen können; dagegen ist neben der Angabe der Messungsmethoden und der jetzt zuverlässigsten Werte die Auseinandersetzung der Zusammenhänge das Hauptziel des Artikels. Die Anordnung ist der Inhaltsübersicht zu entnehmen. Da es sich vielfach um eine Nachlese zu anderen Artikeln des Bandes handelt, war eine weitergehende systematische Darstellung zwecklos.

2. Geodätische Konstanten. Die in der Astronomie gebrauchten, der Geodäsie zu entlehnenden Konstanten sind die Dimensionen des Erdkörpers und die Bestimmungen der Schwerkraft der Erde. Wir verweisen betreff näherer Ausführungen auf Band VI 1, insbesondere Artikel 3 (*Pizetti*), Nr. 50 und 51 und Artikel 7 (*Helmert*), Nr. 4 und geben hier nur die zuverlässigsten im folgenden verwendeten Resultate:

Halbe große Achse des Erdellipsoids $\varrho_0 = 6\,377\,397$ m [6,8046435] nach *Bessel* (1841).

Abplattung $\alpha = \frac{1}{299{,}153} = 0{,}0033428$ [$7{,}524107_{-10}$].

Beschleunigung der normalen Schwerkraft (nach *Helmert* (1901)):

$$g = 978{,}046\,(1 + 0{,}005302 \sin^2\varphi - 0{,}000007 \sin^4\varphi)\ \text{cm},$$

φ = geogr. Breite;

hieraus Abplattung $\alpha = \frac{1}{298{,}3}$.

Länge des Sekundenpendels (nach *Iwanoff*)

$$l = 99{,}0997 + 0{,}5240 \sin^2\varphi - 0{,}0016\,(\sin\varphi' - \tfrac{5}{3}\sin^3\varphi')\ \text{cm},$$

φ = geogr. Breite, φ' = geoz. Breite;

hieraus Abplattung $\alpha = \frac{1}{296{,}6}$.

Für die geozentrische Breite φ_1', die aus

$$\sin\varphi_1' = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

bestimmt ist und *mittlere Breite* genannt wird, findet man

$$\varphi_1' = 35^\circ 15' 52''$$

und die dazu gehörige geographische Breite

$$\varphi_1 = 35^\circ 26' 42''.$$

Hierfür wird der entsprechende Radiusvektor der Erde

$$\varrho_1 = [9{,}9995142]\ \varrho_0 = 6\,370\,268\ \text{m}\ [6{,}8041577]$$

und die Beschleunigung

$$g_1 = 978{,}046 \times [0{,}000773] = 979{,}787\ \text{cm}\ [2{,}991132].$$

Der vertikale Teil der *Zentrifugalkraft* in der Breite φ ist

$$-\frac{4\pi^2 \varrho \cos\varphi \cos\varphi'}{\tau^2},$$

wo ϱ der zu φ' gehörige Radiusvektor und $\tau = 86164$ die Rotationsdauer der Erde in Sekunden mittlerer Zeit ist. Für die mittlere Breite φ_1 wird sie

$$-2{,}253 \text{ cm}$$

und daher die von Zentrifugalkraft befreite Schwere oder die Anziehung

$$G_1 = 979{,}787 + 2{,}253 = 982{,}040 \text{ cm}.$$

Das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere wird aus den gegebenen Ausdrücken berechnet; am Äquator wird es:

$$c_0 = \frac{3{,}391}{978{,}046} = 0{,}0034672 = \frac{1}{288{,}41},$$

allgemein

$$c = \frac{4\pi^2 \varrho \cos\varphi \cos\varphi'}{g\, 86164^2} = \frac{4\varrho \cos\varphi \cos\varphi'}{l\, 86164^2}$$

und in der mittleren Breite φ_1

$$c_1 = 0{,}0022997\ [7{,}361671_{-10}] = \frac{1}{434{,}84}$$

und damit die Anziehung

$$G_1 = g_1(1 + c_1) = l_1\pi^2(1 + c_1) = L_1\pi^2.$$

3. Physikalische Konstanten. Aus physikalischen Messungen gehen die Lichtgeschwindigkeit c und die Dichtigkeit der Erde hervor.

Die älteren Werte für c sind von *Harkness*[2]) S. 29 zusammengestellt. Als zuverlässigster Wert kann der aus den Versuchen von *Michelson* und *Newcomb*[3]) hervorgehende gelten:

$$c = 299860 \pm 30 \text{ km pro Sekunde}.$$

Er wird bestätigt durch neuere Versuche von *Perrotin*[4]), der aus zwei Reihen findet:

$$c = 299880 \pm 50 \text{ km pro Sekunde}.$$

Wir haben im folgenden

$$c = 299865 \pm 26 \text{ km pro Sekunde}$$

angenommen.

Über die Dichtigkeitsbestimmungen der Erde sei auf Encykl. V 1 Art. 2 (*Zenneck*), Nr. 9 verwiesen, wo gefunden wird:

$$\Delta = 5{,}513;$$

daraus folgt die in Nr. 4 abgeleitete Gravitationskonstante:

$$0{,}6675 \times 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \text{ gr}^{-1}.$$

---

2) *W. Harkness*, The solar Parallax . . ., s. Literatur.
3) Astr. Pap., Vol. II, p. 202.
4) *Perrotin*, Paris C. R. 1902, p. 881.

4. Astronomische und physikalische Einheiten. Die Gravitationskonstante. Das jetzt in der Physik gebräuchliche System der Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit, das Zentimeter-Gramm-Sekundensystem (wobei Gramm = Masse = m, nicht gleich Gewicht, sondern Gewicht = mg, g = Beschleunigung), wird in der Astronomie nur dann verwendet, wenn sie sich auf physikalische Maßbestimmungen bezieht; im übrigen bedient sie sich, um zu große Zahlen zu vermeiden, seit jeher eines besonderen Systemes von Einheiten.

1. *Längeneinheit* ist die halbe große Achse a der Erdbahnellipse mit der kleinen Abänderung, die weiter unten besprochen wird. Um die Beziehung zu einem irdischen Maß herzustellen, wird der Winkel $\pi''_\odot$ eingeführt, unter welchem der Radius des Erdäquators ϱ_0, der durch geodätische Messungen bestimmt wird, in der Entfernung a gesehen wird; dieser Winkel, die Sonnenparallaxe, ist durch astronomische Messungen bekannt; es wird

$$a = \frac{\varrho_0}{\pi''_\odot \sin 1''}.$$

Mit $\varrho_0 = 637739715$ [8,80464346] Zentimeter folgt:

$$\text{astr. Längeneinheit} = \frac{[14{,}1190686]}{\pi''_\odot} \text{ cm}$$

oder mit $\pi''_\odot = 8''79$

$$\text{astr. Längeneinheit} = [13{,}1750797] \text{ cm}.$$

In dieser Einheit werden alle Entfernungen im Sonnensystem angegeben.

In der Stellarastronomie wird diejenige Länge als Einheit gebraucht, in welcher die eben besprochene a unter einem Winkel von $1''$ erscheint; diese Länge, *Sternweite* genannt, ist also

$$1 \text{ Sternweite} = 206264{,}8 \text{ Erdbahnhalbachsen}.$$

Ist p'' die Parallaxe eines Sternes, so ist $\frac{1}{p''}$ seine Entfernung in Sternweiten.

2. *Zeiteinheit* ist der mittlere Sonnentag, dessen Definition in Nr. **13** gegeben ist; er ist gleich 1,002737909 Rotationen der Erde um ihre Achse und wird in 86400 mittlere Zeitsekunden geteilt. Damit ist die Beziehung zwischen physikalischer und astronomischer Zeiteinheit gegeben. Eine Rotation der Erde wird in 86164,091 mittl. Zeitsekunden ausgeführt; die Erde rotiert also mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\left(\frac{2\pi}{86164{,}091}\right) \text{ Radien} = 15''0411 \text{ in der Sekunde}.$$

3. Die Einheit der *Masse* wird in die Astronomie durch das *Newton*sche Gesetz eingeführt, wonach die Anziehung zwischen zwei Massen m und m' in der Entfernung r gegeben ist durch $\frac{k^2 m m'}{r^2}$; hierin ist k^2 die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung. Hat man k^2 für die Längeneinheit bestimmt, so ist dadurch die Masseneinheit festgelegt. Masse im astronomischen Sinn ist also nicht gleich Anziehungskraft, sondern entspricht dem, was die Physik Masse nennt, nicht dem, was die Physik Gewicht nennt. Die analytische Behandlung des Problems der Bewegung der zwei Körper m und m' führt auf die Gleichung:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k^2(m+m')}{a^3}} \tag{1}$$

(das dritte *Kepler*sche Gesetz), worin T die Umlaufszeit, a die große Halbachse der Bahnellipse ist. Nimmt man als die beiden Körper die Sonne m und die Erde m', legt die Längen- und die Zeiteinheit wie oben fest, benutzt die aus anderen Erscheinungen hervorgehende Tatsache, daß die Anziehungskraft der Erde auf die Einheit der Entfernung der 354 710te Teil von der der Sonne ist, und nimmt für T die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne = 365,2563835 Tage (beides nach den Annahmen von *Gauß*[5]), so wird obige Beziehung:

$$k^2 m\left(1 + \frac{1}{354710}\right) = \left(\frac{2\pi}{365{,}2563825}\right)^2$$

und gibt in $k^2 m = 0{,}0002959122082$ $[6{,}4711628828_{-10}]$

die Anziehungskraft der Sonne auf die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung und in der Einheit der Zeit. Setzt man k^2 gleich obiger Zahl 0,0002959122082, so ist die Masse der Sonne $m = 1$ zu nehmen und ist damit die Masseneinheit definiert. Die Konstante k^2 (*Gauß*sche Konstante, Attraktionskonstante des Sonnensystems, Anziehungskraft der Sonne) ist oben nach *Gauß* mit Werten der Erdmasse und des siderischen Jahres gerechnet, die nicht mehr als richtig bezeichnet werden können. Statt aber die Konstante den jeweiligen besten Werten dieser beiden Größen anzupassen, zieht man es vor, sie ungeändert beizubehalten und dafür die Längeneinheit einer leichten Änderung zu unterwerfen, damit die Richtigkeit der Gleichung (1) erhalten bleibt. Mit den Werten

$$m' = \frac{1}{329390} \quad \text{und} \quad T = 365{,}25636042$$

5) *C. F. Gauß*, Theoria motus corporum coelestium. 1809, art. 1 = Werke, Band 7.

wird $\log a = 0{,}000000013,$

und die Einheit der Entfernung ist also streng genommen nicht die die halbe Erdbahnachse, sondern eine Größe, in der ausgedrückt die halbe Erdbahnachse den eben angegebenen Wert hat. Der Unterschied ist in den Sonnen- und Planetentafeln kaum merkbar.

Würde man als Zeiteinheit die Dauer von $1 : k = 58{,}13244087$ mittleren Sonnentagen einführen, so würde als Attraktionskonstante sich 1 ergeben. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hiervon bei theoretischen Untersuchungen vielfach Gebrauch gemacht.

Wird die Sonnenmasse $= 1$ gesetzt, so erscheinen die Planetenmassen als reine Zahlenfaktoren m', m'', ..., die mit k^2 multipliziert die Anziehungskräfte derselben in der Einheit der Entfernung geben. So wird die Anziehungskraft von Erde + Mond in der Entfernung 1

$$\frac{0{,}0002959122082}{330200}$$

und die des Erdkörpers allein (Mondmasse $= \frac{1}{81{,}53}$ Erdmassen gesetzt)

$$\frac{0{,}0002959122082}{334250} = [0{,}947092_{-10}].$$

Um diese Zahl in das cm/sec-System der Physik überzuführen, ist sie mit

$$\frac{14978738000000^3}{86400^2} = [29{,}6533981]$$

(entsprechend dem *Bessel*schen Radius des Erdäquators und der zu obiger Masse gehörigen Sonnenparallaxe 8″782) zu multiplizieren und wird dann

$$[20{,}600490] = 398556 \times 10^{15}.$$

Dies ist also die Anziehungskraft der Erde in einer Sekunde und in 1 cm Entfernung vom Erdmittelpunkt.

Diese Größe läßt sich durch Messung der Länge des Sekundenpendels auch physikalisch bestimmen. Nach *Helmert* (s. Nr. 2) wird für die Breite φ_1', deren sin gleich $1 : \sqrt{3}$ ist,

die Schwere	$g_1 = 979{,}787$ cm/sec^2,	
die Korr. für Zentrifugalkraft . .	$+ \quad 2{,}253$	
also die Anziehung der Erde an der Oberfläche der Breite φ_1' . .	982,040 cm/sec^2.	[2,992130]

Der Radius der Erde in der Breite φ_1' ist nach *Bessel*

$$637026800 \text{ cm} \quad [8{,}8041577]$$

und folglich die Anziehung in 1 cm/sec^2

$$982{,}040 \times 637026800^2 = [20{,}600444] = 398515 \times 10^{15}.$$

Für die Anziehungskraft des Mondes erhält man in denselben Einheiten

$$[18{,}689173] = 488847 \times 10^{13}$$

und für die der Sonne

$$[26{,}124561] = 133218 \times 10^{21}.$$

Die Anziehung eines Kubikzentimeters Masse von der mittleren Dichtigkeit der Erde $\Delta = 5{,}513$ erhält man aus obiger Zahl [20,600490], wenn man sie durch die Masse der Erde in Grammen, also durch

$$\begin{array}{ll} [27{,}034565] & \text{Kubikzentimeter} \\ [\ 0{,}741388] & \text{Dichte} \\ \hline [27{,}775953] & \text{Gramm} \end{array}$$

dividiert. Es ergibt sich somit in

$$[2{,}824537_{-10}] = 0{,}6676 \times 10^{-7}\ \mathrm{cm^3\,sec^{-2}\,gr^{-1}}$$

die Gravitationskonstante im Einheitensystem der Physik.

Die Konstanten der Erde und der Erdbewegungen.

5. Die Sonnenparallaxe. Trigonometrische Bestimmung. Unter Sonnenparallaxe versteht man in abgekürzter Bezeichnung den Winkel $\pi''_\odot$, unter welchem im Mittelpunkt der Sonne der Radius des Erdäquators ϱ_0 erscheint, wenn die Erde sich in ihrer mittleren Entfernung a von der Sonne im Horizont eines Punktes des Erdäquators befindet; die vollständige Bezeichnung ist *Äquatorealhorizontalparallaxe*. Um a in irdischem Maß auszudrücken, hat man die Beziehung:

$$\sin \pi_\odot = \frac{\varrho_0}{a} \quad \text{oder} \quad a = \frac{\varrho_0\, 206264{,}8}{\pi_\odot}.$$

Mit den Werten $\varrho_0 = 6377{,}397$ km und $\pi_\odot = 8''80$ wird

$$a = 149480976 \text{ km}.$$

Die *trigonometrische Methode* zur Bestimmung von $\pi_\odot$ wird, da sich die Sonnenscheibe zu genauen Messungen nicht eignet, nicht direkt auf die Sonne angewendet, sondern auf einen der Erde möglichst nahen Planeten des Sonnensystems, aus dessen gemessener Entfernung dann unter Heranziehung der Eigenschaften der Gravitation (des dritten *Kepler*schen Gesetzes) auf die Entfernung der Erde von der Sonne geschlossen wird. Wegen der näheren Ausführung sei auf den Artikel VI 2, 2 (*Cohn*) Nr. 9b verwiesen, hier werden nur die *Resultate* aufgeführt, und zwar nur jene, die heute noch als stimmberechtigt gelten können:

	$\pi_\odot$	Mittl. Fehler	Gew.
1. Aus der Marsopposition 1877, beobachtet von *Gill* auf Ascension [6]	8″780	± 0″020	1,0
2. Aus Kontaktbeobachtungen während der Venusdurchgänge 1761, 1769, 1874, 1882 nach der Diskussion von *Newcomb* [7]	8″794	± 0″022	0,8
3. Aus Heliometer- und photogr. Messungen während der Venusdurchgänge 1874 und 1882 nach der Diskussion von *Newcomb* [8]	8″857	± 0″023	0,8
4. Aus Heliometermessungen der kleinen Planeten Viktoria, Sappho und Iris 1888/89 nach *Gills* Plan [9]	8″802	± 0″007	8
5. Aus Meridianbeobachtungen der kleinen Planeten Viktoria, Sappho und Iris 1888/89 nach der Diskussion von *Auwers* [10]	8″806	± 0″044	0,2
6. Aus Beobachtungen des Planeten Eros 1900/01, mikrometrisch, nach der Diskussion von *Hinks* [11]	8″806	± 0″006	11
7. Aus Beobachtungen des Planeten Eros 1900/01, photographisch, nach *Hinks* [12]	8″807	± 0″004	25

Die Gewichte sind unter Annahme des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit ± 0″020 angesetzt und führen zu

$$\pi''_\odot = 8''806 \pm 0''003 \text{ (trig. Meth.)}.$$

Es können nur solche Messungsmethoden bei Bestimmung dieser wichtigsten Zahl der Astronomie zugelassen werden, bei denen kein unkontrollierbarer systematischer Fehler zu befürchten ist. Hierüber haben *Newcomb* in Fund. Const. S. 154 und *Gill* [13]) Bemerkungen gemacht.

Außer der direkten hat man noch vier indirekte Methoden, zur Kenntnis der Sonnenparallaxe zu gelangen, die auf den Eigenschaften des Lichtes und der Gravitation beruhen. Man sehe die Nr. **6, 8, 15, 17** und die Zusammenstellung in Nr. **25**.

6. Die Aberrationskonstante. Durch die Theorie der jährlichen Aberration (siehe VI 2, 2 (*Cohn*) Nr. **7a**) wird die Größe

$$A = \frac{n a \sec \varphi}{c} \quad \text{oder} \quad A'' = \frac{n a \sec \varphi}{c} 206264''8$$

6) *D. Gill,* Account of a determination of the solar parallax from obs. of Mars, made at Ascension in 1877. Lond. Astr. Soc. mem. 46 (1880/81).

7) *S. Newcomb,* Fund. Const., p. 146

8) Id., p. 144.

9) Cape Obs. Ann. VI (1897), part. 6, p. 11.

10) Id., part 5, p. [95].

11) *A. R. Hinks,* Solar Parallax Papers, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 70 (1910), p. 603.

12) Id., vol. 69, p. 566.

13) *D. Gill,* On Solar Parallax. Observatory I (1878).

eingeführt, die Aberrationskonstante, die in der Verbindung der linearen Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn mit der Lichtgeschwindigkeit die wichtigste Konstante der Astronomie und Physik ist. Da $n'' = n\,206264''8$ die mittlere Winkelbewegung der Erde um die Sonne, a die halbe große Erdbahnachse, φ der Exzentrizitätswinkel der Erdbahnellipse ist, so stellt der Zähler $na\sec\varphi$ von A das Mittel aus der größten (Perihel-) und der kleinsten (Aphel-) Lineargeschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn vor, der Nenner ist die Lichtgeschwindigkeit c, A also das Verhältnis beider; oder A ist die mittlere Erdgeschwindigkeit selbst, wenn c als Einheit genommen wird. Durch Einführung der Sekunde mittlerer Zeit als Zeiteinheit und des Kilometer als Längeneinheit wird aus A''

$$(2) \qquad A'' = \frac{n''\varrho_0 \sec\varphi \cdot 206264{,}8}{86400\,\pi''_\odot\, c} = \frac{[7{,}732622]}{\dfrac{54028370}{\pi''_\odot\, c}}.$$

Diese Beziehung zwischen Aberrationskonstante, Sonnenparallaxe und Lichtgeschwindigkeit ($n'' = 3548''193$, $\varrho_0 = 6377{,}397$ km und $\varphi = 0^0 57' 35''3$ können als völlig bekannte Größen betrachtet werden) wird uns unten weiter beschäftigen; hier gehen wir zunächst auf die direkte astronomische Bestimmung der Aberrationskonstante ein. Sie gehört zu den wichtigsten, aber auch schwierigsten Aufgaben der praktischen Astronomie; denn da die Beobachtungen, bei denen im Gestirnsort infolge der Aberration die größten Ausschläge eintreten, zu entgegengesetzten Jahres- und Tageszeiten angestellt werden müssen, sind systematische Fehler nur bei besonderen Anordnungen der Messungen und bei besonderen Vorsichtsmaßregeln zu beseitigen. Die Diskussion der Aberrationsformeln (dieser Band S. 56) läßt erkennen, daß man vier verschiedene Methoden anwenden kann: 1. Messung von Rektaszensionen eines Polsternes, 2. Messung von Meridianzenitdistanzen eines Polsternes, beides in oberer und unterer Kulmination, 3. Durchgangsbeobachtungen von Zenitsternen im ersten Vertikal nach dem Vorschlag von *W. Struve*[14]), 4. die *Talcott*sche Methode der Messung von Unterschieden der Zenitdistanzen je zweier in nahezu gleichen Abständen nördlich und südlich vom Zenit kulminierender Sterne nach dem Vorschlag von *Küstner*.[15]) Die Resultate aus allen vorhandenen Bestimmungen zu einem definitiven Wert der Konstante zu-

14) *F. G. W. Struve,* Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes . . . St. Pét. mém. tom. 3 (1844).

15) *F. Küstner,* Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationskonstante. Berlin, Sternw. Ergebn., Heft 3 (1888).

sammenzustellen, ist dreimal unternommen worden, von *Harkness*[16]), *Newcomb*[17]) und *Chandler*[18]) mit den Ergebnissen:

Harkness	20″466 ± 0″011	wahrsch. F.
Newcomb, Pulkowaer Bestimm. .	20″493 ± 0″011	
„ Anderweitige Bestimm.	20″463 ± 0″013	
Chandler, Benutzte Bestimm. . .	20″521 ± 0″005	
„ Ausgeschl. Bestimm. .	20″450.	

Der *Harkness*sche Wert kommt nicht mehr in Betracht, weil dabei der Veränderlichkeit der Polhöhe, die 1888 durch *Küstner* aufgedeckt wurde, noch nicht Rechnung getragen ist. Diese Entdeckung machte eine Neureduktion aller älteren Beobachtungsreihen notwendig, die durch *Chandler* vorgenommen wurde, von dessen Resultaten auch *Newcomb* Gebrauch macht. *Newcomb* faßt ohne ersichtlichen Grund alle Pulkowaer und alle anderweitigen Bestimmungen zu je einem Wert zusammen, wie in obiger Übersicht bereits angegeben. Am durchgreifendsten verfuhr *Chandler*, indem er von 67 Bestimmungen 24 meist ältere wegen des Verdachtes systematischer, nicht mehr zu ermittelnder Fehler ausschloß. Wir geben eine Übersicht seiner Werte:

		Gew.
1. Aus 3 Pulkowaer Reihen Rektasz. von Polaris	20″53	6
2. Aus 10 Reihen Meridianzenitdistanzen von Polsternen . . .	20″514	22
3. Aus 3 Pulkowaer Reihen Durchgangsbeobacht. im I. Vert. .	20″525	24
4. Aus 25 Reihen nach *Küstners* Methode	20″523	151
5. Aus 2 Reihen nach *Loewys* Methode[19])	20″48	5
6. Aus 7 Reihen Rektasz. von Polsternen	[20″45]	5
7. Aus 13 Reihen Meridianzenitdistanzen	[20″46]	5
8. Aus 2 Reihen Durchgangsbeobachtungen im I. Vert. . . .	[20″43]	2
9. Aus 2 Reihen nach *Küstners* Methode	[20″44]	1

Die Werte 1. bis 5. ergeben

$$A = 20''521 \quad \pm 0''007 \text{ mittl. F.}$$

Werden die von *Chandler* ausgeschlossenen Werte 6. bis 9. hinzugezogen, so wird $A = 20''517$.

Der abgerundete Wert

$$A = 20''52 \quad \pm 0''007 \text{ mittl. F.}$$

muß also unter allen Umständen als wohlgesichertes Ergebnis aller bisherigen Messungen betrachtet werden.

16) *Wm. Harkness,* (s. Literatur) p. 27 (1891).

17) Fund. Const., p. 135 (1895).

18) *S. C. Chandler,* The Probable Value of the Constant of Aberration. Astr. Journ., vol. 23, p. 1 (1903).

19) Diese Methode (Paris C. R. 112 (1890)) wurde hier als praktisch fast unausführbar nicht weiter berücksichtigt.

Durch die Aberrationskonstante wird die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn v_0 in ihrem Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Diese Geschwindigkeit hängt nun einerseits mit den Erdbahnelementen zusammen $\left(n = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}\right)$

$$v_0 = na \sec \varphi = \frac{2\pi}{T_s} a \sec \varphi = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{a}} \sec \varphi \quad (m = m'' + \mathfrak{D})$$

und kann daraus berechnet werden, läßt sich aber auch direkt durch spektrographische Methoden messen, wie zuerst *Küstner*[20]) vorgeschlagen und ausgeführt hat. Daß man hieraus dann die Sonnenparallaxe ableiten kann, zeigt Gl. (2); das primäre Resultat ist aber die Aberrationskonstante und gehört daher an diese Stelle; denn durch die Linienverschiebung im Spektrum direkt gemessen wird $\frac{v_0}{c}$. *Küstner* findet hierfür

$$\frac{29{,}617 \pm 0{,}057}{299865 \pm 26} = 0{,}000098766 = 20''37 \pm 0''04.$$

Diesem vorläufigen Wert sind weitere Bestimmungen nach dieser Methode noch nicht gefolgt.

Die oben abgeleitete Beziehung (2) zwischen A, $\pi''_\odot$ und c wird, wenn man $c = 299865$ km/sec einführt:

$$A''\pi''_\odot = [2{,}255696]. \tag{3}$$

Folgende Tafel gibt zusammengehörige Werte von A'' und $\pi''_\odot$:

20″470 . . .	8″8020	20″510 . . .	8″7848
480 . . .	7976	520 . . .	7805
490 . . .	7933	530 . . .	7762
500 . . .	7891	540 . . .	7719.

Die Konstante der *täglichen Aberration* (siehe diesen Band, S. 54), hervorgehend aus der Rotationsgeschwindigkeit ϑ der Erde (in 1ˢ mittl. Zeit)

$$A_t = \frac{\varrho_0}{c} \vartheta = \left(\frac{\varrho_0}{c} 15 \times 1{,}002739\right)'' = 0''320,$$

wird immer aus ϱ_0 und c berechnet, da sie wegen ihrer Kleinheit direkt nicht beobachtbar ist.

7. Lichtgleichung. Die Lichtgleichung, d. h. die Zeit, welche das Licht zur Zurücklegung der halben großen Achse der Erdbahn gebraucht, wird auf astronomischem Wege durch die Beobachtung der Verfinsterungen der Jupitersatelliten bestimmt. Es liegen nur zwei

20) *F. Küstner*, Eine spektrographische Bestimmung der Sonnenparallaxe. Astr. Nachr. 169 (1905), p. 241.

Diskussionen, von *Delambre*[21]) und von *Glasenapp*[22]), vor mit den Resultaten:

Delambre 493^s2

Glasenapp $500^s8 \pm 1^s2$,

deren Mittel $L = 497^s0$

nur als Wert von geringem Gewicht geschätzt werden kann. Man bestimmt die Lichtgleichung jetzt sicherer aus der Erdbahnhalbachse a und der Lichtgeschwindigkeit c:

$$L = \frac{a}{c} = \frac{206\,264{,}8 \times \varrho_0}{c\pi_\odot}.$$

8. Die Mondgleichung in der Erdbewegung. Beziehung zwischen Mondmasse und Sonnenparallaxe. Die Erde bewegt sich im Laufe eines Monats um den Schwerpunkt von Erde und Mond, der, abgesehen von den Planetenstörungen, in elliptischer Bewegung sich befindet. Diese Schwankung wird als Störungsglied in die Erd-(Sonnen-) bewegung eingeführt und hängt in erster Linie vom Verhältnis μ der Mond- zur Erdmasse ab. Der analytische Ausdruck des Hauptgliedes dieser sog. Mondgleichung für die Störung in Länge ist:

$$\frac{\mu}{1+\mu} \frac{\pi''_\odot}{\sin \pi_\mathbb{D}} \sin (L_\mathbb{D} - L_\odot),$$

wo $L_\mathbb{D}$ und $L_\odot$ die mittleren Längen, $\pi_\mathbb{D}$ und $\pi_\odot$ die Parallaxen von Mond und Sonne sind. Der Koeffizient

$$L = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\pi''_\odot}{\sin \pi_\mathbb{D}}$$

kann durch Beobachtungen der Sonne zu den Zeiten der Mondquadraturen ($L_\mathbb{D} - L_\odot = \pm 90^0$) bestimmt werden und leidet natürlich unter der Unsicherheit der Sonnenbeobachtungen überhaupt; systematische Fehler jedoch sind nicht zu befürchten, da stets beide Sonnenränder beobachtet werden können und in beiden Quadraturen der Betrag systematischer Beobachtungsfehler derselbe ist. Immerhin war es ein Fortschritt, als *Gill*[23]) einen neuen Weg erkannte, L durch schärfere Beobachtungen zu ermitteln. Statt der Sonne beobachtet er mehrere Lunationen hindurch einen Körper des Sonnensystems, der nahe an der Erde ist und sich scharf beobachten läßt, z. B. einen kleinen Planeten (Viktoria); in die geozentrischen Örter desselben gehen die Koordinaten der Sonne ein, die die Mondgleichung ent-

21) *J. B. J. Delambre,* Tables écliptiques des satellites de Jupiter. Paris 1817.

22) *S. Glasenapp,* Untersuchung der Verfinsterungen der Jupitersatelliten (russisch). St. Petersburg 1874. (Referat von *Downing,* The Observatory XII, 1889.)

23) Lond. Astr. Soc. Month. Not. 54 (1894); Cape Obs. ann. VI, p. 536.

halten. Man kann also aus ihnen Korrektionen der benutzten Mondgleichung ableiten. Da $\pi_\mathfrak{D}$ gut bekannt ist, führt *Gill*

$$\varkappa = \frac{\mu}{1+\mu}\pi''_\odot \tag{4}$$

als Unbekannte ein, die mit L durch

$$L = \frac{\varkappa}{\sin \pi_\mathfrak{D}}$$

zusammenhängt.

Aus Sonnenbeobachtungen auf sieben Sternwarten 1820—1864 fand *Newcomb* (Fund. Const., p. 142)

$$L = 6''485 \pm 0''027 \text{ mittl. F.}$$

Gill (Cape obs. ann., vol. VI, part 6, p. 29; korrigiert nach Monthly, Not., vol. 70, p. 74) fand

$$L = 6''413 \pm 0''013.$$

Hinks (Monthly Not. 70 (1909), p. 72) fand aus den Beobachtungen des Eros 1900/01

$$L = 6''431 \pm 0''005.$$

Werden diese drei Werte von L nach Maßgabe ihrer mittleren Fehler vereinigt, so ergibt sich

$$L = 6''430 \pm 0''005 \text{ mittl. F.}$$

und daraus mit $\sin \pi_\mathfrak{D} = [8{,}21990]$

$$\varkappa = 0{,}10669 \pm 0{,}00008.$$

Setzt man $\mu = 1/E$, so wird

$$\frac{\mu}{1+\mu} = \frac{1}{1+E}$$

und daher die Gleichung (4)

$$(1+E)\varkappa = \pi''_\odot. \tag{5}$$

Diese Beziehung zwischen der Mondmasse und der Sonnenparallaxe wird zur Bestimmung der Mondmasse benutzt (siehe Nr. 20), kann aber auch, allerdings mit geringem Vorteil, zur Ermittlung der Sonnenparallaxe verwendet werden, wenn die Mondmasse anderweitig bekannt geworden ist (Nutation).

9. Die Präzessions- und die Nutationskonstante. Über Theorie und Verwendung der Präzession und Nutation ist auf die Artikel VI 2, 2 (*Cohn*) und VI 2, 22, sowie auf die Lehrbücher der Mechanik des Himmels[24]) zu verweisen.

---

24) Z. B. *F. Tisserand,* Mécanique céleste, t. II, p. 371; *Th. Oppolzer,* Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Band I², p. 124 (gibt die Entwicklungen in größter Ausdehnung); *J. Bauschinger,* Bahnbestimmung der Himmelskörper, p. 51; *S. Newcomb,* A Compendium of Spherical Astronomy, p. 225.

Infolge der Anziehung von Mond und Sonne auf das Erdsphäroid geht der Knoten des Erdäquators auf der *festen* Ekliptik (für eine bestimmte Epoche, hier durchweg 1850,0) mit einer Geschwindigkeit zurück, die Lunisolarpräzession in Länge genannt wird und deren Betrag durch die Theorie in der Form geboten wird:

$$\text{Lunisolarpräzession} = P_{\mathfrak{D}} + P_{\odot} \text{ in einem jul. Jahr}$$

(6)
$$P_{\mathfrak{D}} = [5{,}975052] \cos\varepsilon \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C},$$
$$P_{\odot} = [3{,}72509] \cos\varepsilon \frac{C-A}{C}.$$

Die Wirkung des Mondes ist durch $P_{\mathfrak{D}}$, die der Sonne durch $P_{\odot}$ gegeben. Die mit ihren Logarithmen angesetzten Zahlenkoeffizienten[25]) sind lediglich aus den Elementen der Mond- und Sonnenbahn zusammengesetzt und können als Konstante betrachtet werden. Es ist ferner

ε = Schiefe der Ekliptik für 1850,0 = 23°27′31″68,
μ = Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse,
A = Trägheitsmoment der Erde, bezogen auf Achsen im Äquator,
C = Trägheitsmoment der Erde, bezogen auf die Drehungsachse der Erde.

Hiernach ist die Größe

(7) $$\mathbf{P} = \frac{P_{\mathfrak{D}} + P_{\odot}}{\cos\varepsilon} = \left\{[5{,}975052] \frac{\mu}{1+\mu} + [3{,}72509]\right\} \frac{C-A}{C}$$

eine absolute Konstante. *Newcomb* führt sie als „Präzessionskonstante" ein, während man früher die unten eingeführte allgemeine Präzession mit diesem Namen belegte. Da aber ε sich stark ändert, ist $P_{\mathfrak{D}} + P_{\odot}$ ebenfalls starken Änderungen unterworfen, und es ist daher vorzuziehen, $\mathbf{P}$ als „Präzessionskonstante" zu verwenden.

Die Rückwärtsbewegung des Knotens des Erdäquators auf der durch die Planetenstörungen *bewegten* Ekliptik geschieht mit einer Geschwindigkeit, welche „allgemeine Präzession in Länge" genannt wird. Ihr Betrag wird erhalten, wenn zur Lunisolarpräzession die sogenannte „Planetenpräzession" hinzugefügt wird, deren Wert $-\varkappa \sin L \operatorname{cotg}\varepsilon = -0''1231$ lediglich durch die Theorie aus den Planetenmassen berechnet wird. Es wird also

(8) $$\text{Allgemeine Präzession} = \mathbf{P}\cos\varepsilon - 0''1231.$$

Aus diesen Größen können die entsprechenden Geschwindigkeiten bezogen auf das System des Äquators berechnet werden, nämlich die

25) *S. Newcomb,* Fund. Const., p. 132.

(9) Allgemeine Präzession in Rektasz. $= m = \mathbf{P} \cos \varepsilon^2 - 0''1342$,
Lunisolarpräzession in Dekl. . . . . $= n = \mathbf{P} \cos \varepsilon \sin \varepsilon$.

Diese beiden Größen m und n können und müssen aus den Beobachtungen der Fixsterne bestimmt werden, m aus den Rektaszensionen, n aus den Deklinationen. Man benutzt hierzu Beobachtungen derselben Gestirne zu zwei möglichst voneinander entfernten Epochen. Da bei allen diesen Bestimmungen naturgemäß wenigstens teilweise dasselbe Beobachtungsmaterial verwendet wird, wird hier auf die Anführung früherer Bestimmungen verzichtet und nur die neueste von *Newcomb* ausgeführte angegeben[26]): die instantanen Geschwindigkeiten für ein *tropisches* Jahr und gültig für die Epoche 1850 ergaben sich zu:

$$m = 46''0711, \quad n = 20''0511,$$

und hieraus dann:

(10) Allgemeine Präzession in Länge $50''2453$,
Lunisolarpräzession „ „ $50''3684$

und schließlich

(11) $$\mathbf{P} = 54''9066 - 0''0000364\ T$$

(T in Jahrhunderten von 1850 aus gezählt). Es ist hier die geringe Veränderlichkeit von **P** mitangegeben, die eine Folge der säkularen Änderung der Exzentrizität der Erdbahn ist, welche auf die Zahlenwerte in (7) einwirkt; sie ist natürlich rein theoretisch.

Die Bestimmung der Präzessionskonstante ist eine schwer zu befriedigende Aufgabe. Schon die Verwendung recht ungleichförmigen Materiales, wie es durch die Verschiedenheit der Epochen geboten ist, erschwert die Lösung. Neuerdings erkannte systematische Verfälschungen der Beobachtungen, wie die Helligkeitsgleichung bei Meridiandurchgängen, lassen sich bei den älteren Beobachtungen nicht mehr berücksichtigen, ebenso die Unterschiede, die bei Tag- und Nachtbeobachtungen auftreten. Aber auch prinzipielle Bedenken machen sich dagegen geltend, daß man in dem bestimmten Werte P das vor sich habe, was er nach Gleichung (7) darstellen soll. Wenn die benutzten Sterne einem System angehören, das eine Rotationsbewegung ausführt, dann läßt sich diese von der Präzessionsbewegung nicht trennen, da man keine absolut feste Richtung am Himmel hat.[26a]) An-

26) *S. Newcomb*, A new determination of the Precessional Constant. Wash. Astr. Pap., vol. VIII, part 1. Washington 1898. Die definitiven Werte stehen Seite 72.

26a) *H. Seeliger*, Über die sogenannte absolute Bewegung. München Ber. 36 (1906).

dere Schwierigkeiten bereiten die Eigenbewegungen der Fixsterne und ihr systematischer Charakter in der Apexbewegung. Die ausschließliche Benutzung kleinster Sterne, bei denen noch am ehesten die genannten Einflüsse verschwinden werden, scheitert gegenwärtig noch an dem Mangel von älterem Beobachtungsmaterial. Aber die Fragen, die in nicht ferner Zeit an die Stellarastronomie herantreten werden, werden nachdrücklich auf die Notwendigkeit einer möglichst einwandfreien Kenntnis der Präzessionskonstante hinweisen.

Das Hauptglied der *Nutation* in Schiefe, mit dem das Hauptglied der Nutation in Länge theoretisch zusammenhängt, hat, wie die Theorie lehrt, die Zusammensetzung

$$\mathrm{N} = [5{,}40289] \cos\varepsilon \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C}, \tag{12}$$

wo wieder der logarithmisch angesetzte Zahlenfaktor eine genau bekannte, aus den Elementen der Mond- und Sonnenbahn berechenbare Größe ist. Insbesondere geht in ihn ein die mittlere Bewegung des Mondknotens auf der Ekliptik, die bekanntlich den Knoten der Mondbahn in etwa $18\frac{2}{3}$ Jahren durch den ganzen Umkreis führt. Die Länge dieses Knotens ist auch das Argument der Hauptglieder der Nutation. Mit dem Wert von $\varepsilon = 23^0 27' 31''68$ für 1850,0 wird die Gleich. (12)

$$\mathrm{N} = [5{,}36542] \frac{\mu}{1+\mu} \frac{C-A}{C}. \tag{13}$$

Die Bestimmung der Nutationskonstante aus Gestirnsbeobachtungen geschieht, wie die Gleichungen, dieser Band, S. 40, lehren, durch Verfolgung mehrerer Gestirnsörter, am besten von Polsternen, durch eine ganze Periode des Mondknotenumlaufes. Sind die Gestirne durch die Stunden der Rektaszension wohl verteilt, so ist zu erwarten, daß sich alle systematischen Fehler von selbst eliminieren. Die berühmteste Bestimmung ist die von *Peters*[27]), dessen Wert für $\mathrm{N} = 9''223 \pm 0''020$ mehr als 50 Jahre in fast allgemeinem Gebrauch gewesen ist. Später hat *Newcomb* das gesamte Material, hauptsächlich von den Sternwarten Greenwich, Pulkowa und Washington herrührend, neu diskutiert und gefunden[28])

$$\mathrm{N} = 9''210 \pm 0''008.$$

Die letzte Zusammenfassung gibt *Chandler*[29]) mit Benutzung von nahezu demselben Material. Hier ist seine Tabelle:

---

27) *C. A. F. Peters,* Numerus constans Nutationis. St. Pét. Mém. 3 (1844).
28) Fund. Const., p. 131.
29) Astr. Journ. 16 (1895), p. 1.

	N	p
Aus Rektaszensionen:		
Peters (Dorpat), Polaris	9″216	4
De Ball (Pulkowa), 3 Polsterne	217	7
Newcomb (Greenwich), 4 Polsterne	196	10
Aus Deklinationen:		
Lundahl (Dorpat), Polaris	236	1
Chandler (Pulkowa), 3 Zenitsterne	210	2
De Ball (Pulkowa), 3 Polsterne	234	7
Newcomb (Greenwich), 47 Sterne	194	21
Newcomb (Washington), 69 Sterne	204	9
Chandler (Greenwich), 34 Sterne	192	25

Das Mittel ist $N = 9''202$.

Gegenwärtig gilt als sicherster Wert der von der internationalen Konferenz zu Paris 1896 gewählte[30]):

$$N = 9''210 \qquad \text{(gültig für 1900).} \tag{14}$$

N ist etwas veränderlich wegen des Faktors $\cos\varepsilon$ in (12) und der Säkularänderung von ε. Für die hier angenommene Epoche 1850 wird

$$N = 9''214 \pm 0''008,$$

ein Wert, den wir für das Folgende zugrundelegen wollen.

Die beiden Gleichungen (7) und (13) geben nach Einsetzung der gewonnenen Zahlenwerte (**P** ist um 0″0012 korrigiert zur Reduktion auf das julianische Jahr als Einheit)

$$\begin{aligned} 54''9078 &= \left\{[5{,}975052]\,\frac{\mu}{1+\mu} + [3{,}72509]\right\}\frac{C-A}{C}, \\ 9''214 &= [5{,}36542]\,\frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{C-A}{C} \end{aligned} \tag{15}$$

und können zur Bestimmung von μ und $\frac{C-A}{C}$ dienen. Die Auflösung ergibt

$$\frac{C-A}{C} = 0{,}003278 = 1/305{,}1$$

$$\mu = \frac{1}{81{,}51 \pm 0{,}20}. \tag{16}$$

$\frac{C-A}{C}$ kann auch noch aus der Mondbewegung bestimmt werden (Nr. **10**), und μ ergibt sich auch durch die Mondgleichung der Erdbewegung, wenn man die Sonnenparallaxe als bekannt annimmt (Nr. 8). Weiteres siehe Nr. **10** und Nr. **20**.

10. Die Trägheitsmomente und die Abplattung der Erde. Diese beiden Konstanten müssen hier, als mit mehreren astronomischen Konstanten zusammenhängend, mitbehandelt werden. Es wurde in Nr. 9 gefunden, daß der Unterschied der Trägheitsmomente um die Polarachse und um eine Äquatorialachse $C - A$ die Erscheinungen

30) Paris Bull. astr. 15 (1898).

der Präzession und Nutation erzeugt und daß aus den beobachteten Werten dieser letzteren gefunden wird:

$$\frac{C-A}{C} = 0{,}003278. \tag{17}$$

Diese selbe Differenz wirkt nun nicht nur auf die Lage der Erdachse, sondern weiter auch auf den Mond und erzeugt in dessen Bewegung einige periodische Störungsglieder in Länge und Breite von etwa 8″ Größe und der Periode eines Mondknotenumlaufes bzw. eines Mondumlaufes um die Erde, die beobachtet und zur Kenntnis von C und A verwertet werden können. Das Glied in Länge wurde von *Tobias Mayer* empirisch entdeckt, dann von *Laplace* erklärt, unter Hinzufügung der Glieder in Breite. Die Behandlung dieser Glieder gibt *Laplace* in Méc. cél., livre VII, no. 20, seine Zahlen sind heute ohne Bedeutung. *Hansen* (Darlegung I, p. 459; II, p. 273) zeigt zuerst ihre genaue Zusammensetzung, vergleicht sie mit der Beobachtung und leitet aus dem Breitenglied $C'-A$ und die Abplattung ab. *Helmert* (H. G. II, p. 469) vervollständigt *Hansens* Rechnung; ihm sind die folgenden Zahlenangaben entnommen: aus den Gliedern in Breite und Länge folgt

$$\frac{1}{M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\frac{1}{\varrho_0^2} = 0{,}001070 \text{ bzw. } 0{,}001103, \tag{18}$$

$$\text{im Mittel} = 0{,}001086,$$

worin M und ϱ_0 Masse und Äquatorradius der Erde bedeuten.

Newcomb (Astr. Pap., vol. IX, p. 225) gewinnt mittelst des Hauptgliedes in Breite aus einer sehr großen Reihe genauer Mondbeobachtungen

$$\frac{1}{M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\frac{1}{\varrho_0^2} = 0{,}001117 \tag{19}$$

und macht auf die Unsicherheit dieses Resultates aufmerksam, da es die genaue Kenntnis der Schiefe der Ekliptik voraussetze.

Außer diesen periodischen Störungsgliedern erzeugt die Differenz $C - A$ säkuläre Störungsglieder in der Bewegung der Länge des Perihels und des Knotens der Mondbahn; daß diese Glieder nicht unmerklich sind, hat zuerst *Hansen* (Darlegungen I, p. 470) ausgesprochen; *Newcomb* (Astr. Pap. IX, p. 225) leitet aus der Bewegung des Perihels und des Knotens ab:

$$\frac{1}{M}\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\frac{1}{\varrho_0^2} = 0{,}001117 \text{ bzw. } 0{,}001121, \tag{20}$$

$$\text{im Mittel} = 0{,}001119.$$

Aus den Werten (18), (19), (20) ergibt sich mit den Gewichten 2, 1, 2, wenn zugleich $B = A$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{M\varrho_0^2}(C-A) = 0{,}001105. \tag{21}$$

Werden die Gleichungen (17) und (21) verbunden, so folgt (*Hansen*, Darlegung I, p. 472)

$$\begin{aligned} C &= M\varrho_0^2\, 0{,}3371, \\ A &= M\varrho_0^2\, 0{,}3360. \end{aligned} \tag{22}$$

Die hieraus sich ergebenden Schlüsse auf die Massenanordnung des Erdinneren gehören nicht hierher.

Mit den Trägheitsmomenten des Erdkörpers hängt die *Abplattung* α durch die von *Laplace* aufgestellte Formel zusammen:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{C-A}{M\varrho_0^2} + \frac{1}{2}\mathfrak{c},$$

die von *Helmert* (H. G. II, p. 83) in die merklich genauere verbessert wurde:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{C-A}{M\varrho_0^2}(1+\alpha) + \frac{1}{2}\mathfrak{c}\left(1-\frac{3}{2}\mathfrak{c}\right) - \frac{1}{7}\alpha^2; \tag{23}$$

hierin bedeutet $\mathfrak{c}$ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere am Äquator, also nach Nr. 2 $\mathfrak{c} = 0{,}0034672$.

Mit dem oben gefundenen Werte

$$\frac{1}{M}\frac{C-A}{\varrho_0^2} = 0{,}001105$$

folgt dann:

$$\alpha = 0{,}003386 = 1 : 295{,}3. \tag{24}$$

Aus Schweremessungen mittelst des Sekundenpendels hat *Helmert* abgeleitet (siehe VI 1, 3 (*Pizzetti*), Nr. **51**)

$$\alpha = 1 : 298{,}3 \tag{25}$$

und *Iwanoff* (ebendort)

$$\alpha = 1 : 296{,}6. \tag{26}$$

Bekanntlich geben die geodätischen Vermessungen Abplattungen

$$\frac{1}{299{,}153}\ (\textit{Bessel}), \quad \frac{1}{293{,}465}\ (\textit{Clarke}),$$

zwischen denen die obigen liegen.

11. Die Schiefe der Ekliptik und der Frühlingspunkt. Die Neigung des Erdäquators gegen die Erdbahn, die Schiefe der Ekliptik ε und der Knoten beider Ebenen, der Frühlingspunkt Υ, gehen aus Meridianbeobachtungen der Sonne hervor, die in der Nähe der vier Hauptpunkte der Sonnenbahn angestellt werden. Deklinationsbeobachtungen zu den Zeiten der Solstitien geben ε, Deklinationsbeobachtungen und Durchgänge der Sonne und der Zeitsterne um die Zeit der Äquinoktien geben Υ. Die Praxis dieser Bestimmungen ist

in dem Artikel VI 2, 2 (*Cohn*), Nr. 3—5 auseinandergesetzt. Die Bestimmung der Schiefe leidet, außer an der Unsicherheit der Sonnenbeobachtungen überhaupt, wesentlich daran, daß Beobachtungen verglichen werden müssen, die unter ganz verschiedenen atmosphärischen Bedingungen zustande kommen, Sommer- und Winterbeobachtungen, die außer verschiedenen instrumentellen Einflüssen auch Unterschieden der Refraktion unterliegen, denen schwierig beizukommen ist. Gehäuft werden die Schwierigkeiten bei Bestimmungen der Säkularänderung der Schiefe, weil hier notwendig noch verschiedene Beobachter und Instrumente konkurrieren. *Newcomb* (Fund. Const., p. 33) hat aus einer eingehenden Diskussion sich schließlich für den in den Sonnentafeln angenommenen Wert entschieden:

1900, Jan. 0 Greenwich 0^h M. Z.

(27) $\varepsilon = 23^\circ 27' 8''26 - 46''845\,T - 0''0059\,T^2 + 0''00181\,T^3$

(T in jul. Jahrhunderten von 1900 an gezählt).

Die Festlegung des Frühlingspunktes hängt sowohl von Deklinationsmessungen als von Durchgangsbeobachtungen ab. Wird die Schiefe der Ekliptik als bekannt angenommen, so gibt die gemessene Deklination der Sonne $\delta_\odot$ die Rektaszension $\alpha_\odot$ durch

$$\sin \alpha_\odot = \operatorname{cotg} \varepsilon \operatorname{tg} \delta_\odot,$$

$\alpha_\odot$ aber bestimmt den Abstand der Sonne vom Frühlingspunkt im Moment des Durchganges und damit diesen selbst. Sofort angeschlossene Durchgänge von Fixsternen legen den Frühlingspunkt auch durch diese fest. Das auf diese Weise aufgestellte System von Fixsternrektaszensionen (das Fundamentalsystem) dient dann statt des direkten Anschlusses an Υ für die Koordinatenmessung am Himmel. Sein Fehler geht in alle Messungen ein und muß sorgfältig überwacht werden. Für weitere Einzelheiten wird auf die unten angeführten Werke[31]) verwiesen.

12. Tropisches und siderisches Jahr. Durch Bearbeitung von etwa 40000 Sonnenbeobachtungen in dem Zeitraum von 1750—1890 fand *Newcomb*[32]) für die mittlere tropische (d. h. auf den Frühlingspunkt bezogene) Bewegung der Sonne in einem julianischen Jahrhundert von 36525 mittleren Sonnentagen den Betrag

31) *A. Wagner,* Poulkova obs. 3 (1870), 12 (1887); *A. Auwers,* Neue Reduktion der Bradleyschen Beobachtungen aus den Jahren 1750—62, 1, St. Petersburg 1903; *F. Cohn,* Königsb. Beob. 39 (1899); *S. Newcomb,* Fund. Const., p. 15; *S. Newcomb,* Catalogue of 1098 Clock and Zodiacal Stars, Astr. Pap., vol. 1; *S. Newcomb,* Catalogue of Fundamental Stars, Astr. Pap., vol. VIII.

32) Fund. Const., p. 182.

$$129602766''74, \text{ (gültig für 1850),}$$

der vor Einführung in die Sonnentafeln[33]) noch um den Betrag $+\ 0''30$ verbessert und auf die Epoche 1900 gebracht wurde (durch Anbringung der berechneten Säkularstörungen); er kam dann auf

$$(28) \qquad 129602768''13 + 2''178\ T,$$

worin T in julianischen Jahrhunderten von 1900 Jan. 0 $0^h\ 0^m\ 0^s$ mittl. Zeit Greenwich ab zu zählen ist; er ist die Grundlage der Zeitrechnung. Zuerst folgt aus ihm für die Dauer eines *tropischen Jahres*, d. h. des Zeitraumes, den der Mittelpunkt der Sonne von einem Durchgang durch den Frühlingspunkt bis zum Durchgang durch den nächsten, inzwischen rückwärts gegangenen braucht:

$$(29) \qquad T_t = \frac{365{,}25 \times 1296000}{1296027''6813 + 0''02178\ T} = \frac{1296000''}{3548''33043 + 0''0000596\ T}$$
$$= 365{,}24220 - 0{,}00000614\ T \text{ Tage.}$$

Sodann der Wert für die mittlere tägliche *tropische* Bewegung:

$$(30) \qquad 3548''33043 + 0''0000596\ T.$$

Durch Subtraktion des eintägigen Betrages der allgemeinen Präzession in Länge, nämlich

$$\frac{50''2564 + 0''0222\ T}{365{,}2422} = 0''13760 + 0''000060\ T$$

erhält man ferner die mittlere tägliche *siderische Bewegung* der Sonne:

$$(31) \qquad n'' = 3548''19283$$

und die Dauer des *siderischen Jahres*:

$$(32) \qquad T_s = \frac{1296000''}{3548''19283} = 365{,}25636 \text{ Tage} = 31558148^s9 \text{ m. Z.}$$

Das tropische Jahr beginnt nach einer von *Bessel* getroffenen Festsetzung in dem absoluten von keiner Ortszeit abhängigen Moment, in welchem die Größe A (s. Nr. **13**, Gl. 34) ohne die Nutation, also die mittlere AR. der mittleren Sonne

$$(33) \qquad A_0 = 279^0\ 41'\ 27''54 + (3548''33043 \times 365{,}25)\ t$$

jeweils den Betrag 280^0 erreicht. Auf diesen Moment (bezeichnet mit z. B. 1919,0) pflegt man die Angaben der Fixsternastronomie zu beziehen: seine Beziehung zum Beginn des jeweiligen bürgerlichen Jahres wird ein für allemal vorausberechnet (s. *Bauschinger*, Tafeln der theor. Astr. Taf. XXXIa)

13. Sternzeit und mittlere Zeit. Die Zeit wird durch die Umdrehung der Erde um ihre Achse, die als gleichförmig angenommen

33) Astr. Pap. Vol. VI, p. 9.

wird, gemessen; Zeitmessung wird dadurch Winkelmessung. Es muß ein Punkt an der Himmelssphäre vereinbart werden und auf der Erde ein Index, der stets zugänglich ist. Der Winkel zwischen beiden mißt die stattgehabte Bewegung und gibt das Maß für die dazu gebrauchte Zeit. Als Index gilt der Meridian des Erdortes, der mit der rotierenden Erde die Himmelssphäre in der Richtung von West nach Ost überstreicht. Als Fixpunkte an der Sphäre sind zwei im Gebrauch, die beide auf dem Äquator liegen: der Frühlingspunkt F und der Mittelpunkt S einer fingierten im Äquator sich gleichmäßig bewegenden Sonne, die stets möglichst nahe an der wahren, sich ungleichförmig bewegenden Sonne bleibt. Der erste führt zur Sternzeit, der zweite zur mittleren Sonnenzeit. Der Winkel zwischen Meridian und F bzw. S, in der entgegengesetzten Richtung der Bewegung vom Meridian aus gezählt, heißt Stundenwinkel und mißt die Zeit.

Der Frühlingspunkt wird durch Präzession und Nutation (s. Nr. 9) bewegt, aber so nahe gleichförmig, daß seiner Benutzung zur Herstellung eines gleichförmigen Zeitmaßes kein Bedenken entgegensteht. Der Moment, in dem der Meridian eines Ortes über den wahren Frühlingspunkt hinweggeht, ist der Beginn eines Zeitintervalles, des *Sterntages*, dessen Ende mit der nächsten Koinzidenz von Meridian und Frühlingspunkt zusammenfällt. Der Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes mißt die seit Beginn des Sterntages verflossene *Ortssternzeit.*

Die mittlere (fingierte) Sonne bewegt sich mit derselben mittleren Geschwindigkeit im Äquator, wie die wahre in der Ekliptik, d. h. ihre Rektaszension wird durch folgenden Ausdruck definiert[34])

$$(34) \qquad \begin{aligned} A = {} & 279^0\,41'\,27''\,54 + (3548''33043 \times 365{,}25)\,t \\ & + 0''0001395\,t^2 + \text{Nutation in AR} \end{aligned}$$

oder in Zeitteilung:

$$\begin{aligned} A = {} & 18^h\,38^m\,45^s\,836 + (3^m\,56^s\,55536 \times 365{,}25)\,t \\ & + 0^s\,0000093\,t^2 + \text{Nutation in AR,} \end{aligned}$$

wobei t in julianischen Jahren von dem Moment 1900 Jan. 0 = 1899 Dez. 31 0^h mittlerer Zeit Greenwich an gezählt ist. Der Moment, in welchem der Meridian eines Ortes über diese mittlere Sonne hinweggeht (mittlerer Mittag) ist der Beginn eines Zeitintervalles, des *mittleren Sonnentages*, dessen Ende mit der nächsten Koinzidenz zusammenfällt. Der Stundenwinkel der mittleren Sonne mißt die seit Beginn des mittleren Sonnentages verflossene *mittlere Ortszeit.*

34) *Newcomb*, Astr. Pap. VI, p. 9.

Die Formel (34) zeigt, daß die mittlere Sonne sich in jedem mittleren Tag um den Winkel

$$3548''33043 = 3^m 56^s 55536$$

in der Richtung der Rotationsbewegung, also von West nach Ost, vom Frühlingspunkt entfernt. Da der Meridian in einem Sterntag

$$360^0 = 1296000'' = 86400^s$$

beschreibt, braucht er

$$\frac{3548''33043}{1296000} = \frac{236^s 55536}{86400} = 0{,}002737909 \text{ Sterntage},$$

um die bewegte Sonne einzuholen, und es ist daher

(35) 1 mittl. Sonnentag = 1,002737909 Sterntage,

woraus 1 Sterntag = 0,997269567 mittl. Sonnentage

oder 1 mittl. Sonnentag = $24^h\ 3^m\ 56^s 55536$ Sternzeit

1 Sterntag = $23^h\ 56^m\ 4^s 09058$ mittl. Zeit

= $86164^s 09058$ mittl. Zeit.

Der Überschuß von $3^m 56^s 55536$ Sternzeit der Dauer eines mittleren Tages über die Dauer eines Sterntages häuft sich in

$$\frac{86400}{236{,}55536} = 365{,}24220 \text{ mittl. Tagen}$$

zu einem vollen Sterntag an. Man hat also zwischen Sternzeit und mittlerer Zeit auch die Beziehung:

(36) 366,24220 Sterntage = 365,24220 mittl. Tage.

14. Verwendung der Schweremessungen. Wir stellen hier die Formeln zusammen, die die Benutzung der Schweremessungen auf der Erdoberfläche für astronomische Zwecke vermitteln.

Nennt man $1, m'', m''\mu$ die Massen von Sonne, Erde (ohne Mond) und Mond, $m_1'' = m''(1+\mu)$ die Masse von Erde und Mond zusammen, so ergibt sich für die Anziehung G_1 in der mittleren Breite φ_1', der der Erdradius ϱ_1 entspricht, die Formel

(37) $$k^2 m'' = \varrho_1^2 G_1,$$

worin G_1 durch $\pi^2 L_1$ bestimmt ist (L_1 = Länge des Sekundenpendels). Damit verbinden wir die *Kepler*schen Gleichungen für die Mond- und für die Erdbewegung:

(38) $$k^2 m''(1+\mu) = n_\mathfrak{D}^2 a_\mathfrak{D}^3$$

(39) $$k^2(1 + m''(1+\mu)) = n''^2 a''^3.$$

Aus (37) und (38) folgt:

$$\frac{\varrho_1}{a_\mathfrak{D}} = \left(\frac{\varrho_1}{G_1} \cdot \frac{n_\mathfrak{D}^2}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\varrho_1}{\pi^2 L_1} \cdot \frac{n_\mathfrak{D}^2}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$$

oder, wenn mit $T_\mathfrak{D}$ die siderische Umlaufszeit des Mondes in Sekunden bezeichnet und $n_\mathfrak{D} = \frac{2\pi}{T_\mathfrak{D}}$ gesetzt wird:

$$(40) \quad \sin \pi_\mathfrak{D}' = \frac{\varrho_0}{a_\mathfrak{D}} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\frac{\varrho_1}{a_\mathfrak{D}} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\left(\frac{4\pi^2\varrho_1}{G_1(1+\mu)T_\mathfrak{D}^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\left(\frac{4}{T_\mathfrak{D}^2}\frac{\varrho_1}{L_1}\frac{1}{1+\mu}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der ungestörten Mondparallaxe $\pi_\mathfrak{D}'$. Die gestörte ergibt sich hieraus durch Hinzufügung des konstanten Betrages der Störungen oder durch Multiplikation mit dem Faktor 1,0009077; dies gibt dann die Konstante im sin der Mondparallaxe (Nr. **16**).

Aus (37) und (39) folgt:

$$(41) \quad \begin{aligned} \sin \pi_\odot &= \frac{\varrho_0}{a''} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{\varrho_1}{G_1(1+\mu)}}\sqrt[3]{\frac{m_1''}{1+m_1''}} \\ &= \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\sqrt[3]{\frac{4}{T^2}\frac{\varrho_1}{L_1(1+\mu)}}\sqrt[3]{\frac{m_1''}{1+m_1''}}, \end{aligned}$$

wo gesetzt ist $n'' = \frac{2\pi}{T}$ und T die siderische Umlaufszeit der Erde in Sekunden bedeutet. Diese Gleichung ist die Beziehung zwischen Sonnenparallaxe und Erdmasse (Nr. **15**).

Wir fügen hinzu, daß, wenn an Stelle der Anziehung auf einen Punkt der Erdoberfläche die Anziehung auf den Mond herangezogen wird, die entsprechende Beziehung sich aus (38) und (39) ergibt:

$$(42) \quad \frac{1}{m_1''} = \frac{\left(\frac{n''}{n_\mathfrak{D}}\right)^2}{\left(\frac{a_\mathfrak{D}}{a}\right)^3} - 1 = \frac{\left(\frac{T_\mathfrak{D}}{T}\right)^2}{\left(\frac{\sin\pi_\odot}{\sin\pi_\mathfrak{D}}\right)^3} - 1,$$

wo $T_\mathfrak{D}$ die siderische Umlaufszeit des Mondes um die Erde ist.

Hieraus kann man die Erdmasse bestimmen (Nr. **17**), wenn das Verhältnis der Sonnen- zur Mondparallaxe irgendwie bekannt wird.

15. Die Erdmasse und ihre Beziehung zur Sonnenparallaxe. Durch Vergleichung der Anziehung G_1, welche die Masse der Erde auf einen Punkt ihrer Oberfläche ausübt und die durch die Messung der Länge L_1 des einfachen Sekundenpendels gefunden wird, mit jener, welche sie auf die Sonne ausübt, ergibt sich die Beziehung (41) zwischen der Erdmasse und der Sonnenparallaxe:

$$\sin \pi_\odot = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{\varrho_1}{G_1(1+\mu)}}\sqrt[3]{\frac{m_1''}{1+m_1''}}.$$

Hierin ist die Anziehung G_1 für mittlere Breite gebraucht, da die Mechanik zeigt, daß Punkte, die auf dem Parallel der geozentrischen Breite φ_1' der Erdoberfläche liegen, welcher durch $\sin\varphi_1' = \sqrt{\frac{1}{3}}$

bestimmt ist, bei jeder Hypothese über Gestalt und Massenordnung der Erde so angezogen werden, als ob deren Gesamtmasse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Trägt man in die Formel die Zahlenwerte aus Nr. 2, **12**, **20**

$$\varrho_0 = [6{,}8046435]\ \text{m} \qquad \varrho_1 = [6{,}8041577]\ \text{m}$$

$$G_1 = [0{,}992130]\ \text{m/sec.} \qquad T = [7{,}4991115]\ \text{Sekunden}$$

$$\mu = 1 : 81{,}53$$

ein, so folgt:

$$\pi''_\odot = 607''02 \sqrt[3]{\frac{m_1''}{1 + m_1''}}$$

oder bequemer, wenn $M = \frac{1}{m_1''}$ gesetzt wird,

$$\pi''_\odot \sqrt[3]{M} = 607''02 \qquad [2{,}783202] \tag{43}$$

M = Sonnenmasse in Einheiten der (Erde + Mond) Masse.

Folgende Tabelle enthält zusammengehörige Werte von $\pi_\odot$ und M

$\pi_\odot$	M (Erde + Mond)	
8″770	331590	1130
780	330460	1130
790	329330	1120
800	328210	1120
810	327090	

Durch Differenzieren der Formel und Einführung der Abplattung α der Erde durch $\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = 1 + \frac{\alpha}{3}$ erhält man:

$$d\pi''_\odot = -\underset{-10}{[4{,}94924]}\, dM + \underset{-10}{[3{,}66271]}\, d\varrho_1 - \underset{-10}{[5{,}51708]}\, d\frac{1}{\alpha}.$$

und sieht, daß 1000 m Unsicherheit in ϱ_1 und 10 Einheiten im Nenner von α noch keine 0″001 in $\pi''_\odot$ hervorbringen, daß also die Zahl 607″02 hier als Konstante gelten kann. Wenn daher die Säkularstörungen den Wert der Erdmasse auf 0,003 ihres Betrages genau geben, so folgt aus der Formel (43) die Sonnenparallaxe auf 0″01 genau. Jedenfalls ist man gezwungen, die Werte von $\pi_\odot$ und M so zu wählen, daß (43) erfüllt ist.

Der Mond.

16. Die Mondparallaxe. Die Bestimmung der Mondparallaxe kann wie die der Sonnenparallaxe auf zwei Wegen erfolgen, dem trigonometrischen und dem durch Benutzung der Eigenschaften der Gravitation. Der erste ist hier wegen der Größe des gesuchten Winkels

technisch leicht ausführbar, leidet aber an dem Umstande, eine genaue Kenntnis der Erdabplattung vorauszusetzen, in so hohem Maße, daß man umgekehrt vorgeschlagen hat, durch Messungen der Mondparallaxe die Erdgestalt zu bestimmen (siehe *Helmert*, Höh. Geod. II, p. 451). Das scheitert nur daran, daß die Methode einerseits genauere Mondtafeln voraussetzt, als wir zurzeit besitzen, und daß sie andererseits von systematischen Messungsfehlern freiere Meridianbeobachtungen von absoluten Monddeklinationen verlangt, als zurzeit unsere Instrumente leisten können. Immerhin ziehen es die Mondtheoretiker seit *Laplace* vor, die Mondparallaxe durch die Gravitation zu ermitteln, besonders seitdem ein großes Netz von Schweremessungen vorliegt.

Die trigonometrische Methode besteht in der Vergleichung von Meridiandeklinationen des Mondes, die an zwei auf demselben Meridian liegenden Sternwarten der Nord- und Südhalbkugel der Erde angestellt werden z. B. in Greenwich und am Cape. Es liegen zwei Bearbeitungen der Mondbeobachtungen dieser beiden und einiger anderer Sternwarten vor, die von *Breen* (Lond. Astr. Soc. mem. 32 (1863)) und die von *Stone* (ebenda 34 (1865)). Nach der Interpretation von *Newcomb* (Astr. Pap., vol. I, p. 79) sind ihre Resultate:

(44)
$$\begin{aligned} &\textit{Breen} && \sin \pi_{\mathfrak{D}} = 3422''62 \sin 1'' \\ &\textit{Stone} && \sin \pi_{\mathfrak{D}} = 3422,\ 70 \sin 1''. \end{aligned}$$

Ersterer Wert beruht auf 123 Beobachtungen des Mondes, angestellt am Cape von 1830—1837 mit entsprechenden Beobachtungen von Greenwich, Edinburgh und Cambridge, letzterer beruht auf 239 Cape-Beobachtungen 1856—1861, verglichen mit entsprechenden in Greenwich.

Die eben angegebene Zahl pflegt man meist als die Konstante der Mondparallaxe zu bezeichnen, es kommt aber auch vor, daß man $\pi_{\mathfrak{D}}$ selbst, nicht seinen Sinus so benennt; es ist $\pi''_{\mathfrak{D}} = (\sin \pi_{\mathfrak{D}})'' + 0''157$; wir werden im folgenden die Zahlenangaben stets für den Sinus machen und überhaupt definieren: Die Konstante der Mondparallaxe ist das konstante Glied im vollständigen Störungsausdruck für den Sinus der Parallaxe des Mondes. Diese von der Definition der Sonnenparallaxe abweichende Fassung ist hier notwendig, da bei den starken Störungen der Mondbahn nicht ohne schärfere Definition von einer mittleren Entfernung oder der großen Halbachse der Bahnellipse gesprochen werden kann. Das konstante Glied ist verschieden bei den verschiedenen Mondtheorien, und bei der Vergleichung sind Transformationen erforderlich.

Das Prinzip der physikalischen Bestimmung der Mondparallaxe beruht auf der Vergleichung der Anziehung der Erde auf

Punkte ihrer Oberfläche, ermittelt durch Messung der Länge des Sekundenpendels, mit der auf den Mond ausgeübten Anziehung, wie sie durch das dritte *Kepler*sche Gesetz geboten wird (siehe Nr. **14** Gleichung (40)), also auf der Verbindung der Gleichungen:

$$\frac{k^2 m''}{\varrho_1^2} = l_1 \pi^2 (1 + \chi_1) = g_1 (1 + \chi_1) = G_1$$
$$k^2 m''(1 + \mu) = n_\mathfrak{D}^2 a_\mathfrak{D}^3;$$

darin bedeutet m'' die Erdmasse (ohne Mond), μ das Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse, l_1 die Länge des einfachen Sekundenpendels, χ_1 das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere, g_1 die Schwere, alle drei für die mittlere Breite φ_1', ϱ_1 den zugehörigen Radius der Erde, $n_\mathfrak{D}$ die mittlere siderische Bewegung des Mondes, $a_\mathfrak{D}$ die große Halbachse der Mondbahnellipse, in der der Mond sich bewegen würde, wenn er keinen Störungen unterworfen wäre.[35]) Die Gleichungen geben

$$\sin \pi_\mathfrak{D} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \frac{\varrho_1}{a_\mathfrak{D}} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \left(\frac{n_\mathfrak{D}^2}{1 + \mu} \frac{\varrho_1}{G_1} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{45}$$

und lassen erkennen, daß kein direkt beobachteter Wert mit dem hieraus berechneten an Genauigkeit konkurrieren kann, daß es also verschwendete Mühe ist, eine Korrektion der Parallaxe durch Einführung in irgendwelche Bedingungsgleichungen erzielen zu wollen. Der erste Faktor in der Klammer rechts kann als völlige Konstante angesehen werden: eine Änderung im Nenner von μ um $+ 0{,}1$ würde die Parallaxe übrigens nur um $+ 0''017$ ändern; der zweite Faktor allein hängt von Größen ab, die noch unter Diskussion stehen; in welchem Maße dies der Fall ist, erkennt man daraus, daß eine Änderung von

$+ 1000$ m in ϱ_1 die Parallaxe um $+ 0''18$
und von $+ 1$ mm in G_1 „ „ „ $- 0{,}11$

ändern würde. Die Unsicherheit von ϱ_1 und G_1 übersteigt die angegebenen Grenzen sicher nicht und ist fast ausschließlich durch den adoptierten Wert der Abplattung bedingt. Die Unsicherheit der berechneten Parallaxe bleibt also unter $\pm 0''10$; für die beobachtete Parallaxe müßte beim heutigen Stand der Mondbeobachtung an Meridiankreisen mindestens der dreifache Betrag angesetzt werden.

Mit (45) rechnet zuerst *Laplace* 1799 in Méc. cél. Livre II Nr. 5 die Mondparallaxe und wiederholt diese Rechnung in Livre VII Nr. 19.

35) Dieser Zusammenhang kann auch zur Bestimmung des Äquatorialradius der Erde verwendet werden, wenn man die Mondparallaxe als bekannt voraussetzt, siehe *Helmert*, Höh. Geod. II, p. 460.

Ihm folgt *Hansen*, der sein Verfahren in den „Fund. nova . . ." p. 126, in Astr. Nachr. 17 (1840), p. 297, in den „Tables de la Lune" p. 4 und in der „Darlegung . . ." I, p. 415 auseinandersetzt, und von *Newcomb* in Astr. Pap. I, p. 77 kommentiert wird. *Hansen* rechnet mit der anomalistischen Bewegung $n_\mathfrak{D}$, und infolgedessen ist seine mittlere Entfernung $a_\mathfrak{D}$ abweichend von den anderen Theorien definiert, die die siderische Bewegung zugrunde legen; es lassen sich daher nur die Resultate vergleichen. Es ist wichtig, die *Hansen*sche Parallaxe genau zu kennen, da seine Tafeln nun schon 60 Jahre fast allen Monduntersuchungen zugrunde liegen. In den Astr. Nachr. a. a. O. gibt *Hansen* selbst als $\sin \pi_\mathfrak{D}$ 3422″06 an, diese Zahl scheint aber durch Rechenunsicherheiten etwas entstellt zu sein, *Newcomb* a. a. O. findet mit denselben Daten, die *Hansen* benutzt, 3422″09, allein auch diese Zahl hält einer genaueren Prüfung nicht stand. Um zu finden, welche Parallaxe tatsächlich den Tafeln zugrunde liegt, muß man die Angaben in diesen selbst a. a. O. und in der damit übereinstimmenden Darlegung a. a. O. zusammenstellen, da *Hansen* selbst das Schlußresultat nicht mehr angibt; dann aber erhält man zweifelsfrei:

$$\sin \pi_\mathfrak{D} = 3419''41 + 2''71 = 3422''12. \qquad (\textit{Hansen})$$

Adams[36]) findet nach derselben Methode, aber mit anderen Werten für die Mondmasse und für die Länge des Sekundenpendels

$$\sin \pi_\mathfrak{D} = 3422''325, \qquad (\textit{Adams})$$

ebenso *Newcomb* (Fund. Const. S. 193) mit *Clarke*s Erddimensionen und *Helmert*s Pendellänge

$$\sin \pi_\mathfrak{D} = 3422''55. \qquad (\textit{Newcomb})$$

Reduziert man alle drei Angaben auf das in Nr. 2 adoptierte System und die Mondmasse 1 : 81,53, so wird:

Hansen $\sin \pi_\mathfrak{D}$	= 3422″39
Adams	3422,39
Newcomb	3422,43.

Dabei ist zu beachten, daß diese Zahlen bereits den konstanten Teil des Störungsbetrages enthalten. Die Gleichung (45) gibt nämlich mit den eben erwähnten Daten die *ungestörte* Parallaxe 3419″39, d. h. die Parallaxe ohne den konstanten Betrag der Störungen. Nach der Theorie von *Delaunay*[37]), die auch für den obigen Wert von *Adams*

36) *J. C. Adams*, On new Tables of the moons Parallax, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 13 (1862), p. 263 und Naut. Alm. 1856.

37) *Ch. Delaunay*, Expressions numériques des trois coordonnées de la lune. Conn. des Temps 1869. Add. p. 10.

gilt und von *Newcomb* bei Ableitung des seinigen adoptiert wurde, erhält man daraus den konstanten Teil im Störungsausdruck des sin der Parallaxe, wenn mit 1,0009077 multipliziert wird, in unserem Falle

$$\sin \pi_{\mathfrak{D}} = 3422''50.$$

In den Theorien von *Delaunay*[38]) und *Brown*[39]) (s. auch VI 2, 14 (*Brown*)) wird von dem beobachteten, also dem gestörten Wert der Konstante ausgegangen, und zwar von dem oben (Gleichung 44) angegebenen $\sin \pi_{\mathfrak{D}} = 3422''70 = \frac{1}{\mathfrak{a}}$ (nach der Bezeichnung von *Brown*); der ungestörte Wert $\frac{1}{a}$, wo a die Halbachse der intermediären oder Variationsbahn ist, die für die Durchführung der Theorie als Fundamentalkonstante gebraucht wird, ergibt sich durch Multiplikation von $\frac{1}{\mathfrak{a}}$ mit $0{,}9990931 = \frac{1}{1{,}0009077}$ zu

$$\frac{1}{a} = 3419''596.$$

Der genannte Zahlenfaktor wird von *Delaunay* a. a. O. p. 10, von *Hill*[40]) und von *Brown* (a. a. O. Bd. 53, p. 88, Bd. 57, p. 109) abgeleitet. Die Halbachse a genügt mit dem beobachteten (siderischen) Wert von $n_{\mathfrak{D}}$ streng dem *Kepler*schen Gesetz

$$n_{\mathfrak{D}}^2 a^3 = k^2 m''(1 + \mu)$$

und führt mit der Gleichung für die Erde

$$n''^2 a''^3 = k^2(1 + m''(1 + \mu)),$$

wenn entsprechend $\frac{1}{a''} = \pi''_{\odot}$

und n'' gleich der siderischen mittleren Bewegung der Erde gesetzt wird, zum zugrunde liegenden Wert der (Erde + Mond)-Masse m_1''

$$\frac{m_1''}{1 + m_1''} = \left(\frac{n_{\mathfrak{D}}}{n''}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{a''}}{\frac{1}{a}}\right)^3.$$

Mit dem sehr genau bekannten Verhältnis der siderischen Bewegungen von Sonne und Mond

$$\frac{n''}{n_{\mathfrak{D}}} = 0{,}0748013 \qquad [8{,}8739091_{-10}]$$

und dem beobachteten Wert der Mondparallaxe (44) $\sin \pi_{\mathfrak{D}} = 3422''70$

38) *Ch. Delaunay,* Theorie du mouvement de la Lune, Paris 1860, 1867.

39) *E. W. Brown,* Theory of the motion of the Moon. Lond. Astr. Soc. mem. 53 (1897), 54 (1900), 57 (1905), 59 (1908).

40) *G. W. Hill,* Res. in the Lunar theory, Americ. J. of Math. I (1877) = Works I, p. 284—335. Siehe auch *Tisserand,* Méc. cél. Vol. III p. 272.

sin 1″, korrigiert für Störungen: sin $(\pi_\mathfrak{D}) = 3419''60 \sin 1''$ ergibt diese Gleichung:

$$\pi''_\odot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{m_1}} = \frac{\sin(\pi_\mathfrak{D})}{\sin 1''} \left(\frac{n''}{n_\mathfrak{D}}\right)^{\frac{2}{3}} = 607''08.$$

Dieses ist dieselbe Gleichung wie (43), nur ist der Zahlenwert rechts auf anderem Wege bestimmt, nämlich hier durch die Mondbewegung, dort durch Pendelmessungen.

Es ist von Interesse, den besten zurzeit erreichbaren Wert der Konstante des sin der Mondparallaxe zu kennen. Wir berechnen ihn mit folgenden Daten. Die Länge des Äquatorialradius der Erde wird nach der Berechnung von *Battermann*[41]) aus *Helmerts* Berichten über die Tätigkeit des Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung für 1906 und 1907 zu $\varrho_0 = 6378102$ m mit der zugehörigen Abplattung 1 : 298,3 angenommen; die Beschleunigung der Schwerkraft nach Nr. **2**, die Mondmasse nach Nr. **20** zu 1 : 81,53 und die mittlere siderische Bewegung des Mondes in einer Sekunde nach *Newcomb* zu $\log n = 4{,}425159 - 10$ (in Bogen). Es ergibt sich

sin $\pi_\mathfrak{D}$ (ohne den konst. Teil der Stör.) = 3419″52
sin $\pi_\mathfrak{D}$ (für die Variationsbahn) = 3422,62.

17. Die parallaktische Ungleichheit in der Mondbewegung. Mit diesem Namen wird eines der größeren Störungsglieder in der Mondlänge bezeichnet, dessen Koeffizient vom Verhältnis der Sonnenparallaxe zur Mondparallaxe abhängt und dessen Argument die Differenz der Mond- und Sonnenlänge ist. Der analytische Ausdruck kann in der Form aufgestellt werden

$$(46) \qquad -C \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\sin \pi_\odot}{\sin(\pi_\mathfrak{D})} \sin(L_\mathfrak{D} - L_\odot),$$

worin C ein von der benutzten Störungstheorie abhängiger Zahlenfaktor, μ das Verhältnis der Mond- zur Erdmasse, $\pi_\odot$ die Sonnenparallaxe, $(\pi_\mathfrak{D})$ die Parallaxe der ungestörten Mondbahn, $L_\mathfrak{D}$ und $L_\odot$ die mittleren Längen von Mond und Sonne sind. Nach einer Berechnung von *Battermann*[42]) sind die Werte von log C in den Theorien von

	log C
Hansen, Tables de la Lune	4,696510
Hansen, Darlegung der in den Mondtafeln angewandten Störungen . . .	4,696311
Brown, Theory of the Motion of the Moon	4,697301.

41) *H. Battermann*, Beitrag zur Bestimmung der Mondbahn. Berlin Sternwarte Ergebn. Nr. 13 (1900), p. 12.

42) Ebenda p. 15.

Mit der Mondmasse 1 : 81,53 und der oben abgeleiteten ungestörten Mondparallaxe $(\pi_\mathfrak{D})'' = 3419''52$ ergeben sich hiernach für den Koeffizienten P der Ungleichheit die Werte:

$$
\begin{aligned}
P = [1{,}151891_n]\ \pi''_\odot &= -14{,}1870\ \pi''_\odot \quad \textit{Hansen}_1 \\
[1{,}151692_n]\ \pi''_\odot &= -14{,}1805\ \pi''_\odot \quad \textit{Hansen}_2 \\
[1{,}152682_n]\ \pi''_\odot &= -14{,}2129\ \pi''_\odot \quad \textit{Brown}.
\end{aligned} \tag{47}
$$

Nach *Delaunay* (Theorie du mouvement de la lune II, p. 847) wird $\log C = 4{,}696856$ und daher mit obigen Daten:

$$P = [1{,}152237]\ \pi_\odot = -14{,}1983\ \pi''_\odot \quad \textit{Delaunay}.$$

Könnte man P mit hinlänglicher Sicherheit aus den Beobachtungen ermitteln, so läge in dieser Gleichung ein ausgezeichnetes Mittel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe vor. Allein hierzu werden sowohl einwandfreie Beobachtungen und eine genaue Kenntnis des Mondhalbmessers als auch eine exakte Mondtheorie erfordert. Die Gleich. (46) zeigt, daß die Beobachtungen bei $L_\mathfrak{D} - L_\odot = \pm 90^0$, also bei den Quadraturen angestellt sein müssen; dies erfordert Meridianbeobachtungen bei Tageslicht, wo die Irradiation eine große Rolle spielt, und für die beiden Quadraturen ist an verschiedenen Rändern des Mondes einzustellen; die Reduktion erfordert also eine genaue Kenntnis des Mondhalbmessers und wird außer durch die Irradiation noch erschwert durch die Unregelmäßigkeiten des Mondrandes. Ältere Meridianbeobachtungen, bei denen die Rücksichtnahme auf diese Umstände erschwert ist, scheiden hier völlig aus; die aus ihnen abgeleiteten Werte von P sind in die unten folgende Zusammenstellung nicht aufgenommen. Durch zweierlei Beobachtungsarten des Mondortes ist in neuerer Zeit ein Fortschritt erzielt worden: 1. durch die ausschließliche Benutzung von Sternbedeckungen durch den Mond nach dem Vorschlag von *H. Battermann*[43]), 2. durch die Ableitung der Mondörter aus der Beobachtung des Kraters Moesting A nach dem Vorschlage von *J. Franz.*[44]) Diese bleiben daher allein neben einem von *Newcomb*[45]) aus den Greenwicher und Washingtoner Meridianbeobachtungen seit 1862 und einem von *Cowell*[46]) aus den Beobachtungen 1847 — 1901 abgeleiteten Werte stimmberechtigt. Die Werte sind:

43) Berlin Sternw. Ergebn. 5 (1891), 11 (1902), 13 (1910).

44) Astr. Nachr. 136 (1894), p. 353.

45) Fund. Const. p. 151.

46) *P. H. Cowell,* Analysis of 145 Terms in the Moons Longitude 1750—1901. Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 108.

Newcomb, Beob. am Mer.-Kreis Greenw. u. Washingt. $-124''88 \pm 0''16$
Battermann, aus etwa 1000 Sternbedeckungen $-124,93 \pm 0,18$
Franz aus Beobachtungen von Moesting A $-124,36 \pm 0,27$
Cowell aus Greenwicher Beobachtungen 1847—1901 $-124,90$

Mit den Gewichten 2, 5, 1, 2 folgt hieraus:

(48) $$P = -124''86;$$

die Unsicherheit kann auf etwa $\pm 0''15$ geschätzt werden.

Nicht nur die Ableitung von P aus den Beobachtungen setzt eine exakte Mondtheorie voraus, weil sonst die Ablösung von P von den übrigen Störungsgliedern nicht möglich ist, sondern die oben angegebenen Werte von log C zeigen auch, in wie hohem Grade das Verhältnis von P zur Sonnenparallaxe von der Theorie abhängig ist. Die theoretische Unsicherheit in der Sonnenparallaxe steigt hiernach bis $0''020$; eine Verwendung der Gleichung zu ihrer Bestimmung ist daher zurzeit noch aus Gründen der Theorie und der Beobachtung nur mit Vorbehalt möglich.

Hansen[47]) leitet aus der Vergleichung seiner mit dem Faktor $\frac{a_\mathfrak{D}}{a_\odot}$ multiplizierten Störungsglieder, also in der Hauptsache der parallaktischen Ungleichheit, mit den Beobachtungen eine Korrektion des genannten Faktors ab und bestimmt dann mit dem verbesserten Faktor durch die Gleichung (42)

$$\frac{1}{m_1''} = \frac{\left(\frac{n}{n_\mathfrak{D}}\right)^2}{\left(\frac{a_\mathfrak{D}}{a}\right)^3} - 1$$

die Erdmasse und mittelst dieser dann nach Gleichung (43) die Sonnenparallaxe. Dabei hat er für $\frac{n}{n_\mathfrak{D}}$ das Verhältnis der anomalistischen Bewegungen zu nehmen, das auch sonst seiner Theorie zugrunde liegt. Die von ihm erhaltenen Werte (Erdmasse $= \frac{1}{319455}$, $\pi_\odot = 8''906$) zeigen die Unsicherheit der Grundlage.

Newcomb (Fund. Const. p. 190) leitet aus der Gleichung (47)

$$P = [1{,}15173_n]\, \pi''_\odot$$

die unsichere Konstante P selbst mittelst der Sonnenparallaxe $\pi_\odot = 8''79$ ab:

$$P = -124''66$$

in erträglicher Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert.

47) *P. A. Hansen,* Darlegung der in den Mondtafeln angewandten Störungen II, art. 266—269

18. Die Elemente der Mondbahn. Gegen Ende des 17. Jahrh. waren durch reine Beobachtung, an der die Babylonier, Ptolemäus und Tycho Brahe den größten Anteil hatten, die Hauptzüge in der Bewegung des Mondes erkannt: die Mittelpunktsgleichung im Betrage von etwa $5\frac{1}{2}^0$, die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik im Betrage von etwa 5^0, die rückläufige Bewegung des Knotens, welche ihn in 6793 Tagen durch den Umkreis führt, die rechtläufige Bewegung des Perigäums, welche es in 3233 Tagen den Umkreis beschreiben läßt, die Hauptstörungsglieder in Länge, nämlich die Evektion (Ptolemäus) welche in den Syzygien und Quadraturen den Ort des Mondes um $1\frac{1}{4}^0$ verschiebt, die Variation (Tycho Brahe), welche in den Oktanten eine Änderung von 40′ erzeugt und die jährliche Gleichung (Tycho Brahe) im Betrage von 11′; endlich die mittlere Bewegung, welche durch die Verbindung der alten Finsternisse mit den neueren Beobachtungen mit einer Genauigkeit bekannt war, wie bei keinem anderen Himmelskörper. *Newton* und seine Nachfolger erklärten die erkannten Bewegungen durch die Gravitation und wiesen theoretisch kleinere Störungsglieder nach, die die Beobachtung bestätigte. Es entstanden Mondtafeln, welche aus einer Mischung von Theorie und Beobachtung zusammengesetzt, schließlich *Laplace* und seinen Nachfolgern ermöglichten, eine reine Theorie des Mondes aufzubauen, welche die Beobachtung so gut darstellt, daß die genaue Bestimmung der Mondbahnelemente durch Bedingungsgleichungen stattfinden kann. Diese Gleichungen, welche die differenziellen Änderungen der Mondbahnelemente und ihrer säkularen Bewegungen in Verbindung mit der Differenz Beobachtung minus Theorie setzen, bilden von da ab das einzig gebrauchte Mittel, die der Beobachtung zu entnehmenden Elemente der Theorie zuzuführen. Es muß hier genügen, auf einige der neuesten Arbeiten dieser Richtung hinzuweisen.[48]) Auf der Grundlage der *Hansen*schen Mondtafeln[49]) bestimmt *Newcomb* aus den genauesten Beobachtungen von 275 Jahren, hauptsächlich Sternbedeckungen durch den Mond, die Mondelemente; wir geben seine Resultate, soweit sie Konstante betreffen.

Als mittlere Länge des Mondes für die Epoche 1850 Jan. 0,0 m. Z. Gr. und ihre Änderung ergaben die Beobachtungen:

48) *S. Newcomb,* Researches on the Motion of the moon I, Washington 1878 (Washington Observations 1875), II. Astr. Papers, Vol. IX (1912), p. I.

H. Battermann, Beitrag zur Bestimmung der Mondbahn und des Mondhalbmessers aus Beobachtungen von Sternbedeckungen. Berlin Sternw., Ergebn. Heft 5, 11, 13, 1891—1910.

P. H. Cowell, Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 108, 721.

49) *P. A. Hansen,* Tables de la Lune, London 1857.

(49) $\lambda = 123^\circ 4' 47''66 + 17325644''0211\, t + 9''08\, T^2 + 0''0068\, T^3$,

wobei t in julianischen Jahren, T in julianischen Jahrhunderten von 1850 ab zu zählen ist, und der Betrag der allgemeinen Präzession in Länge mit inbegriffen ist. Wird dieser mit

(50) Allg. Präz. $= 50''2453\, t + 1''11\, T^2 + 0''00087\, T^3$

in Abzug gebracht, so erscheint in dem Ausdruck

(51) $\Delta\lambda = + 17325593''7758\, t + 7''97 T^2 + 0''0059\, T^3$

als erstes Glied die siderische jährliche Bewegung in Länge und als zweites die Säkularakzeleration derselben. Die Darstellung der Beobachtungen durch diesen Ausdruck und durch die Theorie ist keine befriedigende. In den Differenzen zeigt sich eine große Wellenbewegung mit kleineren darüber gelagerten Wellen, über welche die Theorie zurzeit keinen Aufschluß geben kann; die Abweichungen steigen über 12″ mit einer Periode von etwa 275 Jahren (s. Tabelle und graphische Darstellung bei *Newcomb* Res. II, p. 211). Infolgedessen bleibt auch der aus den Beobachtungen abgeleitete Wert der *Säkularakzeleration* 7″97 unsicher, und die Frage dieser schicksalsreichen Zahl kann noch nicht geregelt werden. Wir verweisen auf ihre in Theorie und Beobachtung interessante Geschichte in *Tisserand*, Méc. cél. vol. III, p. 240, und Encykl. VI 2, 14 (*Brown*), Nr. 23, p. 720.

Für die Länge des Perigäums und des Knotens ergaben die Beobachtungen für dieselbe Epoche und mit derselben Bezeichnung wie oben:

(52) $\pi = 99^\circ 51' 54''14 + 146485''5315\, t - 37''17\, T^2 - 0''045\, T^3$

(53) $\Omega = 146\ 13\ 40,01 - 69629,2020\, t + 7,57\, T^2 + 0,008\, T^3$.

Wird auch hier die Präzession in Abzug gebracht, so erscheinen in:

(54) $\Delta\pi = + 146435''2862\, t - 38''28\, T^2 - 0''046\, T^3$

(55) $\Delta\Omega = - 69679,4473\, t + 6,46\, T^2 + 0,007\, T^3$

die beobachteten säkularen Störungen der beiden Elemente. Sie stehen in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Beträgen, die *Brown* (Mem. R. A. S. vol. 59, p. 94) abgeleitet hat: $\Delta\pi = + 146435''21$ und $\Delta\Omega = - 69679''36$ und haben gestattet, einen neuen Wert für die Differenz der Trägheitsmomente des Erdkörpers abzuleiten (siehe Nr. **10**).

Die Formel (49) gibt die tropische Umlaufszeit des Mondes oder den tropischen Monat, die Formel (51) den siderischen Monat, nämlich für 1850 gültig:

(56) trop. Monat $= \frac{1296000 \times 365{,}25}{17325644{,}02} = 27^d3215811 = 27^d7^h43^m4^s61$

(57) sid. Monat $= \frac{1296000 \times 365{,}25}{17325593{,}78} = 27^d3216610 = 27^d7^h43^m11^s51$

$= 2360591^s51.$

Für die Umlaufszeiten in bezug auf das Perigäum und in bezug auf den Knoten erhält man durch die Divisoren $\Delta\lambda - \Delta\pi$ und $\Delta\lambda - \Delta\Omega$:

(58) Anomalistischer Monat $= \frac{1296000 \times 365{,}25}{17179158{,}49} = 27^d55455041$

$= 27^d13^h18^m33^s16$

(59) Drakonitischer Monat $= \frac{1296000 \times 365{,}25}{17395273{\cdot}22} = 27^d21221993$

$= 27^d5^h5^m35^s80.$

Wir fügen die Dauer des synodischen Monats bei, die aus der Differenz der siderischen Bewegung von Mond und Sonne erhalten wird. nämlich aus

$$17325593''78 - 1295977''43 = 16029616''35$$

(60) synod. Monat $= \frac{1296000 \times 365{,}25}{16029616{,}35} - 29^d53058775 = 29^d12^h44^m2^s78$

Die beiden Elemente Exzentrizität und Neigung zeichnen sich im Gegensatz zu den beiden letztbesprochenen durch außerordentliche Konstanz aus, so daß sie, abgesehen von den periodischen Störungen für historische Zeiten als nahe konstant gelten können. Die Exzentrizität e ergibt sich aus der Beobachtung durch den Koeffizienten des Hauptgliedes der Mittelpunktsgleichung, nämlich durch

(61) $\left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right) \sin g \qquad g =$ mittl. Anomalie.

Airy[50]) bestimmte den Koeffizienten aus allen Greenwicher Mondbeobachtungen 1750—1847 zu 22639″06, und *Newcomb*[51]) fand aus den Greenwicher Beobachtungen 1846—1874 und den Washingtoner 1862—1874 22639″58. In der Theorie von *Delaunay* wird der *Airy*sche Wert und entsprechend $e = 0{,}05489930$, in den Tafeln von *Hansen* wird $e = 0{,}05490807$ gebraucht, *Brown*[52]) adoptiert den *Newcomb*schen Wert 22639,58 und entsprechend $e = 0{,}05490056$, *Battermann*[53]) erhält aus seinen drei Reihen als Korrektion des *Hansen*-

50) *G. B. Airy,* Corrections of the elements of the Moons orbit. Lond. Astr. Soc. mem. 29 (1859).

51) *S. Newcomb,* Transformation of *Hansens* Lunar Theory. Astr. Pap. vol. I p. 69

52) *Brown,* a. a. O. Bd. 57, p. 109.

53) *Battermann,* a. a. O. Heft 13, p. 43.

schen Wertes — 0″53 ± 0,08, also $e = 0{,}05490550$. *P. H. Cowell* (Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 147) findet aus Beobachtungen 1750—1901 22639″50 und gibt (ebd. p. 745) eine Zusammenstellung.

In derselben Weise wird die *Neigung* der Mondbahn gegen die Ekliptik I durch das Hauptglied in der Breite β bestimmt. Dieses hat in der Theorie von *Delaunay*[54]) die Zusammensetzung

$$\beta = \left(2\gamma - 2\gamma e^2 - \tfrac{1}{4}\gamma^5 + \tfrac{7}{32}\gamma e^4\right) \sin(g + \omega) \tag{62}$$

$\gamma = \sin \frac{I}{2}$ $\omega =$ Abstand des Perigäums von Knoten.

Airy bestimmte in der oben zitierten Arbeit aus den Greenwicher Beobachtungen 1750—1847 den Koeffizienten zu 18461″26, womit sich ergab

$$\gamma = 0{,}04488663$$

und

$$I = 5^0 8' 43'' 29.$$

Newcomb[55]) stellte als entsprechenden in *Hansens* Tafeln implizite enthaltenen Koeffizienten 18461″63 fest und fand dazu aus den Greenwicher und Washingtoner Beobachtungen 1862—1874 die Korrektion — 0″15 und später (Res. II, p. 223) — 0″18. Mit diesem letzteren ergibt sich 18461″45. *Hansen* selbst gibt in seinen Tafeln den Wert an:

$$I = 5^0 8' 39'' 96.$$

Den Wert von *Newcomb* adoptiert *Brown* (Astr. Soc. mem. 57 (1905), p. 138). Aus 5646 Beobachtungen von 1847—1901 findet *Cowell* (a. a. O. p. 564) 18461″35 ± 0″05.

19. Die Störungsglieder der Mondbewegung werden durch die Theorie bestimmt, welche ihre Zusammensetzung angibt. Die folgende Tabelle gibt die Zahlen für die größten Glieder nach den Theorien von *Hansen*, *Delaunay* und *Brown* und für die Parallaxe von *Adams*. Hinzugefügt sind die direkt aus der Beobachtung ermittelten Werte nach *Cowell*.[56])

---

54) Conn. d. T. 1869, p. 10

55) Astr. Pap. I, p. 76.

56) *P. H. Cowell*, Analysis of 145 Terms in the Moons Longitude 1750—1901 (Lond. Astr. Soc. Month. Not. 65 (1905), p. 108). The Moons observed Latitude 1847—1901 (ebenda p. 721).

		g g'	*Hansen*	*Delaunay*	*Brown*	*Cowell*
Länge	Mittelp. Gl.	1 0	22640″15	22640″15	22639″58	+ 22639″50
	Jährl. Gl.	0 — 1	+ 669,85	+ 669,76	+ 668,94	+ 668,2
		$2\omega - 2\omega'$				
	Evektion	1 — 2	+ 4586,56	+ 4586,44	+ 4586,44	+ 4586,4
	Variation	2 — 2	+ 2369,75	+ 2369,74	+ 2369,90	+ 2370,2
		$\omega - \omega'$				
	Parall. Gl.	1 — 1	— 125,43	— 125,98	— 124,78	— 124,90
		ω				
Breite	Red. Ekl.	1 0	+ 18461″65	+ 18461″26	+ 18461″48	+ 18461″35
						Adams
sin Parall.	Konst.	0 0	3422,12	3422,70	3422,70	3422,32
		$2\omega - 2\omega'$				
	Evektion	1 — 2	+ 34,31	+ 34,29	+ 34,31	+ 34,30
	Variation	1 — 2	+ 28,22	+ 28,20	+ 28,23	+ 28,23

20. Die Mondmasse. Man hat zwei Wege zur Bestimmung der Mondmasse, den durch die Nutationskonstante (Nr. 9) und den durch die Mondgleichung (Nr. 8). Der erste gibt

$$\mu = \frac{1}{81{,}51 \pm 0{,}20};$$

bei Ansetzung des mittleren Fehlers ist der mittlere Fehler der Präzessionskonstante schätzungsweise zu $\pm$ 0″005 angenommen worden.

Der zweite gibt, wenn für die Sonnenparallaxe der trigonometrische Wert $\pi''_\odot = 8''806 \pm 0''003$ eingeführt wird:

$$\mu = \frac{1}{81{,}54 \pm 0{,}09}.$$

Die Vereinigung beider Werte führt auf den endgültigen Wert

$$\mu = \frac{1}{81{,}53 \pm 0{,}08},$$

der infolge der guten Übereinstimmung der durch ganz verschiedene Methoden gewonnenen Einzelresultate nicht nur das Vertrauen auf ihn selbst stärkt, sondern auch auf die Konstanten der Sonnenparallaxe, der Präzession und Nutation, aus denen er hervorging.

Nimmt man die Mondmasse als bekannt an, so gestatten die Gleichungen (15) der Nr. 9 nicht nur die Ermittlung von $\frac{C-A}{C}$, sondern man wird dann auch die Nutationskonstante aus ihrer theoretischen Zusammensetzung ableiten können.

Die erste Gleichung gibt mit $\mu = \frac{1}{81{,}53}$

$$\frac{C-A}{C} = 0{,}003278;$$

die rechte Seite der zweiten Gleichung (15) gibt für die Nutationskonstante für 1850: $N = 9''213$,

der in völliger Übereinstimmung mit dem direkt aus den Beobachtungen hervorgegangenen Wert sich befindet.

Die Planeten.

21. Die Theorien der Sonne und der großen Planeten. Die Bahnelemente der Sonne und der Planeten gingen von *Ptolemäus* ungeändert auf *Copernikus* über mit Ausnahme der Entfernungen, für die dieser zum ersten Male statt Vermutungen gemessene Werte setzen konnte. Genau kannte man nur die Umlaufszeiten. *Kepler* bestimmte aus den Beobachtungen *T. Brahes* die Bahnelemente im heutigen Sinn und legte sie den *Rudolfini*schen Tafeln zugrunde (1627). Nach Einführung des *Newton*schen Gesetzes (1686) begann man um die Mitte des 18. Jahrhunderts Störungen zu rechnen, zuerst tastend an einzelnen Erscheinungen, die die Beobachtungen gezeigt hatten, dann zum erstenmal zusammenfassend durch *Laplaces* Mécanique céleste (1798—1825). Zum zweitenmal nahm *Leverrier* das Gesamtproblem auf (Annales de l'Obs. de Paris, T. 5—14, 1859—1877) und zum drittenmal *Newcomb* (Astr. Pap., T. 1—7, 1882—1898). Die Bestimmung der Konstanten, zu denen seit *Newton* die Massen getreten waren, geschieht durch Bedingungsgleichungen, die zwischen den Änderungen der Elemente und Massen einerseits und den Änderungen der Koordinaten des geozentrischen Ortes andererseits aufgestellt werden. Zur Bildung, praktischen Aufstellung und Lösung dieser Gleichungen sei besonders auf

S. Newcomb, Formulae and Tables (Astr. Pap., vol. II (1891), p. 1),

G. W. Hill, Tables of Jupiter, Saturn (Astr. Pap., vol. VII (1898), p. 7, 149)

verwiesen.

Auf die Angabe der Bahnelemente kann verzichtet werden, da man sie in allen Ephemeriden und Tafelsammlungen findet.[57])

22. Die Massen der Planeten. Die Massen der Körper des Sonnensystems werden aus den Wirkungen bestimmt, die sie nach dem *Newton*schen Gesetz auf benachbarte Körper ausüben. Die Hauptwirkung ist ausgesprochen in dem dritten *Kepler*schen Gesetz für die Planeten:

$$k^2(M + m) = n^2 a^3$$
$$k^2(M + m') = n'^2 a'^3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

57) Die authentischen Werte finden sich in den *Newcomb-Hill*schen *Tafeln* (l. c.).

wo M die Sonnenmasse, $m, m', \ldots$ die Planetenmassen bedeuten, und unter $n, n', \ldots, a', \ldots$ die der elliptischen, ungestörten Bewegung zugehörigen Werte der mittleren Bewegungen und großen Halbachsen zu verstehen sind. Setzt man die Sonnenmasse als Einheit der Masse, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längeneinheit fest, bestimmt n durch Messung der Länge des siderischen Jahres und m durch Messung der Sonnenparallaxe (Nr. **15**), so wird k^2 bekannt, aber dies reicht nicht aus, die übrigen Planetenmassen zu bestimmen, da wohl die $n', \ldots$, aber nicht die $a', \ldots$ mit genügender Schärfe ermittelt werden können. Man benutzt daher umgekehrt obige Gleichungen zur Bestimmung der $a', \ldots$, wenn die Massen anderweitig bekannt geworden sind. Dagegen führt die Anwendung desselben Gesetzes auf die Satelliten der Planeten zu so genauen Massenbestimmungen, daß man davon bei allen Planeten, die von Satelliten umlaufen werden, Gebrauch macht.

Mit der Bezeichnung: Sonnenmasse $= 1$, Erdmasse $= m$, Planetenmasse $= m'$ (Gesamtmasse einschließlich aller Satelliten), Masse aller Satelliten $= m'\Sigma$, Masse eines einzelnen $= m'\mu$, mittlere Bewegungen der Erde, des Planeten und des Satelliten bzw. n, n', ν, große Halbachsen derselben Körper bzw. $1, a', a' \sin \Delta$, folgen aus

$$k^2(1 + m) = n^2,$$
$$k^2(1 + m') = n'^2 a'^3,$$
$$k^2 m'(1 - \Sigma + \mu) = \nu^2 a'^3 \sin \Delta^3$$

die drei Formen

$$\frac{m'}{1 + m'} = \left(\frac{\nu}{n'}\right)^2 \frac{(a' \sin \Delta)^3}{a'^3}(1 + \Sigma - \mu),$$

$$m' = \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 (a' \sin \Delta)^3 (1 + m)(1 + \Sigma - \mu), \tag{63}$$

$$m' = \left(\frac{\nu}{k}\right)^2 (a' \sin \Delta)^3 (1 + \Sigma - \mu).$$

Δ ist die große Halbachse der Satellitenbahn, gesehen aus der mittleren Entfernung a', und kann bei den Elongationen des Satelliten direkt gemessen werden. Die ν, n, n' folgen aus den Umlaufszeiten, die man auch direkt in die Formeln einführen kann. Die Attraktionskonstante k^2 in der letzten Formel ist auf dieselben Einheiten zu bringen, in denen ν ausgedrückt ist. Der Faktor $1 + \Sigma - \mu$ kann nur verwendet werden, wenn die Massen der Satelliten bekannt sind; er ist nur von verschwindendem Einfluß.

Obige Formeln setzen die elliptischen, d. h. die ungestörten Werte von ν und Δ voraus; da die gestörten Werte beobachtet werden, sind diese zuerst vom Betrag der Störungen zu befreien. Es kommen zu-

nächst die Störungen der Satellitenlänge in Betracht, die von der Abplattung des Hauptkörpers, von der Sonne und von den übrigen Satelliten herrühren, und zwar nur die Säkularstörungen; ν wird aus der Vergleichung der Längen für verschiedene Epochen abgeleitet und begreift also in sich den säkularen Teil der Störungen in der Epoche; dieser ist aus allen drei Ursachen zusammengefaßt gleich

$$\nu\left[2\frac{k}{a^2} - \left(\frac{n'}{\nu}\right)^2 - \Sigma\mu a^2\frac{\partial A^0}{\partial a}\right] = \nu\sigma^{58}),$$

und die oben statt ν einzutragende ungestörte mittlere Bewegung ν_0 wird also:

$$\nu_0 = \nu(1 - \sigma).$$

Im Ausdruck von σ bedeuten a die große Halbachse der Satellitenbahn $= a' \sin \Delta$ und k die Abplattungskonstante, deren Zusammenhang mit der Abplattung des Planeten folgender ist. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Äquatorial- und Polarhalbmesser des als Rotationsellipsoid angenommenen Planetenkörpers, also

$$\frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \chi = \text{Abplattung},$$

ferner φ das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwere am Äquator, so gibt die Gleichgewichtsbedingung

$$k = \mathfrak{a}^2\left(\chi - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und, wenn T die Umlaufszeit des Satelliten, U die Rotationszeit des Planeten ist, die Gleichung

$$\varphi = \left(\frac{T}{U}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{a}}{\Delta}\right)^3$$

die Größe φ, so daß aus:

$$\chi = \frac{k}{a^2}\left(\frac{a}{\mathfrak{a}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\varphi$$

die Abplattung berechnet und mit der beobachteten verglichen werden kann. $\frac{k}{a^2}$ läßt sich aus den beobachteten Säkularstörungen der Elemente des Satelliten bestimmen, oder es läßt sich umgekehrt aus der beobachteten Abplattung ableiten:

$$\frac{k}{a^2} = (\chi - \tfrac{1}{2}\varphi)\left(\frac{\mathfrak{a}}{a}\right)^2.$$

Für den ungestörten Wert a_0 von $a = a' \sin \Delta$ findet man:

$$a_0 = \frac{a' \sin \Delta}{(1 - \frac{1}{2}\sigma)}.$$

---

58) *P. S. Laplace,* Méc. cél., vol. IV, ch. 2; *H. Struve,* Beobachtungen der Saturnstrabanten. Supplement I aux Obs. de Poulkova 1888, p. 63 und 115.

Es sind also obige Formen (63) noch mit dem Faktor

$$(64) \qquad \frac{(1-\sigma)^2}{(1-\frac{1}{2}\sigma)^3} = (1-\tfrac{1}{2}\sigma), \quad \sigma = \left(2\frac{k}{a^2} - \left(\frac{n'}{\nu}\right)^2\right)$$

zu multiplizieren, um den Störungen Rechnung zu tragen.

Durch diese Methode wurden die Massen aller großen Planeten bestimmt, die mit Satelliten versehen sind, das sind also alle mit Ausnahme des Merkur und der Venus. Die übrigen jetzt zu besprechenden Methoden sind für sie nur zur Sicherung und Prüfung herangezogen worden.

Das *zweite* Mittel, Planetenmassen zu bestimmen, beruht auf der Verwendung der Säkularstörungen der vier Bahnelemente, Länge des Perihels und des Knotens, Neigung und Exzentrizität; die große Halbachse hat keine Säkularstörungen, und die Störungen der mittleren Länge für die Epoche lassen sich in der Beobachtung nicht von der mittleren Bewegung trennen. Die Säkularstörungen eines Elementes werden durch die Theorie in der Form geboten

$$c'm' + c''m'' + \cdots,$$

wo die c bekannte Funktionen der Elemente, die m die Massen der störenden Planeten sind. Werden sie mit angenommenen Massenwerten m_0', m_0'', ... berechnet: R und andererseits beobachtet: B, so erhält man, wenn die wahren Massen mit $m_0'(1+\nu')$, $m_0''(1+\nu'')$, ... bezeichnet werden, die Bedingungsgleichung

$$(65) \qquad c'm_0'\nu' + c''m_0''\nu'' + \cdots = B - R.$$

Solche Gleichungen erhält man vier für jeden Planeten einer zusammenbetrachteten Gruppe (für die Erde nur drei, weil an Stelle von Knoten und Neigung die Schiefe der Ekliptik tritt), also $4n$ (bzw. $4n-1$), und leitet daraus durch Ausgleichung die n Unbekannten ν', ... ab. In jeder der drei großen Bearbeitungen des Planetensystems durch *Laplace* (Méc. cél.), *Leverrier* (Ann. de l'Obs. de Paris) und *Newcomb* (Astr. Pap. Washington) bildet diese Ausgleichung die Hauptprüfung durch die Vergleichung der hieraus gewonnenen Massen mit den durch die Satelliten gebotenen.

Man kann die großen Planeten in zwei Gruppen teilen, die innere mit Merkur, Venus, Erde, Mars und die äußere mit Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Da sich wegen der kleinen Massen der inneren, und der weiten Entfernung der äußeren beide Gruppen gegenseitig nur wenig beeinflussen, kann man das Problem der Massenbestimmung in zwei Abteilungen zerlegen, was die Aufgabe wesentlich erleichtert. Die äußere satellitenreiche Gruppe macht nur insofern Schwierigkeiten, als die dort auftretenden Glieder langer Periode sich schwer von den

säkularen trennen lassen. Dagegen ist die Massenausgleichung der inneren Gruppe von jeher nur unvollkommen gelungen und hat Hypothesen notwendig gemacht. Die Entdeckung der Marssatelliten 1877 hat mehr Sicherheit gebracht, aber die durch *Leverrier*[59]) aufgefundene Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur hat die astronomische Forschung über 50 Jahre beschäftigt. In der nächsten Nummer wird hierauf näher eingegangen.

Die *dritte*, unvollkommenste Methode, die Planetenmassen zu bestimmen, beruht auf der Heranziehung der periodischen Störungen. Diese werden durch die Theorie in der Form geboten

$$\sum m'h' \sin(il - i'l' + K_{ii'}), \tag{66}$$

worin h' von bekannter Zusammensetzung ist, ii' ganze Zahlen sind, $K_{ii'}$ ebenfalls bekannt, l und l' die Längen der Planeten bedeuten; die Zahl der Glieder ist groß, und jedes besitzt eine bestimmte Periode, innerhalb welcher $il - i'l'$ alle Werte von 0^0 bis 360^0 annimmt. Die Koeffizienten $m'h'$ sind in der Mehrzahl sehr klein. Während die Säkularstörungen zu ihrer Bestimmung aus den Beobachtungen sehr lange Zeiträume erfordern, spielen sich die periodischen meist rasch ab, aber es bedarf fortlaufender Reihen scharfer Beobachtungen, um sie mit einiger Sicherheit herausschälen zu können. Der Massenfaktor ergibt sich dann ebenso wie bei den Säkularstörungen. Man macht von dieser Methode nur Gebrauch, wenn man dazu gezwungen ist. Das ist nur bei Merkur und Venus der Fall, wenn man Ursache hat, der Masse aus den Säkularstörungen zu mißtrauen (siehe Nr. 23).

Eine *vierte* Methode, die Planetenmasse aus ihren Wirkungen auf Massen an der Oberfläche des Planeten etwa durch Pendelmessungen zu bestimmen, ist nur bei der Erde anwendbar; hierüber ist Näheres in Nr. 15 zu finden.

23. Ableitung der Massen von Merkur, Venus und Erde aus den Säkularstörungen. An sich eignen sich die Säkularstörungen zur Bestimmung der Massen derjenigen Planeten, die nicht von Monden begleitet sind, viel besser als die periodischen Störungen, und sie sind daher früher fast ausschließlich zu diesem Zweck herangezogen worden. Als sich aber bei der umfassenden Bearbeitung des Planetensystems durch *Leverrier* und in verschärftem Maße bei der neuesten Bearbeitung durch *Newcomb* deutliche Unstimmigkeiten, insbesondere die Anomalie in der Perihelbewegung des Merkur, herausstellten, mußte man Bedenken tragen, die Massen von Merkur, Venus

59) Ann. de l'Obs. de Paris, vol. V (1859).

und Erde auf die Säkularstörungen zu gründen, da sie die Anomalien nicht erklären konnten und nicht berechenbare Einflüsse als möglich zuzugeben waren. Nachdem jedoch die *Einstein*sche Gravitationstheorie[60]) für die Perihelbewegung des Merkur einen Ausdruck gefunden hat, den man als richtig betrachten muß, auch wenn man sich nicht zu seiner Begründung bekennt, ist das Problem in ein neues Stadium getreten. Es sei daher gestattet, etwas ausführlicher auf die Neuregelung der Konstanten der Planeten Merkur, Venus, Erde und Mars hier einzugehen, da die *Newcomb*sche Bearbeitung auf der sicher unrichtigen Hypothese beruht, daß die Perihele der Planeten eine anomale Bewegung proportional ihren mittleren Bewegungen ausführen.

Einstein leitet aus seiner Gravitationstheorie ab, daß das Perihel für jeden ganzen Umlauf des Planeten um die Sonne im Sinne der Bewegung um den Betrag

$$\varepsilon = 6\pi \frac{k^2}{c^2} \frac{1}{a(1-e^2)} = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)} \text{ Radiusteile}$$

vorrückt. Nach Einführung von $\sin\varphi = e$ und $n = \frac{2\pi}{T}$ wird daraus

$$\varepsilon = 6\pi \left(\frac{n a \sec\varphi}{c}\right)^2.$$

$n a \sec\varphi = v_0$ ist das Mittel aus der größten und der kleinsten Lineargeschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn; also kann man nach Übergang auf Sekunden auch schreiben:

$$\varepsilon'' = 3\left(\frac{v_0}{c}\right)^2 1296000'',$$

oder, da $\frac{v_0}{c} = A$ die Aberrationskonstante des Planeten ist (Nr. 6),

(67) $$\varepsilon'' = 3888000\, A^2 \text{ Sekunden.}$$

Folgende Tabelle gibt für die 4 Planeten die Zahlenwerte:

	Mittl. Bahngeschwindigkeit in km/sek v_0	A	A''	Perihelbew. ε'' für einen Umlauf	Perihelbeweg. in 100 jul. Jahren	
					$D\pi''$	$eD\pi''$
Merkur	48,879	0,00020626	33″62	0″10331	42″89	8″82
Venus	34,994	11670	24,07	0,05295	8,607	0,059
Erde	29,766	09926	20,47	0,03831	3,831	0,064
Mars	24,216	08076	16,66	0,02536	1,348	0,126

Die Zahlen der letzten Spalte sind Ausfluß der Theorie und können den durch die Theorie gebotenen Säkularstörungen des Elementes $eD\pi_1''$ hinzugefügt werden. Dies ist in folgender Tabelle geschehen, welche in der ersten Zahlenspalte die mit den Massen

60) Berlin. Ber. 1915, p. 839.

	$\frac{1}{m}$		$\frac{1}{m}$
Merkur	7500000	Jupiter	1047,88
Venus	410000	Saturn	3501,6
Erde + Mond	327000	Uranus	22756
Mars	3093500	Neptun	19540

(*A*)

gerechneten Säkularstörungen für 100 jul. Jahre enthält[61]) für die Elemente: Exzentrizität e, e mal Perihelbewegung, Neigung i und $\sin i$ mal Knotenlänge, bei der Erde $D\varepsilon$ = Säkularänderung der Schiefe der Ekliptik.

		Theorie R		Beobachtung B	
Merkur	De	+ 4″24		+ 3″36	± 0″50
	$eD\pi_1$	+ 109,36	+ 8″82	+ 118,24	40
	Di	+ 6,76		+ 7,14	80
	$\sin i D\theta$	— 92,12		— 91,89	50
Venus	De	— 9,58		— 9,46	20
	$eD\pi_1$	+ 0,39	+ 0,06	+ 0,29	20
	Di	+ 3,43		+ 3,87	30
	$\sin i D\theta$	— 105,92		— 105,44	08
Erde	De	— 8,57		— 8,55	09
	$eD\pi$	+ 19,36	+ 0,06	+ 19,48	12
	$D\varepsilon$	— 46,65		— 47,11	25
Mars	De	+ 18,71		+ 19,00	27
	$eD\pi_1$	+ 148,82	+ 0,13	+ 149,55	35
	Di	— 2.34		— 2,26	20
	$\sin i D\theta$	— 72,43		— 72,60	20

	Bedingungsgleichungen					Nach der Ausgl.
				$B-R$	$\sqrt{p}$	$B-R$
Merkur	0,00	v + 2,8	v' + 1,1	v'' = — 0″86	2	— 0″86
	0,00	+ 56,8	+ 18,8	= + 0,06	2,5	— 0,04
	— 0,04	— 0,6	— 1,4	= + 0,38	1,25	+ 0,37
	— 0,33	— 49,3	— 12,2	= + 0,23	2	+ 0,42
Venus	— 1,30	0,0	— 4,9	= + 0,12	5	+ 0,20
	— 0,81	0,0	— 3,9	= — 0,16	5	— 0,11
	+ 0,76	0,0	0,0	= + 0,44	3,33	+ 0,35
	+ 0,26	— 29,2	— 43,2	= + 0,48	12	+ 0,02
Erde	— 0,12	+ 1,3		= + 0,02	10	+ 0,02
	— 0,18	+ 5,8		= + 0,06	8	+ 0,04
	— 0,21	— 28,3		= — 0,46	4	— 0,26
Mars	+ 0,03	+ 0,1	+ 2,1	= + 0,29	4	+ 0,32
	+ 0,06	+ 4,6	+ 21,4	= + 0,60	3	+ 0,86
	— 0,04	+ 12,0	0,0	= + 0,08	5	+ 0,01
	— 0,27	— 25,1	— 7,4	= — 0,17	5	— 0,09

61) *Newcomb*, Fund. Const., p. 107.

In der Spalte Beobachtung finden sich die von *Newcomb*[62]) aus den Beobachtungen 1750—1890 abgeleiteten Werte mit ihren mittleren Fehlern. Die Bedingungsgleichungen für die Korrektionsfaktoren $1+\nu$, $1+\nu'$, $1+\nu''$ obiger Massen sind angefügt; die Zahlen für Mars sind weggelassen, da sie keinen stimmberechtigten Wert liefern können. Als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit wurde $\pm 1''00$ angenommen und hiernach die abgerundeten Werte für die Quadratwurzeln aus den Gewichten angesetzt. Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} \nu &= +0{,}12258 \pm 0{,}13691 \quad \text{Gewicht } 7429, \\ \nu' &= +0{,}00645 \pm 0{,}00534 \quad \text{„ } 48767, \\ \nu'' &= -0{,}01428 \pm 0{,}00444 \quad \text{„ } 70522, \end{aligned} \tag{68}$$

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit $\pm 1''180$ in guter Übereinstimmung mit dem vorausgesetzten Wert. Die Fehlerquadratsumme sinkt von $[\Delta\Delta p] = 49''30$ auf $16''70$. Die übrigbleibenden Fehler sind in der letzten Spalte angegeben und sind mit einer einzigen Ausnahme, der Perihelbewegung des Mars, durchaus befriedigend. Aber die Abweichung ist noch nicht unerklärlich, zumal die *Newcomb*sche Marstheorie noch an kleinen Mängeln zu leiden scheint.

Wenn man nach dem Vorschlag von *Anding* (dieser Band S. 13) die übrig bleibenden Abweichungen in den drei Elementen $eD\pi_1$, Di und $\sin iD\theta$ durch eine Drehung des Inertialsystems zu erklären sucht, so ergibt die Anwendung der Gleichungen (4) (dieser Band S. 14), natürlich jetzt mit Einschluß der Gleichung für das Merkurperihel, die Zahlen folgender Tabelle:

		Bedingungsgleichungen			$B-R$	$\sqrt{p}$	Δ
Merkur	$eD\pi_1$	$+0{,}009\ \mathfrak{X}'$	$-0{,}009\ \mathfrak{Y}'$	$+0{,}205\ \mathfrak{Z}'$	$= -0''04$	$2\frac{1}{2}$	$-0''47$
	Di	$+0{,}680$	$+0{,}732$		$= +0{,}37$	$1\frac{1}{4}$	$+0{,}28$
	$\sin iD\theta$	$-0{,}728$	$+0{,}674$	$+0{,}122$	$= +0{,}42$	2	$+0{,}25$
Venus	$eD\pi_1$	$0{,}000$	$-0{,}000$	$+0{,}007$	$= -0{,}11$	5	$-0{,}12$
	Di	$+0{,}245$	$+0{,}968$		$= +0{,}35$	$3\frac{1}{3}$	$+0{,}30$
	$\sin iD\theta$	$-0{,}968$	$+0{,}245$	$+0{,}059$	$= +0{,}02$	12	$+0{,}02$
Erde	$eD\pi_1$			$+0{,}017$	$= +0{,}04$	8	$0{,}00$
Mars	$eD\pi_1$	$+0{,}001$	$-0{,}001$	$+0{,}093$	$= +0{,}86$	3	$+0{,}67$
	Di	$+0{,}659$	$+0{,}751$		$= +0{,}01$	5	$-0{,}09$
	$\sin iD\theta$	$-0{,}751$	$+0{,}659$	$+0{,}032$	$= -0{,}09$	5	$-0{,}07$

Die Auflösung ergibt

$$\mathfrak{X}' = +0''12, \quad \mathfrak{Y}' = +0''02, \quad \mathfrak{Z}' = +2''07 \pm 1''56$$

oder, wenn man von vornherein $\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}' = 0$ annimmt:

$$\mathfrak{Z}' = +1''05.$$

62) Ebd. p. 94, mit der Abänderung für den Venusknoten p. 162.

Eine wesentliche Besserung der Restfehler wird nicht erzielt, aber die S. 14 dieses Bandes hervorgehobene Schwierigkeit scheint gehoben zu sein, da nun auch das Planetensystem eine verschwindende Drehung des Inertialsystems gegen das empirische nachweist. — Wir kehren zur Massenbestimmung zurück.

Da die für ν und ν' gefundenen Werte sehr unsicher bestimmt sind, werden die Gleichungen auch noch nach ν'' allein aufgelöst mit dem Resultat

(69) $$\nu'' = -0{,}01030 \pm 0{,}00226 + 0{,}006\,\nu - 0{,}676\,\nu'.$$

Die Darstellung wurde kaum geändert (Fehlerquadratsumme $[\Delta\Delta p] = 19''87$, mittlerer Fehler der Gewichtseinheit $\pm 1''19$).

Die hier gefundenen Massen sollen nun mit den anderweitigen Bestimmungen derselben verbunden werden.

24. Die Massen der Planeten Merkur, Venus und Erde. Wir legen der folgenden Untersuchung dasselbe System von Massen zugrunde wie oben (System (*A*), p. 888) und suchen dessen Korrektionsfaktoren $1 + \nu$, $1 + \nu'$, $1 + \nu''$.

Merkur. Die Masse dieses Planeten ist so klein, daß sie sich aus den periodischen Störungen nur durch die Venus ermitteln läßt, Erde und Mars scheiden aus. *Newcomb* fand als Korrektion der *Leverrier*schen Masse 1 : 3000000 (Fund. Const., p. 102), aus den periodischen Störungen der Venus als Korrektionsfaktor $1 - 0{,}584 \pm 0{,}133$. Das gibt für die Korrektion von (*A*)

(70) $$\nu = +0{,}040 \pm 0{,}333.$$

Aus den Säkularstörungen haben wir oben (Nr. **23**) gefunden

(71) $$\nu = +0{,}123 \pm 0{,}137.$$

An anderen Mitteln, die Merkurmasse zu bestimmen, gibt es nur noch das durch die periodischen Kometen, die dem Merkur sehr nahe kommen, insbesondere durch den *Encke*schen und durch den *Winnecke*schen Kometen. Allein die Resultate, die hier zutage getreten sind, sind so unsicher und widersprechend, daß sie nicht stimmberechtigt sind, zumal die Theorie dieser Kometen wegen der Akzeleration noch nicht ins Reine gebracht ist. Wir vereinigen daher obige Werte zu

(72) $$\nu = +0{,}111 \pm 0{,}125;$$ womit

$$\mathbf{1 : m = 6750000 \pm 927500.}$$

Venus. Aus den periodischen Störungen, die durch die Venus in den Bewegungen der Erde (Sonne), des Merkur und des Mars hervorgerufen werden, leitet *Newcomb* (Fund. Const., p. 24) folgende Korrektionen der Masse $\frac{1}{401847}$ ab:

$$\begin{aligned} \nu' &= -0{,}0118 \pm 0{,}0034 \quad \text{aus Sonne,} \\ &= -0{,}0121 \pm 0{,}0050 \quad \text{aus Merkur,} \\ &= -0{,}0076 \quad \text{aus Mars,} \end{aligned}$$

letztere ist so unsicher, daß sie außer Betracht bleibt, die beiden ersten führen zu $\nu' = -0{,}0119 \pm 0{,}002$

und $1 : m' = 406690 \pm 1140,$

also zu dem Korrektionsfaktor für die Masse (A)

(73) $$\nu' = +0{,}0081 \pm 0{,}0028.$$

Aus den Säkularstörungen haben wir oben gefunden

(74) $$\nu' = +0{,}0065 \pm 0{,}0053.$$

Beide Resultate geben vereinigt:

(75) $$\nu' = +0{,}0075 \pm 0{,}0025 \quad \text{und}$$
$$\mathbf{1 : m' = 406950 \pm 1010.}$$

Erde. Bei der Bestimmung der Erdmasse durch die periodischen Störungen, die sie auf die Planeten Merkur, Venus und Mars ausübt, treten so bedeutende Schwierigkeiten auf, daß auf diese Methode verzichtet werden muß. Die Planeten Merkur und Venus bieten nämlich dem Beobachter Scheiben dar mit unscharfen Rändern und durch die wechselnde Beleuchtungsphase von sichelförmigem Umriß, so daß nur ein Rand beobachtet werden kann und der Halbmesser als neue unsichere Größe eingeführt werden muß. Zudem treten die Störungen durch die Erde, als von der gegenseitigen Lage der beiden Planeten abhängig, an denselben Punkten der scheinbaren Venusbahn, an denen hauptsächlich beobachtet werden kann, mit demselben Betrag auf, so daß daraus auf die Größe des Störungsgliedes kein Schluß gezogen werden kann. Beim Planeten Mars sind noch Unsicherheiten in der Theorie vorhanden, die seine Verwendung für den vorliegenden Zweck ausschließen.

Für die Ermittlung der Säkularstörungen sind die genannten Schwierigkeiten von geringerer Bedeutung, da hier die systematischen Fehler sich gegenseitig aufheben. Es ist also aus ihnen ein zuverlässiger Wert der Erdmasse zu erwarten. Obige Diskussion ergab:

$$\nu'' = -0{,}0143 \pm 0{,}0044,$$

oder, was vorzuziehen ist:

$$\nu'' = -0{,}0103 \pm 0{,}0023 + 0{,}006\,\nu - 0{,}676\,\nu'.$$

Dieser Wert beruht hauptsächlich auf der Bewegung des Knotens der Venusbahn auf der Ekliptik, die durch die Vergleichung der Venus-

durchgänge 1761 und 1769 mit denen von 1874 und 1882 von *Newcomb* (Fund. Const., p. 159) mit großer Sicherheit bestimmt wurde.

Adoptieren wir $\nu = + 0{,}111 \pm 0{,}125$,

$\nu' = + 0{,}0075 \pm 0{,}0025$, so folgt:

(76) $\nu'' = - 0{,}0146 \pm 0{,}0046$.

Zur Bestimmung der Erdmasse steht noch ein Weg offen, nämlich aus ihrer Wirkung auf einen Körper der Erdoberfläche, die durch das Sekundenpendel gemessen werden kann, in Verbindung mit ihrer Wirkung auf die Sonne unter Anwendung des dritten *Kepler*schen Gesetzes; er führt auf die Gleichung (Nr. **15**)

$$\pi_\odot'' \sqrt[3]{M} = 607''02,$$

worin $\frac{1}{M}$ die Erd- + Mondmasse bedeutet. Unter Verwendung des durch die trigonometrischen Methoden gewonnenen Wertes von

$$\pi_\odot'' = 8''806 \pm 0''003$$

erhalten wir

$M = 327\,546 \pm 335$ und damit

(77) $\nu'' = - 0{,}0017 \pm 0{,}0010$.

Dieser Wert steht in unüberbrückbarem Widerspruch mit (76) und weist darauf hin, daß entweder die trigonometrisch bestimmte Sonnenparallaxe oder die Bewegung der Venusknoten zu verdächtigen ist. Nachdem über letztere vor Ablauf von hundert Jahren keine weitere Auskunft erwartet werden kann, versuchen wir mit anderen Werten der Sonnenparallaxe zu operieren.

Die Aberrationskonstante (Nr. **6**)

$$A = 20''521 \pm 0{,}007$$

gibt in Verbindung mit der Lichtgeschwindigkeit (Nr. **3**)

$$c = 299865 \pm 26 \text{ km}$$

durch die Formel (Nr. **6**)

$$A'' \pi_\odot'' c = [7{,}732622]$$

für die Sonnenparallaxe den Wert:

(78) $\pi_\odot'' = 8''780 + 0''004$.

Die Mondgleichung in der Erdbewegung (Nr. 8) kann herangezogen werden, da die Mondmasse in ihr auch durch die Nutationskonstante unabhängig von der Sonnenparallaxe bestimmt ist; man erhält mit $E = 81{,}53 \pm 0{,}08$ und $\varkappa = 0{,}10669 \pm 0{,}00008$

(79) $\pi_\odot'' = 8''805 \pm 0''015$.

Trotz der in Nr. **17** ausgesprochenen Bedenken soll auch die parallaktische Ungleichheit unter Verwendung der zurzeit am vollständig-

sten ausgebauten Theorie von *Brown* herangezogen werden, d. h. die Gleichung $[1{,}152720]\,\pi''_\odot = 124''86 \pm 0{,}15$.
Sie gibt:

(80) $$\pi''_\odot = 8''784 \pm 0''011.$$

Diese drei Werte (78)—(80) weisen auf eine deutliche Verkleinerung des durch trigonometrische Methoden bestimmten Wertes $\pi''_\odot = 8''806$ hin und konstatieren so einen Gegensatz zwischen diesem und dem durch Licht- und Gravitationseigenschaften bedingten Wert. Mit dem am sichersten bestimmten $8''780 \pm 0{,}004$ sind alle drei wohl vereinbar, und es soll daher mit diesem die Erdmasse abgeleitet werden. Man findet:

(81) $$\nu'' = -\,0{,}0105 \pm 0{,}0013,$$

was mit dem aus den Säkularstörungen folgenden wohl vereinbar ist.

Will man einen definitiven Wert der Erdmasse, so bleibt nichts übrig als ein Kompromiß in der Auswahl der Sonnenparallaxe aus den trigonometrischen und physikalischen Methoden; ein solcher ist

$$\pi_\odot = 8''79 \pm 0''01.$$

Mit ihm folgt: $M = 329350 \pm 1125$ und

(82) $$\nu'' = -\,0{,}0071 \pm 0{,}0034.$$

Aus der Vereinigung von (76) und (82) folgt:

(83) $$\nu'' = -\,0{,}0097 \pm 0{,}0028 \quad \text{und}$$
$$\mathbf{1 : m''_1 = 330200 \pm 930.}$$

Dieser Wert ist mit den beobachteten Säkularstörungen noch vereinbar und führt zur Sonnenparallaxe

$$\pi''_\odot = 8''782 \pm 0{,}008.$$

Der Widerspruch zwischen diesem Wert und dem durch die trigonometrischen Methoden gefundenen

$$\pi''_\odot = 8''806 \pm 003$$

kann zurzeit nicht weggeschafft werden und muß offen bleiben.

25. Sonnenparallaxe aus den Gravitationsmethoden. Wir stellen hier auch die durch die Gravitationsmethoden erlangten Werte der Sonnenparallaxe zusammen, um durch den Vergleich mit der Tabelle in Nr. **5** die Sicherheit beider Gruppen hervortreten zu lassen.

	M.	F.	Gew.
1. Aus der Aberrationskonstante $20''521$	$8''780$	$\pm 0''004$	25,0
2. Aus der Erdmasse 1 : 330200 . . .	8,782	$\pm 0{,}008$	6,2
3. Aus der Mondgleichung	8,805	$\pm 0{,}015$	1,8
4. Aus der parall. Ungleichheit . . .	8,784	$\pm 0{,}011$	3,3.

Die Gewichte sind wieder unter Annahme des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit $\pm 0''020$ angesetzt und führen zu

$$\pi''_\odot = 8''782 \pm 0''003.$$

Wenn wir von dem Wert aus der Aberrationskonstante absehen, bei dem die Theorie der Aberration in Zweifel gezogen werden kann, ist nur der Wert aus der Erdmasse das unübersteigliche Hindernis einer Ausgleichung der beiden Gruppen. Dabei darf folgendes nicht aus dem Auge gelassen werden. Der Wert der Erdmasse beruht in erster Linie auf der Sicherheit, die wir der Knotenbewegung der Venus zuschreiben und diese darauf, daß weitere Massen oder Kräfte als die in Rechnung gezogenen nicht vorhanden sind. Wären wir gezwungen, diese Annahme aufzugeben, so müßte auch der Wert der Erdmasse eine Nachprüfung erfahren. Es scheint aber, daß der Einklang, der jetzt durch die *Einstein*sche Theorie in den Planetenbewegungen hergestellt ist, hierzu nicht nötigt.

26. Die Massen der Planeten Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Betreff der älteren Bestimmungen dieser Massen sei auf die Zusammenstellungen bei *Harkness* S. 34—35 verwiesen. Wir geben hier nur eine Auswahl neuerer Werte.

Mars. *A. Hall* hat bald nach Entdeckung der Satelliten die Masse bestimmt: $1 : m''' = 3093500 \pm 3295,$

die bis heute beibehalten ist, da eine spätere Bestimmung von ihm (1892) nur die unbedeutende Korrektion $\nu''' = +0{,}014$ lieferte und auch die Bestimmung von *H. Struve* (St. Pét. Mém. VIII (1899))

$$1 : m''' = 3090000 \pm 10000$$

zu einer Änderung keinen Anlaß gab.

Jupiter. Diese größte und wichtigste Masse des Sonnensystems darf nicht auf die Satelliten allein begründet werden, da systematische Fehler bei den Messungen nicht ausgeschlossen sind. Daher hat *Newcomb* folgendes Material zusammengetragen:

		Methode:	$1 : m^{IV}$	Gew.
Bessel	1842	Satelliten	$1047{,}879 \pm 0{,}158$	$\frac{1}{2}$
Möller	1872	Kom. Faye	$788 \pm 0{,}185$	1
Krueger	1873	Plan. Themis	$538 \pm 0{,}052$	5
Schur	1881	Satelliten	$232 \pm 0{,}246$	$\frac{1}{2}$
Haerdtl	1888	Kom. Winnecke	$175 \pm 0{,}014$	10
Hill	1892	Saturn	380	7
Newcomb	1894	Pl. Polyhymnia	340	20

und daraus den Wert abgeleitet

$$1 : m^{IV} = 1047{,}35 \pm 0{,}065,$$

der jetzt allgemein verwendet wird. Neuerdings ist nur eine Bestimmung von *Cookson* (Lond. Astr. Soc. Month. Not. 64 (1904), p. 742) hinzugekommen: $1 : m^{IV} = 1047{,}67 \pm 0{,}06$.

Saturn. Der alte klassische Wert von *Bessel* (1833) aus Satellitenbeobachtungen $1 : m^{V} = 3501{,}6 \pm 0{,}78$

wird noch immer beibehalten, obwohl *H. Struve* durch eine Revision der *Bessel*schen Reduktion $1 : m^{V} = 3502{,}5$ fand und obwohl alle weiteren Ermittelungen auf eine Vergrößerung der Masse hinweisen:

		$1 : m^{V}$
A. Hall	1885	$3481{,}3 \pm 0{,}54$
L. de Ball	1887	$3492{,}8 \pm 2{,}4$
H. Struve	1888	$3498{,}0 \pm 1{,}17$
A. Hall	1889	$3500{,}5 \pm 1{,}14$
H. Struve	1898	3495,3

Uranus. Folgende Bestimmungen liegen vor:

		$1 : m^{VI}$
Newcomb	1875	22540 ± 50
Hall	1885	22682 ± 27
Hill	1893	22869
Bergstrand	1903	23383 ± 115

Neptun.

		$1 : m^{VII}$
Bond	1850	19400
Newcomb	1875	19380 ± 70
Hall	1885	19092 ± 64
Holden	1885	18279 ± 114
Hill	1893	19700

(Abgeschlossen Sommer 1919.)

VI 2, 18. KOMETEN.

Von

S. OPPENHEIM

in Wien.

MIT EINEM BEITRAG:

BEZIEHUNGEN ZWISCHEN KOMETEN UND STERNSCHNUPPEN.

Von

C. HOFFMEISTER

in Sonneberg (Thüringen).

Inhaltsübersicht.

1. Historische Übersicht.
2. Störungen der Kometen.
3. Anomalien in den Bewegungen der Kometen.
4. Masse der Kometen.
5. Helligkeit der Kometen.
6. Die kosmogonische Stellung der Kometen.
   a) Die scheinbare Verteilung der Bahnelemente der Kometen.
   b) Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den Ursprung der Kometen.
   c) Die Problemstellung *E. Strömgrens*.
7. Die kurzperiodischen Kometen. Das *Tisserand*sche Kriterium.
8. Teilungen von Kometen, Kometensysteme und Familien.

Literatur.

Monographien.

F. W. Bessel, Entwickelung einer allgemeinen Methode, die Störungen der Kometen zu berechnen, Königsberg Beob. 1810 = Ges. Abh. I, p. 20.

P. A. Hansen, Mémoire sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes, Paris C. R. Suppl. 1856.

H. Gyldén, Über eine Methode, die Störung der Kometen mittels rasch konvergierender Ausdrücke darzustellen, St. Petersb. Bull. 14 (1869).

— Theoretische Untersuchungen über die intermediären Bahnen der Kometen in der Nähe eines störenden Körpers, St. Pétersb. Mém. 32 (1884).

J. F. Encke, Über den Kometen von Pous und die Existenz eines widerstehenden Mediums im Weltraume, Berl. Jahrb. für 1861.

O. Backlund, Sur la masse de la planète Mercure et sur l'accélération du mouvement moyen de la comète d'Encke, Paris Bull. astr. 11 (1894), p. 473.

J. V. Schiaparelli, Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, Deutsche Ausgabe von *G. Boguslawski,* Stettin 1871.

— Orbites cométaires, courants cosmiques météorites, Paris Bull. astr. 27 (1910), p. 194, 241.

F. Tisserand, Hypothèse de Lagrange sur l'origine des comètes et des aërolithes, Paris Bull. astr. 7 (1890), p. 453.

O. Callandreau, Étude sur la théorie des comètes périodiques, Paris Obs. Mém. XX (1890).

L. Schulhof, Les comètes periodiques, état actuel de leurs théories, Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 323.

L. Fabry, Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes, Paris Thèses 1893.

G. Fayet, Recherches concernant les excentricités des comètes, Paris Thèses 1906.

O. Zanotti-Bianca, Le idee di Lagrange, Laplace, Gauß e Schiaparelli sull' origine delle comete, Memoria storica, Torino Acad. Mem. 63 (1913).

E. Strömgren, Über den Ursprung der Kometen, Kopenhagen Obs. Publ. 19 (1914).

J. Holetschek, Untersuchungen über die Größe und Helligkeit der Kometen und ihrer Schweife: I. Abh. Die Kometen bis 1760, Wien Akad. Denkschr. 73 (1896), p. 318; II. Abh. Die Kometen von 1766—1799, ebenda 77 (1905), p. 507; III. Abh. Die Kometen von 1801—1835 und die helleren bis 1884, ebenda 88 (1913), p. 744; IV. Abh. Die helleren und V. Abh. Die minder hellen periodischen Kometen, ebenda 93 (1916), p. 201 und 94 (1917), p. 375.

— Über die Richtungen der großen Achsen der Kometenbahnen, Wien Ber. 94 (1886), p. 879.

— Über die Verteilung der Bahnelemente der Kometen, ebenda 98 (1889), p. 1541.

— Über den Zusammenhang der heliozentrischen Perihellängen mit der Perihelzeit der Kometen, ebenda 99 (1890), p. 654.

— Über die in der Verteilung der bekannten Kometen nachgewiesenen Perihelregeln und ihre Bestätigung durch die Kometen seit 1900, ebenda 128 (1919), p. 281.

Verzeichnisse der Bahnelemente der berechneten Kometen finden sich mehr oder weniger vollständig in jedem Lehrbuch der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, außerdem seien noch erwähnt:

W. Olbers, Bestimmungsstücke der Bahnen aller bisher berechneten Kometen, in seiner Abhandlung: Über die leichteste und bequemste Methode zur Berechnung der Bahn eines Kometen, Weimar 1797 = *Olbers* Werke I; mit einer Fortsetzung dieses Verzeichnisses von *Lindenau* in Zach, Monatl. Korresp. 26 (1812) und *J. F. Encke,* Weimar 1847, und *J. G. Galle,* Leipzig 1864.

J. C. Burkhard, Nouvelles tables générales du mouvement parabolique des comètes, Paris Conn. d. Temps pour 1818.

Ph. Carl, Repertorium der Kometenastronomie, München 1864.

J. G. Galle, Verzeichnis aller bisher berechneten Kometenbahnen nebst Anmerkungen und Literaturnachweisen, Leipzig 1894.

E. Weiß, Verzeichnis der Bahnelemente aller bisher berechneten Kometen, Wien Sternw.-Kalender für d. Jahr 1909.

Jahresberichte über Neuberechnungen von Kometen und Ausweise über die Beobachtungen enthält die Vjs. d. astr. Gesellsch. in regelmäßiger Aufeinanderfolge.

1. Historische Übersicht.[1]) Wissenschaftlich verwertbare Beobachtungen von Kometen begannen in Europa erst im 15. Jahrhunderte mit *Regiomontan*. Bis dahin hatte man nach *Aristoteles* trotz der Gegenansicht vieler anderer, namentlich *Senecas*, die Kometen für atmosphärische Gebilde angesehen, denen ebensowenig wie etwa den Wolken am Himmel ein astronomisches Interesse gebühre. Nur ganz rohe Angaben über ihren Lauf am Himmel liegen vor, die in seltenen Fällen, und auch da nur zu einer ganz ungefähren Bahnbestimmung als geeignet sich erweisen. Eine Ausnahme davon bilden die schon aus den ältesten Zeiten herrührenden Aufzeichnungen der Chinesen, die zu weitaus besseren Bahnberechnungen[2]) verwertet werden konnten. Erst *Regiomontan* beobachtete im Vereine mit dem Amateur *Bernhard Walter* in Nürnberg den Kometen des Jahres 1472, konnte aber aus seinen Beobachtungen bloß feststellen, daß dessen Entfernung von der Erde jedenfalls größer sei als die des Mondes. (Methode der Parallaxenberechnung aus zwei Zenitdistanzen und gleichzeitigen Azimuten bei verschiedenen Stundenwinkeln.) Damit war der Streit über den Ursprung der Kometen gegen die Aristotelische zugunsten jener Ansicht entschieden, die sie als selbständige Himmelskörper betrachtet. Auf *Regiomontan* folgten neben *Peter Apian* und dem Landgrafen *Wilhelm IV. von Kassel* namentlich *Tycho Brahe*[3]), in dessen Lebenszeit die Erscheinungen von sieben hellen Kometen 1577, 1580, 1582, 1585, 1590, 1593 und 1596 fielen, die er alle regelmäßig und sorgfältig beobachtete. So gelang ihm der strenge Nachweis dafür, daß die Parallaxe der Kometen viel zu klein sei, als daß sie irdischen Ursprunges sein könnten, vielmehr beschreiben sie ihre Bahn am Himmel in Entfernungen, die mindestens sechsmal so groß seien wie die des Mondes von der Erde, ja bei einigen sogar größer als die der Venus.

Auch der Frage nach der Bahn der Kometen am Himmel trat *Tycho* näher. Er findet aus den Beobachtungen des Kometen von 1577, daß dieser sich außerhalb der Venusbahn, wohl in einem Kreise

1) Zur Vorgeschichte der Kometen vgl. *R. Wolf*, Geschichte der Astronomie, München (1877), dann *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie, Zürich, I (1890), § 279—280, und II (1892), § 574—590; endlich *N. Herz*, Geschichte der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Leipzig, I (1887), II (1894).

2) *A. Pingré*, Cométographie ou traité historique et théorique des comètes, I, II, Paris (1873—1874); *J. Williams*, Observations of comets from B. C. 60 to A. D. 1640 extracted from the chinese annals, London (1871); *E. Biot*, Catalogue des comètes observées en Chine, Paris, Conn. d. Temps pour 1846.

3) *Tycho Brahe*, Observationes septem cometarum, Hafniae 1567, dann: Progymnasmata astronomiae instauratae . . ., Opera omnia Tom. II u. III, Hafniae 1919.

aber mit veränderlicher und in jedem Punkte der Bahn erst empirisch zu bestimmender Geschwindigkeit bewege. *J. Kepler*[4]) schreibt den Kometen eine geradlinige Bewegung zu, ebenso *J. Hevel*[5]), der wohl schon von einer von der Geraden ein wenig abweichenden krummlinigen Bewegung spricht, ohne aber eine Bestimmung der Art dieser Krümmung zu versuchen.

Eine bedeutungsvolle Wendung brachte der 1680 erschienene Komet, der lange Zeit hindurch am Morgenhimmel vor und dann ebenso lange wieder nach seinem Perihel am Abendhimmel beobachtet wurde und so den Anschein erweckte, als ob er zwei fast parallele Gerade, aber im entgegengesetzten Sinne am Himmel beschrieben hätte. Der Pastor *Georg Samuel Dörffel*[6]) hatte die glückliche Idee, die beiden Geraden durch einen stetigen Kurvenzug zu verbinden, und so war die wahre Bahn des Kometen mit einem Schlage da, die einer Parabel mit der Sonne als Brennpunkt. Eine zweite, noch bedeutungsvollere trat mit der *Newton*schen Entdeckung der allgemeinen Gravitation ein. Sie erteilte in kosmischer Hinsicht den Kometen den gleichen Rang wie den Planeten, einzig mit dem rein formalen Unterschied, daß diese sich in schwach, jene aber in stark exzentrischen Ellipsen um die Sonne als Gravitationszentrum bewegen und sich der von ihnen um das Perihel herum durchlaufene Bogen bloß wegen der kurzen Sichtbarkeitsdauer auf eine Parabel reduziere. *Newton*[7]) gab auch eine Methode an, die Elemente dieses parabolischen Laufes zu berechnen, und *E. Halley*[8]) bestimmte daraufhin die Bahnen jener Kometen von 1337 bis 1698, von denen bessere Beobachtungen vor-

4) *J. Kepler,* Ausführlicher Bericht von dem 1607 erschienenen Haarstern, Hall in Sachsen 1608 und De Cometis libelli tres, Augustae Vindelicorum 1619 in den Gesam. Werken, Bd. VII, Frankfurt 1868.

5) *J. Hevel,* Prodromus cometicus, Gedani 1665.

6) *G. S. Dörffel,* Astronomische Beobachtungen des großen Kometen 1680—81, Plauen 1681.

7) *J. Newton,* Principia, 3. Buch, 5. Abschn.

8) *E. Halley,* Cometographia seu astronomiae cometicae synopsis, Oxoniae 1705. Nach der *Halley*schen Entdeckung lag der Gedanke nahe, auch für andere Kometen ähnliche Periodizitäten aufzusuchen (vgl. *R. Wolf,* Handbuch der Astronomie, II. Bd., § 577). Doch von allen diesen bewährten sich nur vorerst die *Encke*sche Entdeckung der Identität der Kometen von 1786, 1795, 1805 mit dem von 1818, mit der relativ kurzen Umlaufszeit von 3,3 Jahren (seitdem *Encke*scher Komet genannt), dann die *J. Morstadt*sche zwischen den Kometen 1772 und 1806 mit einer Umlaufszeit von $6^3/_4$ Jahren, welcher 1826 von *W. Biela* wieder aufgefunden wurde (der *Biela*sche Komet). Über den Kometen von 1770, dessen Umlaufszeit von *Lexell* zu $5^1/_2$ Jahren berechnet wurde, der aber seitdem nicht wieder gesehen wurde, vgl. Nr. 7.

lagen, im ganzen 24. Hierbei zeigten sich ihm drei, die der Jahre 1531, 1607 und 1682, deren Bahnelemente eine sehr große Ähnlichkeit untereinander aufwiesen:

☄ 1531	$\Omega = 49°25$	$i = 17°56'$	$\pi = 301°39$	$\lg q = 9{,}7536$	$T = 1531{,}652$
☄ 1607	$= 50\ 21$	$= 17\ 2$	$= 302\ 16$	$= 9{,}7685$	$= 1607{,}821$
☄ 1682	$= 51\ 16$	$= 17\ 56$	$= 302\ 53$	$= 9{,}7659$	$= 1682{,}704$

Beweg. retrograd

die, da auch die Zwischenzeiten zwischen den drei Erscheinungen (76,169 und 74,883 Jahre) sich als nahezu gleich zeigten, ihn zu dem Gedanken ihrer Identität und damit der Existenz eines periodisch wiederkehrenden Kometen führten.

Durch diese Entdeckung, die sich durch die Vorausberechnung von *A. Clairaut* für die nächste Wiederkehr im Jahre 1758 glänzend bewährte, war ein mächtiger Anstoß gegeben. Man begann, systematisch den Himmel nach Kometen zu durchsuchen und ist so sicher, daß auch jeder, nur für die optischen Instrumente der Astronomen erreichbare, aufgefunden wird, während vorher natürlich eine solche Entdeckung stets dem Zufall überlassen schien. Zu dieser visuellen Durchmusterung kam neuester Zeit die photographische hinzu, auch in dem Sinne, daß sie deren Sichtbarkeitsdauer verlängerte und damit die Genauigkeit der Bahnbestimmung erhöhte. Die Zahl der beobachteten und in ihrer Bahn festgelegten Kometen stieg damit sehr an. Sie beträgt gegenwärtig wohl an 500, darunter an 30 periodischen und auch schon in mehreren Erscheinungen wieder aufgefundenen.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2. Störungen der Kometen. Die von *E. Halley* vorausgesagte Wiederkehr des Kometen von 1682 für das Jahr 1759 gab *A. Clairaut*[9]) als erstem Veranlassung, dessen Störungen durch die Planeten Jupiter und Saturn zu berechnen. Den Ausgangspunkt für seine Untersuchungen bilden die Gleichungen für die heliozentrischen Koordinaten (Radiusvektor r, wahre Länge v und mittlere Anomalie M) als Störungen in der Bahnebene, sie lauten[10]), wenn man R als Störungsfunktion ansetzt:

---

9) *A. Clairaut*, Théorie du mouvement des comètes avec l'application à la comète, qui a été observée en 1531, 1607, 1682, 1759, Paris 1760 und Recherches sur les comètes de 1521, 1607, 1682 et 1759, Paris 1762.

10) Die Gleichungen sind identisch mit den Encykl. VI 2, 14 (*E. Brown*), Nr. 4, 8 angegebenen ($s = 0$ zu setzen).

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi = -\dfrac{\partial R}{\partial r}, \quad \pi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial R}{\partial v}, \quad \varrho = \int \pi r^3 dv : k^2 a(1-e^2), \\ \Omega = \left(\dfrac{\varphi r^2}{k^2} + \dfrac{\pi r}{k^2}\dfrac{\partial v}{\partial r} - 2\varrho\right) : (1+2\varrho), \\ \dfrac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos v + \sin v \int \Omega \cos v\, dv - \cos v \int \Omega \sin v\, dv, \\ k\sqrt{a(1-e^2)}\, dt = r^2 dv : \sqrt{1+2\varrho} \end{cases}$$

und als Veränderung von Knoten und Neigung der Bahnebene

$$(2)\quad \begin{cases} \sin i\, \Delta\Omega = Wr^3 \sin(v-\Omega)\, dv : k^2 a(1-e^2), \\ di = Wr^3 \cos(v-\Omega)\, dv : k^2 a(1-e^2), \end{cases}$$

mit W als der auf der Bahnebene senkrecht stehenden Störungskomponente. Die Methode der Rechnung war die der speziellen Störungen nach folgendem Schema:

exzentr. Anom. E:	0^0– 90^0	Zeit 1531–1538	1607–1615	1682–1689
	90^0–270^0	1538–1600	1615–1675	1689–1751
	-90^0– 0^0	1600–1607	1675–1682	1751–1759
	Verbindung der Perihele	1531 u. 1607	1607 u. 1682	1682 u. 1759,

wobei die störenden Kräfte φ, π und W in die zwei Gruppen: 1. direkte Störungen der Planeten und 2. Einwirkung dieser auf die Sonne geteilt wurden. Das Ergebnis der Rechnungen war:

vorausberechnete Perihelzeit	1759 April 13
aus den Beobacht. (1759) abgeleitete Perihelzeit . . .	1759 März 13

daher Fehler = 30 Tage.

P. S. Laplace widmet in seiner Mécanique céleste[11]) einige Kapitel den speziellen Ausführungen, wie die Störungen periodischer Kometen zu berechnen sind. Sie weichen nach zwei Richtungen von den für die Planeten gebräuchlichen Methoden ab, 1. in dem Vorschlage, in dem Aphelteile der Bahn, wenn der Radiusvektor des Kometen r bedeutend größer ist als der des störenden Planeten r_1, die Bewegung des Kometen auf den Schwerpunkt von Sonne und störendem Körper zu beziehen, 2. bei bedeutender Annäherung des Kometen an den Planeten nicht mehr die Sonne, sondern diesen als Anziehungszentrum anzusehen. Im ersten Falle geht man von den allgemeinsten Störungsgleichungen in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z aus,

$$(3)\quad x'' = \frac{k^2 m_0 (x - x_0)}{r_0^3} + \sum \frac{k^2 m_i (x - x_i)}{r_i^3} = 0,$$

und analog für y und z, und betrachtet in ihnen x, y, z als dem Kometen, x_0, y_0, z_0 und r_0 als der Sonne, x_i, y_i, z_i und r_i als den einzelnen

11) *P. S. Laplace,* Méc. cél. Tome IV, livre 10, chap. 1, 2 et 3.

störenden Planeten zugehörig — zunächst mit einem willkürlichen Anfangspunkt. Fügt man sodann die Größe $k^2(m_0 + \sum m_i)\varrho^{-3}$ positiv und negativ hinzu, wo ϱ die Distanz der Kometen vom gemeinsamen Schwerpunkt aller bedeutet, und von da ab dieser als Anfangspunkt des Koordinatensystems angenommen wird, so folgt[12]

$$(4)\quad \begin{cases} x'' + k^2 x(m_0 + \sum m_i)\varrho^{-3} + \sum k^2 m_i \left(\frac{x - x_i}{r_i^3} - \frac{x}{\varrho^3}\right) = 0 \\ \text{oder} \\ x'' + k^2 x(m_0 + \sum m_i)\varrho^{-3} + \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

und analog für y und z. Die ersten zwei Glieder dieser Gleichungen bestimmen die elliptische Bewegung des Kometen um den Schwerpunkt, die weiteren lassen sich als Störungsglieder auffassen, wobei als Störungsfunktion

$$(4a)\qquad R = k^2 m_0 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0}\right) + \sum k^2 m_i \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_i}\right)$$

auftritt. Indem man nunmehr noch die Distanzen Δ_0 und Δ_i der Sonne und der Planeten vom gemeinsamen Schwerpunkt durch die Gleichungen

$$r_0^2 = \Delta_0^2 + \varrho^2 - 2\varrho\Delta_0 \cos H_0$$
$$r_i^2 = \Delta_i^2 + \varrho^2 - 2\varrho\Delta_i \cos H_i$$

einführt und für sie die Entwicklungen ansetzt

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\Delta_0}{\varrho}\cos H_0 + \frac{\Delta_0^2}{\varrho^2}\cdot\frac{3\cos^2 H_0 - 1}{2} + \cdots\right),$$
$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\Delta_i}{\varrho}\cos H_i + \frac{\Delta_0^2}{\varrho^2}\cdot\frac{3\cos^2 H_i - 1}{2} + \cdots\right),$$

nimmt, da wegen des Schwerpunktsatzes

$$m_0\Delta_0 \cos H_0 + \sum m_i \Delta_i \cos H_i = 0$$

ist, der Ausdruck für R die Form[13]

$$(4b)\qquad R = k^2 m_0 \frac{\Delta_0^2}{\varrho^3}\cdot\frac{3\cos^2 H_0 - 1}{2} + \sum k^2 m_i \frac{\Delta_i^2}{\varrho^3}\cdot\frac{3\cos^2 H_i - 1}{2} + \cdots$$

12) Die Gleichungen (3) in ihrer ursprünglichen Form wenden *P. H. Cowell* und *A. Crommelin* in der Preisarbeit: Essay on the return of Halleys Comets, Publ. d. astr. Ges. XXIII (1910) zur Berechnung der speziellen Störungen dieses Kometen für die zwei Umläufe von 1759—1835 und 1835—1910 an. Vgl. auch den Bericht über sie von *v. Seeliger*, Astr. Ges. Vjs. 45 (1910), p. 2.

13) Über die Ableitung der Gl. (4), d. i. der direkten elliptischen Bewegung eines Kometen um den Schwerpunkt von Sonne und störenden Körpern vgl. *F. Tisserand*, Méc. cél. IV (1896), chap. 12; *J. Bauschinger*, Bahnbestimmung (1906), p. 565; ferner *F. W. Bessel*, Entwicklung einer allgemeinen Methode, die Störungen der Kometen zu berechnen, Königsberger Beob. 1810, Ges. Abh. I,

an, die sagt, daß R wegen der Kleinheit von Δ_0 und Δ_1 gegenüber ϱ eine Größe zweiter Ordnung ist, die bei genäherten Rechnungen vernachlässigt werden kann.

Für den zweiten Fall, den einer bedeutenden Annäherung des Kometen an den störenden Planeten, führt *Laplace* den Begriff dessen Wirkungssphäre ein. Er definiert ihn in der folgenden Art: Ist K die Anziehungskraft der Sonne und S die störende Kraft des Planeten auf den Kometen, ebenso K_1 die Anziehung des Planeten und S_1 die störende Kraft der Sonne, so ist

$$S : K = S_1 : K_1$$

die Gleichung einer Fläche, auf deren Begrenzung beide Verhältnisse einander gleich sind und es daher gleichgültig ist, ob man die Sonne als Haupt- und den Planeten als störenden Körper oder im Gegenteile den Planeten als Anziehungs- und die Sonne als das Störungszentrum ansieht. Innerhalb dieser Fläche ist aber

$$S_1 : K_1 > S : K,$$

und daher, wenn der Komet sie in seiner Bewegung um die Sonne durchdringt, vorteilhafter, die Bahnrechnungen in bezug auf den Planeten als Anziehungszentrum auszuführen und die Störungen als durch die Sonne verursacht anzunehmen. Da

$$K = \frac{k^2 m_0}{r^3}, \quad S = k^2 m_1 \Big[\Big(\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\Big)^2 + \Big(\frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\Big)^2 + \Big[\Big(\frac{z_1 - z}{\Delta^3}\Big) - \frac{z_1}{r_1^3}\Big]^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

p. 20: I. Teil: Bewegung des Kometen um den Schwerpunkt; II. Teil: Verbesserungen, die noch anzubringen sind, wenn man die Schwerpunktsbahn als erste Annäherung ansieht. — Nach dieser Methode (Reduktion auf den Schwerpunkt von Sonne und Planeten) berechnete *J. F. Encke* die Störungen des nach ihm benannten Kometen von 1819—1860. Ferner *Th. Damoiseau* (Mém. Turin 1820), *G. P. de Pontécoulant* (Paris Sav. Etr. 1835), *O. A. Rosenberger* (Astr. Nachr. 8, 9 u. 11, 1833—34) und *J. W. Lehmann* (Astr. Nachr. 12, 1835) die Störungen des *Halley*schen Kometen zur Vorausberechnung der Erscheinung für 1835. Über die Art der Berechnung äußert sich *Encke* [Astr. Nachr. 9 (1831), p. 317] mit folgenden Worten: So oft der Komet in eine größere Entfernung von einem Planeten kam (bei Merkur nach 4, bei Venus und Erde nach 12 Tagen), wurde in bezug auf ihn der Übergang auf den Schwerpunkt des durch ihn und die Sonne bestimmten Systems durchgeführt. Demgegenüber weist *J. W. Lehmann* [Astr. Nachr. 16 (1839), p. 97] auf einige Unannehmlichkeiten dieses Verfahrens hin. Sie bestehen vor allem in der Berechnung der Planetenkoordinaten in bezug auf den Schwerpunkt, ferner in der Unmöglichkeit, eine Absonderung der Störungen bei eventueller Korrektion der Planetenmasse vornehmen zu können. Er schlägt deshalb vor, diese Reduktion nur für die vier inneren Planeten auszuführen, für die vier äußeren dagegen die Störungen stets getrennt zu rechnen.

$$K_1 = \frac{k^2 m_1}{\Delta^2}, \quad S_1 = k^2 m_0 \left[\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

so wird, wenn man nach der kleinen Größe $u = \Delta : r_1$ entwickelt und außerdem

$$r_0 \Delta \cos \vartheta = x_1 (x_1 - x) + y_1 (y_1 - y) + z_1 (z_1 - z)$$

setzt, die Gleichung der Fläche

$$\Delta = r_1 \sqrt[5]{m_1^2 : m_0^2 (1 + 3 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5}$$

Sie gibt für $\vartheta = 0$ als Minimum für $\Delta_1 = r_1 \sqrt[5]{m_1^2 : 2 m_0^2}$ und für $\vartheta = 90^0$ als Maximum $\Delta_2 = \sqrt[5]{m_1^2 : m_0^2}$ und stellt wegen des von 1 wenig verschiedenen Verhältnisses von $\Delta_2 : \Delta_1 = \sqrt[5]{2} = 1{,}15$ genähert

$$\Delta = r_1 \sqrt[5]{m_1^2 : m_0^2} \tag{5a}$$

eine Kugel vor, die man die Wirkungssphäre des Planeten von der Masse m_1 gegenüber der der Sonne, m_0, nennt.[14])

Die Bahn, die der Komet um den Planeten nach Eintritt in dessen Wirkungssphäre beschreibt, ist stets eine Hyperbel. Der Beweis hierfür ergibt sich in einfacher Weise aus der Gleichung

$$1 - e^2 = \frac{p}{a},$$

die, wenn man in ihr den Wert von $\frac{1}{a}$ aus der Energiegleichung

$$V^2 = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{a}$$

substituiert, übergeht in

$$1 - e^2 = p \left(\frac{2}{r} - \frac{V^2}{k^2} \right).$$

In ihr ist aber k^2, das die Anziehungskonstante für die Bewegungen um die Sonne ($m_0 = 1$) vorstellt, zu ersetzen durch $k^2 m_i$; somit ist das zweite Glied $\frac{V^2}{k^2 m_i}$ wegen der Kleinheit von m_i stets größer als das erste $\frac{2}{r}$ und daher $1 - e^2 < 0$. Da ferner die Geschwindigkeit des Kometen beim Austritt aus der Wirkungssphäre wesentlich eine andere ist als beim Eintritt, so erfährt seine Bahn durch eine solche Annäherung eine sehr bedeutende Umwandlung.[14a]) (Vgl. Nr. 7.)

14) Die Radien der Wirkungssphären der einzelnen Planeten sind:

Merkur $\Delta = 0{,}001$	Erde 0,006	Jupiter 0,322	Uranus 0,339
Venus $\Delta = 0{,}004$	Mars 0,004	Saturn 0,364	Neptun 0,576.

Allgemeine Untersuchungen über solche Bahnumwandlungen, besonders durch Jupiter, führte *O. Callandreau* durch, Paris Obs. Mém. 20 (1890).

14a) Dies gilt hauptsächlich für die großen Planeten (Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun). Für die vier inneren und kleineren Planeten schlägt *La-*

Im allgemeinen Falle dagegen, wenn weder eine bedeutende Annäherung des Kometen an den störenden Planeten vorhanden ist, noch auch seine Entfernung von ihm so groß ist, daß eine Reduktion auf den Schwerpunkt von Sonne und Planet zur Vereinfachung der Störungsrechnungen ratsam erscheint, kann nur eine Teilung der Bahn[15]) nach der schon von *Clairaut* durchgeführten Methode Platz greifen. In diesem Sinne gibt *P. A. Hansen*[16]) eine Entwicklung der Störungsfunktion in den zwei Formen:

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(iE_0 \pm i'M') \quad \text{und} \quad \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(iv_0 \pm i'M'),$$

von denen die erste (nach der exzentrischen Anomalie fortschreitende) für den unteren Perihelteil der Kometenbahn, die zweite, mit Einführung der wahren Anomalie, für die obere Aphelhälfte gilt. In seinen weiteren Abhandlungen führt er an Stelle von E_0 und v_0 zwei neue, von ihm partiell genannte Anomalien ω_1 und ω_2 ein nach den Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \text{unterer Teil: } 2\sqrt{2ae}\sin\tfrac{1}{2}E = (\sqrt{\varrho_2}+\sqrt{\varrho_1})\sin\omega_1 + (\sqrt{\varrho_2}-\sqrt{\varrho_1}), \\ \text{oberer Teil: } 2\sqrt{2er_1r_2}\cos\tfrac{1}{2}v = (\sqrt{\varrho_2}+\sqrt{\varrho_1})\sin\omega_2 + (\sqrt{\varrho_2}-\sqrt{\varrho_1}), \end{cases}$$

place (Méc. cél. Tome IV, Livre IX, § 12) dagegen eine Entwicklung der Koordinatendifferenzen zwischen Komet und störendem Planet in Potenzreihen nach der Zeit vor, wobei die erste Potenz genügt. Die Integration der Störungsgleichungen gestaltet sich unter dieser Annahme recht einfach. *Laplace* berechnet darnach die Störungen des *Lexell*schen Kometen bei dessen Annäherung an die Erde und findet als Änderung der Umlaufszeit — 2,046 Tage.

Vgl. hierzu noch: *E. Strömgren,* Über die Merkurnähe des Kometen 1902 c, Astr. Nachr. 160 (1902), p. 191, sowie: Über die gegenseitigen Störungen zweier einander nahe kommenden kleinen Planeten, Astr. Nachr. 165 (1904), p. 17.

15) Die Frage, wann der Übergang zur Berechnung der Störungen um den Mittelpunkt der Sonne zu der um den Schwerpunkt stattzufinden habe, beantwortet *P. Harzer,* Astr. Nachr. 110 (1885), p. 353 durch Einführung des Störungsmaßes $M = \sqrt{\Sigma A_i^2}$, wo A_i den Mittelwert des Quadrates der störenden Kräfte bedeutet, und die Summe Σ über alle störenden Körper zu erstrecken ist. Hierbei ist A_i doppelt zu rechnen, einmal für den Mittelpunkt der Sonne und sodann für den Schwerpunkt von Sonne und störende Körper, und der Vergleich beider gibt einen Anhaltspunkt für die Wahl des Anfangspunktes des Koordinatensystems, Sonne oder Schwerpunkt von Sonne und Planeten.

16) *P. A. Hansen,* Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung, Seeberg Sternw. Schriften 1843, ferner: Schreiben an Encke, Berlin Ber. 1884, p. 345, und Neue Form der Störungen in sehr exzentrischen und sehr geneigten Bahnen, ebenda 1845, p. 39; dann: Mém. sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes, Paris C. R. Suppl. D. 1856. Vgl. auch: *Jacobi,* Nachlaß, herausgegeben von *H. Bruns,* Ges. Werke VII (1891), p. 284—305.

wobei im

ersten Teil $\varrho_1 = r_1 - a(1-e)$, $\varrho_2 = r_2 - a(1-e) \ldots$

zweiten „ $\varrho_1 = [a(1+e) - r_2] r_1 (1-e)$, $\varrho_2 = [a(1+e) - r_1] r_2 (1-e)$

ist und erzielt damit eine Darstellung der Störungen, die in zwei vollständig voneinander getrennte Teile zerfällt zwischen den zwei ganz willkürlichen Radienvektoren r_1 und r_2 als Grenzpunkten der Teilung. Für die spezielle Annahme einer symmetrischen Teilung der Bahn $r_1 = r_2$ wird im Perihel $E_{\sigma} = \omega_1 = 0$ und $\omega_1 = \pm 90^0$ für $r_1 = r_2 = a(1 - e\cos E_1)$, im Aphel $v_{\sigma} = \omega_2 = 180^0$ und $\omega_2 = \pm 90^0$ für $r_1 = r_2 = a(1-e^2) \cdot (1 + e\cos v_1)^{-1}$. Sonst im allgemeinsten Falle wären r_1 und r_2 so zu bestimmen, daß sie den beiden Punkten entsprechen, die die Minima der Entfernung des Kometen vom störenden Körper begrenzen.

H. Gyldén[17]) in seiner Vorliebe für elliptische Funktionen und dem Bestreben, durch sie eine bessere Konvergenz der Störungsreihen zu erzielen, definiert die partiellen Anomalien durch

$$(7)\quad \begin{cases} \text{untere Bahnhälfte} & \sin\tfrac{1}{2}E = k \sin am \dfrac{2K}{\pi}\omega_1 \quad \operatorname{mod} k = \pm \sin\tfrac{1}{2}E_1, \\ \text{obere} \quad \text{„} & \cos\tfrac{1}{2}v = l \sin am \dfrac{2L}{\pi}\omega_2 \quad \operatorname{mod} l = \pm \cos\tfrac{1}{2}v_1, \end{cases}$$

wobei K und L die den Modulen k und l entsprechenden vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, und $\pm E_1$ bzw. $\pm v_1$ die Werte von E_{σ} und v_{σ} für die zwei symmetrisch gelegenen Teilungspunkte bedeuten. Eine weitere Erhöhung der Konvergenz versucht er auf einem doppelten Wege, 1. durch eine nochmalige Teilung der Bahn zufolge der Annahmen:

$$\sin\omega_1 = \sin^2\tfrac{1}{2}\omega_1 \quad \text{und} \quad \sin\omega_2 = \sin^2\tfrac{1}{2}\omega_2,$$

durch die die neuen Teilungspunkte in das Perihel bzw. Aphel verlegt werden, 2. durch Multiplikation der Reihe für Δ^2 als das Quadrat der Distanz des Kometen vom störenden Körper mit dem Faktor

$$F = 1 + \lambda\cos\omega + \mu\sin\omega$$

und der Festsetzung, die Konstanten λ und μ so zu bestimmen, daß in dem Produkt $F\Delta^2$ die vom doppelten Winkel 2ω abhängigen Glieder als Größen zweiter Ordnung verschwinden.

17) *H. Gyldén*, Über eine Methode, die Störungen der Kometen mittels rasch konvergierender Ausdrücke darzustellen, St. Petersb. Bull. 14 (1869) und Astr. Ges. Vjs. 7 (1872), p. 27; Paris C. R. 80 (1875), p. 907, sowie der Bericht von *A. Baillaud*, Ann. Éc. Norm 5 (1876), p. 355 und *P. Harzer*, Astr. Ges. Vjs. 18 (1883), p. 26.

Für den Fall einer Annäherung des Kometen an einen störenden Planeten (aber den einer so bedeutenden ausgeschlossen, daß durch sie eine ganze Umändernng der Bahn des Kometen hervorgerufen wird) stellt *H. Gyldén*[18]) eine Art *intermediärer* Bahn her, die eine direkte Berechnung der säkularen Variation der Perihellänge und des Knotens gestattet. Er setzt die Koordinatendifferenzen zwischen Komet und störendem Planet, bezogen auf die Bahnebene der letzteren in der Form

$$(8)\qquad \begin{cases} x' - x = Ux + Vy, \\ y' - y = Uy - Vx - 2r' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \sin(v' + \pi') \end{cases}$$

fest, worin

$$U = \frac{r' - r}{r} \cos D - 2\frac{r'}{r} \sin^2 \tfrac{1}{2} D, \quad V = \frac{r'}{r} \sin D, \quad D = (v + \pi) - (v' + \pi')$$

ist, ferner die Bewegungsgleichungen

$$x'' + P_1 x' + P_2 x = 0,$$
$$y'' + P_1 y' + P_2 y = -2m' k^2 r' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \sin(v' + \pi') \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),$$

worin wieder

$$P_1 = m' k^2 V \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\left(\frac{dv}{dt} + \frac{d\pi}{dt}\right)^{-1},$$

$$P_2 = k^2 \left\{\frac{1}{r^3} + \frac{m'}{r_1^3} - m'\left(U + V\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt} + \frac{d\pi}{dt}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)\right\}$$

ist und das Glied auf der rechten Seite der Gleichung für y wegen des Faktors $\sin^2 \frac{1}{2} J$ im allgemeinen vernachlässigt werden kann, und transformiert diese endlich durch die Substitutionen

$$x = \xi(1 + \psi)^{-1}, \quad y = \eta(1 + \psi)^{-1}, \quad \frac{dt}{d\tau} = (1 + \psi)^{-2} e^{\int P_1 dt},$$
$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

und die Entwicklung

$$P_2 e^{\int P_1 dt} = \frac{\mu_1}{\varrho^3} + \mu_2 + L_2 \ldots \quad \text{(Glieder zweiter Ordnung)}$$

in

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \xi\left(\frac{\mu_1}{\varrho^3} + \mu_2\right) = 0,$$
$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \eta\left(\frac{\mu_1}{\varrho^3} + \mu_2\right) = 0, \quad \text{mit} \quad \varrho^2 \frac{dv}{d\tau} = \sqrt{c},$$
$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \psi\left(\frac{\mu_1}{\varrho^3} + \mu_2\right) = L,$$

wozu noch für die dritte Koordinate $z = \sin b$

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + sz = 0$$

18) *H. Gyldén*, Theoretische Untersuchungen über die intermediären Bahnen der Kometen in der Nähe eines störenden Körpers, St. Petersb. Mém. 32 (1884), sowie auch Astr. Nachr. 102 (1882), p. 321.

kommt, wenn s der konstante Teil der Entwicklung von

$$1 + \frac{k^2 m' r^2}{c}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r r' \cos H e^{2\int P_1 dt}$$

ist. Die Integration der Gleichungen wird mit Hilfe der Substitutionen

$$d\tau = \beta \varrho\, du, \quad dv = \frac{\beta\sqrt{c}}{\varrho}\, du$$

auf das elliptische Argument u (mit dem Modul $\varkappa$) zurückgeführt, und man erhält dann als mittlere Bewegung der intermediären Anomalie $N = \pi(2\beta\varrho\varkappa)^{-1}$, und aus ihr als Bewegung des Perihels $\Delta\pi = 1 - 2\beta\sqrt{c} \cdot K(\pi\varrho)^{-1}$ sowie als Variation der Knotenlänge $1 - s$.[19])

Analytische Störungsausdrücke für rein parabolische Bahnen stellten *E. Strömgren* und *G. Fayet* auf, speziell im Hinblicke auf die Frage nach der ursprünglichen Bahnform der Kometen und ihrer Exzentrizität hierbei, deren Kenntnis zur Entscheidung über ihre kosmogonische Stellung notwendig ist (vgl. die folgende Nr. 6 c). Für diesen Fall nimmt eine Entwicklung der Störungsfunktion die Form an

$$R = \sum A_{i\varkappa\lambda\mu} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} i(\mu_1 t + \varepsilon_1) \cos^{2\varkappa}\tfrac{1}{2}v \cos^{\lambda} v \sin^{\mu} v.$$

Strömgren zeigt, daß sich alle darin vorkommenden Funktionen von v mit Rücksicht auf die Parabelgleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}v = k(t - T)(2q^3)^{-\frac{1}{2}}$$

durch nach Potenzen von $(t - T)^{-\frac{1}{3}}$ geordnete Reihen darstellen lassen, so daß zur Berechnung der Elementenstörungen die zwei Integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin i(\mu_1 t + \varepsilon_1)(t - T)^{-\frac{n}{3}} dt \quad \text{und} \quad \int_{t_1}^{t_2} \cos i(\mu_1 t + \varepsilon_1)(t - T)^{-\frac{n}{3}} dt$$

zu bewältigen sind, die durch die Substitution $t - T = z$ auf die mit Hilfe von Gammafunktionen lösbaren Normalformen

$$\int_{z_1}^{z_2} z^{-\frac{n}{3}} \sin z\, dz \quad \text{und} \quad \int_{z_1}^{z_2} z^{-\frac{n}{3}} \cos z\, dz$$

19) Nach den Methoden von *Hansen* und *Gyldén* wurden vielfach die absoluten Störungen des *Encke*schen und anderer periodischer Kometen gerechnet; so von *Hansen* selbst (Fußn. 16) die Störungen des *Encke*schen Kometen durch Saturn; *von Asten*, Berechnung des Teiles der absoluten Störungen des Enckeschen Kometen durch Jupiter (zwischen $v = 170^0$—190^0), St. Petersb. Mém. 28 (1881); *Th. Wittram*, desgleichen zwischen $v = 152^0 21' 7''$ und 170^0, ebenda 31 (1883); *A. Shdanow*, Störungen des Fayeschen Kometen in der Jupiternähe im Jahre 1841, ebenda 33 (1885), ferner die zahlreichen Arbeiten von *O. Backlund* zur Theorie des *Encke*schen Kometen in den St. Petersb. Mém., besond. 28 (1881). Vgl. auch Encykl. VI 2, 19 (*H. Samter*), Nr. 3.

zurückgeführt werden. *G. Fayet* dagegen setzt direkte $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = x$ und kommt so auf die zwei neuen Formen

$$\int_{x_1}^{x_2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(x^3 + \mu x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{x_1}^{x_2} x \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(x^3 + \mu x)\,dx,$$

die er durch nach Potenzen von μ fortschreitende Reihen integriert.

3. Anomalien in den Bewegungen der Kometen. Einen ausführlichen Bericht über den Stand der Berechnungen der periodischen Kometen gibt *L. Schulhof*[20]). Darnach blieb von den vielen bisher vermuteten Anomalien in deren Bewegungen[21]) bis heute nur die des *Encke*schen Kometen[22]) übrig. Schon *Encke* hatte sie erkannt, und *v. Asten* und *Backlund* bestätigten sie in ihren Untersuchungen über ihn, jedoch mit der Beschränkung, daß diese Anomalie, die sich in einer Beschleunigung seiner mittleren Bewegung, μ, äußert, und die *Encke* als Wirkung eines widerstehenden Mediums erklärte, keineswegs von Umlauf zu Umlauf des Kometen konstant sei, sondern sich sprunghaft ändere, derart, daß die einfache Annahme einer regelmäßigen Verteilung dieses Mediums um die Sonne nicht aufrecht erhalten werden könne, vielmehr durch eine unstetige zu ersetzen sei, etwa nach Art von kosmischen Staubwolken, die den Raum um die Sonne bald in geringerer, bald in größerer Dichte erfüllen.

Die allgemeinen Untersuchungen überhaupt über die Bewegung der Himmelskörper in einem widerstehenden Medium, im Sinne von

20) Paris Bull. astr. 15 (1898), p. 323

21) Solche sind bisher außer beim *Encke*schen Kometen noch vermutet worden:

1. *beim Faye*schen Kometen nach *A. Möller*, Astr. Nachr. 54 (1861), p. 353; 55 (1861), p. 273; 57 (1862), p. 215; ferner *Encke*, Berl. Jahrb. f. 1864 und dann richtig gestellt: Astr. Nachr. 64 (1864), p. 145;
2. *beim Winnecke*schen Kometen nach den Rechnungen von *Th. v. Oppolzer*, Wien. Ber. 62 (1870); 68 (1873); ferner Astr. Nachr. 97 (1880), p. 149 und besonders im Vergleiche mit dem *Encke*schen und *Faye*schen ebenda 97 (1880), p. 225. Die neue Bahnbestimmung von *E. v. Härdtl*, Wien. Akad. Denkschr. I 55 (1888), II 56 (1889) bestätigt jedoch die Anomalie nicht;
3. *beim Biela*schen Kometen, vgl. *v. Hepperger*, Wien Ber. 109 (1900); 112 (1903); 115 (1906);
4. *beim Brorsen*schen Kometen, vgl. *J. Lamp*, Kiel Sternw. Publ. 7 (1892) und *J. Mahnkopf*, Inaug.-Diss. Göttingen 1919, bei dem sich eine Verzögerung der Bewegung um etwa 12 Stunden zwischen den Umläufen von 1868, 1873 und 1879 zeigte.

22) Vgl. Encykl. VI 2, 22 (*Oppenheim*), Nr. 26. Zusammenfassende Berichte über die Störungsrechnungen sind enthalten in: *J. F. Encke*, Berl. Jahrb. für 1861; *v. Asten*, St. Petersb. Bull. 20 (1875) und *O. Backlund*, Paris Bull. astr. 11 (1894), p. 473 und London Astr. Soc. M. N. 70 (1906), p. 429.

Encke, beginnen mit diesem.[23]) Die Widerstandskraft wird hierbei als eine entgegengesetzt der Richtung der Bahntangente wirkende, störende Kraft, T, angesehen und in allgemeinster Darstellung in der Form

$$T = -h\left(\frac{ds}{dt}\right)^m \psi(r)$$

angenommen, wo h eine Konstante, $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Körpers in der Bahn und $\psi(r)$ eine Funktion des Radiusvektors r bedeuten. Sie gibt nach den Gleichungen (Encykl. VI 2, 27 (*Sundman*), Nr. 7, Gl. (29)) als Störungen der zwei hauptsächlich in Betracht kommenden Elemente a_1 (bzw. n) und e

$$(10)\qquad \begin{cases} \frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\frac{dn}{n} = -\frac{2h'}{1-e^2}\Delta^{m+1} r^2 \psi(r)\, dv, \\ de = -2h'\Delta^{m-1} r^2 \psi(r)(\cos v + e)\, dv \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$h' = hk^{m-2} p^{-\frac{m}{2}}, \quad \Delta = \sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}.$$

Setzt man

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta^{m-1} r^2 \psi(r)\, dv, \quad A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta^{m-1} r^2 \psi(r)\cos v\, dv,$$

so folgen für die säkularen Teile der Störungen $\left[\frac{dn}{n}\right]$ und $[de]$ die Werte

$$\left[\frac{dn}{n}\right] = -\frac{3h'}{1-e^2}(A_0(1+e^2) + eA_1), \quad [de] = -h'[A_1 + 2eA_0]$$

und für ihr Verhältnis

$$(11)\qquad \left[\frac{dn}{de}\right] = -\frac{3n}{1-e^2}\left[1 - \frac{(1-e)(A_0(1+e) - A_1)}{A_1 + 2A_0 e}\right] = -\frac{3n}{1-e^2}H.$$

Encke setzt in der Theorie seines Kometen

$$m = 2, \quad \psi(r) = r^{-2}$$

an, allgemeinere Annahmen machen *Hansen* und *v. Oppolzer*:

$$m = 1 \text{ oder } 2, \quad \psi(r) = r^{-2} \text{ bzw. } e^{-\lambda r} \text{ oder } e^{+\lambda/r}.$$

Backlund wiederum

$$m \text{ beliebig}, \qquad \psi(r) = r^{-\mu}.$$

23) Über die Bewegung der Himmelskörper in einem widerstehenden Medium hat sich eine reiche Literatur gebildet. Aus ihr seien erwähnt außer den Arbeiten von *Encke*, *v. Asten* und *Backlund* noch: *P. A. Hansen*, Astr. Nachr. 12 (1835), p. 334; *O. Mossotti*, London Astr. Soc. Mem. 2 (1826); *Th. v. Oppolzer*, Astr. Nachr. 97 (1880), p. 49; *O. Backlund*, ebenda 101 (1882), p. 209; *E. Rebeur Paschwitz*, Inaug.-Diss. Berlin 1883, und die Darstellung in den Lehrbüchern von *Pontécoulant*, Théorie analytique du système du monde II (1829), chap. 3, und *F. Tisserand*, Méc. cél. IV (1896), chap. 13.

Sie alle finden, daß man die Exponenten m und μ, sowie auch die Funktion $\psi(r)$ innerhalb sehr weiter Grenzen willkürlich wählen kann, ohne mit den Beobachtungsergebnissen in großen Widerspruch zu geraten. Es folgt dies aus der Tatsache, daß die in dem Bruche $[dn : de]$ auftretende Konstante H[24]) als Funktion der Parameter m, μ oder λ betrachtet, nur innerhalb sehr enger Grenzen variiert (für $m = 1, 2, 3, 4, 5$ und $\mu = 2, 3, 4$, schwankt H zwischen 1,00 und 0,93), derart, daß aus der Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung, entsprechend den empirischen Werten von $[dn]$ und $[de]$ kein vollzutreffender Schluß auf die Form des Widerstandsgesetzes gezogen werden kann.

Im Sinne von *Encke* wird hierbei das widerstehende Medium als mit der Sonne mitbewegt und seine Dichte als mit der Entfernung von ihr stetig abnehmend vorausgesetzt. Mit der weiteren Frage nach dem Einflusse, den ein den ganzen Raum erfüllendes Medium, durch das die Sonne dahinzieht und ihr Gefolge an Planeten und Kometen mit sich führt, auf deren relative Bewegung ausübt, befaßten sich *Th. Bredichin*[25]) und *F. Tisserand.*[26]) Die störenden Kräfte erscheinen hier in der Form:

$$(12)\quad X = h\frac{\varphi(V)}{V}(x' + \alpha),\quad Y = h\frac{\varphi(V)}{V}(y' + \beta),\quad Z = h\frac{\varphi(V)}{V}(z' + \gamma),$$

worin α, β, γ die Vektoren der Eigenbewegung der Sonne, $V^2 = (x' + \alpha)^2 + (y' + \beta)^2 + (z' + \gamma)^2$ bedeuten und h eine Konstante ist, für die die Theorie den Ausdruck cSm^{-1} gibt, mit S gleich der Oberfläche

24) Unter Einführung der elliptischen Anomalie u, definiert durch

$$v = 2\,am\frac{2K}{\pi}u \qquad \mathrm{mod}\,k = 2\sqrt{e}(1+e)^{-1},$$

gibt *Backlund* (l. c. Fußn. 23) der Gleichung (11) die Form

$$\left[\frac{de}{dn}\right] = -\frac{1-e^2}{3ne}\left[1 - \frac{1-e}{1+e}\,\frac{\int \Delta am^{m+\mu-2}\frac{2K}{\pi}u \cdot \Delta am^{\mu-2}\frac{2K_1}{\pi}\,2u\,du}{\int \Delta am^{m+\mu}\frac{2K}{\pi}u \cdot \Delta am^{\mu-2}\frac{2K_1}{\pi}\,2u\,du}\right]$$

und beweist, nach von *H. Gyldén* [Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie, St. Petersb. Mém. 16 (1871)] gefundenen Relationen, daß für wachsende Werte von m und μ sich die Integrale einer und derselben Grenze nähern, so daß der Quotient beider $= 1$ und daher für diesen Fall $\left(\frac{de}{dn}\right) = -\frac{2}{3}\frac{(1-e)}{n}$ wird, oder $H = \frac{1+e}{2}$ bzw. $A_1 = 2A_0$. Die periodischen Teile von dn und de berechnet *Backlund* als verschwindend klein.

25) *Th. Bredichin,* Moskau Obs. Ann. 6 (1880).

26) *F. Tisserand,* Paris Bull. astr. 10 (1893), p. 504 und Méc. cél. IV (1896) chap. 13.

und m der Masse des Kometen, beide als konstant vorausgesetzt. Sie geben wie die ursprüngliche *Encke*sche Hypothese zu säkularen Störungen in den zwei Bahnelementen a und e Veranlassung, die außer von einer Annahme über die Funktion φ und den Vektoren der Sonnenbewegung, α, β und γ, auch von der Relativbewegung des Kometen um die Sonne abhängen, sich aber für keine Annahme von φ, den Fall $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ausgeschlossen, durch den diese Anschauung mit der *Encke*schen identisch würde, mit den Ergebnissen der Beobachtungen beim *Encke*schen Kometen in Übereinstimmung bringen lassen.

Weit besser dürfte ihnen, die auf einen unstetigen Verlauf der Störungen hinweisen, die *Seeliger*sche[27]) Theorie entsprechen, der die Annahme zugrunde liegt, daß der interplanetarische Raum von Massen erfüllt ist, die in ganz unregelmäßiger Verteilung der Anziehung der Sonne folgen und um sie nach den *Kepler*schen Gesetzen ihre bestimmten Bahnen beschreiben. Sie können in zweifacher Weise auf die sich in ihnen bewegenden Himmelskörper, namentlich die Kometen, eine störende Wirkung ausüben:

1. in einer Art von durch diese Staubwolken verursachtem Widerstand, bei dem, wie die Entwicklungen *Seeliger*s es zeigen, die störenden Kräfte proportional sind dem Quadrate der Geschwindigkeit des Kometen und auch der Dichte dieser Massen, d. i. ihrer Menge in der Volumeneinheit, ein Ergebnis, das mit den Annahmen *Encke*s über die Wirkungsweise des widerstehenden Mediums in Übereinstimmung steht. Damit würden nicht nur die Bewegungsanomalien dieses Kometen selbst, sondern auch ihre sonst rätselhaften diskontinuierlichen Änderungen in der Tatsache ihre genügende Erklärung finden, daß die Verteilung der Massen eine ganz unregelmäßige ist;

2. in der durch die Zusammenstöße hervorgerufenen Massenvergrößerung[28]) des sich in ihnen bewegenden Körpers.

Indes kommt bei den Kometen der letzte Fall weit weniger in Betracht als beispielsweise beim Monde oder der Erde. Vielmehr ist bei ihnen an eine Massenverminderung zu denken, die durch ihre Annäherung an die Sonne und im Zusammenhange damit durch die Ausströmung von Materie aus ihnen, die zur Entstehung ihrer Schweife

27) *H. v. Seeliger,* Über Zusammenstöße und Teilungen planetarischer Massen, München Akad. Abh. 17 (1891), ferner *L. Picart,* Sur l'accéleration apparente du mouvement de quelques comètes périodiques, Paris Bull. astr. 21 (1904), p. 139. Vgl. auch Encykl. VI 2, 22 (*Oppenheim*), Nr. 26 b und für den Lichtdruck 26 c.

28) Über die Literatur zur Untersuchung der Bewegung zweier Körper umeinander für den Fall, daß ihre Massen mit der Zeit veränderlich sind, vgl. Encykl. VI 2, 22 (*Oppenheim*), Fußnote 173.

Veranlassung gibt, hervorgerufen wird. Bezeichnet g die Geschwindigkeit der Ausströmung und α den Winkel, den deren Richtung mit dem Radiusvektor des Kometen einschließt, so erhält man für diesen Fall als störende Kräfte in der Bahnebene

$$(13) \quad X = -g\frac{dm}{m}\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{r}, \quad Y = -g\frac{dm}{m}\frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{r},$$

wobei es jedoch genügt, $\alpha = 0$ zu setzen, da dann, d. i. im Perihel, die Ausströmung am heftigsten ist. Aber durch sie entsteht eine säkulare Abnahme der mittleren Länge des periodischen Kometen, mithin das gerade Gegenteil von dem, was beim *Encke*schen Kometen durch die Beobachtungen festgestellt ist.

Endlich ist noch der Lichtdruck[29]) zu erwähnen, durch den speziell bei Kometen Bewegungsanomalien entstehen können. Die durch ihn entstehenden (störenden) Kräfte sind zweierlei Art, sowohl solche in der Richtung des Radiusvektors wie auch, worauf zuerst *H. Poynting*[30]) aufmerksam machte, senkrecht auf ihn. Sie zeigen eine Ähnlichkeit mit den Störungskomponenten, welche in der Annahme eines widerstehenden Mediums auftreten, und können bei passender Wahl der in ihnen enthaltenen Konstanten, ϱ als der Dichte und r des Radius der umlaufenden Körper, eine Größe erreichen, die von der gleichen Ordnung ist wie die beim *Encke*schen Kometen konstatierten.

4. Masse der Kometen. Alle Versuche zur Bestimmung der Masse der Kometen stimmen in dem Ergebnis überein, daß diese viel zu klein ist, um sie nach den gewöhnlichen Methoden der Störungsrechnung aus den Störungen berechnen zu können, die sie auf die Planeten oder deren Monde ausüben. Ein erster Versuch in dieser Richtung rührt von *Laplace*[31]) her. Er weist auf die Beziehung

$$(14) \quad \frac{\delta n'}{n'} : \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta T'}{T'} : \frac{\delta T}{T} = -\,m a' : m' a,$$

durch die die Variationen der mittleren Bewegungen n und n' oder der Umlaufszeiten T und T' zweier sich gegenseitig störender Körper miteinander verbunden sind, wenn m und m' ihre Massen und a und a' die Halbachsen ihrer Bahnen um die Sonne bedeuten. Da nun der *Lexell*sche Komet im Jahre 1770, da er der Erde sehr nahe kam,

29) Vgl. *H. C. Plummer,* London Astr. Soc. M. N. 65 (1905), p. 229, und nach einer Korrektur durch *J. H. Poynting*, ebenda 67 (1907), p. 63; besonders aber *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 187 (1911), p. 417.

30) *J. H. Poynting,* London Phil. Trans. 202 (1904), p. 525 und Phil. Mag. 9 (1905), p. 393.

31) *P. S. Laplace,* Méc. cél. IV, livre 9, chap. 3.

durch sie eine Störung im Betrage von

$\delta n' : n' = \delta T' : T' = -104{,}79\, m a'$ oder $\delta T' = -0{,}11598\, m$ Tage

erfuhr, so muß umgekehrt auch dieser von ihm die Störung

$\delta n : n = \delta T : T = 104{,}79\, m' a$ oder $\delta T = 0{,}11598\, m'$ Tage

erlitten haben. Schätzt man die Genauigkeit von T als der Dauer der Umlaufszeit der Erde um die Sonne zu 2 sec = 0,000023 Tage, so folgt als größtmöglicher Wert für die Masse des Kometen m' 1 : 5000 der Erdmasse.[32])

Ein wesentlich anderer Versuch einer Massenbestimmung rührt von *E. Roche*[33]) her. Den Ausgangspunkt für sie bildet seine Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Kometen, aus der er unter Einführung des Begriffs der freien Oberfläche die Näherungsgleichung

$$R = r \sqrt[3]{\frac{m}{2}} \tag{15}$$

ableitet, worin R der Radius des Kernes (Dunsthülle des Kometen) und r dessen Distanz von der Sonne bedeutet und aus ihr als unteren Grenzwert für m — ausgedrückt in Einheiten der Sonnenmasse —

$$m = 2 R^3 \cdot r^{-3}$$

findet. Speziell für den großen Kometen 1858 VI. (Donati) berechnet er aus $R = 75''$, $r = 0{,}9$, $m = 132{,}10^{-12}$ Sonnen- oder $= 47{,}10^{-6}$ $= 1 : 21300$ Erdmassen.

---

32) Ebenso weist *Laplace* darauf hin, daß derselbe Komet bei seinen Annäherungen an Jupiter in den Jahren 1767 und 1779 fast dessen Satellitensystem durchquerte, ohne daß eine merkliche Störung in dem Laufe der Monde hat nachgewiesen werden können, woraus folgt, daß seine Masse wohl noch viel kleiner als 1 : 5000 der Erdmasse anzusetzen ist. Das gleiche trat ein beim Kometen 1884 (III), der sich 1875 dem Jupiter bis auf 0,121 nach den Rechnungen von *R. Lehmann-Filhés* [Astr. Nachr. 124 (1890), p. 1) näherte, noch mehr beim Kometen 1889 (V), für den die kleinste Distanz vom Jupiter im Jahre 1886 gar nur 0,0095 war [*A. J. Chandler,* Astr. J. 9 (1889), p. 91].

33) *E. Roche,* Reflexions sur la théorie des phénomènes cométaires, Montpellier Mém. 4 (1860), vgl. Encykl. VI 2, 21 (*Oppenheim*), Nr. 33 u. 34, Gl. (43). Differenziert man diese Gleichung nach x und setzt in den dortigen Bezeichnungen M' = Masse der Sonne, M = Masse des Kometen, Δ = Distanz von der Sonne und r = Radius der Dunsthülle des Kometen, so ergibt sich, noch speziell $\mu = 0$ angenommen, $2 M' \Delta^3 = M r^3$ identisch mit der oben angeführten Relation. Zu einer mit dieser Formel identischen — und nur durch den Zahlenfaktor von ihr sich unterscheidenden — Formel kommen *C. V. Charlier* [Formation des courants météoriques par la désagrégation des comètes, St. Petersb. Bull. 32 (1888)] und *L. Picard* (Sur la désagrégation des essaims météoriques, Paris Thèse de fac. 1892), vgl. Encykl. VI 2, 21 (*Oppenheim*), Nr. 37. Sie lautet $m > 3 R^3 r^{-3}$ und entspringt der Bedingung der Stabilität der Bahn, die die Kometenmaterie um den Kern beschreibt.

Ein dritter Weg geht auf die Bewegungsverkältnisse ein, welche die Komponenten eines in zwei oder mehrere Teile gespaltenen Kometen zeigen, unter Einführung der Bedingung, daß sie einen gemeinsamen Ausgangspunkt haben. Darnach hat *J. Hepperger*[34]) aus den Bahnen der zwei Teile des *Biela*schen Kometen im Jahre 1846, nachdem beide 1852 wieder beobachtet wurden, dessen Masse zu $m = 1 : 2400000$ der Erdmasse berechnet mit dem Hinweise, daß die Normalörter der Beobachtungen aus dem Jahre 1846 nicht mit befriedigender Genauigkeit dargestellt werden, wenn $m = 0$ angenommen wird, während bei der angeschriebenen alle Örter der einen Komponente sehr gut dargestellt werden und nur bei der zweiten in zwei Örtern aus dem Jahre 1852 größere Abweichungen übrig bleiben, die nur teilweise den Beobachtungen selbst zur Last zuzuschreiben sind, teilweise aber aus anderen Ursachen entspringen (wahrscheinlich einem in dem Zeitraume von 1846—1852 eingetretenen geringen Massenverlust).

Hierher ist auch der Versuch *C. V. Charliers*[35]) zu zählen, der auf Grund des Satzes, daß, wenn zwei Körper sich in einer und derselben Bahn hintereinander und in kurzem Abstand voneinander bewegen, der vorangehende in seinem Laufe beschleunigt, der nachfolgende dagegen verzögert wird, die Bewegungsanomalien des *Encke*schen Kometen erklären will und damit zur Bestimmung seiner Masse zu $9{,}10^{-14}$ der Erdmasse gelangt. Die Annahmen, von denen hierbei *Charlier* ausgeht, sind: 1. die Definition des kleinsten Abstandes der zwei hintereinander sich bewegender Körper durch eine Verschiedenheit der Epochen ihrer Bahnen (ε und ε'), wobei $\varepsilon - \varepsilon'$ als eine kleine Größe anzusehen ist, 2. die Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1)$, die mit $\sin^{-2}\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1)$ beginnt, welches Glied das größte ist, demgegenüber die anderen verschwinden und 3. die Anschauung, daß die störende Masse ein Teil des Kometen selbst ist, so daß $m = k(\varepsilon - \varepsilon_1)^3$ wird; damit wird der numerische Betrag der Störung in der mittleren Bewegung n,

$$\delta n = \tfrac{3}{4} m n^2 t \sin^{-2}\tfrac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_1).$$

Eine letzte Methode endlich beruht auf der Anwendung der Theorie des Lichtdruckes auf Grundlage des Gleichgewichtes zwischen diesem und der Anziehung des Kernes auf ein beliebiges Teilchen des Kometen. Darnach berechneten *A. F.* und *F. A. Lindemann*[36]) die Masse des *Halley*schen Kometen zu $2{,}03 \cdot 10^{14}$ gr, d. h. $2{,}9 \cdot 10^{-13}$ der Erdmasse.

34) *J. v. Hepperger,* Bestimmung der Masse des Bielaschen Kometen, Wien. Ber. 115 (1906), p. 785.

35) *C. V. Charlier,* Lund. Meddel. 29 (1906).

36) *A. F.* u. *F. A. Lindemann,* London Astr. Soc. M. N. 71 (1911), p. 156.

5. Helligkeit der Kometen.[37]) Die Beobachtungen und Reduktionen der Helligkeitsverhältnisse der Kometen leiden an der Schwierigkeit, daß es bis heute an einer einheitlichen Auffassung dessen mangelt, was man unter Helligkeit eines Kometen zu verstehen habe. Manche Beobachter beachten nur die scheinbare Größe des fixsternähnlichen Kernes, andere wiederum fügen auch die Helligkeit der Nebelhülle hinzu, und so entstehen oft Unterschiede von mehreren Größenklassen. Zur Erzielung eines einheitlichen Vorganges scheint der Vorschlag von *Holetschek*[38]) am geeignetsten zu sein, bei Helligkeitsschätzungen nicht so sehr auf den Kern oder eine besonders hervorzuhebende Partie seiner Hülle, als vielmehr den ganzen Kometen etwa derart in Betracht zu ziehen, daß man ihn mit dem schwächsten zur Verfügung stehenden Fernrohr, wenn möglich sogar mit unbewaffnetem Auge mit in der Nähe befindlichen Sternen vergleicht. Die nach dieser Methode erhaltene Zahl ist dann zwar nicht seine Helligkeit nach Art der Fixsterngröße, aber sie ist an diese gebunden und könnte als seine Augenfälligkeit oder Gesamthelligkeit bezeichnet werden, die sich als Resultierende seiner Flächenhelligkeit[39]) und seiner scheinbaren Größe ergibt.

Für die so gefundene Zahlengröße H wäre die Reduktion auf die Einheit der geozentrischen Distanz, Δ, wie der heliozentrischen r nach der Gleichung[40])

$$H = Cr^{-2}\Delta^{-2}$$

37) Die vollständigsten Untersuchungen über die Helligkeit der Kometen verdankt man *J. Holetschek*, der in einer Reihe von Abhandlungen in den Denkschriften der Wiener Akademie (zitiert in der Literaturübersicht) die Angaben über die Helligkeit H, die Größe des Durchmessers der Nebelhülle und die Länge der Schweife S einer einheitlichen Untersuchung unterzieht und zum Schlusse Tafeln gibt, die mit dem Argument der Periheldistanz q und der Grenzen von r, zwischen denen der Komet beobachtet wurde, für jeden beobachteten und berechneten die Berechnung von H und S gestatten. Man ist damit in der Lage, für irgendeinen neuentdeckten Kometen, wenn seine Helligkeit gegeben und seine Bahnelemente berechnet sind, den wahrscheinlichen Verlauf seiner Helligkeitsänderung und seiner Schweifentwicklung vorauszuberechnen. Referat über die erste Abhandlung: *J. Hartmann*, Astr. Ges. Vjs. 32 (1897), p. 232.

38) Darnach hat *J. Holetschek* alle seit 1890 jeweilig sichtbaren Kometen beobachtet. Vgl. Ann. Sternw. Wien 8 (1892); 12 (1896); 14 (1900); 20 (1907) und 22 (1912), sowie Astr. Nachr. 149 (1899), p. 151; 151 (1900), p. 299 und 155 (1901), p. 267; 185 (1910), p. 257; vgl. auch *H. Knox-Shaw*, London Astr. Soc. M. N. 71 (1911), p. 232.

39) Beobachtungen über die Flächenhelligkeiten des ganzen Kometen oder auch nur seiner Teile schlägt *J. Hartmann* vor, Berl. Ber. 1899, p. 677. Gelegentliche Versuche schon von *G. Müller*, Astr. Nachr. 114 (1886), p. 361.

40) Gegen diese Reduktion wendet sich *F. Deichmüller*, Astr. Nachr. 131 (1893), p. 33 mit der Bemerkung, daß bei den Kometen mehr die Flächen- als

vorzunehmen, was am besten, wenn H in Größenklassen gegeben ist, nach der Formel

$$H_0 = H - 5 \lg r\Delta \tag{16}$$

geschieht. Das Ergebnis der nach dieser Methode von *Holetschek* vielfach durchgeführten Reduktionen war ein doppeltes:

1. Zunächst zeigte sich bei vielen Kometen, sowohl bei periodischen und mehrfach, wie auch nur in einer Erscheinung beobachteten, daß diese neue Zahl H_0 bemerkenswert konstant bleibt, so daß es erlaubt erscheint, aus den gefundenen Zahlen einen Mittelwert zu ziehen, der als die reduzierte Helligkeit des Kometen gelten kann. Dies ist der Fall bei den 33 Erscheinungen des *Encke*schen Kometen von 1786 bis 1914, bei denen *Holetschek* den Nachweis erbringt, daß die anscheinend nach 11—13 Jahren wiederkehrenden Abwechslungen zwischen helleren und schwächeren Wiederkehren[41]) auf das Zusammenwirken zweier Umstände zurückzuführen ist. Der eine ist physikalischen Ursprunges und bedingt durch die Eigentümlichkeit des Kometen, daß er, wenn er in eine besondere Erdnähe kommt (wo er im allgemeinen vor dem Perihel für die nördliche, nach demselben für die südliche Erdhälfte sichtbar ist), nur vor diesem eine kernähnliche Verdichtung zeigt, darnach aber verblaßt. Der zweite liegt in den Bahnverhältnissen des Kometen, derart, daß für die Beobachtung günstige und ebenso ungünstige Erscheinungen nach $3 \times 3{,}3 = 10$ bzw. $4 \times 3{,}3 = 13$ Jahren wiederkehren. Ein Zusammenhang mit der 11- bis 12jährigen Periode der Sonnenflecken ist damit ausgeschlossen.[42])

2. Sodann zeigen die abgeleiteten Zahlen H_0 einen Gang meist derart, daß H_0 bei kleineren Werten von r, also gegen das Perihel zu, größer ist als bei größerem r. Dieser zweite (wohl allgemeinere) Fall sagt aus, daß die Helligkeit des Kometen nicht mehr durch r^2 allein bedingt erscheint, durch welches Gesetz einzig das reflektierte Sonnenlicht berücksichtigt wird, sondern daß mit seiner Annäherung an die Sonne Helligkeitssteigerungen verbunden sind, die als Beginn von Ausströmungen aus dem Kerne und seiner Schweifentwicklung angesehen werden können. Man kann daraus folgende Regel für die Voraussage einer solchen aufstellen: Kometen, für die H_0 größer ist

---

die Gesamthelligkeit hervortritt und daher bloß die Formel $H = C \cdot r^{-2}$ ohne Rücksicht auf Δ anzuwenden sei. Einwendungen dagegen von *J. Holetschek,* Astr. Nachr. 131 (1893), p. 239 und *H. v. Seeliger,* Astr. Ges. Vjs. 38 (1903), p. 178.

41) *A. Berberich,* Astr. Nachr. 119 (1888), p. 49.

42) *O. Backlund,* London Astr. Soc. M. N. 70 (1910), p. 429, sowie *J. Holetschek,* Über die Bewegungs- und Helligkeitseigentümlichkeiten des Enckeschen Kometen, Wien Sternw.-Kalender 1915.

als 4^m, bekommen fast alle im Perihel einen dem bloßen Auge sichtbaren Schweif, der desto größer wird, je bedeutender die Annäherung an die Sonne ist (Komet *Halley*, ferner Komet 1769), Kometen, für die H_0 an 6^m heranreicht, bekommen entweder gar keinen oder einen so lichtschwachen Schweif, daß er nur unter besonders günstigen Verhältnissen (bedeutende Erdnähe) mit dem Fernrohr gesehen wird (Komet *Encke*, Komet 1652, 1723). In der Größendistanz zwischen 4^m und 6^m scheint die Grenze für eine bedeutende Schweifentwicklung zu liegen. Sie hängt dann hauptsächlich von der Perihel-distanz ab (Komet 1618 II, 1742).

Die Tatsache dieser Zunahme der reduzierten Helligkeit H_0 vor und der Abnahme nach dem Perihel führte zu einer Reihe von Untersuchungen, den Potenzexponenten 2 in der Reduktionsformel durch eine andere Zahl zu ersetzen, speziell jenen zu ermitteln, der den Beobachtungen vor und nach dem Perihel am besten genügt. Die Reduktion[43]) erfolgt dann nach der Gleichung

$$H_0 = H - 5\log\Delta - x\lg r, \tag{16a}$$

und x wird als Charakteristik des Kometen bezeichnet. Merkwürdigerweise ergaben die Berechnungen für sie zumeist die zwei Zahlenwerte 9 und 13, denen als Exponenten von r 3,6 und 5,2 entsprechen, so daß es den Anschein hat, als ob hier zwei Typen vorliegen, die durch diese zwei Werte ausgezeichnet sind. Hierbei wird auch die Frage nach der Berücksichtigung des Phasenwinkels berührt. *S. Orlow* findet, daß durch sie die Lichtkurve des Kometen sich regelmäßiger gestaltet. Dem stehen aber die Ergebnisse der photometrischen Beobachtungen von *G. Müller*[44]) gegenüber, nach denen diese keine Spur einer Phaseneinwirkung erkennen lassen, was auch aus dem Umstande folgt, daß der Kern des Kometen ein aus kleinen Körpern zusammengesetztes Konglomerat ist, das von der Sonne vollständig durchleuchtet wird, wodurch der Einfluß der Phase wesentlich modifiziert, wenn nicht ganz aufgehoben erscheint. Ebenso läßt sich gegen die Verwendung einer höheren Potenz von r bei der Reduktion von H der Einwand erheben, daß es sich bei den Helligkeitsschwankungen eines Kometen um das Perihel herum um physische Veränderungen derselben han-

43) Untersuchungen dieser Art rühren her von: *J. W. Backhouse*, Observ. 16 (1893), p. 72; *M. Ernst*, Astr. Nachr. 187 (1911), p. 303; *S. Orlow*, ebenda 189 (1911), p. 1; 190 (1912), p. 157; 191 (1912), p. 441; 195 (1913), p. 309; *H. Kritzinger*, Astr. Nachr. 199 (1914), p. 137; *de Mello e Simas*, ebenda 192 (1912), p. 343 und Erg.heft 4.

44) *G. Müller*, Astr. Nachr. 108 (1884), p. 116; 114 (1886), p. 361.

delt, deren verschiedene Stadien, wie die Ausströmung von Materie aus dem Kerne und den Beginn der Schweifentwicklung geometrisch durch eine einfache Potenz von r darzustellen wohl nicht angeht.

6. Die kosmogonische Stellung der Kometen.[45]) Nachdem durch die Versuche von *Regiomontan* und die schon sichereren Beobachtungsergebnisse *Tycho Brahes* über die Parallaxe der Kometen ihre kosmische Natur festgelegt worden war, entstanden über ihren Ursprung zwei Hypothesen. Nach der einen (*Laplace*[46]), *Herschel*[47])) kommen die Kometen aus den interstellaren Räumen in unser Sonnensystem, beschreiben ihre kurzen Bahnen um die Sonne, in deren Nähe sie sichtbar werden, und verschwinden wieder in den unendlichen Raum, wobei einige von ihnen bei Annäherung an einen großen Planeten, besonders Jupiter, durch dessen anziehende Wirkung in eine elliptische Bahn geworfen und damit zu periodischen umgewandelt werden können. Nach der zweiten dagegen (*Kant*[48])) sind sie ständige Mitglieder des Sonnensystems und bewegen sich in ihm vorzugsweise in Ellipsen mit großer Bahnexzentrizität, deren Abweichung von der Parabel bei der Kürze des sichtbaren Teiles ihrer Bahn aus den Beobachtungen abzuleiten schwer fällt. Die Entscheidung über diese zwei Hypothesen wurde auf doppeltem Wege versucht, zunächst durch statistische Untersuchungen über die Verteilung ihrer Bahnelemente mit Rücksicht auf die Frage, ob sich in ihr eine Abhängigkeit von irgendwelchen stellaren Beziehungen verrät, und sodann durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über die Zahl von elliptischen oder hyperbolischen Bahnen bei bestimmten Annahmen über die Geschwindigkeit, mit der sie in das Sonnensystem eindringen — hier wieder mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die überwiegende Anzahl der beobachteten Bahnen parabolischen Charakters ist.

45) *O. Zanotti Bianco,* Le idee di Lagrange, Laplace, Gauß, Schiaparelli sull' origine delle comete, Memoria storica, Torino Acad. Mem. 63 (1913), p. 95 und *E. Strömgren*, Über den Ursprung der Kometen, Kopenhagen Obs. Pub. 19 (1914).

46) *P. S. Laplace,* Sur les comètes, Add. Conn. de Temps pour 1816; Oeuvres, Tome 13, p. 88.

47) *J. F. W. Herschel,* Outlines of Astronomy, London 1850, p. 376.

48) *J. Kant*, Naturgeschichte des Himmels, 2. Teil, 3. Hauptstück. Hier wäre auch der Gedanke von *J. Lagrange* (Add. Conn. d. Temps, p. 1814) zu erwähnen, daß die Kometen durch heftige Ausbrüche aus den Planeten entstanden sein dürften, als diese noch in ihrem Ursprungszustande waren. Kritische Bemerkungen zu dieser Anschauung von *F. Tisserand,* Paris Bull. astr. 7 (1890), p. 453 mit weiteren Literaturangaben.

Beide Probleme stehen vorerst in innigem Zusammenhang mit der Frage nach den Grenzen für die Sichtbarkeit eines Kometen zur Zeit seiner Entdeckung. *Olbers*[49]) nimmt als äußerste Grenze hierfür einen scheinbaren geozentrischen Abstand von der Sonne von 25—30° an, *J. Holetschek*[50]), der die Bahn eines Kometen zu bestimmen versucht, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraustreten kann, nur 15° bei einer theoretischen Helligkeit zwischen den Grenzen $0{,}06 < H < 0{,}12$.

a) *Die scheinbare Verteilung der Bahnelemente der Kometen.*

α) Perihellängen. Von den Bahnelementen der Kometen wurde bezüglich ihrer Verteilung am Himmel vornehmlich die Richtungen der großen Achsen (Perihellängen) untersucht. *J. Bode*[51]) findet eine Anhäufung der Kometenperihele in den Sternbildern der Zwillinge und des Krebses und deren kleinste Zahl im Schützen und Steinbock und meint, daß diese Tatsache ihre genügende Erklärung finde in der größeren Zahl der Beobachter auf der nördlichen gegenüber der auf der Südhälfte der Erde. Von einer ähnlichen Verdichtung bei den heliozentrischen Längen 70° und 250° sprechen *Brorsen*[52]), *Lardner*[53]), *Carrington*[54]). *Houzeau*[55]) berechnet den Mittelwert der Perihelvektoren ($\lambda = \cos l \cos b$, $\mu = \sin l \cos b$, $\nu = \sin b$) von 209 Kometen und aus ihm die Lage des Schwer- und Mittelpunktes der Perihelpole. Er findet $l = 102°5$, $b = +7°8$, und nach einer Teilung des Himmels in zwei Teile durch einen senkrecht auf dieser Richtung angenommenen Meridian für beide getrennt

$$l_1 = 102°5, \quad b_1 = +\,9°2; \qquad l_2 = 281°8, \quad b_2 = +\,6°3,$$

und da die zweite ($l_2 = 281°8$) nur wenig von dem Apex der Sonnenbewegung abweicht, glaubt er hierin einen Beweis für den stellaren

---

49) *W. Olbers*, Einige Bemerkungen über die Aufsuchung von Kometen, Berl. Jahrb. 1809 und Briefwechsel mit *F. W. Bessel*, Bd. I, p. 35 = Ges. Abh. 3, p. 452. Vgl. auch *P. Harzer*, Über die Wahrscheinlichkeit einen Kometen aufzufinden als Funktion seines Winkelabstandes von der Sonne, Astr. Nachr. 103 (1882), p. 65.

50) *J. Holetschek*, Wien. Ber. 83 (1888), p. 1099. — Die Helligkeit $H = 0{,}06$ entspricht der Annahme $r = \Delta = 2$; $H = 0{,}12$ folgt aus $r = q = \sqrt[3]{2}$ nach der Gleichung $q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right) > v$ für $\lim v = 0$ und $\Delta = q + 1$.

51) *J. Bode*, Berl. astr. Jahrb. für 1812.

52) *Th. Brorsen*, Astr. Nachr. 34 (1852), p. 337.

53) *D. Lardner*, London Astr. Soc. M. N. 13 (1853), p. 188.

54) *R. Carrington*, ebenda 21 (1861) und Mem. 29 (1861), p. 355.

55) *J. C. Houzeau*, Bull. Acad. Bruxelles 36 (1873), p. 315.

Ursprung der Kometen gefunden zu haben. *A. Svedstrup*[56]) sucht die Kreise auf der Himmelskugel auf, um den sich die Perihele am dichtesten gruppieren. Sind λ, μ, ν deren Vektoren, x, y, z die Vektoren der Pole der Kreise und ϱ ihre Radien, so besteht die Aufgabe darin, den Ausdruck

$$\sum[\varrho - (\lambda x + \mu y + \nu z)]^2$$

in dem die Summe $\sum$ sich auf alle in Rechnung gezogenen Kometen erstreckt, mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zu einem Minimum zu machen. Die Lösung führt auf ein Ellipsoid, dessen drei Hauptrichtungen den Extremwerten entsprechen. Aus 207 Kometen aus der Zeit von 1557—1881, deren Bahnexzentrizität größer ist als 0,995, findet er für sie die Werte

$l_1 = 178^0 4$	$b_1 = +\ 29^0 5$	oder	$\alpha_1 = 193^0 6$	$\delta_1 = +\ 29^0 9$
$l_2 = 88^0 0$	$b_2 = +\ 7^0 6$		$\alpha_2 = 83^0 1$	$\delta_2 = +\ 30^0 9$
$l_3 = 160^0 9$	$b_3 = -\ 59^0 4$		$\alpha_3 = 134^0 2$	$\delta_3 = +\ 46^0 3$

(Äquin. 1850,0),

von denen die erste Richtung nach dem Pole der Milchstraße (die beste Bestimmung für ihn ist $\alpha = 192^0$, $\delta = +\ 29^0$), die zweite nach dem Vertex der Sternbewegungen ($\alpha = 90^0$, $\delta = +\ 15^0$) zeigt, wodurch wieder ein Zusammenhang zwischen dieser Verteilung und gewissen stellaren Tatsachen hergestellt zu sein scheint.

Gegen diese Beweisführung erheben besonders *J. V. Schiaparelli*[57]) und *Holetschek*[58]) den Einwand, daß diese Anhäufungen sich vollständig durch rein terrestrische Verhältnisse erklären lassen, die die Auffindung und Beobachtung von Kometen begünstigen und keineswegs dazu nötigen, in ihnen einen Beweis für deren stellaren Ursprung anzunehmen. Diese Umstände sind: der Stand der meisten Kometenentdecker auf der nördlichen Erdhälfte, die Entdeckungszeit vor Mitternacht, und die Kleinheit des Winkelabstandes von der Sonne. *Ho-*

56) *A. Svedstrup,* Astr. Nachr. 107 (1883), p. 113 sowie *S. Oppenheim,* ebenda 216 (1922), p. 47.

57) *J. V. Schiaparelli,* Entwurf, bes. Note 3: Über die Verteilung der Kometenbahnen im Raume, p. 239. Vgl. auch *R. Lehmann-Filhés,* Astr. Nachr. 96 (1880), p. 145.

58) *J. Holetschek,* Über die Richtungen der großen Achsen der Kometenbahnen, Wien. Ber. 94 (1886), p. 879; Über die Verteilung der Bahnelemente der Kometen, ebenda 98 (1889), p. 1541; Über den Zusammenhang der heliozentrischen Perihellängen mit der Perihelzeit der Kometen, ebenda 99 (1890), p. 654. Vgl. auch *L. Fabry,* Sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes, Thèses, Paris 1893, bes. chap. 4: Disposition des éléments des orbites telle qu'elle résulte de l'observation.

letschek führt hier als maßgebende Größe die geozentrische Elongation $(l_{\sphericalangle} - l_{\odot})$ für Kometen, deren Periheldistanz $q < 1$ ist, und $l_{\sphericalangle} - l_{\odot} \pm 180$ für $q > 1$ ein, und schließt, daß, da die Länge der Sonne $l_{\odot}$ zur Zeit der nördlichsten Deklination 90° beträgt, in dieser Zeit, d. i. im Sommer, mehr Kometen gefunden werden als zu anderen Jahreszeiten, so daß aus der Verdichtung der Perihellängen bei 90° bzw. 270° gegenüber dem Minus bei 0° bzw. 180° nur gefolgert werden kann, wie viel Kometen infolge einer größeren Elongation von der Sonne verloren gehen, ein Verlust[59]), der, wie die Zählungen zeigen, gegenwärtig trotz der bedeutenderen Hilfsmittel der Astronomen, relativ der gleiche ist, wie in der vorteleskopischen Periode.[60])

β) Periheldistanzen. Untersuchungen über die Verteilung der Kometen in einer Anordnung nach den *Periheldistanzen* gaben *Schiaparelli*[57]), *Holetschek*[58]) und auch *Fabry.*[58]) *Schiaparelli* nimmt an, daß der für ihre Beobachtung günstige Raum zwischen den zwei mit den Radien $r = 0{,}5$ und $r = 1{,}2$ um die Sonne gedachten Kugeln liege, und berechnet sodann für verschiedene Periheldistanzen q die Zeit, wie lange sich ein Komet in diesem Raume aufhalte. Aus der Tatsache, daß diese Zeit nahezu proportional ist der Zahl der Kometen, schließt er auf eine gleichmäßige Verteilung der Kometen in bezug auf q. *Holetschek* nimmt als Vergleichsobjekt die theoretische Helligkeit $H = 1 : r^3\Delta^2$, setzt $r = q$ und berechnet sodann Δ aus dem Dreiecke (Komet—Sonne—Erde), die heliozentrische Breite des Kometen als bekannt annehmend. Auch er findet (für die Periheldistanzen $q = 0{,}9$ bis 2,1) eine näherungsweise Proportionalität zwischen q und der Zahl der Kometen von einem bestimmten H. Immerhin zeigt diese ein Maximum bei $q = 0{,}8$ bis 1,0, was offenbar mit den gün-

---

59) Aus einer Abzählung der Kometen nach der Elongation $l_{\sphericalangle} = l_{\odot} \pm 180$ findet *J. Holetschek*:

für das Intervall	0°— 60°:	218 Kometen,
	60°—120°:	109 „
	120°—180°:	81 „

und schließt aus ihr, daß, wenn zwischen 0°—60° alle Kometen sichtbar und entdeckt würden, die Zahl derer zwischen 60° und 120° nur mehr 0,50 und zwischen 120°—150° gar bloß 0,37 der ersteren ist, so daß die Zahl der entdeckten zur Zahl der verloren gegangenen sich verhält wie

$$(1 + 0{,}50 + 0{,}37) : (0{,}00 + 0{,}50 + 0{,}63) = 1{,}87 : 1{,}13.$$

60) Neuestens hat wieder *W. H. Pickering*, Harv. Obs. Ann. (61) 3 (1911) sowie London Astr. Soc. M. N. 72 (1912), p. 740 auf den Zusammenhang der Perihelverteilung der Kometen mit dem Sonnenapex hingewiesen; gegen ihn wendet sich *A. S. Eddington*, Observ. 36 (1913), p. 142, sowie *G. Armellini*, Roma Acad. Linc. Rend. 25 (1916).

stigeren Sichtbarkeitsbedingungen für diesen Fall, für den Δ ein Minimum ist, zusammenhängt.[61])

γ) Bahnknoten und Neigung. Die Knotenlängen der Kometen zeigen eine fast gleichmäßige Verteilung am Himmel. *Holetschek*[58]) findet von 273 Kometen 144, deren Knoten zwischen 0^0—180^0 und 129 zwischen 180^0—360^0, *Fabry* eine noch gleichmäßigere, von 324 Kometen etwa liegen die Knoten von 160 zwischen 0^0—180^0 und von 164 zwischen 180^0—360^0. *J. Kleiber*[62]) legt der Behandlung des Problems folgenden Satz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrunde: Verteilt man auf die Peripherie eines Kreises in beliebiger Weise n Punkte und teilt sie sodann in m gleiche Abschnitte, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Zahl der Abschnitte, die i solche Punkte enthalten, gegeben durch

$$m \binom{n}{i} \left(\frac{1}{m}\right)^i \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-i}.$$

Durch Abzählen der Kometen für je 2^0 Länge findet er Werte, die mit dem nach dieser Formel berechneten theoretischen in genügender Übereinstimmung stehen.

Auf ein ebensolches Wahrscheinlichkeitsproblem führt *Laplace*[63]) die Frage nach der Verteilung der Neigungswinkel der Kometenbahnen zurück. Veranlassung hierzu gab ihm die von *D. Bernoulli* (1734) aufgeworfene Frage, ob wohl die Anordnung der Planetenbahnen gegen

61) Hierher wäre auch der Zusammenhang zwischen Periheldistanzen und den Perihelbreiten der Kometen einzubeziehen (zweite Perihelregel von *Holetschek*, die erste ist die Kleinheit der Elongation von der Sonne). Kleine Periheldistanzen sind, wie die Abzählungen zeigen, im allgemeinen mit großer südlicher oder mit ebensolcher nördlicher Breite verbunden, die ersteren Kometen sind dann nur für die Nordhälfte, die zweiten fast ausschließlich für die Südhälfte der Erde beobachtbar, während bei Kometen mit großen Periheldistanzen mehr niedrigere Breiten vorherrschen. Von der zweiten Gruppe gehen viele verloren, weil auf der Südhemisphäre weniger Beobachter sich finden, ebenso aber auch von der dritten, weil mit der größeren Periheldistanz auch eine größere Distanz von der Erde und damit eine kleinere Helligkeit zusammenhängt. Eine Bestimmung der Zahl der dadurch unsichtbar bleibenden Kometen läßt sich jedoch nicht durchführen.

62) *J. Kleiber*, Astr. Nachr. 115 (1886), p. 135. Nach der gleichen Formel behandelt *Kleiber* auch die Verteilung der Knoten der kleinen Planeten und findet ebenfalls eine volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Zählung; dagegen nicht mehr eine solche für die Knoten der Meteoritenbahnen.

63) *P. S. Laplace*, Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, Mém. Acad. Paris 7 (1773) = Oeuvres 8, p. 279 und Calcul des probabilités, Livre II, chap. 2, Nr. 13, sowie Sur les comètes, Conn. de Temps pour 1816 = Oeuvres 13, p. 88.

die Ekliptik und die Gleichheit ihrer Umlaufsbewegungen ein Werk des Zufalls sei. Für die Planeten beantwortet *Laplace* die Frage dahin, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der Neigungswinkel der 10 bis 1812 bekannten Planeten nur 82° beträgt, und somit kleiner ist, als der einer einzelnen Bahn es sein könnte, $12{,}10^{-8}$, d. h. fast Null ist, und daher von einem Zufall nicht gesprochan werden könne. Für 100 Kometen, deren Elemente bis 1811 bekannt waren, und von denen 53 direkte, 47 eine retrograde Umlaufsbewegung hatten, findet er als Mittelwerte ihrer Neigungswinkel 45°1 und 48°2, und als Gesamtmittel 46°6, sodann als Wahrscheinlichkeit dessen Abweichung von 45°, 0,474, die er dahin deutet, daß im Gegensatz zu den Planeten die Kometen das Streben haben, sich in ihrer Bahn von der Ekliptik zu entfernen. Gegen diese Lösung von *Laplace* erhob *Cournot*[64]) den Einwand, daß er bei seiner Berechnung jedem Neigungswinkel i eine Ebene zuordnet, was nicht richtig ist ($i = 0$ entspricht wohl eine Ebene, die Ekliptik, aber jedem $i > 0$ schon unendlich viele), und daß daher der Mittelwert der Neigungen nicht 45°, sondern nach der Formel berechnet,

$$90^0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ci \cos i \, di : \int_0^{\frac{\pi}{2}} c \cos i \, di = 57^0 3$$

zählt. Eine tatsächliche Zählung[65]) von 291 Kometen ergab

für	136 direkte	52°8
„	155 retrograde	53°5
„	33 periodische, deren Umlaufszeit kleiner ist als 100 Jahre . .	21°0.

Dadurch ist ein wesentlich verschiedenes Verhalten der rein parabolischen Kometen gegenüber den periodischen gekennzeichnet.

δ) Bahnexzentrizität. Am einfachsten ist die Untersuchung der Verteilung der Kometen, was die Exzentrizität ihrer Bahnen anlangt. Abgesehen von den kurzperiodischen Kometen, deren Umlaufszeit zwischen 3—8 Jahren zählt und deren Exzentrizität zwischen 0,6—0,8 liegt, ist sie für alle anderen durchwegs nahe gleich der Einheit (parabolischer Charakter der Bahn) mit einem Überwiegen nach der negativen Seite (elliptische Bahn) gegenüber der hyperbolischen. Über die Bedeutung dieser Verteilung vgl. die folgende Nr. 6 c).

---

64) *A. Cournot*, Sur la distribution des orbites cométaires, erschienen als Anhang zur französischen Ausgabe der Astronomie von *J. Herschel*, Paris 1834.

65) Nach *L. Fabry*, Fußn. 58).

b) *Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den Ursprung der Kometen.*[66]) Die zweite Gruppe von Untersuchungen über den Ursprung der Kometen befaßt sich mit der Frage nach der Verhältniszahl zwischen den elliptischen und hyperbolischen Kometenbahnen. Den Ausgangspunkt für sie bilden zwei Annahmen:

1. Kometen, deren Periheldistanz q unter einer bestimmten Grenze liegt, im allgemeinen wird als solche $q = 2$ angesetzt, kommen in den Sichtbarkeitsbereich der Erde. Werden wie üblich die Bahnkonstanten: Flächengeschwindigkeit $= c$, Parameter $= p$, große Halbachse $= a$, Radiusvektor $= r$ und der Winkel zwischen Geschwindigkeit und Radiusvektor $= H$ gesetzt, so gelten die Gleichungen

$$c = vr\sin H, \quad p = c^2k^{-2}, \quad v^2 = k^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \quad q = a(1-e).$$

Aus ihnen folgt

$$v^2 = 2k^2qr^{-1}(r-q)(r^2\sin^2 H - q^2)^{-1} \tag{18}$$

und unter Einführung von $x = v\sin H$, $y = v\cos H$ und den Abkürzungen $A^2 = 2k^2qr^{-1}(r+q)^{-1}$, $B^2 = 2k^2q^{-1}r^{-1}(r-q)$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \tag{18a}$$

d. i., da stets $q < r$ anzunehmen ist, die Gleichung einer Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{B}{A}, \quad \sin\alpha = \frac{q}{r}.$$

Ihre Bedeutung ist die folgende: Betrachtet man einen Kometen K in der Entfernung r von der Sonne S, trägt von K aus seinen Geschwindigkeitsvektor v auf, und konstruiert sodann diese Hyperbel, so trennt das durch deren Rotation um die Achse KS entstehende Rotationshyperboloid die Kometen, deren Periheldistanz $\leqq q$ ist, die also von der Erde aus gesehen werden können, von jenen, für die q zu groß ist, und die die Sichtbarkeitsbedingung von der Erde aus nicht erfüllen.

2. Es wird eine bestimmte Verteilungsfunktion φ für die Geschwindigkeit v eingeführt, mit der die Kometen in den Anziehungsbereich der Sonne geraten, und dabei vorausgesetzt, daß sie bloß von v, nicht aber von r und dem Winkel H abhängt. Schlägt man nunmehr um den Punkt zwei Kugeln mit den Radien v und $v + dv$, so schneiden diese aus dem Hyperboloid einen Raum aus, dessen Oberfläche, Calotte — wobei nur der der Sonne zugewandte Teil zu nehmen

66) Einen ausführlichen Bericht über diese enthält die Doktorthese von *L. Fabry*, Fußn. 58), sowie ferner *O. Zanotti Bianco*, Fußn. 45).

ist —, zur Oberfläche der ganzen Kugel das Verhältnis der Kometen mit den Geschwindigkeiten v und $v + dv$ und der Periheldistanz $\leqq q$ zur Gesamtanzahl aller zwischen den beiden Kugeln angibt.

Diese Zahl ist

$$N(v)\,dv = \frac{1}{2}\varphi(v)\,dv\left(1 - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right). \tag{19}$$

Bei der durchzuführenden Integration ist der Ausdruck in zwei Teile zu teilen, je nachdem $A \gtrless v$; ferner ist als untere Integrationsgrenze 0 und als obere entweder eine Maximalgeschwindigkeit v_0 anzunehmen oder eine kleinere v_1, die einem bestimmten Charakter der Bahn (elliptisch oder parabolisch) entspricht. Die erstere

$$N(v_0) = \frac{1}{2}\int_0^A \varphi(v)\,dv + \frac{1}{2}\int_A^{v_0} \varphi(v)\,dv\left(1 - \sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right) \tag{19a}$$

gibt die Zahl aller jener Kometen an, die mit den Geschwindigkeiten zwischen den Grenzen 0 bis v_0 und der Periheldistanz $< q$ in den Bereich der Sonne gelangen, die zweite

$$N(v_1) = \frac{1}{2}\int_0^A \varphi(v)\,dv + \frac{1}{2}\int_A^{v_1} \varphi(v)\,dv\left(1 - \sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{A^2}{v^2}}\right) \tag{19b}$$

bloß jene, deren Bahn die verlangte Eigenschaft hat, so daß endlich

$$x = N(v_0) : N(v_1) \tag{20}$$

die gesuchte Verhältniszahl der Kometen darstellt, die von der Erde aus gesehen werden können und deren Bahn von einem bestimmten Charakter ist, zu der aller überhaupt sichtbar werdenden.

Laplace[67]), der nur den Fall $\varphi(v) =$ konst behandelt, setzt $q = 2$, $v_0 = \infty$, r als den Radius der Wirkungssphäre der Sonne $= 100000$, und bestimmt v_1 aus der Bedingung, daß Hyperbeln, deren Exzentrizität 1,02, deren Halbachse somit $= 100$ ist, zu den durch die Rechnung von den parabolischen nicht mehr zu unterscheidenden gehören. Er findet daraus für x eine Zahl, die nur wenig von 1 verschieden ist, was bedeutet, daß die Zahl der rein parabolischen oder elliptischen Kometen der aller überhaupt sichtbaren gleichkommt, ausgesprochene Hyperbeln mit Exzentrizitäten größer als 1,02 also äußerst selten sind. Damit erscheint der interstellare Ursprung der Kometen erwiesen. Wie jedoch *Gauß*[68]) und *Schiaparelli*[69]) nachweisen, ist

67) *P. S. Laplace,* Sur les comètes, Paris Conn. d. Temps pour 1816 = Oeuvr. 13, p. 88.

68) *C. F. Gauß,* Werke 4, p. 581 (Compte rendue du mém. de Laplace).

69) *J. V. Schiaparelli,* Entwurf, Note 7, ferner Mem. Inst. Lombardo 12 (1873) und 17 (1878).

hierbei *Laplace* ein Entwicklungsfehler unterlaufen, dessen Verbesserung zur Folge hat, daß dessen Ergebnis in das gerade Gegenteil umschlägt. *Gauß*[68]) und später *v. Seeliger*[70]) weisen außerdem darauf hin, daß die Anschauung, $\varphi(v) = \text{konst}$, d. i. einer gleichen Wahrscheinlichkeit für alle Geschwindigkeiten von $v = 0$ bis v fast gleich ∞ nicht zutreffend sein könnte. *Seeliger* stellt als obere Grenze für v_0 etwa das 10fache der Bahngeschwindigkeit der Erde (29,6 km sec^{-1}) fest, die erfahrungsgemäß der größten kosmischen Geschwindigkeit entspricht. Aber damit ergibt sich merkwürdigerweise wieder genau dasselbe Resultat, das *Laplace* gefunden, nämlich ein Überwiegen der elliptischen Bahnen über die merklich hyperbolischen. Erst die Annahme $\varphi(v) = Cv^2$ kehrt das Verhältnis, indem nach ihr x sehr klein folgt, in das Gegenteil um. Es ist also x wesentlich von der Annahme über $\varphi(v)$ abhängig.

Endlich macht *Schiaparelli* noch darauf aufmerksam, daß man bei diesen Betrachtungen auch den Einfluß der Bewegung der Sonne mit zu berücksichtigen habe. Es wird dies erzielt durch die Annahme

$$(21)\quad \varphi(v) = \tfrac{1}{2}\int F(c)\frac{dc}{dv}\sin E\,dE = \tfrac{1}{2}\int F(c)\sin E\,dE\Big(1 - \frac{g^2}{v^2}\sin^2 E\Big)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn c als die relative Geschwindigkeit des Kometen beim Eintritt in den Wirkungsbereich der Sonne, mit g deren Eigenbewegung durch die Beziehung

$$v^2 = c^2 + g^2 - 2gc\cos E \quad \text{oder} \quad c = g\cos E \pm \sqrt{v^2 - g^2\sin^2 E}$$

verbunden gedacht werden und die Grenzen der Integrale 0 und $\frac{\pi}{2}$ sind, wenn $gq < v_1$ und 0 und $\arcsin\frac{v}{gq}$ für $gq > v$. Die Annahme $F(c) = \text{konst}$ führt für die beiden Fälle auf

$$\varphi(v) = \tfrac{1}{4}K\frac{v}{g}\lg\frac{v+g}{v-g}, \quad \varphi(v) = \tfrac{1}{4}K\frac{v}{g}\lg\frac{g+v}{g-v},$$

die in erster Annäherung für die Grenzwerte $g \ll v$ bzw. $v \ll g$ in die zwei oben behandelten

$$\varphi(v) = \text{konst} \quad \text{und} \quad \varphi(v) = C\cdot v^2$$

übergehen, worin diese zwei speziellen Annahmen ihre Begründung finden. Führt man aber die Integration exakt durch, mit Rücksicht auf den aus den Beobachtungen folgenden Wert von g, so folgt hier für beide Annahmen $F(c) = \text{konst}$ oder $F(c) = K\cdot c^2$ in gleicher Weise für x eine sehr kleine Zahl, d. h. ein bedeutendes Fehlen von parabolischen oder elliptischen Bahnen gegenüber den ausgesprochen

70) *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 124 (1890), p. 257 u. 415.

hyperbolischen. Auch weitere Annahmen, die *Fabry* in seiner Untersuchung macht, besonders in Anknüpfung an eine neue Problemstellung von *Davis*[71]), führen zu demselben Ergebnis, einem Überwiegen hyperbolischer Bahnen und damit zu der Anschauung, daß die Kometen keineswegs aus dem interstellaren Raume in das Sonnensystem kommen, sondern wegen des meist parabolischen Charakters ihrer Bahnen dessen ständige Mitglieder sind.[72])

In anderer Art kommen *K. Hillebrand*[73]) und *G. Armellini*[74]) zu demselben Resultate, daß die Kometen dem Sonnensysteme angehören und ihr Ursprung in Entfernungen von der Sonne liegt, die im Verhältnisse zu den Distanzen vom nächsten Fixsterne noch als sehr klein zu bezeichnen sind. Jener, durch den Nachweis, daß selbst rein elliptische Bahnen, deren Apheldistanz dem 70fachen der Neptundistanz gleichkommt, sich nicht mehr von rein parabolischen unterscheiden lassen, worin das so häufige Vorkommen solcher, wie es die Berechnungen zeigen, ihre Erklärung findet, dieser, durch die Behandlung der Frage, daß die Wahrscheinlichkeit, daß Kometen, die mit beliebiger Geschwindigkeit in das Sonnensystem eindringen, in ihrer Bahn eine kleine Periheldistanz erhalten und damit sichtbar werden können, eine äußerst geringe ist.

c) *Die Problemstellung E. Strömgrens.* Auf einen wesentlich anderen Standpunkt stellen sich *Strömgren*[75]) und nach ihm *Fabry*[76]) und *Fayet.*[77]) Sie legen den Hauptwert der Untersuchung auf die Bestimmung der Exzentrizität jener Bahn, die der Komet durchlief, als

71) *A. S. Davis,* On the probable character of cometary orbits, Phil. Mag. 2 (1870), 3 (1871).

72) Gegen diese Folgerung wendet sich *G. v. Niessl* [Astr. Nachr. 135 (1894), p. 147] mit der Bemerkung, daß zu ihrer vollen Rechtfertigung noch die Berücksichtigung von H in der Annahme über die Verteilungsfunktion φ, d. h. deren Abhängigkeit von v und H notwendig wäre.

73) *K. Hillebrand,* Wien. Akad. Denkschr. 81 (1908).

74) *G. Armellini,* Roma Acad. Linc. Rend. (23) 1 (1914), p. 304. Vgl. auch *Fessenkoff,* Paris C. R. 158 (1914), p. 541.

75) *E. Strömgren,* Über die Kometenbahn-Exzentrizitäten, Lund. Medd. 1 (1898), 2 (1899); ferner Analytische Störungsausdrücke für parabolische Bahnen, Astr. Nachr. 169 (1905), p. 1; Ein Satz über Kometenstörungen, ebenda 170 (1905), p. 17; Über die kosmogonische Stellung der Kometen, Astr. Ges. Vjs. 45 (1910), p. 315, sowie die zusammenfassende Abhandlung: Über den Ursprung der Kometen, Kopenhagen Obs. Publ. 19 (1914).

76) *L. Fabry,* Paris C. R. 138 (1904), p. 335.

77) *G. Fayet,* Sur l'orbite antérieure de la comète 1892 II, Paris Bull. astr. 7 (1900), p. 104, sowie Recherches concernant les excentricités des comètes, Paris Fac. Thèse 1906.

er weit von der Sonne und allen störenden Planeten entfernt war. Diese Exzentrizität ist nämlich keineswegs mit jener identisch, die bei der Bahnbestimmung des Kometen mit Rücksicht auf die nur während der Beobachtungszeit erlittenen Störungen aus dem gesamten Beobachtungsmaterial abgeleitet wird und im Gegensatze zu der ersteren, der konvergierenden, als deren Oskulationswert zu bezeichnen wäre. Jener stellt den wahren Charakter der Bahn dar, in der der Komet in die inneren Teile des Sonnensystems eingewandert ist, dieser erstreckt sich nur auf die kurze Strecke um das Perihel herum, während der er sichtbar war, und ist mehr als eine Zufallsgröße zu betrachten, abhängig von der Stellung der Planeten während dieser Zeit. Man hat daher die Aufgabe, um über die kosmogonische Stellung des Kometen klar zu werden, aus dem oskulierenden Wert der Exzentrizität dessen konvergierenden zu finden. Diese Berechnung ist auf doppeltem Wege durchzuführen. Vorerst hat man die oskulierende Exzentrizität von den periodischen Schwankungen zu befreien, die von den durch die Planeten auf die Sonne ausgeübten Störungen herrühren. Dies erfolgt durch Übergang der Bahnelemente von der Sonne als Mittelpunkt auf den Schwerpunkt von Sonne und störenden Planeten. Mit diesem ist sodann die Rückwärtsrechnung der Störungen bis zu einem Zeitmomente vorzunehmen, wo er schon so weit von Sonne und Planeten stand, daß angenommen werden kann, daß er annähernd in seiner ursprünglichen Bahn um die Sonne lief.

Den ersten Ansatz zu einer solchen Rückwärtsrechnung führte für den Kometen 1886 II *Thraen*[78]) durch und wies nach, daß dessen hyperbolische Oskulationsexzentrizität von 1885, 5. Dezember, bis 1882, 5. Oktober, von 1,000228, 1,000177, 1,000052 bis 1,000002 abnahm, woraus er unter der Annahme, daß bei weiterem Zurückgehen sie sogar unter die Einheit sinken würde, trotz der aus den Beobachtungen [abgeleiteten hyperbolischen Bahn auf den elliptischen Charakter der wahren Bahn schließt, in der der Komet sich der Sonne näherte. Eine zweite gibt *Strömgren*[79]) für den Kometen 1890 II. Nach ihr sind in dem Zeitraum von 1890, 17. März, bis 1886, 25. August, die oskulierenden Werte der Exzentrizität 1,0004344, 1,0001916, 1,0001828, 1,0002862, 1,0003856, die auf den Schwerpunkt bezogenen dagegen 1,0012733, 1,0006288, 1,0003069, 1,0001903, 1,0001497, die ersteren zeigen die von den Störungen der Planeten

78) *A. Thraen,* Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1886 II, Astr. Nachr. 136 (1894), p. 133.

79) *E. Strömgren,* Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II, Lund. Acta Soc. 7 (1896).

auf die Sonne herrührenden Schwankungen, die letzteren wohl nicht mehr, doch ist ihr Grenzwert noch nicht zu übersehen, und erst eine weitere Rückwärtsrechnung zeigte den elliptischen Charakter der ursprünglichen Bahn mit $\frac{1}{a} = +\,0{,}0000718$.

Man kann diese Rückwärtsbestimmung nach den Methoden der speziellen Störungsrechnungen vornehmen, doch geben *Strömgren* wie *Fayet* auch analytische Ausdrücke für sie an, letzterer für die Störungen der Exzentrizität direkte, ersterer für den reziproken Wert der großen Halbachse der Bahn. Für die Berechnung eines Maximalwertes des Restes, der nach der bis zu einem gewissen Zeitpunkt durchgeführten Störungsrechnung noch übrig bleibt, gibt *Strömgren* den interessanten Satz[80])

$$\left|\Delta\left(\frac{1}{a}\right)\right| < m_1\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{1}{2}v_0}\right)\sum_1^\infty \frac{n+3}{r}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1},$$

worin R_1 den (Maximalwert des) Radiusvektor des störenden Planeten, r den des Kometen und v_0 dessen wahre Anomalie für die Epoche bedeuten, bis zu der die numerische Integration rückwärts vollführt war. Durch ihn wird man in den Stand gesetzt, eine obere Grenze für den nicht gerechneten Teil der Störungen mit mathematischer Strenge zu bestimmen. Indirekt kann man aber auch entscheiden, wie weit rückwärts man die Störungsrechnung führen muß, um sicher zu sein, daß der unberücksichtigte Teil der Störungen verschwindend klein ist.

Das Ergebnis der weitläufigen strengeren Rechnungen *Strömgrens* wie der genäherten *Fayets* ist auch für die Anschauung, daß die Gesamtheit der bis nun beobachteten Kometen im Sonnensystem ihren Ursprung habe, überzeugend.[81]) *Fayet* findet, daß unter 24 Kometen, für die die Bahnbestimmung eine Hyperbel lieferte, 15 durch die Rückwärtsberechnung elliptisch wurden, während für die anderen der Unterschied der Exzentrizität gegen 1 innerhalb der durch

80) *E. Strömgren*, Ein Satz über Kometenstörungen, Astr. Nachr. 170 (1905), p. 17.

81) Gegen diese Schlußfolgerung (völlige Abwesenheit hyperbolischer und einziges Vorhandensein elliptischer Bahnen) wendet sich *Schiaparelli* [Paris Bull. astr. 27 (1910), p. 197 u. 241] mit der Bemerkung, daß damit noch nicht die Zugehörigkeit der Kometen zum Sonnensystem erwiesen erscheint. Doch mit Unrecht. Denn die durch die Störungen der Planeten sich vollziehende Auswahl zwischen den durch sie in elliptische umgewandelten Kometen gegen die rein hyperbolischen, die wohl das Sonnensystem verlassen müßten, genügt nicht, um den vollen Mangel an verbürgten hyperbolischen Bahnen zu erklären.

deren mittleren Fehler bestimmten Grenzen liegt, daß ferner von den anderen von ihm untersuchten elliptischen oder rein parabolischen, an Zahl 122, nur 15 eine hyperbolische Bahn erhielten, aber ebenfalls von sehr kleiner Differenz gegen 1, deren Größe von der gleichen Ordnung ist wie die Unsicherheit in der Exzentrizität selbst. Das gleiche zeigen auch die Ausführungen *Strömgrens* bezüglich der 8 von ihm berechneten Kometen. Nur bei zweien bleibt ein kleiner hyperbolischer Rest, der aber mit Rücksicht auf den mittleren Fehler von $\frac{1}{a}$ ganz illusorisch ist, die anderen gingen in Ellipsen über oder ihre Elliptizität wurde verstärkt.[82])

7. **Die kurzperiodischen Kometen. Das Tisserandsche Kriterium.** Für die Bahn des von *Messier* entdeckten Kometen 1770 I berechnete *Lexell*[83]) eine Ellipse von 5,6 Jahren Umlaufszeit. Trotz eifrigen Suchens wurde er jedoch bei seiner nächsten (1777) und der folgenden (1783) Wiederkehr zum Perihel nicht wieder gesehen, noch auch Spuren von ihm in eventuellen früheren Erscheinungen gefunden. Dieses Rätsel lösten *Laplace*[84]) und *Burckhardt*[85]) durch den Nachweis, daß der Komet erst 1767 durch Jupiter in die beobachtete Bahn und 1779 bei einer neuen Annäherung an diesen wieder aus ihr in eine neue abgelenkt wurde, so daß er nur 1777 hätte beobachtet werden können, da aber für ihn ungünstige Sichtbarkeitsverhältnisse vorlagen. Die Exzentrizität und die Periheldistanz seiner Bahnen 1767 vor Eintritt in die Wirkungssphäre des Jupiter und 1779 nach dem zweiten Eintritt in sie, sowie ihre Werte, entspre-

82) Eine interessante Untersuchung führte *A. O. Leuschner*, Publ. Pac. Soc. 19 (1907), p. 19 durch, indem er nachweist, daß die Zahl der rein parabolischen Kometen gegenüber den elliptischen mit der wachsenden Steigerung der Genauigkeit der Beobachtungen abnimmt, wie sie sich teils in den Beobachtungen der neueren Zeit gegenüber denen der älteren Perioden, teils in der längeren Dauer der Sichtbarkeit ausspricht. In den Jahren zwischen 0—1755, 1756—1845 und 1846—1895 gab es 89%, 74% und 54% parabolischer Kometen; bei einer Sichtbarkeitszeit von 1—100, 101—289 und 290—511 Tagen 68%, 55% und 13% solcher.

83) *A. Lexell*, Pétersb. Acad. Mém. 1777—1781.

84) *P. S. Laplace*, Méc. cél. IV, livre 9, chap. 3.

85) *J. K. Burckhardt*, Paris Acad. Mém. 1806, vgl. ferner über diesen sogenannten *Lexell*schen Kometen: *Th. Clausen*, Astr. Nachr. 19 (1842), p. 121; *H. d'Arrest*, ebenda 46 (1857), p. 98, ferner *U. J. Leverrier*, Recherches astronomiques chap. 11, Paris Obs. Mém. 3 (1857) und endlich den Versuch des Nachweises seiner Identität mit dem periodischen Kometen 1889 V von *C. Lane Poor*, Columbia Obs. Contr. 22 (1904) mit den kritischen Bemerkungen von *G. Deutschland*, Astr. Nachr. 181 (1909), p. 1.

chend den Beobachtungen, waren nach *Laplace*

I (1767)	II (1770)	III (1779)
$e = 0{,}6177$	$e = 0{,}7855$	$e = 0{,}4780$
$q = 0{,}0826$	$q = 0{,}6774$	$q = 3{,}3346$

und die kleinste Distanz vom Jupiter war (I) 0,0190, (III) 0,066. Sie zeigen den gewaltigen Einfluß, den Jupiter als störender Planet auf die Bahn eines Kometen ausüben kann, wenn die Annäherung an ihn eine besonders große ist.[86])

Die weiter folgenden Entdeckungen periodischer Kometen brachten die neue Tatsache zur Erkenntnis, daß sich diese, was ihre Umlaufszeiten anlangt, in mehrere streng voneinander zu trennende Gruppen teilen lassen. Zur ersten gehört der *Halley*sche Komet mit einer Periode von 75 Jahren, zu dem noch Komet 1813 I (*Pons*) mit 73, 1815 (*Olbers*) mit 74 Jahren Umlaufszeit hinzukamen; einer zweiten Gruppe sind zuzuzählen Komet 1790 II (*Méchain*) mit 14 und 1846 VII (*Peters*) mit 13 Jahren Umlaufszeit und zur dritten die vielen Kometen von 5—8 Jahren Periode, zu denen auch der *Encke*sche Komet, 1786 I, mit 3,3 Jahren gehört. Diese Ergebnisse vervollständigte endlich *M. Roller*[87]) durch die neu von ihm aufgefundene Beziehung, daß diesen nahe gleichen Umlaufszeiten auch nahezu gleiche Apheldistanzen entsprechen, die für jede Gruppe auf einen der großen Planeten hinweisen, gleichsam als jenen, durch dessen Störungen die Bahnumwandlung sich vollzog. Faßt man zunächst jene Kometen ins Auge, die mindestens in zwei Wiederkehren beobachtet sind und deren Elemente als gesichert betrachtet werden können, so erhält man: 1. für 17 Kometen mit Umlaufszeiten zwischen 5—8 Jahren (den *Encke*schen Kometen ausgeschlossen) mittlere Apheldistanz = 5,62, während die des Jupiter 5,425 beträgt; 2. der *Méchain-Tuttle*sche Komet, $T = 12$ Jahre, Apheldistanz = 9,54, während die des Saturn 10,08 ist; 3. 5 Kometen mit Perioden zwischen 62—75 Jahren, mittlere Apheldistanz 32,9, während die des Neptun 30,4 ist. Hierzu kommen noch von den bloß in einer Erscheinung beobachteten zwei mit T zwischen 33—40 Jahren, mittlere Apheldistanz 20,7 und der des Uranus = 20,1;

86) Weitere solche Bahnumwandlungen berechneten: *H. d'Arrest* für den *Brorsen*schen Kometen, 1846 III, dessen Annäherung an Jupiter 1842 stattfand, Astr. Nachr. 46 (1857), p. 100; *R. Lehmann-Filhés* für den Kometen Wolf, 1884 III, für die Jupiternähe im Jahre 1875, ebenda 124 (1890), p. 1; dann *S. C. Chandler* für den Kometen, 1889 V, für die Annäherung an Jupiter 1886, Astr. J. 9 (1889), p. 100, sowie *C. Lane Poor*, ebenda 10 (1890), p. 91; allgemeine Untersuchungen über solche Bahnumwandlungen von *O Callandreau*, Fußn. 14.

87) *M. Roller*, Astr. Nachr. 75 (1870), p. 331.

endlich zwei, deren T 120 und 128 Jahre zählt und deren Apheldistanz im Mittel 48 ist und vier mit Perioden zwischen 235 und 307 Jahren und der Apheldistanz 84.[88])

Die Tatsache solch bedeutender Bahnumwandlungen von Kometen durch den störenden Einfluß des Jupiter führte zu dem Problem, aus den Elementen a_1, e_1, p_1, π_1, i_1 und T_1, die für den Moment des Eintritts in die Wirkungssphäre des Jupiter gelten, die neuen a_2, e_2, p_2, π_2, i_2 und T_2 gültig für den Austritt aus ihr zu berechnen. *Tisserand*[89]) gab zuerst eine Lösung desselben unter der vereinfachenden Annahme, daß die Bahn des Jupiter kreisförmig ist (mittlere Bewegung $= n'$) und kommt hierbei zu der Beziehungsgleichung[90])

$$\frac{1}{a_1} + 2n'\sqrt{p_1}\cos i_1 + R_1 = \frac{1}{a_2} + 2n'\sqrt{p_2}\cos i_2 + R_2 = \text{konst},$$

in der i_1 und i_2 die Neigungswinkel gegen die Bahnebene des störenden Planeten und R_1 und R_2 zwei mit deren Masse multiplizierten Glieder bedeuten, die im allgemeinen so klein sind, daß sie vernachlässigt werden können.[91]) Eine Berechnung dieser Konstanten K für

---

88) Vgl. *W. H. Pickering,* Harvard Obs. Ann. (61) 3 (1911), der aus dieser Analogie auf die Existenz zweier Planeten außerhalb der Neptunbahn mit den bez. Halbachsen 48 und 84 schließt und deren Bahnbestimmung versucht.

89) *F. Tisserand,* Paris Bull. astr. 6 (1889), p. 241 u. 289 und Méc. cél. IV (1896), chap. 12, sowie die ergänzenden Ausführungen hierzu von *O. Callandreau,* Paris Obs. Mém. 20 (1890) und das Referat über sie von R. *Lehmann-Filhés,* Vsj. astr. Ges. 26 (1891), p. 6. In anderer Art behandelt *H. A. Newton* in zwei Abhandlungen [On the origine of Comets, Amer. J. of sc. 16 (1878) und On the capture of Comets, ebenda 42 (1891), vgl. das Referat von *R. Lehmann-Filhés,* Vjs. astr Ges. 27 (1892), p. 182] das gleiche Problem, speziell im Hinblick auf die Umwandlung der großen Bahnen eines ursprünglich parabolischen Kometen bei großer Annäherung an Jupiter und knüpft an sie die Frage nach der Häufigkeit solcher Annäherungen bei einer bestimmten Annahme über die ursprünglich räumliche Verteilung der Kometenbahnen. *B. Tessenkoff* wieder [Paris C. R. 158 (1914), p. 541] berechnet die Wahrscheinlichkeit größerer Störungen durch Jupiter in ihrer Abhängigkeit von dem Neigungswinkel der ursprünglichen Kometenbahn gegen die Ekliptik.

90) Eine andere Ableitung dieser Relation, die seitdem das *Tisserandsche Kriterium* oder die *Kometeninvariante* genannt wird, und zwar auf Grund des Energiesatzes gibt *H. v. Seeliger,* Astr. Nachr. 124 (1890), p. 209. Vgl. auch *M. Gruey,* Paris C. R. 131 (1900), p. 602.

91) *L. Schulhof* [Paris Bull. astr. 6 (1889), p. 513] setzt $R = 2m'\varrho^{-1}$, wo ϱ die Distanz der Kometen vom Jupiter bedeutet, und findet damit eine bessere Übereinstimmung der Werte der Konstanten K für die Elemente vor oder nach Eintritt in die Wirkungssphäre. So z. B. für den *Lexell*schen Kometen für die drei Perioden I (1767), II (1770) und III (1779) ohne Berücksichtigung dieses Gliedes 0,483, 0,486, 0,479, dagegen mit ihm 0,489, 0,486, 0,486; ebenso für den

die Jupiterkometen führten *Schulhof*[92]) und *Fayet*[93]) durch. Ihre Werte liegen zwischen 0,337 für den Kometen *Méchain-Tuttle* 1890 II ($T = 14$ Jahre), 0,412 für den 1881 V (*Denning*), Umlaufszeit 4,2 Jahre, und 0,590 für Komet *Tempel* (1867 II), Umlaufszeit 5,7 Jahre. Speziell für den *Encke*schen Kometen ist $K = 0{,}591$.

Doch wurde anfangs die Bedeutung dieser Relation zum Nachweise der Identität zweier Kometen trotz der Verschiedenheit ihrer Bahnelemente überschätzt und *Schulhof*[94]) leitet noch zwei weitere Gleichungen ab, die hierbei erfüllt sein müssen:

$$\sqrt{p}\sin i \sin(L - \Omega) = \text{konst},$$

$$p - r' e \cos(L - \pi) = r,$$

worin L die heliozentrische Länge des Punktes der stärksten Annäherung von Komet und Planet sind, r wie r' deren Radienvektoren und Ω und π sich auf die Bahnebene des Planeten beziehen. Die erste Gleichung drückt die Tatsache aus, daß sich die zwei Bahnellipsen im Raume schneiden oder mindestens sehr stark annähern, die zweite wiederum sagt aus, daß diese Schnittpunkte in der Nähe des Jupiter liegen. Aber auch sie[95]) geben nur notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für die Identität der beiden Kometen. Immerhin kann man, wie *Schulhof* bemerkt, wenn sie erfüllt sind, auf deren gemeinsamen Ursprung schließen, denn die Wahrscheinlichkeit, daß für sie kein Zusammenhang besteht, ist bei dieser Annahme wohl nur eine sehr geringe.

Eine Untersuchung über die Stabilität der Bahnen periodischer Kometen auf Grundlagen der Methoden von *H. Poincaré* führte *v. Zeipel*[96]) durch. Er dehnt den Gültigkeitsbereich der *Lindstedt*schen

---

Kometen Wolf, 1884 III, für die Jahre 1875 und 1904 einmal 0,491 und 0,497, dann 0,498, 0,497.

92) *L. Schulhof*, Paris Bull. astr. 6 (1889), p. 465 u. 513; 8 (1891), p. 147, 191, 225.

93) *G. Fayet*, Paris Bull. astr. 28 (1911), p. 145; der gleichzeitig die Lage der Annäherungspunkte in bezug auf ihre scheinbare Verteilung untersucht und eine Anhäufung in der Richtung der Jupiteraphels findet.

94) *L. Schulhof*, Paris Bull. astr. 8 (1891), p. 202 (Gl. 22) und p. 233 (Gl. 25), während die *Tisserand*sche Relation mit Gl. 19, p. 192 identisch ist und aussagt, daß die Relativgeschwindigkeiten des Jupiter und eines jeden der beiden Kometen einander gleich sind.

95) Auf diese zwei Bedingungen machte zuerst *Th. Clausen*, Astr. Nachr. 22 (1845), p. 139 aufmerksam.

96) *H. v. Zeipel*, Sur l'application des séries de M. Lindstedt à l'étude du mouvement des comètes périodiques, Astr. Nachr. 188 (1910), p. 345—418.

Reihen, die bisher bloß bei der Bewegung der kleinen Planeten (kleine Exzentrizität) verwendet wurden, auf Fälle größerer Exzentrizitäten und ebensolcher Neigungswinkel aus, wodurch sie auch für periodische Kometen verwertbar werden.

8. Teilungen von Kometen, Kometensysteme und Familien. Teilungen von Kometen in zwei oder mehrere, von denen jeder Teil für sich einen neuen Kometen mit Koma und Kern bildete, sind mehrfach beobachtet worden, so beim *Biela*schen[97]), der in seiner Erscheinung im Jahre 1845 „fast vor den Augen der Beobachter" sich in zwei spaltete, deren Distanz zunächst 6′ betrug und bei der Wiederkehr im Jahre 1852 auf 30′ anstieg. Eine Zweiteilung zeigte auch der Komet 1860 I.[98]) Der periodische Komet 1889 V[99]) erschien in seiner ersten Erscheinung mit 4 Begleitern, die aber bei den nächsten Wiederkehren 1896, 1903 nicht wieder gesehen wurden.

Als Kräfte, welche solche Teilungen hervorrufen können, werden angenommen:

1. *Innere Kräfte* im Kometen, die mit der Entstehung seines Schweifes im Zusammenhange stehen und an seiner langsamen Auflösung arbeiten. Mathematische Darstellungen zu dieser von *Schiaparelli* herrührenden Theorie der Zerstreuung der Kometenmaterie geben *C. V. L. Charlier* und *L. Picart*[100]), jedoch mehr im Hinblicke auf die Frage nach der Stabilität der Bewegung der einzelnen Kometenteilchen, die nach der tatsächlichen Auflösung der Kometen beantwortete am eingehendsten *Bredichin.*[101]) Er knüpft hierbei namentlich an die anomalen Kometenschweife an, worunter er solche versteht, die innerhalb der Kometenbahn liegen, doch zur Sonne gerichtet sind. Sie bestehen nach seiner Anschauung aus schwereren materiellen Teilchen, die dem Kerne des Kometen entströmen, infolge ihrer größeren Masse der Sonnenabstoßung nicht unterliegen, sondern sich unter dem alleinigen Einfluß der Sonnenanziehung fortbewegen und, je weiter sie sich vom Kerne entfernen, desto mehr in ihrer neuen Bahn von der des Kometen abweichen. (Auflösung der Kometen in Meteorschwärme.)

---

97) Vgl. die Bahnbestimmungen von *J. Hepperger,* Fußn. 21), sowie den Bericht in: Wien Sternw. Kalender für 1903.

98) Bahnbestimmung von *J. Pechüle,* Astr. Nachr. 72 (1868), p. 236.

99) Bahnbestimmung dieses Kometen von *J. Bauschinger,* 1. Teil: München Sternw. 3 (1892); 2. Teil: Berlin Recheninst. Veröff. 8 (1898). Bahnbestimmung der einzelnen Teile von *S. C. Chandler,* Astr. J. 10 (1890), p. 153.

100) Vgl. Encykl. VI 2. 21 (*Oppenheim*), Nr. 37.

101) *Th. Bredichin,* Études sur l'origine des météores cosmiques et la formation de leurs courants, St. Petersburg 1903.

2. *Die zerstreuenden Kräfte*, die die großen Planeten, namentlich Jupiter unter ihnen, durch ihre *Störungen* auf die nur lose zusammenhängenden Teile des Kometen ausüben.

3. Endlich kann auch der *Widerstand des Mittels* durch die Verschiedenheit der Intensität seiner Wirkung auf die einzelnen Kometenteilchen eine trennende Kraft auf sie ausüben und eine Teilung des Kometen hervorrufen.

Von Bedeutung ist es hierbei, daß schon ganz geringfügige Änderungen der Geschwindigkeit der einzelnen aus dem Kometen ausgeschleuderten Teilchen gegen die des ganzen genügen, um deren Bahn völlig umzuwandeln. So findet *Bredichin*, daß bei der Annahme eines parabolischen Kometen von der Periheldistanz $q = 0{,}04$ und einer dieser entsprechenden Perihelgeschwindigkeit von 209000 $\mathrm{m\,sec^{-1}}$ für die Umlaufszeiten der von den Teilchen beschriebenen neuen Ellipsen die Werte folgen:

Geschwindigkeitsänderung	= 237 $\mathrm{m\,sec^{-1}}$	u = 73,8	Jahre
„	= 414 „	= 33,1	„
„	= 710 „	= 14,1	„
„	= 1273 „	= 6,0	„

das sind die vier Hauptgruppen unter den periodischen Kometen, deren Periode kleiner als 100 Jahre ist. Ebenso berechnet *H. Kreutz*[102]) unter der Annahme einer plötzlichen Störung im Perihel die Geschwindigkeitsverluste für die vier Kerne des großen Kometen 1882 II zu $-0{,}46$, $+0{,}46$, $+1{,}05$ und $-1{,}58$ $\mathrm{m\,sec^{-1}}$ bei einer Bahngeschwindigkeit von 478000 $\mathrm{m\,sec^{-1}}$.

Treten in dieser Art Teilungen von Kometen auf, so ist es möglich, daß sich diese einzelnen Teile immer mehr voneinander entfernen, im Laufe der Zeit nahezu gleiche Bahnen um die Sonne beschreiben und bei Annäherung an die Erde sichtbar werden. Kometen dieser Art bilden ein *System*, wenn der Nachweis ihrer einstigen Zusammengehörigkeit geführt werden kann, sonst aber wohl nur eine *Familie*, bei denen man sich mit der bloßen Festsetzung einer Ähnlichkeit ihrer Bahnelemente begnügt.

Die ersten Untersuchungen über Kometensysteme verdankt man *M. Hoek*.[103]) Er betrachtet als zu einem System gehörig Kometen,

102) *H. Kreutz*, Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II, 1. Teil: Der große Septemberkomet 1882 II, Kiel Sternw. Publ. 1888; 2. Teil: Fortsetzung, edenda 1891; 3. Teil: Das System der Kometen 1843 I, 1880 I und 1882 II, Astr. Nachr. Erg.heft 1901.

103) *M. Hoek*, London Astr. Soc. M. N. 25 (1865), p. 243; 26 (1866), p. 1 u. 204; 28 (1867), p. 129 und Astr. Nachr. 70 (1867, p. 206.

für die sich die Projektionen ihrer Bahnen an der scheinbaren Himmelskugel in ihren Aphelpunkten benachbarten Punkten schneiden, die ferner nahezu gleichzeitig in diesen Gegenden sich befinden und dabei nahezu die gleichen Distanzen von der Sonne sowie gleiche Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit haben. Dem gegenüber weist *J. Glauser*[104]) darauf hin, daß diese Bedingungen wohl notwendig, aber nicht hinreichend sind, um die Glieder einer solchen Gruppe als einem System angehörend anzusehen und in der Weise einzuschränken wären, daß man alle nach dem Perihel fallenden Schnittpunkte ausschaltet, da die wirklichen Radiationspunkte nur zwischen Aphel und Perihel fallen, und daß ferner der Spielraum zwischen Schnitt- und Aphelpunkt nicht gar zu groß gewählt werden dürfe. *J. Holetschek*[105]) hinwiederum macht darauf aufmerksam, daß die Berechnung dieser Schnittpunkte für die da in Betracht kommenden Distanzen, die weitaus größer sind als der Radius der Neptunbahn, sowie die der Zeitmomente für sie, die oft mehr als 1000 Jahre vom Periheldurchgang abliegen, nur eine sehr ungefähre sein könne, derart, daß eine Übereinstimmung nur zufälliger Natur ist.

Von allen bisher angenommenen Systemen wird heute nur das von *H. Kreutz*[102]) einer besonderen Untersuchung unterzogene System der Kometen 1843, 1880 I, 1882 II und 1887 I, die alle durch eine kleine Periheldistanz ausgezeichnet sind, anerkannt. — Von Kometenfamilien seien erwähnt, zunächst als zahlreichste, 1807, 1880 V, 1881 III, 1888 I, 1889 IV, 1892 I, sodann 1818 I, 1873 VII und der *Biela*sche Komet, sowie die periodischen Kometen (Periode 6,5 bis 6,7 Jahre) 1884 III (*Wolf*), 1892 V (*Barnard*, seit seiner ersten Erscheinung nicht wieder gesehen) und 1900 III (*Giacobini*).

104) *J. Glauser*, Astr. Nachr. 99 (1881), p. 279.
105) *J. Holetschek*, Wien Ber. 96 (1887), p. 291.

(Abgeschlossen im Oktober 1922.)

VI 2, 18a. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN KOMETEN UND STERNSCHNUPPEN.

Von

CUNO HOFFMEISTER

in Sonneberg (Thüringen).

Inhaltsübersicht.

1. Geschichtliche Einleitung.
2. Die Arbeiten von *Schiaparelli, Weiß* und Nachfolgern.
3. Nähere Untersuchungen über die Art des Zusammenhangs.
4. Kritik der Lehre vom allgemeinen kometarischen Ursprung der Sternschnuppen.
5. Regeln für die Untersuchung des Zusammenhanges von Kometen und Sternschnuppen.

Literatur.

Lehrbücher über den im folgenden behandelten Gegenstand sind nicht vorhanden. Die in Betracht kommenden Arbeiten sind größtenteils in Zeitschriften zerstreut und, soweit sie für die Entwicklung des Forschungszweiges einige Bedeutung zu besitzen schienen, in den Fußnoten ihrem Ort nach angeführt. Vollständigkeit wurde dabei nicht erstrebt, doch werden die Nachweisungen hinreichen, um den Leser ein eigenes Urteil über die beschriebenen Verhältnisse gewinnen zu lassen. Es sollen daher an dieser Stelle nur die Titel der wichtigsten Untersuchungen genannt werden, die tiefere Einblicke in die Geschichte der Meteorforschung gewähren, als dies bei den im Text genannten Spezialarbeiten der Fall ist.

Als grundlegendes Werk ist anzuführen:

I. *J. V. Schiaparelli,* Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, Stettin 1871.

Das Werk ist die vom Verfasser wesentlich erweiterte, von *G. v. Boguslawski* herausgegebene deutsche Ausgabe der „Note e Riflessioni sulla teoria astronomica delle Stelle cadenti“ und enthält neben der Begründung der kometarischen Theorie der Sternschnuppen eine ausführliche Kritik der älteren Ansichten, zahlreiche Literaturangaben sowie sonstige Beiträge zur Meteorforschung.

Eine wesentliche Ergänzung dazu stellt dar:

II. *E. Weiß,* Beiträge zur Kenntnis der Sternschnuppen, Sitzungsb. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, math.-nat. Klasse, 57. Band, II. Abt. 1868.

Enthält u. a. die Herleitung der formalen Beziehungen zwischen den Bahnen der Kometen und der Sternschnuppenströme.

III. *Th. Bredichin,* Études sur l'origine des météores cosmiques et la formation de leurs courants, St. Petersburg 1903.

Eine Zusammenfassung der Arbeiten des Verfassers, die größtenteils in den Annalen der Sternwarte zu Moskau erschienen sind, mit einer Darstellung und Begründung einer physikalischen Theorie der Beziehungen zwischen Kometen und Meteorströmen.

IV. *R. Lehmann-Filhés,* Die Bestimmung von Meteorbahnen nebst verwandten Aufgaben, Berlin 1883.

V. *G. v. Nießl,* Die Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem, in Encykl. VI 2, 10 (1907), p. 427—462.

VI. *N. Herz,* Kometen und Meteore, im Handwörterbuch der Astronomie, herausgegeben von *W. Valentiner,* II. Bd., p. 49—228, Breslau 1898.

VII. *R. Wolf,* Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur, 2. Bd., p. 484—531, Zürich 1892.

1. Geschichtliche Einleitung. Die Entdeckung einer Beziehung zwischen Kometen und Sternschnuppen verdankt man *J. V. Schiaparelli,* der die Ergebnisse seiner Untersuchungen zu diesem Gegenstand zuerst 1866 in seinen Briefen an *P. Secchi*[1]), dann 1867 in einer zusammenfassenden Arbeit[2]) und schließlich 1871 in der von *G. v. Boguslawski* herausgegebenen deutschen Bearbeitung [I] veröffentlicht hat. Vorher hatten *Chladni* (1819) und *v. Reichenbach* (1859) versucht, die *Meteoriten* mit den Kometen in Verbindung zu bringen, welche Auffassung sich indessen durch die späteren Untersuchungen als verfehlt erwiesen hat. Näher kam *Kirkwood*[3]) der Wahrheit, indem er, von der Tatsache der Teilung des *Biela*schen Kometen ausgehend, schon 1861 die Ansicht aussprach, daß die periodischen Meteore die Überreste alter, zerstörter Kometen seien. Seine Erwägungen trugen indessen durchaus hypothetischen Charakter und drangen überdies, da sie anfangs an schwer zugänglicher Stelle veröffentlicht waren, zur Kenntnis weiterer Kreise erst, als schon einige Arbeiten *Schiaparellis* zu diesem Gegenstand vorlagen. Wertvolle Vorarbeit war von *E. Heis, R. P. Greg, A. S. Herschel, J. Schmidt* und anderen durch ihre Beobachtungen und Bestimmungen der Strahlungspunkte periodischer Meteorströme, von *A. Erman* und *H. A. Newton* durch ihre Unter-

1) *J. V. Schiaparelli,* Intorno al corso ed all'origine delle stelle meteoriche, in Form von 5 Briefen an *P. Secchi* veröffentlicht im Bulletino meteorologico dell' Osservatorio del Collegio Romano, 1866 u. 1867.

2) *J. V. Schiaparelli,* Note e Riflessioni sulla teoria astronomica delle stelle cadenti, Mem. soc. ital. Firenze III, Vol. 1 (1867).

3) *D. Kirkwood,* Meteoric Astronomy, a Treatise on shooting stars, fireballs and aerolithes, Philadelphia 1867.

suchungen über die wahrscheinliche Gestalt und Lage der Bahnen der großen Meteorströme geleistet worden. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeiten bestanden in der Erkenntnis, daß die Sternschnuppen interplanetare Ströme bilden und daß die Bahnen dieser Ströme anscheinend alle Neigungen von 0^0 bis 180^0 besitzen können, daß also auch rückläufige Bewegung vorkommt. Über die Exzentrizitäten bestand dagegen noch große Ungewißheit, und *Newton* neigte anfangs zu der Annahme nahezu kreisförmiger Bahnen. Doch hatte schon 30 Jahre früher *H. L. v. Boguslawski* versucht, den Perseidenbeobachtungen von 1837 durch die Einführung parabolischer Bahnen zu genügen. *Schiaparelli* gebührt das Verdienst, den Zusammenhang zwischen Kometen und Sternschnuppen zuerst in einigen Fällen durch Vergleichung der Bahnen als in hohem Grade wahrscheinlich hingestellt zu haben, und sein Werk ist in vieler Beziehung heute noch nicht veraltet. Es wird, mit der auf Grund einiger neuerer Ergebnisse gebotenen Einschränkung, auch fernerhin als eine wichtige Grundlage weiterer Untersuchungen auf diesem Gebiete zu gelten haben.

2. Die Arbeiten von Schiaparelli, Weiß und Nachfolgern. Ein Ergebnis, das für die Entdeckung des Zusammenhangs zwischen Kometen und Sternschnuppen von größter Bedeutung war, haben *H. A. Newton*[4]) und *Schiaparelli*[5]) nahezu gleichzeitig erlangt: der von der Bewegung und Umdrehung der Erde veranlaßte tägliche Gang der Sternschnuppenhäufigkeit erlaubt einen Schluß auf die mittlere heliozentrische Geschwindigkeit der Meteore, und es ergab sich, daß die Geschwindigkeit wesentlich größer sein müsse als die der Erde. *Schiaparelli* glaubte schließen zu können, daß sie in Einheiten der Erdgeschwindigkeit etwa den Wert 1,45 hätte, mithin von dem der parabolischen Bewegung entsprechenden Wert nicht wesentlich verschieden sei. Nachdem somit für die Bahnen der Sternschnuppenströme sowohl hinsichtlich der Lage gegen die Ekliptik als auch ihrer Exzentrizität eine weitgehende Ähnlichkeit mit den Kometenbahnen festgestellt war, tat *Schiaparelli* den entscheidenden Schritt, indem er die Nachforschungen auch auf Einzelfälle ausdehnte. Er berechnete eine parabolische Bahn für den Perseidenstrom und fand alsbald ihre große Ähnlichkeit mit der Bahn des Kometen 1862 III.[6]) Die gleichzeitig mitgeteilte Bahnberechnung für den Leonidenstrom ließ einen zugehörigen Kometen nicht finden, weil *Schiaparellis* Verzeichnis nur

4) *H. A. Newton*, On shooting stars, Amer. J. of Sc. 39 (1865), p. 193 = Vjs. Astr. Ges. 3 (1868), p. 137.

5) Zweiter Brief an *P. Secchi*, 1866.

6) Vierter Brief an *P. Secchi*, vgl. auch Astr. Nachr. 68 (1867), p. 331.

bis zum Ende des Jahres 1865 reichte. Auch waren die Elemente der Leoniden ungenau wegen Fehlerhaftigkeit des zugrunde gelegten Radianten. Bessere Elemente hatte inzwischen *Leverrier*[7]) berechnet, und fast gleichzeitig fanden *C. F. W. Peters*[8]), *Schiaparelli*[9]) und *Th. v. Oppolzer*[10]) die große Ähnlichkeit dieser Elemente mit denen des *Tempel*schen Kometen 1866 I. Dieser letztere Fall erhielt besonderes Gewicht dadurch, daß durch die überaus reichen Sternschnuppenfälle der Jahre 1799, 1833 und 1866 die Umlaufszeit der Leoniden zu etwa $33^1/_4$ Jahren bestimmt, die Untersuchung der Bahnform demnach aller hypothetischen Voraussetzungen entkleidet werden konnte. Schon einige Jahre früher hatte *H. A. Newton*[11]), noch in Unkenntnis der wahren Bahnform, die Zahl der möglichen Umlaufszeiten auf 5 beschränkt, und *Adams*[12]) schloß, einem Vorschlag von *Newton* folgend, aus der Bewegung der Knoten, daß nur die Umlaufszeit von $33^1/_4$ Jahren zulässig sei. Für den Kometen 1866 I hatte *Oppolzer* in naher Übereinstimmung die Umlaufszeit 33,1758 Jahre gefunden.

Nachdem nunmehr zwei Beispiele für die nahe Verwandtschaft der Kometen und der Sternschnuppenströme entdeckt waren, lag es sehr nahe, nach weiteren Fällen zu suchen. *Weiß*[13]) berechnete für eine größere Anzahl von Kometen die Radienvektoren in den Knoten ihrer Bahn, suchte danach jene auf, die der Erdbahn nahegekommen waren und bemerkte, daß die Annäherung der Erde an die Bahnen solcher Kometen mehrfach gerade an Tagen stattfindet, die durch größere Sternschnuppenfälle ausgezeichnet sind. So ergab sich für den 20. April Annäherung an die Bahn des Kometen 1861 I, für den 28. November an die des Kometen Biela, für den 9. Dezember an die des Kometen 1819 IV. Letzterer Fall wird aber als unsicher bezeichnet. Eine Vergleichung der Bahnelemente oder der berechneten und beobachteten Radianten führt *Weiß* noch nicht aus. *D'Arrest*[14]) glaubte einige vereinzelte größere Sternschnuppenfälle (1741, 5. Dez., 1798, 6. Dez, 1830, 7. Dez., 1838, 6. u. 7. Dez.), wofür *Flaugergues* 1838 den Radianten $\alpha = 30^0$ $\delta = +43^0$ gibt, mit dem Kometen

7) Paris C. R. 64 (1867), p. 94.
8) Astr. Nachr. 68 (1867), p. 287.
9) Ebenda, p. 331.
10) Ebenda, p. 333.
11) *H. A. Newton,* On November starshowers, Amer. J. of Sc. 38 (1864), p. 53.
12) Paris C. R. 64 (1867), p. 651.
13) Astr. Nachr. 68 (1867), p. 381.
14) Astr. Nachr. 69 (1867), p. 7.

Biela in Verbindung bringen zu dürfen. *J. G. Galle*[15]) verglich im März 1867 den Radianten der April-Lyriden mit dem aus der Bahn des Kometen 1861 I gefolgerten Ort und fand einen Unterschied von etwa 7°, hielt aber trotzdem den Zusammenhang für möglich.

Der Urheber der ersten systematischen Untersuchung auf diesem Gebiete ist *Weiß* [II]. Er berechnete die scheinbaren Radianten und zugehörigen Daten für 28 der Erde nahekommende Kometenbahnen, mit Ausschluß der beiden schon bekannten Sternschnuppenkometen, und verglich sie mit den Radiantenverzeichnissen von *Heis, Greg* und *A. Herschel*. Es ergaben sich zwei Fälle ungefährer Übereinstimmung, nämlich die Lyriden vom 20. April (278°7 + 35°0) und Komet 1861 I (270°4 + 33°5), also wie bei *Galle* mit 7° Unterschied, und die November-Andromediden mit dem Kometen *Biela*. Die Erklärung der im ersten Fall gefundenen Abweichung aus Beobachtungsfehlern hält *Weiß* für unwahrscheinlich. Sie kann nach ihm zwei Gründe haben: es kann die Auflösung des Kometen schon vor langer Zeit begonnen, dieser aber erst neuerlich eine Störung erlitten haben, „es kann indessen auch in der Nähe der Durchkreuzungsstelle von Erd- und Kometenbahn ein größerer Komet in mehrere kleine zerfallen sein, von denen wir jedoch erst den einen kennen". Spätere, von verschiedenen Beobachtern herrührende Bestimmungen des Radianten ergaben bessere Annäherung, so daß der Zusammenhang zwischen Sternschnuppenstrom und Komet auch in diesem Fall recht wahrscheinlich geworden ist. — Im übrigen war das Ergebnis der Vergleichung negativ. Es werden zwar noch sechs unsichere Fälle angeführt, doch kommen dabei Abweichungen von mehr als 20° vor. *Weiß* dehnte die Betrachtung dann noch auf die großen Kometen Halley, 1843 I, 1858 IV und 1861 II aus, deren Schweife die Erdbahn erreicht haben konnten, fand jedoch auch hier keine zugehörigen Sternschnuppenradianten in den vorhandenen Verzeichnissen.

Der schon früher vermutete Zusammenhang der Andromediden mit dem Kometen Biela erhielt seine Bestätigung durch die glänzenden Erscheinungen dieses Stromes von 1872 und 1885. Ob das bald nach dem großen Sternschnuppenfall von 1872 auf Veranlassung von *Klinkerfuess*[16]) durch *Pogson* in Madras bei ϑ Centauri aufgefundene neblige Objekt wirklich ein Teil des verschwundenen Kometen Biela gewesen ist, konnte damals nicht entschieden werden. Nach der Untersuchung von *Th. v. Oppolzer*[17]) ist dies nicht unwahrscheinlich. Nach

15) Astr. Nachr. 69 (1867), p. 33 u. 189.
16) Astr. Nachr. 80 (1872), p. 335 u. 349.
17) Astr. Nachr. 80 (1872), p. 381.

den Angaben von *A. S. Herschel*[18]) ist der Andromedidenstrom erstmalig 1798, 7. Dez., von *Brandes* beobachtet worden. Der absteigende Knoten der Kometenbahn hat eine starke rückläufige Bewegung, so daß die Erscheinungen späterhin an früheren Tagen stattfanden. Der Geschichte dieses Stromes ist ferner hinzuzufügen, daß er noch 1892, 23. Nov., und 1904, 21. Nov.[19]), auffällige Erscheinungen gezeitigt hat, im Jahre 1905 nach *A. S. Herschel*[20]) jedoch infolge der Jupiterstörungen ausgeblieben ist. Seitdem ist der Strom unbedeutend gewesen.

Die Meteore des *Halley*schen Kometen wurden zuerst 1870 durch *Tupmann* beobachtet. Ihre Wahrnehmung ist dadurch erschwert, daß der bei η Aquarii gelegene, Anfang Mai tätige Radiant sich erst kurz vor Anbruch der Morgendämmerung über den Horizont erhebt. Auf die Verwandtschaft dieser Meteore mit dem Kometen Halley hat 1874 *A. S. Herschel*[21]) aufmerksam gemacht. Der Strom ist dann verschiedentlich untersucht worden, besonders von *Denning*[22]), der gute Übereinstimmung des beobachteten und des berechneten Strahlungspunktes fand, in neuerer Zeit mit gleichem Ergebnis von *Hoffmeister*[23]) und *Olivier*[24]). Nach lebhafter Tätigkeit in den Jahren 1870 und 1871 entströmten dem Radianten, soweit überhaupt die Beobachtungen es erkennen lassen, nur wenige Meteore, und der Zusammenhang mit dem Kometen konnte eigentlich erst dann als nachgewiesen gelten, als die beiden letztgenannten Beobachter im Jahre 1911, nach dem Knotendurchgang des Kometen, eine starke Zunahme der Meteorzahl festgestellt hatten. Endlich bringt *H. Svoboda*[25]) auch die Oktober-Orioniden mit dem *Halley*schen Kometen in Verbindung und vermutet die Identität dieses Stromes mit den im Mai im absteigenden Knoten beobachteten Aquariden. Die zum Beweis notwendige Untersuchung auf Grund sorgfältig bestimmter Radiantenörter steht indessen hier noch aus. Auf die Ähnlichkeit der Bahnelemente beider Ströme hat schon 1911 *Olivier*[24]) hingewiesen.

Ferner ist dem periodischen Kometen Pons-Winnecke ein Meteorstrom zugeordnet. Die Periheldistanz dieses Kometen ist infolge der Jupiterstörungen in Zunahme begriffen und betrug 1869 0,7815, 1875

18) London Astr. Soc. M. N. 32 (1872), p. 355.
19) *W. F. Denning,* London Astr. Soc. M. N. 65 (1905), p. 851.
20) Observ. 29 (1906), p. 93 u. 126.
21) London Astr. Soc. M. N. 38 (1878), p. 379.
22) London Astr. Soc. M. N. 43 (1883), p. 111; 46 (1886), p. 396.
23) Astr. Nachr. 196 (1913), p. 309.
24) Amer. Phil. Soc. Trans. 22 (1911), p. 5.
25) Astr. Nachr. 197 (1913), p. 203.

0,8275, 1898 0,9241, 1915 0,9725. Erst durch diese Zunahme wurde der Meteorstrom in die Nähe der Erdbahn geführt. Am 28. Juni 1916 zeigte er nach *Denning*[26]) eine lebhafte Tätigkeit. Nach amerikanischen Beobachtungen war indessen die Meteorzahl 6 Stunden später wieder gering. *Olivier*[27]) untersuchte das Meteorsystem dieses Kometen und bringt auch einige 1916, 21. Mai bis 7. Juni beobachtete Radianten mit ihm in Verbindung. Die Zusammengehörigkeit ist von *Denning* und *Olivier* unabhängig gefunden worden. Nach *Hoffmeister*[28]) war im Jahre 1921, bei der nächsten Wiederkehr des Kometen, die Tätigkeit gering, doch stimmte der aus den Beobachtungen gefundene Strahlungspunkt gut mit dem aus den Bahnelementen des Kometen berechneten überein.

Das von *Weiß* aufgestellte Verzeichnis erdnaher Kometenbahnen und ihrer Radianten erfuhr verschiedentliche Ergänzungen. *R. v. Köveslighety*[29]) fügte 28 Fälle hinzu und fand bei der Vergleichung der von ihm berechneten Bahnen von Meteorströmen mit bekannten Kometenbahnen zwei Fälle naher Übereinstimmung. Ein von *A. S. Herschel*[30]) 1878 gegebenes Verzeichnis solcher Kometenbahnen, deren Radianten sich mit einiger Wahrscheinlichkeit aus den Beobachtungen nachweisen lassen, enthält bereits 71 Fälle. Eine auf der Vergleichung der Bahnelemente beruhende weitere Liste von 27 Fällen hat 1913 *S. Natanson*[31]) veröffentlicht. Außerdem finden sich in der Literatur viele Hinweise auf einzelne Beispiele, indessen scheint der Zusammenhang mit Meteorströmen, abgesehen von den oben erwähnten sechs Fällen, für keinen Kometen wirklich überzeugend nachgewiesen zu sein.[32])

3. Nähere Untersuchungen über die Art des Zusammenhangs. Nachdem *Schiaparelli* aus seiner Betrachtung der täglichen Variation den Schluß gezogen hatte, daß die Parabel und die parabelnahe Ellipse die typischen Bahnformen der Meteorströme seien, glaubte er die Bildung dieser Ströme darauf zurückführen zu können, daß eine lockere, kugelförmige Anhäufung kleiner Körper unter dem Einfluß der Sonnen-

26) London Astr. Soc. M. N. 76 (1916), p. 740.

27) London Astr. Soc. M. N. 77 (1917), p. 71 und Leander Mc. Cormick Obs. Publ. 2 (1921), p. 201.

28) Astr. Nachr. 213 (1921), p. 341; 215 (1922), p. 455.

29) London Astr. Soc. M. N. 42 (1882), p. 310.

30) London Astr. Soc. M. N. 38 (1878), p. 369.

31) Astr. Nachr. 197 (1913). p. 206.

32) Ein Verzeichnis von 105 Kometen, deren Bahnen der Erdbahn nahekommen, nebst den zugehörigen Radianten findet man auch in *Valentiners* Handwörterbuch, II. Bd., p. 213 ff.

anziehung zu einem langgestreckten Strom von geringer Breite umgebildet wird, der, sofern er eine Kreuzungsstelle mit der Erdbahn besitzt, die Veranlassung alljährlich zu bestimmter Zeit auftretender Erscheinungen von Sternschnuppen gibt. Ein solcher, aus einer einzigen kosmischen Wolke hervorgehender Strom könnte, wie *Schiaparelli* zeigte, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen durch viele Jahre, vielleicht Jahrhunderte wahrgenommen werden. Die Kometen würden wahrscheinlich als dichtere Massenanhäufungen innerhalb der Ströme zu betrachten sein, mithin gleichen Ursprung mit den Sternschnuppen haben, nicht aber würden letztere eigentlich aus ihnen hervorgehen. *Weiß* wendet dagegen ein, daß man, um den Beobachtungen zu genügen, den ursprünglichen kosmischen Wolken eine so geringe Dichte geben müßte, daß wahrscheinlich die Anziehungen der Fixsterne hinreichen würden, um sie zu zerstören, ferner, daß sich die Leoniden und der Komet 1866 I beide in einer elliptischen Bahn bewegen. Da aber nach *Leverrier* der Komet diese Bahn erst bei seiner Begegnung mit Uranus im Jahre 126 erhalten haben soll, so folgt daraus, daß der Meteorstrom erst nach dieser Zeit entstanden sein kann. Viel wahrscheinlicher als *Schiaparellis* Ansicht sei es daher, daß der Komet das anfänglich vorhandene Gebilde war und der Meteorstrom aus seiner allmählichen teilweisen Auflösung hervorgegangen ist. — In seinen späteren Arbeiten, insbesondere der zusammenfassenden deutschen Ausgabe, bekennt sich *Schiaparelli* völlig zu dieser Ansicht, die er auch wohl selbständig auf Grund der inzwischen hinzugekommenen Erfahrungen gewonnen hat. Den Einfluß der Sonnenanziehung auf ein System von Massenpunkten, der im wesentlichen darin besteht, einzelne Teile des Systems loszutrennen und den Zusammenhalt zu lockern, bezeichnet er als die auflösende Kraft und berechnet ihre Wirkung und die Stabilitätsgrenzen für ein angenommenes System kleiner Körper. Wenn auch diese Betrachtungen wegen der dabei kaum vermeidlichen Willkürlichkeit der Grundlagen keine große praktische Bedeutung besitzen, so zeigen sie doch, daß die Vorbedingungen der allmählichen Auflösung bei den meisten Kometen sehr wahrscheinlich erfüllt sind. *Schiaparelli* ist auch geneigt, den großen Planeten dabei eine wesentliche Rolle zuzuschreiben. Seine Betrachtungen darüber, daß die Sternschnuppen weder aus den Schweifen der Kometen, noch aus den zur Sonne gerichteten Ausströmungen hervorgehen, sondern einzig durch Auflösung der Kerne frei werden könnten, sind zwar in ihrer Form nicht aufrechtzuhalten, decken sich aber mit den gegenwärtigen Anschauungen darin, daß die Schweife wahrscheinlich für die Entstehung der Meteorströme ganz ohne Bedeutung sind.

Späterhin hat sich *Bredichin* [III] eingehend mit der Aufklärung der physikalischen Beziehungen zwischen Kometen und Sternschnuppen befaßt. Er vertritt durchaus die Ansicht, daß die Kometen das ursprünglich Vorhandene sind und daß die Sternschnuppenströme durch den Zerfall der Kometen zustandekommen. Das wesentliche Neue seiner Auffassung besteht jedoch darin, daß er für die Auflösung der Kometen nicht allein die Gravitation, sondern vor allem die inneren Kräfte verantwortlich macht. Darüber, daß solche Kräfte wirksam sind, lassen die unmittelbaren Beobachtungen keinen Zweifel, und an sich bedarf es bei den geringen Massen der Kometen keiner großen Kraft, um Teile des Kerns loszureißen und zu entfernen. *Bredichin* führt die Entstehung der Sternschnuppenströme auf die „anomalen Schweife" zurück, worunter die dem Schweif entgegengesetzten Ausströmungen zu verstehen sind, indem er dem Gedanken Raum gibt, daß jene Ausströmungen vorwiegend die schwereren Massenteile enthalten, die dem Strahlungsdruck nicht unterliegen. Er nimmt an, daß die Ausströmungen eine normale Erscheinung sind, und daß sie nur in der Regel zu geringe Lichtstärke besitzen, um wahrgenommen zu werden. Seine Untersuchungen erstrecken sich dann vor allem auf die Bahnformen der Körper, die durch Initialstöße vom Kern des Kometen getrennt wurden. Für die Richtung der Stöße werden Abweichungen vom Radiusvektor bis zu 45° in Betracht gezogen; die in Übereinstimmung mit der *Bredichin*schen Theorie der Kometenschweife angenommenen Anfangsgeschwindigkeiten sind relativ klein zur Bahngeschwindigkeit. Es ist leicht einzusehen, daß Körper, die auf diese und ähnliche Weise vom Kern eines parabolischen Kometen getrennt werden, sich darauf im allgemeinen in Ellipsen oder Hyperbeln bewegen müssen. Die Angehörigen der letzteren Gruppe kommen nicht weiter in Betracht, da sie das Sonnensystem alsbald verlassen und da die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens mit der Erde sehr gering ist. Übrigens könnten bei den angenommenen kleinen Anfangsgeschwindigkeiten nur relativ schwach hyperbolische Bahnen erzeugt werden. Es ist also nicht möglich, auf diese Weise etwa zu einer neuen Erklärung der stark hyperbolischen Bahnen zu gelangen, wie sie seit geraumer Zeit für die großen Meteore bekannt sind. Den entstehenden elliptischen Bahnen entsprechen sehr verschiedene Umlaufszeiten, je nach der Richtung und Stärke des Anstoßes, und da man sich die Ausströmungen als kegelförmig wird vorstellen müssen, so würde jedem Punkt in der Bahn des Kerns, an dem überhaupt eine derartige Ausströmung stattfindet, eine Schar elliptischer Bahnen zugeordnet sein, die die ursprüngliche parabolische Bahn an der Aus-

gangsstelle durchschneiden, ihr aber in der Umgebung des Perihels ziemlich ähnlich sind.

Diese Hypothese ist in der Tat geeignet, verschiedenen beobachteten Erscheinungen sehr viel besser zu genügen, als die Ansichten von *Schiaparelli* und *Weiß* es vermochten. Hierher gehört die bei allen großen Strömen gemachte Erfahrung, daß die Radianten nicht punktförmig sind, sondern daß die Ausstrahlung der Meteore von einer Fläche des Himmels erfolgt, die meist einen Durchmesser von einigen Graden besitzt. Beim Perseidenstrom treten noch besonders die den Hauptstrahlungspunkt umgebenden Nebenradianten in Erscheinung. Es ist auch nicht angängig, diese Zerstreuung allein aus der Ungenauigkeit der Beobachtungen erklären zu wollen, denn die in geringer Entfernung vom Radianten auftretenden kurzen und langsamen Meteore, deren Lage oft recht sicher beobachtet werden kann, zeigen ebenfalls deutlich, daß der Radiant kein Punkt ist. Einem Strom paralleler Bahnen würde ein punktförmiger Radiant entsprechen, und auch die Entstehung der Nebenradianten würde schwer zu erklären sein. Die *Bredichin*sche Ansicht verlangt dagegen geradezu eine Gestaltung, die der beobachteten durchaus entspricht. Ferner findet die große Breite der Meteorströme ihre Erklärung, und endlich könnte auf diese Weise ersichtlich gemacht werden, warum für manchen Meteorstrom kein zugehöriger Komet aufgefunden werden konnte und warum die Zahl der Meteorströme so außerordentlich viel größer ist als die Zahl der periodischen Kometen: dadurch nämlich, daß nach *Bredichins* Auffassung auch Kometen, die sich in parabolischen Bahnen bewegen, durch ihren Zerfall elliptische, jährlich wiederkehrende Meteorströme zu erzeugen imstande sind.

Einige Bedenken gegen die uneingeschränkte Annahme der Ansichten *Bredichins* ergeben sich aus dem Studium des inneren Aufbaus der Meteorströme. Zwar entfernen sich, in Übereinstimmung mit den Forderungen der Hypothese, einzelne Meteore sehr weit von der Bahn des erzeugenden Kometen, so daß sehr breite Ströme entstehen; die Beobachtungen zeigen aber, daß die Zunahme der Dichte nach innen hin nur mäßig stark ist und daß der Häufigkeitskurve das eigentliche Maximum als eine jäh ansteigende Erhebung von ganz geringer Breite aufgesetzt ist. Vom Perseidenstrom wird diese Erscheinung jedem Beobachter bekannt sein und kommt auch in den von *Denning* gegebenen Häufigkeitszahlen zum Ausdruck. Bei den Leoniden und den Andromediden ist sie seinerzeit sehr hervorgetreten, und auch der Lyridenstrom scheint sie aufzuweisen. So berichtet

Denning[33]) über schwaches Auftreten der Lyriden im April 1914, wogegen Verf. am 21. April jenes Jahres zwar ebenfalls zunächst wenige Meteore, dann aber in den Morgenstunden ein ausgeprägtes Maximum beobachtete. Eine ähnliche Erfahrung bezüglich der Meteore des Kometen Pons-Winnecke von 1916 wurde oben mitgeteilt. Auch die ungleichmäßige Verteilung der Meteore mancher Ströme über die Bahnen der erzeugenden Kometen läßt sich nicht ohne weiteres mit *Bredichins* Ansichten vereinbaren. *Abelmann*[34]) kommt hinsichtlich der Leoniden zu dem Ergebnis, daß sich hinter dem Kometen ein dichter Meteorschwarm in einem Bogen von etwa 5 astr. Einh. an Länge erstreckt. Vor dem Kometen scheint ein ähnlicher Bogen zu fehlen, denn im Jahre 1865 befand sich die Erde beim Knotendurchgang in einer verhältnismäßig kleinen Entfernung vom Kometen, und trotzdem ließen sich Meteore nur in geringer Menge beobachten. Im Jahre 1866 trat das Maximum ein, und da der Fall von 1867 schon wieder schwach war, so scheint der dichte Schwarm sich über weniger als 7 Einheiten, also nicht den 7. Teil der ganzen Bahn zu erstrecken. An gleicher Stelle kommt *Abelmann* auf Grund seiner Störungsrechnungen zu dem Schluß, daß die Bahn des dichten Meteorschwarms wahrscheinlich sehr nahe mit der des Kometen übereinstimmt. In diesem Zusammenhang ist auch die Untersuchung von *Holetschek*[35]) „Über die Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen (1861 I, 1862 III, 1866 I und Biela)“ zu erwähnen. Er findet, daß bei den helleren Kometen die Meteorschwärme (Perseiden und Lyriden) sich bereits über die ganze Bahn verteilt haben, wogegen die Leoniden und Andromediden, denen die schwächeren Kometen zugehören, in ihrer Mehrzahl noch in der Nachbarschaft der Kometen zusammengedrängt, in anderen Teilen der Bahn aber nur spärlich anzutreffen sind.

Es hat den Anschein, als ob beide Ursachen der Entstehung eines Meteorstroms, die Auflösung durch die Gravitation und diejenige im Sinne *Bredichins* unter Mitwirkung der inneren Kräfte des Kometen, nebeneinander wirksam sind, indem die erstere den Kern des Meteorstroms und die dichten Schwärme erzeugt, die zweite die Meteore in die weitere Umgebung und in entfernte Teile der Kometenbahn zerstreut. Indessen ist es gegenwärtig noch nicht möglich, zu einem abschließenden Urteil in dieser Richtung zu gelangen, weil dazu unsere Kenntnisse sowohl der Meteorströme als besonders der Vor-

33) Astr. Nachr. 199 (1914), p. 231.
34) Astr. Nachr. 147 (1896), p. 203.
35) Wien. Ber. 117 (1908), p. 1015.

gänge im Inneren der Kometen noch einer sehr erheblichen Erweiterung bedürfen.

4. Kritik der Lehre vom allgemeinen kometarischen Ursprung der Sternschnuppen. Es lag sehr nahe, den an einigen Beispielen festgestellten Beziehungen zwischen Sternschnuppen und Kometen eine allgemeine Bedeutung zuzuschreiben, und in der Tat ist dies im weitesten Maße geschehen, indem man damit die Frage nach der kosmischen Stellung der Sternschnuppen als befriedigend beantwortet ansah. Es gibt aber doch einen Punkt, der dabei nicht übersehen werden durfte, der aber nur ganz vereinzelt die ihm gebührende Würdigung erfahren hat: für die großen Meteore hatte man fast immer so stark hyperbolische Bahnen gefunden, daß eine Beziehung zu den Kometen und überhaupt ein Zusammenhang mit dem Sonnensystem keinesfalls angenommen werden konnte; zugleich aber fanden sich Andeutungen einer engeren Verwandtschaft dieser Erscheinungen mit manchen Sternschnuppenströmen. So hat z. B. *v. Nießl*[36]) sehr entschieden die Ansicht vertreten, daß ein Teil der Sternschnuppen interstellaren Ursprungs sei, ohne freilich einen Beweis dafür erbringen zu können.

Bei einer kritischen Betrachtung der zu dieser Frage vorliegenden Literatur muß man zugestehen, daß nur in vier Fällen der Zusammenhang zwischen Kometen und Sternschnuppenströmen wirklich als erwiesen gelten kann. Es sind dies folgende: die Leoniden und Komet 1866 I, die Andromediden und Komet Biela, die Mai-Aquariden und Komet Halley, die Juni-Drakoniden von 1916 bis 1921 und Komet Pons-Winnecke. Bezüglich der ersten beiden stützt sich der Beweis auf die Bestimmung der Umlaufszeit einer besonders dichten Meteorwolke, bei den Aquariden auf die ungleichmäßige Verteilung der Meteore vor und hinter dem Kometen, bei den Drakoniden auf den Umstand, daß dieser Strom erst dann lebhaft in Erscheinung trat, als durch die Störungen die Kometenbahn der Erdbahn genähert worden war. Sehr wahrscheinlich ist ferner der Zusammenhang zwischen den Perseiden und Komet 1862 III sowie den Lyriden und Komet 1861 I, obgleich für diese Ströme weder die Umlaufszeit sicher ermittelt, noch irgendwelche zum Ort des Kometen in Beziehung stehende Unregelmäßigkeiten der Verteilung nachgewiesen werden konnten. Die beiden Ströme zeigen indessen das spitze, kurzdauernde Maximum als das wahrscheinliche Kennzeichen kometarischer Abkunft. In allen sechs Fällen gab selbstverständlich die nahe Übereinstimmung der Bahnen

36) Encykl. VI 2, 10 (*G. v. Nießl*), Nr. 5.

der Ströme mit denen der Kometen den ersten Grund zur Annahme eines inneren Zusammenhangs.

Über diese Beispiele hinaus ist jedoch fast nichts Sicheres bekannt, und gerade jene Untersuchungen, die zu dem Zweck unternommen worden sind, den Zusammenhang in einer größeren Anzahl von Fällen aufzudecken, hatten fast durchweg negativen Erfolg. Es erscheint also durchaus begründet, wenn *Monck*[37]) bemerkt, daß mit Ausnahme von vier Fällen — gemeint sind die Leoniden, Andromediden, Perseiden und Lyriden — die Zusammengehörigkeit in keinem Fall genügend gesichert sei, und dann den Schluß zieht[38]): „A much more extensive correspondence must be shown to exist between comets and meteors before we can accept the cometary theory as satisfactory". Es ist zwar ein großer Vorzug der Theorie *Bredichins*, auch für diese Erfahrung einen Grund angeben zu können, und überdies führt *Bredichin* 39 Fälle recht guter Übereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Radianten an. Es gibt aber auch eine andere Auffassung der Sachlage. Schon zu der Zeit, als *Bredichins* Arbeiten entstanden, war nämlich die Zahl der aus den Beobachtungen mit mehr oder weniger Zuverlässigkeit ermittelten Strahlungspunkte so groß, daß eine rein zufällige Übereinstimmung eines solchen Punktes mit einem berechneten kometarischen Radianten sehr leicht möglich war. Solange nicht andere Beweisstücke zu Gebote standen als die Ähnlichkeit der Bahnen, hätte man daher die betreffenden Fälle keineswegs im positiven Sinne zählen dürfen.

Eine Arbeit des Verfassers[39]) wurde in neuester Zeit ausgeführt mit dem ausgesprochenen Zweck, eine Aufklärung der zwischen Kometen, Sternschnuppen und Feuerkugeln vorhandenen Beziehungen herbeizuführen. Besteht die kometarische Theorie der Sternschnuppen zu Recht, so konnte die mittlere heliozentrische Geschwindigkeit dieser Körper von der parabolischen nicht sehr verschieden sein. Bei interstellarer Herkunft eines größeren Teils der Meteore mußte sie dagegen merklich über der parabolischen liegen. Die Entscheidung würde also durch eine zuverlässige Bestimmung der Geschwindigkeit wahrscheinlich herbeizuführen sein. Die Lösung der Aufgabe erfolgte unter Benutzung der täglichen Variation auf dem gleichen Wege, auf dem *H. A. Newton* und *Schiaparelli* zu ihren ersten Schätzungen der Geschwindigkeit gelangt sind, doch mit verbesserten theoretischen Grund-

37) Observ. 9 (1886), p. 331.

38) Liverpool Astr. Soc. 5 (1886), p. 141.

39) *C. Hoffmeister*, Untersuchungen zur astronomischen Theorie der Sternschnuppen, Astr. Nachr. Erg.-Hefte 4 (1922), Nr. 5.

lagen und unter Verwendung einer langen, gleichmäßigen Beobachtungsreihe. Die großen kometarischen Ströme wurden dabei jedoch nicht berücksichtigt. Es ergab sich für die mittlere heliozentrische Geschwindigkeit ein Wert, der weit über dem parabolischen liegt und nahezu jenem entspricht, der aus direkten Beobachtungen für die großen Meteore abgeleitet worden ist. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß das Gesamtphänomen der Sternschnuppen sich in einen kometarischen und einen interstellaren Teil spaltet. Zu ersterem gehören vor allem die großen Ströme; außerhalb der Tätigkeitsperioden dieser Ströme jedoch scheinen die kometarischen Sternschnuppen nur eine ganz untergeordnete Rolle zu spielen.

Damit dürften die bisher noch bestehenden Unklarheiten grundsätzlich beseitigt sein. Aufgabe der weiteren Forschung ist es, unsere Kenntnis der kometarischen Ströme zu vervollständigen und die noch unbekannten Ströme dieser Art aufzusuchen. Die Geschichte der Meteorforschung in der Zeit von 1860 bis 1920 kennt übrigens auch schon einige Beispiele dafür, daß die kometarischen Ströme für die irdischen Beobachter recht unbeständige Gebilde sind. Wenigstens scheint dies von jenen zu gelten, bei denen die meteorischen Massen nicht gleichmäßig über die ganze Bahn verteilt sind. Man wird also mit dem Auftreten neuer und dem Verschwinden vorhandener Ströme immer zu rechnen haben.

5. Regeln für die Untersuchung des Zusammenhangs von Kometen und Sternschnuppen. Bei der Aufsuchung zusammengehöriger Kometen und Sternschnuppenströme sowie der Prüfung vermuteter Beziehungen wird der erste Schritt immer in der Vergleichung der Bahnverhältnisse bestehen müssen. Zunächst ist selbstverständlich zu ermitteln, ob der einer gegebenen Kometenbahn etwa zugeordnete Meteorstrom für irdische Beobachter überhaupt in Erscheinung treten kann, d. h. ob sich die Kometenbahn der Erdbahn an irgendeiner Stelle hinreichend nähert. Es müßte also der Radiusvektor r des Kometen in einem der beiden Knoten nahezu gleich dem Radiusvektor R der Erde sein, für den unter Vernachlässigung der Exzentrizität der Wert 1 gesetzt werden kann. Man hat demnach für elliptische Bahnen das Kriterium zu benutzen:

$$\frac{p}{1 \pm e \cdot \cos \omega} = 1. \tag{1}$$

Es bedeutet p den halben Parameter, der aus $p = a \cdot \cos^2 \varphi$, $\sin \varphi = e$, zu berechnen ist, e die Exzentrizität, ω den Abstand des Perihels vom Knoten und a die große Halbachse der Bahn. Das

Pluszeichen gilt für den aufsteigenden, das Minuszeichen für den niedersteigenden Knoten.

Für parabolische Bahnen lautet das Kriterium:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{q}{\cos^2 \frac{1}{2}\omega} = 1 & (\mathfrak{N}), \\ \dfrac{q}{\sin^2 \frac{1}{2}\omega} = 1 & (\mathfrak{V}), \end{cases}$$

wo q die Periheldistanz ist. Es ist wegen der großen Breite der Meteorströme nicht zu verlangen, daß diese Kriterien streng erfüllt sind. Selbst bei einem Widerspruch von 0,1 astr. Einheiten wird man unter Umständen noch das Auftreten zugehöriger Meteore erwarten können. Ferner sind zwei Ausnahmefälle anzuführen. Der erste umfaßt die Kometenbahnen mit geringer Neigung, bei denen die Möglichkeit der Annäherung an die Erdbahn nicht auf die Gegend der Knoten beschränkt ist. Beispielsweise beträgt beim *Halley*schen Kometen der Widerspruch im absteigenden Knoten 0,15. Der Komet kommt jedoch der Erdbahn noch auf 0,06 Einheiten nahe. Solche Fälle bedürfen also stets einer besonderen Untersuchung. Die zweite Ausnahme bilden die Kometen mit sehr geringer Periheldistanz. Bei ihnen wird eine Begegnung mit der Erdbahn nur möglich sein, wenn ω nahe bei 0^0 bzw. 360^0 oder 180^0 liegt.

Die Prüfung der Zusammengehörigkeit kann auf zwei Wegen geschehen: durch Vergleichung der Elemente oder durch Vergleichung der Radianten. Im ersten Falle wird man zunächst die Bahnelemente des Meteorstromes berechnen, wobei die Bahn meist als Parabel angesehen werden muß und nur in seltenen Fällen die Exzentrizität aus der bekannten Umlaufszeit wird abgeleitet werden können. Man kann auch, lediglich als Hypothese, die große Halbachse einer elliptischen Kometenbahn für den Meteorstrom als gegeben betrachten, doch sind solche Mittel fast immer entbehrlich, weil die innerhalb der Erdbahn liegenden Ellipsenbogen sich meist mit hinreichender Annäherung durch parabolische Bahnen darstellen lassen. Die für die Bahnberechnung zu verwendenden Formeln sind in der Arbeit *v. Nießl*s: „Die Bestimmung der Meteorbahnen im Sonnensystem“ Encykl. VI 2, 10 enthalten. Dabei ist zu beachten, daß die beobachteten Radianten von der Zenitverschiebung befreit werden müssen, was oft versäumt wird. Indessen wird in manchen Fällen, nämlich wenn die Kometenbahn in nicht ganz geringem Abstand an der Erdbahn vorüberläuft, die Vergleichung der Elemente nicht ohne weiteres angängig sein. Man muß vielmehr die Elemente der Kometenbahn so verändern, daß die Bahn durch den Punkt der Erdbahn geht, an dem die Meteore beobachtet

wurden, daß aber die Exzentrizität und die Apsidenlinie erhalten bleiben. Es werden also die heliozentrischen Perihelkoordinaten l und b für den Kometen und einen zugehörigen Meteorstrom übereinstimmen müssen, und man kann schon durch die Vergleichung dieser Koordinaten ein Urteil darüber gewinnen, ob die Meteore sich hinreichend nahe in der Bahn des Kometen bewegen. Man findet l und b aus den Formeln

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos\omega = \cos b\cos(l-\Omega) \\ \sin i\sin\omega = \sin b \\ \cos i\sin\omega = \cos b\sin(l-\Omega). \end{cases}$$

Sodann berechne man die Korrektionen $\Delta\omega$ und Δi aus

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos(\omega+\Delta\omega) = \cos b\cos(l-\Omega-\Delta\Omega) \\ \sin(i+\Delta i)\sin(\omega+\Delta\omega) = \sin b \\ \cos(i+\Delta i)\sin(\omega+\Delta\omega) = \cos b\sin(l-\Omega-\Delta\Omega). \end{cases}$$

Die Knotenverbesserung $\Delta\Omega$ ist als bekannt vorauszusetzen, da der Knoten der Bahn des Meteorstroms durch das Datum der Beobachtung bestimmt und dieser Wert nunmehr auch für die veränderte Kometenbahn in Ansatz zu bringen ist. Die verbesserte Periheldistanz $q+\Delta q$ für parabolische Bahnen findet man aus

$$(5)\qquad q+\Delta q = \begin{cases} R\cos^2\tfrac{1}{2}(\omega+\Delta\omega) & (\Omega) \\ R\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega+\Delta\omega) & (\curlyvee). \end{cases}$$

Für elliptische Bahnen ergibt sich

$$(6)\qquad \begin{cases} p+\Delta p = \begin{cases} R[1+e\cos(\omega+\Delta\omega)] & (\Omega) \\ R[1-e\cos(\omega+\Delta\omega)] & (\curlyvee) \end{cases} \\ \sin\varphi = e \\ a+\Delta a = (p+\Delta p)\sec^2\varphi. \end{cases}$$

Die Elemente $i+\Delta i$, $\omega+\Delta\omega$, $q+\Delta q$ bzw. $a+\Delta a$ und e werden nunmehr mit den Elementen des Meteorstroms verglichen. Bei parabolischen Bahnen ist die Verwendung der von *Lehmann-Filhés* [IV] gegebenen Tafeln zu empfehlen, da sie leicht ein Urteil darüber gewinnen lassen, inwieweit gefundene Unterschiede durch fehlerhafte Bestimmung des Radianten erklärt werden können.

Beziehen sich die Elemente der Meteorbahn, entsprechend dem Ort des Radianten, auf das mittlere Äquinoktium t_1, die der Kometenbahn auf das mittlere Äquinoktium t, so ist bei großem Unterschied die Präzession zu berücksichtigen, indem man an die Knotenlänge des Kometen die Verbesserung $+\,0^\circ 014\cdot(t_1-t)$ anbringt. Die durch

die Präzession veranlaßte Änderung der Neigung kann vernachlässigt werden.

Die umgekehrte Aufgabe, die Bestimmung des Radianten für eine gegebene Kometenbahn und seine Vergleichung mit dem beobachteten Ort, ist zuerst von *Weiß* behandelt worden. Man findet, wenn man wieder den Parameter so verändert, daß die Bahn des Kometen die Erdbahn genau durchschneidet, die folgenden Formeln:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{v}{k}\cos\beta\cos(\lambda-\odot) = \frac{e\sin w}{\sqrt{R(1+e\cos w)}} + \frac{e'\sin(\odot-\pi)}{\sqrt{1-e'^2}} \\ \frac{v}{k}\cos\beta\sin(\lambda-\odot) = \cos i\sqrt{\frac{1+e\cos w}{R}} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{R} \\ \frac{v}{k}\sin\beta = \mp\sin i\sqrt{\frac{1+e\cos w}{R}}. \end{cases}$$

Für parabolische Bahnen ergibt sich:

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{v}{k}\cos\beta\cos(\lambda-\odot) = \sin\frac{w}{2}\sqrt{\frac{2}{R}} + \frac{e'\sin(\odot-\pi)}{\sqrt{1-e'^2}} \\ \frac{v}{k}\cos\beta\sin(\lambda-\odot) = \cos i\cos\frac{w}{2}\sqrt{\frac{2}{R}} - \frac{\sqrt{1-e'^2}}{R} \\ \frac{v}{k}\sin\beta = \mp\sin i\cos\frac{w}{2}\sqrt{\frac{2}{R}}. \end{cases}$$

Betrachtet man die Erdbahn als kreisförmig, was bei allen Untersuchungen gestattet ist, die nicht eine hohe Genauigkeit verlangen, so vereinfachen sich die Formeln wie folgt:

Für elliptische Bahnen

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{v}{k}\cos\beta\cos(\lambda-\odot) = \frac{e\sin w}{\sqrt{1+e\cos w}} \\ \frac{v}{k}\cos\beta\sin(\lambda-\odot) = \cos i\sqrt{1+e\cos w} - 1 \\ \frac{v}{k}\sin\beta = \mp\sin i\sqrt{1+e\cos w}. \end{cases}$$

Für parabolische Bahnen

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{v}{k}\cos\beta\cos(\lambda-\odot) = \sin\frac{w}{2}\sqrt{2} \\ \frac{v}{k}\cos\beta\sin(\lambda-\odot) = \cos i\cos\frac{w}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{v}{k}\sin\beta = \mp\sin i\cos\frac{w}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$$

In den Formeln (7) bis (10) kommen folgende Größen vor: die relative (geozentrische) Geschwindigkeit der Meteore v, die Konstante der Gravitation k, die ekliptikalen Koordinaten des gesuchten Radi-

anten λ und β, die Exzentrizitäten der Kometenbahn e, der Erdbahn e', die wahre Anomalie der Meteore am Begegnungsknoten w, die Länge des Perihels der Erdbahn π, der Radiusvektor der Erde R. Es erhält stets $\cos\frac{w}{2}$ das positive Vorzeichen, $\sin\frac{w}{2}$ das Vorzeichen von $\sin w$. Bei doppelten Vorzeichen gilt das obere, wenn die Begegnung im aufsteigenden, das untere, wenn sie im absteigenden Knoten der Kometenbahn erfolgt.

$$\log k = 8{,}23558 - 10, \quad \pi = 101^\circ 12' 8 + 1'028 \cdot (t - 1900),$$
$$e' = 0{,}01676.$$

Zur Vergleichung mit dem berechneten Radianten ist der beobachtete Ort von der Zenitverschiebung, d. h. dem Einfluß der Erdschwerkraft zu befreien, wozu der schon erwähnte v. *Nießl*sche Abschnitt dieses Werkes die nötige Anleitung gibt. Der Einfluß ist gering und kann meist vernachlässigt werden bei Meteoren mit großer Relativgeschwindigkeit, allgemein auch bei starker Neigung der atmosphärischen Bahnen gegen den Horizont. Er erreicht aber bei Meteoren, die von der Gegend des Antiapex herkommen und sich gegen den Horizont mit geringer Neigung bewegen, recht erhebliche Beträge.

Auf das Ergebnis der Vergleichung der Bahnen und der Radianten darf, wenn es sich darum handelt, Zusammenhänge zwischen Kometen und Sternschnuppen aufzusuchen, kein zu hohes Gewicht gelegt werden. Selbstverständlich ist die Frage im negativen Sinne beantwortet, wenn die Bahnen oder Radianten stark voneinander abweichen. Zur Entscheidung im positiven Sinne jedoch besitzt die Ähnlichkeit der Bahnen nicht die genügende Beweiskraft. Übrigens wird, wenn man die *Bredichin*sche Theorie annimmt, auch bei wirklicher Zusammengehörigkeit die Bahn vieler Meteore der ursprünglichen Kometenbahn oft nicht sehr ähnlich sein. Dies ist aber weniger bedenklich, weil man kaum in die Lage kommen wird, die Vergleichung mit der Bahn einzelner Sternschnuppen auszuführen, sondern meist der Berechnung einen mittleren Radianten zugrundelegen wird. Zur Herbeiführung einer Entscheidung empfiehlt es sich vor allem, zu untersuchen, ob die Verteilung der Meteore in der Bahn irgendeine zum Ort des Kometen in Beziehung stehende Unregelmäßigkeit zeigt, insbesondere ob eine Erhöhung der Meteorzahlen eintritt, nachdem der Komet den Begegnungsknoten passiert hat. Diese Ermittelungen müssen mit großer Vorsicht ausgeführt werden, denn es kann leicht geschehen, daß eine unregelmäßige Verteilung der Meteore durch die Zufälligkeiten der Beobachtungen vorgetäuscht wird.

Zur Unterscheidung der kometarischen von den interstellaren Strömen könnte vielleicht die Eigenschaft dienen, daß das Maximum der ersteren sehr plötzlich eintritt und von kurzer Dauer ist, worauf schon oben hingewiesen wurde. Aber dieses Kennzeichen könnte nur dann auftreten, wenn die Erde den Strom ganz oder nahezu zentral durchkreuzt. Ein weiteres Merkmal der kometarischen Ströme scheint die Ausstrahlung der Meteore von einem größeren Feld und das Vorhandensein der Nebenradianten zu bilden, wogegen bei interstellaren Strömen punktartige Radiation zu erwarten wäre. Erschwerend fällt bei Untersuchungen in dieser Richtung die Ungenauigkeit des bisherigen Beobachtungsverfahrens ins Gewicht, das auch nicht gestattet, die dem Strom fremden, nur zufällig nach dem betreffenden Radianten weisenden Meteore streng auszuschließen. Es zeigt sich also, daß die Lösung der gestellten Aufgabe bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse einigen Schwierigkeiten begegnet, und es muß vorläufig der Geschicklichkeit des Berechners überlassen werden, im einzelnen Falle den geeignetsten Weg aufzufinden. Nicht selten aber wird man auf eine zweifelsfreie Beantwortung der Frage nach dem Zusammenhang eines Sternschnuppenstroms mit einem Kometen zunächst überhaupt verzichten müssen.

(Abgeschlossen im Oktober 1922.)

VI 2,19. SPEZIELLE STÖRUNGEN DER PLANETEN UND KOMETEN, NUMERISCHE BEHANDLUNG BESONDERER FÄLLE DES DREIKÖRPERPROBLEMS. MEHRFACHE FIXSTERNSYSTEME.

VON

HEINRICH SAMTER*)

IN BERLIN.

Inhaltsübersicht

1. Die speziellen Störungen. Geschichtliches.
2. Allgemeines über die Methode.
3. Die einzelnen Rechnungsarten.
4. Die numerische Behandlung des Dreikörperproblems. Geschichtliches.
5. Die systematische Untersuchung des restringierten Problems.
6. Die genauer untersuchten Bahnklassen des restringierten Problems.
7. Fälle des nicht restringierten Dreikörperproblems.
8. Das Vier- und das Vielkörperproblem.

Literatur.

Über die speziellen Störungen enthalten die gebräuchlichen Lehrbücher der Himmelsmechanik und der Bahnbestimmung Genügendes. Monographien zur numerischen Behandlung des Drei- und Vierkörperproblems:

G. H. Darwin, Periodic orbits = Sc. pap. vol. IV.

J. Fischer-Petersen in Kopenhag. Obs. Publ. 27 (1917) = Sirius 50 (1917), p. 185—205.

E. Strömgren, Forms of periodic motion in the Restricted Problem and in the general Problem of Three Bodies according to researches executed at the Observatory of Copenhagen. (A lecture delivered at the Inter-Scandinavian Congress of Mathematicians at Helsingfors July 1922.)

*) Das Figurenmaterial wurde dem Referenten von *E. Strömgren* aus seiner Helsingforser Abhandlung freundlichst zur Verfügung gestellt.

1. Die speziellen Störungen. Geschichtliches. Die großen Mathematiker des 18. Jahrhunderts bauten auf dem Gerüst der *Newton*schen Prinzipien die Himmelsmechanik auf. Es galt an den alten Planeten, dem Monde und den Kometen das Gravitationsgesetz auf seine Richtigkeit zu prüfen. Für die beiden ersten Klassen von Himmelskörpern war eine analytische Entwicklung der Störungsfunktion und damit eine approximative Integration der Differentialgleichungen ihrer Bewegung soweit möglich, daß die Ergebnisse der Theorie der fortschreitenden Verfeinerung der Beobachtungen sich gut anpassen ließen. Die großen Exzentrizitäten und Neigungen der Kometenbahnen machten für sie die Erfindung neuer Methoden nötig. Für die Berechnung der Wiederkehr des Halleyschen Kometen wurde von *Clairaut*[1]) zuerst die mechanische Quadratur[2]) angewendet. Es war insbesondere die Zeit des Periheldurchgangs, die als wichtigstes der gestörten Elemente für 1759 mit bis dahin unerreichter Genauigkeit gefunden wurde. Die wechselvollen Schicksale des Lexellschen Kometen 1770[3]) gaben den Astronomen ein Rätsel auf, für dessen Lösung diese Methode sich als einzige darbot uud bewährte. Der Ausbau der Methode durch *Euler*, *Mac Laurin* u. a. paßte sie den Zwecken der rechnenden Astronomie immer mehr an. *Laplace* widmete ihr einen großen Teil des 9. Buches seiner Mécanique céleste. Waren bisher die Astronomen nur darauf bedacht gewesen, mit Hilfe der mechanischen Quadratur den Lauf der Kometen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler darzustellen, so erweiterten die Entdeckungen der ersten kleinen Planeten das Anwendungsgebiet sofort. Denn erstens folgten dieselben so schnell aufeinander, daß die langsamer arbeitenden Methoden der allgemeinen Störungen nicht mit ihnen Schritt halten konnten. Zweitens waren auch hier die Neigungen und Exzentrizitäten so beträchtlich, daß dieselben eine mit ausreichender Genauigkeit zu führende Entwicklung der allgemeinen Störungen noch nicht zuließen. *C. F. Gauß'* Genie befruchtete damals beide Felder der Forschung: das der allgemeinen wie das der speziellen Störungen — so nannte er die durch das Verfahren der mechanischen Quadratur eruierten.[4]) Theorie und Praxis in gleichem

1) *A. Clairaut*, Paris Journ. d. sçav. 1759 u. 1760. Hier eine Figur, die den Differentialquotienten der gestörten Größe als Ordinate, die Zeit als Abszisse gibt, zur Erläuterung der mechanischen Quadratur. Unabhängige Veränderliche ist bei ihm die exzentrische Anomalie.

2) Encykl. II C 2 (*Runge* und *Willers*), dann *Charlier*, Mech. d. Himm. II, p. 1—89.

3) Encykl. VI 2, 18 (*S. Oppenheim*), Nr. 7.

4) Die Bezeichnung: *spezielle Perturbationsrechnung* stammt wohl von *C. F.*

Maße meisternd, schuf er — wie erst durch Herausgabe des 7. Bandes seiner Werke bekannt wurde — für die Entwicklung der Störungsfunktion die interpolatorische Methode[5]), verfolgte aber seinen Planeten Pallas auch mit Hilfe spezieller Störungen. Während er sich um die Bahnbestimmung der neuen Planeten das größte Verdienst erwarb, teilte er noch zur Fortsetzung der Berechnung des Laufes derselben seinen Schülern Methoden mit[6]), in welchen die Integrationen durch mechanische Quadratur ausgeführt wurden, und setzte dadurch auch *Encke* in den Stand, den Lauf des nach ihm benannten periodischen Kometen zu verfolgen.

2. **Allgemeines über die Methode.** Die Differentialgleichungen für die Bewegung der Himmelskörper enthalten rechter Hand die abhängigen Veränderlichen. Man kann nun entweder die rechte Seite mit konstant gedachten Elementen in eine trigonometrische Reihe entwickeln, die nach Vielfachen einer unabhängigen Veränderlichen fortschreitet, und die Koordinaten durch Integration und folgende sukzessive Approximation als Funktionen jener Veränderlichen darzustellen trachten (Methode der allgemeinen Störungen) — oder die Werte der Differentialquotienten der Veränderlichen für eine Anzahl äquidistanter Zeiten mit zunächst konstant angenommenen Elementen voraus berechnen, und dann die Integration über die Veränderungen numerisch ausführen (Methode der speziellen Störungen). Da man in keinem von beiden Fällen von sicher bestimmten Ausgangselementen Gebrauch machen kann, so wird man mit den gestörten Elementen oder Koordinaten die Beobachtungen darzustellen versuchen und auf dem Wege der Ausgleichsrechnung — mit *Gauß*' Methode der kleinsten Quadrate oder nach *Cauchy* — die Elemente verbessern.[7]) Die wiederholte Störungsrechnung wird zu genaueren Elementen führen, aber „das mühselige Geschäft" muß so oft wiederholt werden, bis man durch die Korrektionen zur höchsten Staffel der Präzision emporgeführt wird.[8]) *Gauß*' Erfahrungen mit dem Planeten (2) Pallas sind hierfür besonders lehrreich.[9]) Ohne Störungen zu berück-

Gauß. Wenigstens nennt er sie so in einem Briefe an *Encke* (Okt. 1834), Werke Bd. 7, p. 433, worin er diesem die Publikationsbefugnis der Methode gibt, während dieser sie unter dem 4. Okt. 1834 (ebenda p. 432) die Methode der partiellen Störungen nennt, die ihm *Gauß* 1811 vorgetragen habe.

5) Encykl. VI 2, 13 (*H. v. Zeipel*), Nr. 47.

6) *P. A. Hansen,* Auseinandersetzung etc. (Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. V, p. 51).

7) Encykl. VI 2, 9 (*Herglotz*), Nr. 23, 24.

8) *Gauß,* Theoria motus, Nr. 190 = Werke B. 7.

9) *Gauß,* Briefwechsel mit *W. Olbers* 26. Nov. und 13. Dez. 1810, zitiert in *Gauß*' Werke Bd. 7, p. 415 u. 418.

sichtigen suchte er die Beobachtungen, die aus sechs Erscheinungen vorlagen, durch eine einzige elliptische Bahn[10]) darzustellen. Der Ausgleich nach der von ihm erfundenen Methode ließ in der Länge Fehler bis 216″, in der Breite solche von 83″ übrig. Aus den so abgeleiteten Elementen berechnete er für die folgende Erscheinung eine Ephemeride[11]), entschloß sich aber nachträglich zur Berechnung der speziellen Störungen durch Jupiter. Indem er die Differentiale der Elemente von 50 zu 50 Tagen berechnete und durch einen Zeitraum von acht Jahren aufsummierte[12]), erhielt er für 1811 eine so wesentlich veränderte Bahn, daß jene Ephemeride um nicht weniger als 100′ korrigiert werden mußte. Die jetzt übrig bleibenden Fehler der Normalorte bis 1808 betrugen nach erneutem Ausgleich nur noch 6″. Dabei war die Jupitermasse noch um 2% zu klein angenommen, und es waren die Störungen durch die anderen Planeten vernachlässigt. Eine zweite Berechnung der Störungen der verbesserten Elemente durch Jupiter ließ die Ephemeride fast unverändert, und der erneuerte Ausgleich mit Einschluß der Erscheinung von 1811 ließ nur Fehler bis 8″,7 in Länge und von höchstens 12″,1 in Breite übrig.[13]) In anderen Fällen wird man wohl nur sehr allmählich zur gegenseitigen Abstimmung der Bahnelemente und der speziellen Störungen gelangen, und es lassen sich Fälle vorstellen, für die dieses Verfahren in der Richtung nach bestimmten oskulierenden[14]) Elementen nicht konvergiert.[15]) Wie groß man das Intervall der Zeitpunkte zu wählen

10) *Gauß*, de elem. ellipt. Palladis 1811 = Werke Bd. 6, p. 61.

11) *Gauß*, Monatl. Korr. 1810, p. 403.

12) Vgl. die Formeln in *Gauß*' Werken Bd. 7, p. 473 oder Encykl. VI 2, 15 (*K. F. Sundman*), Nr. 6.

13) Einen wenn auch nicht beträchtlichen Teil der Abweichungen bewirkt der Umstand, daß der oskulierende Wert der Halbachse a der Pallas so eingestellt war, wie ihn das 3. *Kepler*sche Gesetz ergibt, $a = k^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{2}{3}}$. Man muß aber, wenn man vom gestörten momentanen Wert von n ausgeht, auch für a den gleichzeitigen gestörten Wert annehmen, dieser aber ist von den Störungen so beeinflußt, daß für die oskulierenden Elemente jene einfache Beziehung nicht stattfindet, die nur für die *Kepler*sche Bewegung gilt. Es ist vielmehr das daraus resultierende $\log a$ vorher um $-\frac{1}{6} m' \alpha^3$ zu korrigieren, wenn der störende Planet ein innerer, um $\frac{1}{6} m' (1 + \frac{3}{4}\alpha^2)$, wenn er ein äußerer mit der Masse m' ist, und α das Achsenverhältnis des störenden und des gestörten Körpers bedeutet in dem Sinne, daß beidemal $\alpha < 1$ ist. Vgl. *R. T. A. Innes*, London Astr. Soc. M. N. 71 (1911), p. 503. Dieser Fehler ist auch heute noch verbreitet.

14) Encykl. VI 2, 15 (*K. F. Sundman*). Nr. 6.

15) Wie die Störungen die Ausgleichskoeffizienten beeinflussen, zeigte *H. Samter* über die Bahn des Planeten Egeria, Berlin Ber. (1909), p. 1247 und Astr. Nachr. Erg.-Heft 17 (1910), p. 15.

hat, für welche die Differentialquotienten bestimmt werden, das hängt im wesentlichen von der erstrebten Genauigkeit ab. Für den wichtigen Planetoid (433) Eros berechnet *G. Witt*[16]) die Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars von 20 zu 20, diejenigen durch Venus und Erde von 10 zu 10 Tagen. Im Falle der Annäherung eines Kometen oder eines kleinen Planeten an einen der großen wird das Intervall zu verkleinern sein. Von den Störungen durch andere Planeten als Jupiter und Saturn wird man in den meisten Fällen absehen können. Solange die Zahl der kleinen Planeten die ersten 200 nicht überschritt, konnte man durch Berechnung der von jenen bewirkten speziellen Störungen die Rechnung im allgemeinen in recht guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen halten. Die letzten Jahrzehnte aber häuften die Entdeckungen derart, daß nur wenige besonders wichtige Objekte durch das Verfahren der numerischen Integration genau weiter verfolgt wurden, bei anderen allgemeine Störungen berechnet wurden; für die große Masse aber werden zur Zeit nur Jupiterstörungen von 120 zu 120 Tagen für das Berliner Astronomische Jahrbuch berechnet.

3. Die einzelnen Rechnungsarten. Bei den speziellen Störungen wie bei den allgemeinen unterscheidet man solche rechtwinkliger oder polarer Koordinaten oder der Elemente. Auf die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten wurde die Methode der speziellen Störungen zuerst von *Bond*[17]) und selbständig darauf von *Encke*[18]) angewendet. Dieselbe besteht in der Berechnung der auf das erste folgenden Glieder der Differentialgleichungen (100) (Encykl. VI 2, 15 (*Sundman*), Nr. 29) und ihrer nachherigen Integration. Ist bei einer folgenden Approximation die Größe Δ^2, deren $-\frac{3}{2}^{\text{te}}$ Potenz auf der rechten Seite erscheint, wegen der vorhergehenden Annäherung um

16) *G. Witt,* Untersuchung über die Bewegung des Planeten 433 (Eros), Berlin 1905.

17) *G. B. Bond,* On some applications of the method of mechanical quadrature Mem. Amer. Ac. of Arts and Science IV part 1, Boston 1849, p. 189—208. Die Anwendung, die *Bond* gibt, ist die Berechnung der Störungen des Mondes von 12 zu 12 Stunden für vier Tage, unseres Wissens die einzige Anwendung spezieller Störungen auf diesen Körper, während von sonstigen Satelliten Hyperion von *G. W. Hill* (Astr. Journ. 8 (1888), p. 57 und *W. Eichelberger* [ebenda 11 (1892), p. 145 und Wash. Publ. vol. VI 1911], ferner der 8. Jupitermond von *P. H. Cowell* und *A. C. Crommelin,* London Astr. Soc. M. N. 68 (1908), p. 457, 576; 69 (1909), p. 421; 71 (1911), p. 50 in ähnlicher Weise in Angriff genommen wurden.

18) *J. F. Encke,* Astr. Nachr. 34 (1852), p. 349. Wie weit er auch hier von seinem Lehrer *Gauß* beeinflußt ist, wird schwer noch festzustellen sein.

$2q\Delta^2_{\mu-1}$ zu korrigieren, indem $\Delta^2_\mu = (1+2q)\Delta^2_{\mu-1}$ ist, so fördert die Reihenentwicklung für

$$f = q^{-1}\left[1-(1+2q)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

deren Logarithmus *Encke* tabuliert hat.[19]) Diese Störungen wachsen besonders rasch an, so daß man die Elemente aus den durch Aufsummierung gefundenen Koordinaten und Geschwindigkeiten schon für einen nicht zu fernen Zeitpunkt neu berechnen muß, um für die weitere Rechnung gegen allzu große Fehler geschützt zu sein. Daß *Enckes* Beispiel — die Jupiterstörungen der Vesta — dies nicht zeigt, liegt an der Geringfügigkeit dieser. Doch wird der der *Encke*schen Methode anhaftende Mangel durch ihre Bequemlichkeit vielfach aufgehoben.

Als Grundlage der Berechnung spezieller Störungen in Polarkoordinaten dienen die Gleichungen (57) l. c. Nr. 21 mit der Maßgabe, daß als Grundebene die ungestörte Bahnebene beibehalten, also eine dritte Gleichung für den Abstand z des Planeten von dieser gebraucht wird, nämlich

$$\ddot{z} + (r^{-3} + m'\Delta^{-3})z = (1+m)\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{3}{2}z^3 r^{-5}.$$

Doch kann man die Kenntnis von z, welche für die strenge Auflösung der Differentialgleichung des Radius r später vonnöten ist, für die ersten Werte entbehren. Es finden sich drei Abarten dieses Verfahrens. Bei der von *Brünnow*[20]) herrührenden finden die aus der ungestörten Bewegung folgenden Werte r_0, v_0 von r und v Verwendung, und an sie werden die Störungen angebracht. Dagegen zieht *Hansen*[21]) es vor, die Störungen auf die mittlere Anomalie M_0 und den mit Hilfe der gestörten Anomalie $M_0 + \delta M$ und ungestörten Elementen berechneten Radiusvektor $\bar{r}$ zu werfen, sowie die gestörte Bahnebene zugrunde zu legen. Die Störung des briggischen Logarithmus des Radiusvektors muß dabei durch doppelte Integration der 2. Differentialgleichung gefunden werden; da diese Störung selbst auf der rechten Seite erscheint, kann man dies durch ein indirektes Verfahren be-

19) Astr. Nachr. 34 (1852), p. 355, auch abgedruckt in *W. Bauschingers* Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig 1901, p. 105. *Th. v. Oppolzer,* Astr. Nachr. 89 (1877), p. 273 zeigt, daß f der hypergeometrischen Reihe $F(\frac{5}{2}, 1, 2, -2q)$ gleich ist, gibt die Grundlagen für eine zehnstellige Tafel und Anweisungen für die Berechnung der Störungswerte und ihre indirekte Integration, ähnlich wie *Tietjen* (Fußn. 22). Die Größe $F = f \cdot q$ hat *A. Wilkens,* Astr. Nachr. 205 (1917), p. 155 tabuliert, vgl. *W. Drucker* ebenda 214 (1920), p. 17.

20) *F. Brünnow,* Astr. Nachr. 34 (1852), p. 249.

21) *P. A. Hansen,* Astr. Nachr. 34 (1852), p. 101, 293 und 37 (1854), p. 301.

werkstelligen, da die Störung rechter Hand mit einem kleinen Faktor behaftet ist und ein roher Näherungswert derselben vorläufig genügt, oder direkt auf folgende Art. Es sei x aus der Gleichung

$$x = \iint^{a+\iota\omega} (X - bx)\, dt^2$$

zu gewinnen, wo X bekannt und b klein sei, so ergeben die Regeln der mechanischen Quadratur Encykl. II 3 (*Runge* u. *Willers*), Nr. 1a für $\omega = 1$

$$x = (a + \iota, -2) + \tfrac{1}{12}X - \tfrac{1}{12}bx - \tfrac{1}{240}(a + \iota, +2) + \cdots = S - \tfrac{1}{12}bx,$$

$$bx = \frac{b}{1 + \frac{1}{12}b} S = b_1 S;\ \ddot{x} = X - b_1 S.$$

Die dritte Abart ist eine Verbindung der Methoden von *Brünnow* und von *Hansen* durch *F. Tietjen.*[22]) Welche Methode von allen am schnellsten fördert, das hängt ganz von den vorliegenden Umständen ab.[23])

Daß man jetzt vielfach wieder zu Elementenstörungen zurückgekehrt ist — wenigstens soweit die kleinen Planeten in Betracht kommen — liegt daran, daß der Zeitpunkt, zu dem die Störungen zweiter Ordnung einzustellen sind oder ein Übergang zu neuen Elementen zu bewirken ist, nicht immer leicht erkennbar ist, die Berechnung einer Ephemeride aber nach einem einzigen System oskulierender Elemente bequemer erscheint[24]), und man es vorzieht, dieses

22) *F. Tietjen,* Berlin. astr. Jahrb. 1877; hier eine Anzahl Hilfstäfelchen, sowie durchgerechnete numerische Beispiele für alle Methoden, für die mechanische Quadratur und endlich für den Übergang zu neuen Elementen. *W. Scheibner,* Über Hansens Verfahren zur Berechnung der speziellen Störungen (Leipzig. Ber. 1898, p. 31—59) gibt gleichfalls eine eingehende Darlegung der nötigen Rechnungen und ein Beispiel: „Hansens Störungen sind leichter zu berechnen, von geringerem Betrage und von größerer Konvergenz — ein Vorteil, der namentlich bei der Berechnung der Glieder höherer Ordnung ins Gewicht fällt. Aus diesem Grunde kommt man mit der bloßen Berücksichtigung der Glieder 1. Ordnung länger aus als bei der Berechnung der Störungen rechtwinkliger Koordinaten." Auch hier kommt eine Grenze, bei der zur Neubildung von Elementen geschritten werden muß, zu deren Berechnung hier strenge, von *Hansen* bereits genäherte Formeln (Astr. Nachr. 34 (1852), p. 124 und 37 (1854), p. 308 gegeben wurden. Durch rechtzeitige Bildung neuer Elemente vermeidet man stets auf die kürzeste und einfachste Weise die direkte Rücksichtnahme auf das Quadrat der störenden Kräfte, welche immer mehr Mühe machen würde. (*Hansen* in der Einleitung zu den Egeriatafeln Leipzig. Abhandl. 1867, Art. 29 und 38.)

23) *J. v. Zech,* Astr. Nachr. 37 (1854), p. 295. Er zeigt auch, wie man Präzession und Nutation in den Störungsrechnungen am leichtesten berücksichtigt.

24) *C. F. Gauß,* Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires (Nachlaß), Werke B. 7, p. 439.

direkt durch Aufsummieren aus Elementenstörungen zu finden. Für diese sind die Formeln von *Gauß*[12]) bequem, falls nicht Besonderheiten vorliegen, die den Größen p, q oder g, h (Encykl. VI 2, 15 (*Sundman*), Nr. 6) als Elementen den Vorzug geben lassen. Für die genaue Rechnung hat diese Methode den Vorteil vor allen, daß man für jeden folgenden Zeitpunkt leicht ein neues Elementensystem bestimmen und mit diesem den nächsten Störungswert berechnen kann.[25])

Die Anwendbarkeit der speziellen Störungen findet ihre Grenze durch die natürlichen Fehler, mit denen sie behaftet ist. Man bedarf ja der Werte der Koordinaten der störenden Körper für die gewählten Zeitpunkte; die Planetentafeln ergeben dieselben mit Abweichungen, die einander in ihren Wirkungen größtenteils aufheben werden; nicht so die Abrundungsfehler der numerischen Rechnung, deren Beträge besonders in dem Doppelintegral $\int\int \hat{n}\, dt^2$ sich zu solchen Größen aufsummieren, daß sie durch späteren Ausgleich nicht beseitigt werden können. Wo die Methode noch unumgänglich ist, wie für die Bestimmung der Massen störender Körper, und für einen längeren Zeitraum zu führen ist, hat man eine erheblichere Anzahl von Dezimalen anzuwenden, als die Verfolgung des gestörten Körpers durch kürzere Zeiten erfordert.[26])

Von Methoden, die zwischen denjenigen der allgemeinen und der speziellen Störungen gewissermaßen die Mitte bilden, sei die von *J. H. Lambert*[27]) angegebene erwähnt. Hier werden die Koordinaten — und zwar in dem gewählten Beispiel nur für die geradlinige Bewegung — nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten in

---

25) Kunstgriffe, die für beliebig exzentrische Bahnen gelten und die Rechnung wesentlich zu kürzen geeignet sind, geben *P. V. Neugebauer* nach *F. Tietjen*, Astr. Nachr. 154 (1901), p. 301; *W. de Sitter*, ebenda 163 (1903), p. 106 und *W. Zimmermann*, Inaug.-Diss. Breslau 1902 durch Variation kanonischer Elemente, die die Rechnung wesentlich vereinfachen (ausgeführtes Beispiel).

26) *S. Newcomb*, Astr. Nachr. 148 (1899), p. 321 führt dies im einzelnen aus und gibt die wahrscheinlichen Beträge der unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Rechnung. Ergänzend sei bemerkt, daß auch bei der Berechnung der allgemeinen Störungen sowohl die einzelnen Koeffizienten, die ja aus vielen Summanden sich aufbauen, nicht unerhebliche Ungenauigkeiten aufweisen [*H. Samter*, Astr. Nachr. Erg.-Heft 17 (1910), p. 12], als auch die Aufsummierung der für eine Ephemeride erforderlichen Störungsglieder eine desto größere Ungenauigkeit ergibt, eine je größere Zahl von ihnen mitzunehmen ist.

27) *J. H. Lambert*, Solution générale et absolue du problème des trois corps moyennant de suites infinies, Berlin Hist. 1767. Für Koordinatenstörungen ähnlich *de Gasparis* Napoli Acad. Rend. 22 (1884), p. 236; 23 (1885), p. 88 u. 24 (1886), p. 23, vorher Paris C. R. 97 (1883), p. 738.

Reihen entwickelt, die nach Potenzen der Zeit fortschreiten. Da diese nur für verhältnismäßig kurze Zeiträume konvergieren, muß man nach Verlauf eines solchen stets neue Elemente bilden und neue Reihen aufstellen. Auch gehört hierher die Methode der partiellen Anomalien von *Hansen*[28]), bei welcher die Bahn des gestörten Körpers in eine Anzahl von Teilen zerlegt und in jedem derselben eine analytische Entwicklung nach einer transformierten Anomalie vorgenommen wird und schließlich die Störungen von Anfang bis zum Ende dieses Bahnstückes aufaddiert werden. Bei einigen Anwendungen[29]), die sowohl auf Kometen als auf Planeten gemacht wurden, gelang es auch, für die Summation in bezug auf mehrere Bahnstücke und Umläufe allgemeine Formeln aufzustellen.

4. Die numerische Behandlung des Dreikörperproblems. Geschichtliches. Man muß das Problem dreier sich gegenseitig nach dem *Newton*schen Gesetze anziehender Körper als einer solchen Behandlung durch die höhere Analysis unzugänglich bezeichnen, welche der Anschaulichkeit nicht entbehrt. Denn ist auch durch *K. F. Sundman*[30]) eine Methode gegeben, die von einem ganz singulären Fall abgesehen die allgemeine Lösung des Problems durch Reihen bewerkstelligt, welche für jeden Wert der Zeit konvergieren, so ist doch diese Konvergenz, die durch Transformation der Zeit in eine Größe τ gelingt, die ihrem absoluten Werte nach für jede Zeit kleiner als Eins ist, nur für solche Werte von τ gleichmäßig, deren absoluter Betrag von der Einheit merklich entfernt ist. Da die Zahl der die Koordinaten darstellenden Glieder der Reihen für solche Werte von τ, welche der Einheit nahe kommen, praktisch sich nicht beherrschen läßt, so ist dieser Weg zu einer anschaulichen Kenntnis der Bahnen ungangbar. So war die eigentliche Form der Bahnen, von singulären Fällen abgesehen, bis vor 30 Jahren ganz unbekannt, da sowohl die bekannten Reihen der allgemeinen Störungstheorie nur semikonvergent sind, als auch die speziellen Störungsrechnungen sich immer nur auf begrenzte Zeiträume erstreckten. Immerhin erlaubten diese Mittel in

---

28) *P. A. Hansen,* Mémoire sur le calcul des perturbations, qu'éprouvent les comètes, Paris C. R. (Suppl.) 1856, ferner Encykl. VI 2, 18 (*S. Oppenheim*), Nr. 2.

29) *A. Leman,* Prinzip der Partition. Inaug.-Diss. Berlin 1880. *Th. Wittram,* Zur Berechnung der Störungen der kleinen Planeten, Petersb. Bull. 1885. *H. Samter,* Über die allgemeinen Störungen des Planeten Eros, Astr. Nachr. 188 (1911), p. 153—182.

30) *K. F. Sundman,* Recherches sur le problème des trois corps, Acta Soc. Fenn. 34 (1907); 35 (1909) und Acta math. 36 (1912), p. 105—179. Vgl. auch das Referat von *v. Zeipel,* Astr. Ges. Vjs. 52 (1917), p. 56—79.

den einfacher liegenden Fällen des Sonnensystems, wo alle Körper gegen den zentralen vergleichsweise kleine Massen haben, oder wo der störende Körper trotz großer Masse wegen seiner bedeutenden Entfernung nur verhältnismäßig schwach wirkte, für die historischen Zeiträume eine hinreichend genaue Kenntnis der Bahnen. Doch war der Wunsch, durch Behandlung nicht so einfach liegender Fälle tiefer in die Natur der von den Himmelskörpern beschriebenen Kurven einzudringen, verbreitet.[31]) Ihm gab greifbaren Ausdruck zuerst *T. N. Thiele*[32]), der durch Stellung zweier Preisaufgaben *E. v. Haerdtl*[33])[34]) und *C. Burrau*[35]) zur Behandlung zweier spezieller Fälle des restringierten Problems (VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 8) anregte, wobei die endlichen Massen S und J als gleich gegeben waren. Der Weg für diese Untersuchungen und die folgenden ist der des „numerischen Experiments": aus den gegebenen Anfangsbedingungen werden die bewegenden Kräfte für die ersten Zeitpunkte zunächst annähernd berechnet, durch sukzessive Approximation verbessert, während dann für immer entferntere Zeitpunkte die Werte der Beschleunigungskomponenten durch Extrapolation gewonnen[36]), sodann aber die Orte und die Kräfte gegeneinander allmählich abgestimmt werden. Die Methode ist demnach derjenigen der speziellen Störungen analog.[37])

31) *H. Gyldén,* Über die intermediäre Bahn des Mondes, Acta math. 7 (1885), p. 125 und über ein Annäherungsverfahren im Dreikörperproblem, ebenda 1 (1882), p. 77—92. Hier sagt er direkt: Der Mangel, daß man im Dreikörperproblem noch nicht sehr weit gekommen ist, liegt daran, daß man über die Art der Kurven, in denen sich die drei Körper bewegen, gar nichts weiß.

32) *T. N. Thiele,* Recherches numériques concernant les solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps, Astr. Nachr. 138 (1895), p. 1, vergleicht das Problem mit einer starken Festung, die einige schwache Punkte habe, von denen man allmählich in sie eindringen könne.

33) *E. v. Haerdtl,* Skizzen zu einem speziellen Falle des Problems der drei Körper, München. Akad. Abh. 17 (1890).

34) *C. V. L. Charlier,* Studier över trekropparsproblemet, Stockholm. Akad. Bihang 18 (1893), No. 6; 19 (1894), No. 2. *H. Gyldén,* Undersökningar af Theorien I und *K. Bohlin,* Stockholm. Observ. Jaktt. 9 (1911), No. 2 u. 4. Diese analytische Entwicklung und *v. Haerdtl*s numerische befinden sich in so genauer Übereinstimmung, wie irgend zu erwarten war. *v. Haerdtl* bearbeitete l. c. noch einen zweiten Spezialfall.

35) *C. Burrau* in seiner Bearbeitung der von der dänischen Akademie gestellten Preisaufgabe über periodische Bahnen um L_2 [Astr. Nachr. 135 (1894), p. 233 und 136 (1894), p. 161, vgl. auch seine Besprechung der *Darwin*schen Arbeit in Astr. Ges. Vjs. 33 (1898), p. 21].

36) Rechenbeispiele für *Darwins* Methode ausgeführt in *Charlier* II, p. 65—86.

37) Da hier nicht *Störungen* vorliegen, sondern die Kräfte von einerlei Größenordnung sind, so bedarf die Bestimmung der Integrationskonstanten Aufmerksamkeit, vgl. *E. Strömgren,* Stockholm Öfvers. K. Sv. Ak. Förh. (1900), No. 4.

Im *v. Haerdtl*schen Falle sollte der unendlich kleine Körper P von einem Punkte der Verlängerung von SJ ausgehen, so daß $PS = \frac{1}{2}SJ$, und eine Kreisbahn um S beschreiben, wenn J nicht vorhanden wäre, und zwar in derselben Richtung, wie die beiden Hauptkörper sich um ihren Schwerpunkt bewegen. Hier diente *Encke*s Methode für die speziellen Störungen der rechtwinkligen Koordinaten.[38]) Die relative Bewegung gegen die Zeichenebene, die mit der Drehgeschwindigkeit der beiden Hauptkörper um den Schwerpunkt rotiert, zeigt die Fig. 15. Auch im folgenden soll diese besondere Art der Darstellung beibehalten werden. Die über drei Umläufe erstreckte Integration lehrte, daß zwei derselben sich ungefähr decken, der dritte aber nach außen führt. Mit den gegebenen Anfangsbedingungen war demnach die Bahn nicht periodisch, durch geringe Abänderung derselben konnte sie aber später dazu gemacht werden.

Die von *Burrau* angegriffene und fast zur Vollendung gebrachte Aufgabe betrifft eine spezielle Form periodischer Bahnen (VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 3). Die Wichtigkeit der periodischen Bahnen für die allgemeine Lösung des Problems war damals nahezu gleichzeitig den Theoretikern und Praktikern der Himmelsmechanik vor die Augen getreten. *T. N. Thiele* und *G. H. Darwin* gingen mit wesentlich denselben Mitteln, wenn auch etwas anderen Zielen auf ihre Eruierung aus. Sie sind ja am besten zu beherrschen, denn sie sind für unendliche Zeiträume bekannt, wenn man die Bewegung während einer Periode kennt.

5. Die systematische Behandlung des restringierten Problems. Der Weg von den einfacher liegenden zu den komplizierteren Fällen nahm am besten seinen Ausgang vom restringierten Problem. Hier gilt ja das *Jacobi*sche Integral (Encykl. VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 8). Die Differentialgleichungen für die relative Bewegung sind nach der *Hill-Brown*schen Transformation (VI 2, 14 (*E. Brown*), Nr. 4), wenn — wie üblich — Ω statt F' geschrieben wird

$$\ddot{u} + 2n'i\dot{u} = 2\frac{\partial\Omega}{\partial s}, \quad \ddot{s} - 2n'i\dot{s} = 2\frac{\partial\Omega}{\partial u},$$

und das *Jacobi*sche Integral lautet

$$\dot{u}\dot{s} = 2\Omega - C,$$

38) *K. Bohlin*, Astr. Ges. Vjs. 56 (1921), p. 206—210. Die Arbeit steht im Zusammenhange mit theoretischen Integralentwicklungen von *Bohlin*, Ark. for Mat. Fys. 8 (1912); 9 (1913) und 10 (1914) und soll ein Beispiel für diese im allgemeinen Fall geben, während in *v. Haerdtls* Fall die Entwicklungen für verschwindende Masse des dritten Körpers verifiziert werden.

so daß die Kurven $2\Omega = C$ solche sind, in denen die relative Geschwindigkeit des Körpers P Null wird. Da das Quadrat derselben $\dot{u}\dot{s}$ nicht unter Null sinken kann, so muß P stets auf einer Seite dieser *Hill*schen Grenzkurve bleiben. Wir nehmen als Einheiten der Länge und der Masse den Abstand SJ und die Masse von S und wählen die Einheit der Zeit derart, daß die Gravitationskonstante gleich Eins ist. Die *Jacobi*sche Konstante C erreicht ihr absolutes Minimum für $SP = JP = 1$, d. h. in den *Lagrange*schen Dreieckspunkten, die mit L_4 und L_5 bezeichnet werden.[39]) Für Bewegungen, bei denen C noch kleiner ist, besteht demnach keine Grenzkurve, der Punkt P hat dann für seine Bewegung die ganze Ebene zur Verfügung. Mit wachsendem C erhält man zunächst geschlossene Linien um L_4 und L_5 und sodann eine Schar von Kurven, deren Form für ein gegebenes Massenverhältnis lediglich der Parameter C bestimmt. Besteht für einen Wert von C die Grenzkurve aus zwei getrennten Stücken, so ist P gezwungen, innerhalb des von ihnen begrenzten Raumes zu bleiben, wenn er anfänglich darin sich bewegt. *E. Strömgren*[40]) zeigte, daß, wenn P bei der Bewegung an eine Kurve der Nullgeschwindigkeit gelangt, seine Bahn dort eine Spitze besitzt, auf der die Bewegung immer von rechts nach links vor sich geht für denjenigen, der sich auf der Normalen befindet und nach der Grenzkurve hinblickt. Für $J = 10$ hat sie *Darwin* gezeichnet[41]), für $J = 1$ *C. V. L. Charlier*[42]). Sie stehen zu den kollinearen singulären Punkten von *Lagrange*, von denen L_1 zwischen S und J, L_2 jenseits J und L_3 jenseits S liege, in entsprechenden Beziehungen, wie zu L_4 und L_5.

Da diese fünf Librationszentren selbst strenge Lösungen für die Aufgabe der Bestimmung der Bahnform im Dreikörperproblem darstellen, so ist eine geringe Variierung der ihnen entsprechenden *Jacobi*schen Konstanten der natürliche Ausgangspunkt für andere auf analytischem Wege oder numerisch zu erhaltende Bahnen. Obgleich also diese Fälle von denjenigen, die die Natur damals darbot, weit abwichen, sah *T. N. Thiele*[32]) hier die schwachen Punkte des Dreikörperproblems; seine und die von ihm veranlaßte Untersuchung von *C. Burrau*[35]) führten auf numerischem Wege fast — wenn auch nicht völlig — genau zu periodischen Lösungen des Problems.[43]) Nach einer

39) Encykl. VI 2, 12 Nr. 6 (*E. T. Whittaker*).

40) *E. Strömgren*, Astr. Nachr. 194 (1906), p. 32.

41) *G. H. Darwin*, Orbits = Scient. pap. Vol IV.

42) *Charlier*, Mech. d. Himmels II, p. 117.

43) Die erste analytische Lösung eines solchen Problems gab *H. Gyldén*, Öfvers. K. Sv. Ak. Förh. 4 (1884), p. 3 und Paris Bull. astr. I (1884), p. 361.

Reihe von Versuchen, bei denen die Integration über einen halben Umlauf von P um L_2 erstreckt wurde, konnten sie durch Interpolation den Wert von C für eine Bahn (Fig. 2) derart zwischen enge Grenzen einschließen, daß dieselbe die ξ-Achse zweimal senkrecht schnitt. Somit waren durch numerisches Experiment die ersten oszillierenden Satelliten der Familie b *G.H.Darwins* (VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 6) gefunden. Diese reinen Librationen um die Librationsszentren sind, solange P sich nicht sehr weit von ihnen entfernt, also eine Entwicklung nach Potenzen der Koordinatendifferenzen von P und L möglich ist, auch einer analytischen Darstellung zugänglich. Eine solche wurde von *S. S. Hough*[44]) nach *Hills* Methode der charakteristischen Exponenten gegeben.

Die periodischen Bahnen sind, abgesehen von den paarweise auftretenden um L_4 und L_5, symmetrisch zur Linie SJ, die zur ξ-Achse dient, während die η-Achse deren Mittelsenkrechte ist. Unter großer Beschränkung seines Arbeitsgebietes gelang es *G. H. Darwin*[41]) eine Anzahl von Typen periodischer Bahnen aufzustellen. Er untersuchte nur einfach periodische[45]), d. h. solche Bahnen, die nach einem einzigen synodischen Umlauf sich schließen, und nahm zunächst nur rechtläufige Bahnen, d. h. solche in Angriff, bei denen die Bewegung des unendlich kleinen Körpers P mit größerer Winkelgeschwindigkeit als der des Achsensystems erfolgt. Eine eigentliche systematische Absuchung des Feldes der periodischen Bahnen beginnt aber erst mit den von der Kopenhagener Sternwarte unternommenen Arbeiten, die jetzt — was das restringierte Problem betrifft — zu einem gewissen Abschluß geführt sind. *Darwin* fand es vorteilhaft, als unabhängige Veränderliche, nach der er die numerische Integration ausführte, die Bogenlänge a zu benutzen und von dem Winkel φ, den die Normale der Bahn mit der ξ-Achse bildet, Gebrauch zu machen und ferner

---

44) *S. S. Hough,* On certain discontinuities connected with periodic orbits, Acta math. 24 (1901), p. 257—288, abgedruckt *Darwin,* Scient. pap. Vol. 4, p. 114—139. *Charlier* II, p. 117 ff. folgt zunächst genau dieser Entwicklung, ergänzt sie dann numerisch und gibt auch ihre Anwendung auf die Librationszentren L_4 und L_5. Nach *Routh* (vgl. *Whittaker* l. c.) muß die größere mindestens 25 mal so groß als die kleinere sein, damit eine stabile Bahn entsteht. Hier wurde nur bis zu den ersten Potenzen der Koordinatendifferenzen (den Projektionen von LP) entwickelt. *H. Plummer,* London Astr. Soc. M. N. 62 (1901), p. 6, 63 (1903), p. 436; 64 (1904), p. 98 rechnet die zweiten Potenzen mit. In der letzten Arbeit Zeichnungen für die Gruppen a) und b) der oszillierenden Satelliten.

45) Es bedarf kaum des Hinweises, daß eine Beziehung zu den einfach- und doppelt-periodischen Funktionen nicht besteht.

die Krümmung R^{-1} der Bahn für die Rechnung und Zeichnung heranzuziehen. Hier gelten die Formeln:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{a_0}^{a_1} da R^{-1}; \quad u = u_0 + i \int_{a_0}^{a} da e^{i\varphi}$$

$$t - t_0 = \int_{a_0}^{a} da (\dot{u}\dot{s})^{-\frac{1}{2}} = \int_{a_0}^{a} da (2\Omega - C)^{-\frac{1}{2}}.$$

Demnach wachsen die durch Integration zu findende Größe t und ebenso die die Bahn bestimmenden anderen Größen mit Annäherung an die Nullkurve der Geschwindigkeit wegen der starken Krümmung sehr stark, wenn man nicht das Integrationsintervall Δa in solchen Fällen sehr verkleinert. *C. Burrau*[35]) blieb zuerst bei der Zeit als der natürlicher erscheinenden unabhängigen Variablen, selbst dort, wo die Bahn eines der von *Darwin* so genannten oszillierenden Satelliten sich einem der Hauptkörper nähert, wo also die Geschwindigkeit sehr groß wird. Er fand in der Nähe einer der Massen nach Potenzen von $t^{\frac{1}{3}}$ entwickelnd, daß die Schar der Bahnen um L_2 oszillierender Satelliten mit einer Ejektionsbahn, d. h. einer solchen, die von einem der Hauptkörper ausgeht, eine Art von Abschluß findet (Fig. 2).

Für solche Fälle nun, in denen die Geschwindigkeit unendlich groß wird, empfahl *Thiele* die nach ihm benannte Transformation, die die u-Ebene auf einem Streifen einer G-Ebene ($G = E + iF$) durch die Beziehung

$$G = \cos u$$

konform abbildet. Zugleich — und dies ist für die Rechnung das Wesentliche — transformiert er die Zeit durch die Differentialbeziehung

$$dt = r_1 r_2 d\psi,$$

wo r_1 und r_2 die Abstände PS resp. PJ bedeuten.[46]) Hierdurch

46) *T. N. Thiele* (vgl. Fußn. 32). Die differentielle Beziehung ist genau dieselbe, mit deren Hilfe im Zweizentrenproblem durch *L. Euler* die Integration bewirkt wurde. Da auch die E und F nichts anderes als elliptische Koordinaten sind, die bei *Lagrange* zur Lösung dieser Aufgabe dienten, so liegt die Annahme sehr nahe, daß *Thieles* Transformation hier ihre Quelle hat. Daß auch andere Substitutionen von der Form $u = f(\varphi + \psi i)$, also die Einführung neuer orthogonaler Koordinaten zweckdienlich sein kann, zeigt *Levi-Cività* Atti Acad. Lincei (1915), p. 555. Doch gestalten sich bei der *Thiele*schen die Gleichungen am einfachsten. Da diese E und F mit $\frac{\partial H}{\partial E}$ und $\frac{\partial H}{\partial F}$, wo $H = C$ das *Jacobi*sche Integral ist, ein kanonisches System bilden, hätte statt der beiden von *Thiele*, *Strömgren* und *Burrau* benutzten Differentialgleichungen zweiter Ordnung für

wird in der Nähe der Massenpunkte auf das Zeitdifferential sozusagen ein Vergrößerungsglas aufgesetzt. Diese Umwandlungen haben sich besonders bewährt und die fruchtbaren Arbeiten der Kopenhagener Sternwarte wesentlich gefördert, zum Teil erst ermöglicht. Das Verschwinden der Spitze bei Anwendung dieser Koordinaten zeigt die Darstellung der *Burrau*schen Ejektionsbahn in E und F (Fig. 1).

Die einfach-periodischen Bahnen von P bilden eine vierfache Mannigfaltigkeit, da sie von vier Parametern: der Periodenlänge, der Energiekonstante, der Zeit und der Länge der Konjunktion[47]) abhängen. Legt man aber die Hauptmassen und ihre Entfernung von vornherein fest und sieht von den beiden letzten Parametern ab, so reduziert sich die Lösung nach *G. H. Darwin* auf eine einfache Mannigfaltigkeit. Wenn man mit ihm als bestimmenden Parameter der Bahn die Konstante C von *Jacobi* ansieht, so können zu einem und demselben Werte dieser zwar nicht unendlich viele, aber doch mehrere verschiedene periodische Bahnen gehören.

Darwin zog nur solche Bahnen in Betracht, welche die ξ-Achse zweimal senkrecht schneiden, ließ also diejenigen unberücksichtigt, die paarweise symmetrisch zu dieser Achse verlaufen — wie diejenigen, welche sich um L_4 und L_5 schlingen.

Für die Entdeckung seiner Bahnen ging er von einem bestimmten Werte von C aus, wählte eine Ausgangsabszisse ξ_0, bestimmte die nach dem *Jacobi*schen Integral aus C und ξ_0 folgende Anfangsge-

---

E und F [vgl. *Thiele* l. c. und *Strömgren,* Kopenhagen Obs. Publ. 14 (1913) und Astr. Ges. Vjs. 48 (1913), p. 286] auch das kanonische System der vier Gleichungen erster Ordnung Anwendung finden können. In der *Euler*schen Transformation der Zeit sehen wir die Nachfolgerin der im Zweikörperproblem nützlichen

$$a n dt = r dE$$

und die Vorgängerin der *Sundman*schen (Fußn. 30)

$$dt = d\omega \prod_{i \gtrless k} (1 - e^{-\Delta_{ik}/l}),$$

durch welche in den Problemen, denen sie angepaßt sind, nicht nur die Koordinaten und die Zeit in geschlossener Form dargestellt werden, sondern die auch den besonderen Wert haben, in den singulären Fällen des Zusammenstoßes das Problem zu uniformisieren. Vgl. *A. v. Brunn,* Bemerkungen zum Dreikörperproblem, Danzig naturf. Ges. Schriften XV 3 (1920). Eine Verwendung des Zweizentrenproblems für die Lösung des Dreikörperproblems regt *Charlier* II, p. 354 an und führt *H Samter,* Astr. Nachr. 217 (1922), p. 129—152 näher aus. Die Kurven der Nullgeschwindigkeit in den elliptischen Koordinaten E und F geben *Burrau* u. *Strömgren,* Kopenhagen Obs. Publ. 18 (1914) = Astr. Nachr. 197 (1914), No. 4721.

47) *H. Poincaré,* Méth. nouv. I, p. 101.

schwindigkeit $\dot{\eta}_0$, die der η-Achse parallel ist, und berechnete durch numerische Integration die Bahn für einen halben synodischen Umlauf. Nach diesem wird die ξ-Achse im allgemeinen nicht wieder normal geschnitten. Erst ein mehrfach ausgeführter Versuch mit verschiedenen ξ_0 und eine schließliche Interpolation lieferte eine periodische Bahn. Auf diese Weise suchte *Darwin* für die Massen $S = 10$, $J = 1$, die Entfernung $JS = 1$ und die Gravitationskonstante Eins, das Feld der einfach-periodischen Bahnen von $C = 37$ bis $C = 40$ ab.

Es sind demnach die zu einer periodischen Bahn gehörigen Parameter C und ξ_0 voneinander nicht unabhängig, die Beziehung zwischen ihnen ist aber so transzendent, daß sie sich wiederum nur durch das Experiment nach Auffindung der Periodizitätsstellen numerisch angeben und graphisch darstellen läßt. Natürlich kann man auch ξ_0 oder $\dot{\eta}_0$ statt C als Ausgangswert benutzen, einen zweiten Parameter versuchsweise variieren, die dritte ist dann ein Datum der beiden anderen. Endlich kann man etwa von einem bestimmten Wert E_0 der Koordinate E ausgehend die dem *Jacobi*schen C entsprechende Konstante K oder $\dot{F}_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)_{\psi=0}$ variieren. In jedem Falle besteht ein transzendenter Zusammenhang zweier dieser Größen für die supponierte Periodizität. Diesen kann man graphisch durch eine „charakteristische Kurve“ ausdrücken.[48]) Man erkennt dann, daß z. B. ξ_0 keine eindeutige Funktion von C ist, daß C vielmehr als Funktion von ξ_0 Maxima und Minima aufweist. *Darwin* nahm die extremen Werte von C als Grenzen einer seiner „Familien“ an. Geht man von einem solchen Werte von C aus, so treten bei einer geringen Variation periodische Bahnen paarweise auf[49]), und diese Paare durch eine künstliche Einteilung zu trennen, liegt keine Veranlassung vor, da sie analytische Fortsetzungen von einander sind. Natürliche Grenzen von „Klassen“ periodischer Bahnen kann man eher bei solchen Kurven suchen, an denen für den Übergang zu Nachbarkurven eine Diskontinuität in den Geschwindigkeitskomponenten eintritt, d. h. bei den

48) *J. Fischer-Petersen*, Kopenhagen Obs. Publ. 27 (1917) = Sirius 50 (1917), p. 185—205.

49) *H. Poincaré* (zitiert bei *Darwin*, Scient. pap. IV, p. 41). *Moulton*, Per. orb. chap. 16 macht dies so klar: Im Zweikörperproblem besteht das dritte Keplersche Gesetz $n^2 = a^{-3}$. Dies liefert für a als Funktion von n einen reellen und zwei komplexe Werte. Im restringierten Problem entspricht dem n^2 die *Jacobi*sche Konstante. Zu einem Werte derselben gehören drei Bahnen, von denen zwei komplexe Koordinaten haben können, doch ist das Auftreten noch eines Paares reeller Bahnen zu der einen immer vorhandenen möglich, und zwar von solchen Stellen an, wo zwei komplexe Bahnen in eine reelle zusammenschmelzen.

Ejektionsbahnen, wo dieselben in S oder J unendlich werden. Zwar würde die Diskontinuität bei Benutzung der *Thiele*schen Transformation verschwinden, aber bei der analytischen Fortsetzung — in E und F — über die Ejektionsbahn hinaus ändert sich der Charakter der Bahn insofern, als sie einen Doppelpunkt auf der ξ-Achse erhält, wenn sie vorher keinen hatte, und sich erst nach Vollendung einer Schlinge um die nähere Masse schließt. Doch ist auch dieses Charakteristikum für die Einteilung der Bahnen und die Begrenzung von Bahnklassen nicht wesentlich.

6. Die genauer untersuchten Bahnklassen des restringierten Problems. I. *Die Librationen um* L_2.[50]) (Fig. 2.) Hier hat *Gyldén* (Encykl. VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 6 in Fußn. 39) zuerst analytisch die Möglichkeit einer Libration gezeigt, *Thiele* eine solche numerisch berechnet, *Burrau* die hierher gehörige Ejektionsbahn gefunden. Derselbe behandelte dort, wo P nahe an S oder J herankommt, das Problem in Analogie mit dem Zweikörperproblem, da die Anziehung des näheren bedeutend überwiegt, und entwickelte für den Teil der Bahn, der mit großer Geschwindigkeit durchlaufen wird, die Koordinaten von P nach Potenzen von $t^{\frac{1}{3}}$. Die Bahn ließ sich dann annähernd so bestimmen, daß ihre andere Begegnung mit der ξ-Achse normal ist. Später wurden die Koordinaten in dieser Bahn nach *Thiele*s Methode gerechnet, durch Interpolation in eine *Fourier*sche Reihe nach Vielfachen eines Winkels $v = \varkappa\psi$ entwickelt und damit wieder die rechten Seiten der *Thiele*schen Differentialgleichungen hergestellt. So fand sich durch erneute Integration die Darstellung der elliptischen Koordinaten E und F verbessert, und es war ein Mittel gewonnen, durch Variation der Koeffizienten und der Periode in diesen Ausdrücken die gerechnete Ejektionsbahn feiner abzuschleifen und die an diese angrenzenden periodischen Bahnen aufzusuchen. Inzwischen hatte auch *Darwin* diese Satellitenklasse verfolgt. In der Nachbarschaft von L_2 bzw. L_3 hat die relative Bahn die Form einer Ellipse, deren große Achse der η-Achse parallel ist, und deren Exzentrizität für $S = J$ ($m_1 = m_2$) etwa 0,9 beträgt. Die folgenden Ellipsen platten sich gegen den nähern Massenpunkt (J für L_2) hin ab, vertiefen sich sodann, bis die Ejektionsbahn mit ihrer Spitze in $J(m_2)$ auftritt, und die Fortsetzung ergibt Schlingen um $J(m_2)$.

II. *Die Librationen um* L_3 sind ganz entsprechend und liegen für $S = J$ symmetrisch zu I.

---

50) Encykl. VI 2, 12, Fußn. 39, 40, 41 und 43. *Strömgren,* Kopenhagen Obs. Publ. 14 (1913) und Astr. Ges. Vjs. 48 (1913), p. 222.

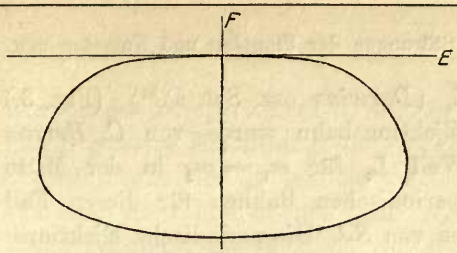


Fig. 1. *Burraus* Ejektionsbahn nach *Thieles* Transformation.

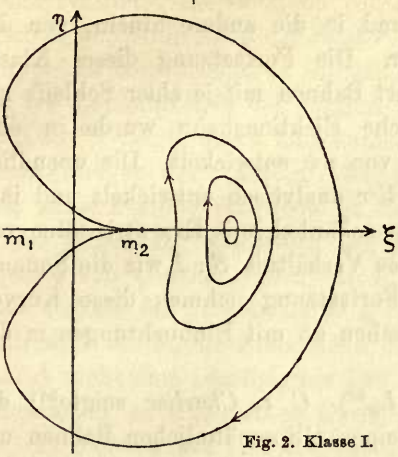


Fig. 2. Klasse I.

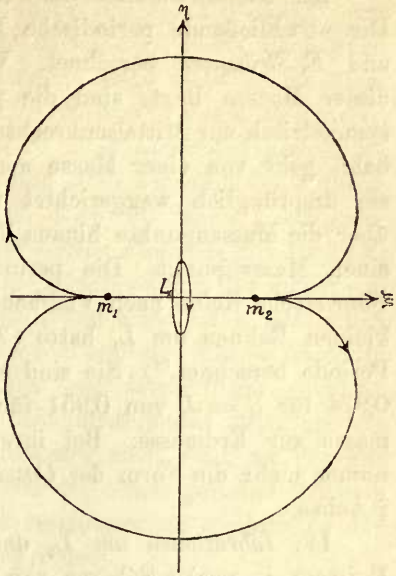


Fig. 3. Klasse III.

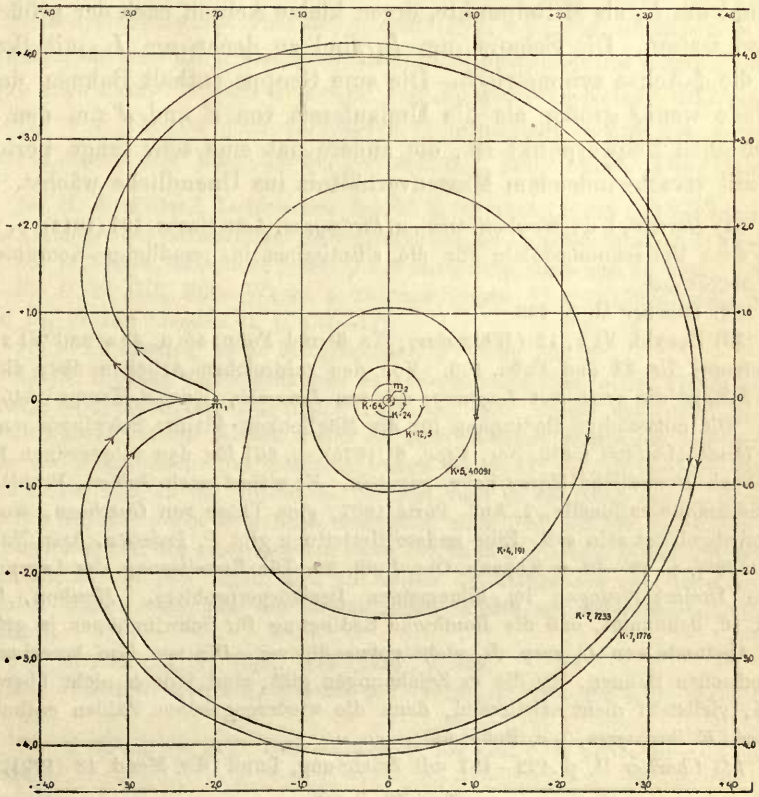


Fig. 4. Klasse V.

III. *Die Librationen um L_1 (Darwins osz. Sat. a).*[51]) (Fig. 3.) Die abschließende periodische Ejektionsbahn wurde von *C. Burrau* und *E. Strömgren* berechnet. Weil L_1 für $m_1 = m_2$ in der Mitte dieser Massen liegt, sind die periodischen Bahnen für diesen Fall symmetrisch zur Mittelsenkrechten von SJ. Die periodische Ejektionsbahn geht von einer Masse aus und in die andere hinein, von der sie ursprünglich weggerichtet war. Die Fortsetzung dieser Klasse über die Massenpunkte hinaus liefert Bahnen mit je einer Schleife um einen Massenpunkt. Die periodische Ejektionsbahn wurde in eine *Fourier*sche Reihe nach Vielfachen von $\varkappa\psi$ entwickelt. Die unendlich kleinen Bahnen um L_1 hatte *Charlier* analytisch entwickelt und ihre Periode berechnet.[52]) Sie sind ellipsenähnlich mit Exzentrizitäten von 0,974 für $S = J$, von 0,951 für das Verhältnis $S : J$ wie die Sonnenmasse zur Erdmasse. Bei ihrer Fortsetzung nehmen diese Kurven immer mehr die Form der *Cassini*schen an mit Einbuchtungen in der ξ-Achse.

IV. *Librationen um L_4 und L_5.*[53]) *C. L. Charlier* zeigte[54]) die Existenz je zweier Scharen von kleinen ellipsenähnlichen Bahnen um L_4 und um L_5 als Mittelpunkte, deren kleine Achsen nach der größeren Masse weisen. Die Scharen um L_4 sind zu denen um L_5 mit Bezug auf die ξ-Achse symmetrisch. Die eine Gruppe enthält Bahnen, deren Periode wenig größer als die Umlaufszeit von S und J um den gemeinsamen Schwerpunkt ist, die andere hat eine sehr lange Periode, die mit verschwindendem Massenverhältnis ins Unendliche wächst. Die

51) *Darwin,* l. c.; *Moulton,* Orb., u. *Strömgren,* Astr. Nachr. 197 (1914), p. 273. Hier auch Umrechnungstafeln für die elliptischen in geradlinige Koordinaten und umgekehrt.

52) *Charlier* II, p. 133.

53) Encykl. VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 6 und Fußn. 45 u. 45a und VI 2, 15 (*Sundman*), Nr. 41 und Fußn. 103. Von den zahlreichen Arbeiten über diesen Fall scheint die erste seit *Lagrange* die von *Liouville,* Conn. d. Temps 1845, zu sein. Die notwendige Bedingung für die Möglichkeit kleiner Schwingungen ist von *Routh* [London math. Soc. Proc. 6 (1875), p. 86] für den allgemeinen Fall, daß auch P endliche Masse habe, gegeben. Er zitiert nach *Jullien,* Problèmes de mécanique rationelle, 2. Aufl. Paris 1867, eine Thèse von *Gascheau,* wo sie schon abgeleitet sein soll. Eine andere Herleitung gibt *P. Pedersen,* Astr. Nachr. 211 (1920), p. 33—42 = Kopenh. Obs. Publ. 35: Die Erweiterung der Lagrangeschen Dreieckslösungen im allgemeinen Dreikörperproblem. *Moulton,* Orb. chpt. 16, behauptet, daß die *Routh*sche Bedingung für Schwingungen in größerem Abstande von L_4 resp. L_5 nicht notwendig sei. Die von ihm berechneten periodischen Bahnen, für die er Zeichnungen gibt, sind jedoch nicht überzeugend, vielleicht nicht existierend, denn die wiedergegebenen Zahlen enthalten Fehler (*E. Strömgren,* l. c. Fußn. 65).

54) *Charlier* II, p. 122—137 mit Zeichnung, Lund Obs. Medd. 18 (1901).

Gruppe der kurzperiodischen Bahnen wurde von *H. R. Willard*[55]) auf immer größere Entfernung von L_4 resp. L_5 verfolgt, wobei die Kurven die elliptische Gestalt und die konzentrische Lage nicht beibehielten. Die langperiodische Gruppe fand in *E. W. Brown*[56]) einen Bearbeiter. Beide benutzten die Methode von *Hill.*[57]) *F. J. Linders*[58]) berechnete Periode und Amplitude der relativen Bahn eines Planeten der Jupitergruppe als langperiodische Libration von etwa 150 Jahren. Am größten ist die Amplitude des fünften unter diesen Planeten mit 19°29.[59]) *A. Koref*[60]) zeigte durch eine numerische Untersuchung der bisherigen Erscheinungen des Planeten (624) Hector, daß diese Bahn tatsächlich jene kurze Periode von etwa 12 Jahren hat und eine Ellipse darstellt, in der jedoch L_4 exzentrisch liegt. Dies mag daran liegen, daß die Theorie von *Charlier*, nach der L_4 in den Mittelpunkt fällt, nur die erste Potenz des Abstandes PL_4 in Betracht zieht oder an der Exzentrizität der Jupiterbahn, denn das von der Natur gestellte Problem gehört nicht zum idealisierten Fall des restringierten, sondern zu den Librationen im allgemeinen Dreikörperproblem.

V. *Bahnen um eine der endlichen Massen m_2, welche gegen das bewegliche Achsensystem rückläufig sind* (Fig. 4). Die elliptischen Koordinaten für unendlich kleine rückläufige Librationen um einen Massenpunkt entwickelte *Fischer-Petersen*[61]) in *Fourier*sche Reihen und zeigte, daß die von *Burrau* und *Strömgren*[62]) numerisch erlangten periodischen Bahnen die analytische Fortsetzung jener sind. Die Bahnen

55) *H. R. Willard,* London Astr. Soc. M. N. 73 (1913), p. 482 mit Zeichnungen unter Annahme des tatsächlichen Massenverhältnisses zwischen Sonne und Jupiter.

56) *E. Brown,* ebenda 71 (1911), p. 438 mit Zeichnungen und 72 (1912), p. 614.

57) *G. W. Hill,* Math. Works, p. 284 und Encykl. VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 6 Fußn. 46, 47 und *Charlier* II, p. 137—172.

58) *J. F. Linders,* Arkiv for Mat. Astr. 4 (1908), Nr. 20.

59) *A. Wilkens,* Untersuchungen zu einer Störungstheorie der Planeten der Jupitergruppe, Heidelberg Akad. Ber. 1918, und Astr. Nachr. 215 (1920), p. 249—264. In der letzten Arbeit findet er auch säkulare Störungen der großen Achse und damit solche der mittleren Länge bis zu 27° im Jahrhundert. Er erkennt selbst, daß, da die Glieder der Gruppe stets in der Nähe von L_4 bzw. L_5 entdeckt wurden, solche Störungen unmöglich sind, und daß das Paradoxon aus der Ungenauigkeit der vermittelnden Bahn herstammt. Für alle bisher entdeckten Mitglieder der Gruppe liegen auch die Knoten der Bahnebene nahe beieinander, besonders nahe, wenn man die beiden gegen Jupiter um 60° zurückbleibenden ausnimmt.

60) *A. Koref,* Astr. Nachr. 216 (1918), p. 235.

61) *J. Fischer-Petersen,* ebenda 202 (1916), p. 201—204 = Kopenh. Obs. Publ. 23.

62) *E. Strömgren* u. *C. Burrau,* ebenda 202 (1916), p. 185—202 = Kopenh. ebenda.

haben die Form von Kreisen um eine Masse, die aber exzentrisch liegt und von der anderen abgestoßen erscheint. Dieselben gehen dann in Formen über, die von der äußeren Masse her eingedrückt erscheinen, und enden mit einer Ejektionsbahn. Innerhalb dieser Gruppe hat die *Jacobi*sche Konstante ein Minimum, und beiderseits der diesem zugehörigen Bahn treten die demselben Werte der Konstanten zugeordneten Bahnen, die einander sehr ähnlich sind, paarweise auf.

VI. *Direkte Bahnen um eine der endlichen Massen* m_2 (Fig. 5). Die analytische Behandlung dieser Bahnen von *Hill*[57]) war der Ausgangspunkt aller Untersuchungen über die periodischen Bahnen. In den elliptischen Koordinaten E, F gab *J. Fischer-Petersen*[63]) die Entwicklung in *Fourier*sche Reihen für die Koordinaten in den unendlich kleinen Bahnen dieser Art und konnte so zeigen, daß die numerischen Ergebnisse, die *Burrau* und *Strömgren*[64]) für endliche Bahnen dieser Art ermittelt hatten, in guter Übereinstimmung mit seinen Entwicklungen waren, in desto besserer, je mehr die Bahn dem Hauptkörper genähert war, so daß die Ergebnisse des numerischen Experimentes sich als Fortsetzungen der analytisch entwickelten sehr kleinen Bahnen darstellen. Schon *G. H. Darwin* hatte dieser Gruppe ein eingehendes Studium zugewendet. Seine Ejektionsbahn, die zu beiden Seiten der ξ-Achse je eine Schleife hat, zu berechnen, war ihm annähernd gelungen, genau bestimmt wurde sie erst mit Hilfe der *Thiele*schen Transformation durch die Arbeiten der Kopenhagener Sternwarte. Seine Satellitenfamilie B (Fig. 6) bildet aber mit C (Fig. 7) ein einziges System, da die charakteristische Kurve in diesem Gebiete ein Maximum aufweist.

Die Kopenhagener Arbeiten[65]) haben den Übergang von der in Fig. 5 abgebildeten Klasse zu den *Darwin*schen B und C völlig aufgedeckt. Setzt man nämlich die Entwicklungen über die Ejektionsbahn in Fig. 5 hinaus fort, bei der man vordem den Abschluß einer Klasse sah, so erhält man nacheinander die in Fig. 8, 9, 10 und 11 gezeichneten Bahnen. Die letzte ist wiederum eine Ejektionsbahn. Die ferneren Rechnungen führten über die Bahnen in Fig. 12 und 13 zu der völlig einfachen Bahn in Fig. 14 hin, womit der Anschluß an *Darwins* Familie B erreicht ist. Verfolgt man die Reihe weiter, so gelangt man zu der der *v. Haerdtl*schen Bahn benachbarten periodi-

63) *J. Fischer-Petersen,* Astr. Nachr. 200 (1915), p. 385—404 = Kopenh. Obs. Publ. 22.

64) *E. Strömgren* u. *C. Burrau,* ebenda 200 (1915), p. 313—330 = Kopenh. Obs. Publ. 21.

65) *E. Strömgren,* Congr. Math. Helsingfors 1922 = Kopenh. Obs. Publ. 39.

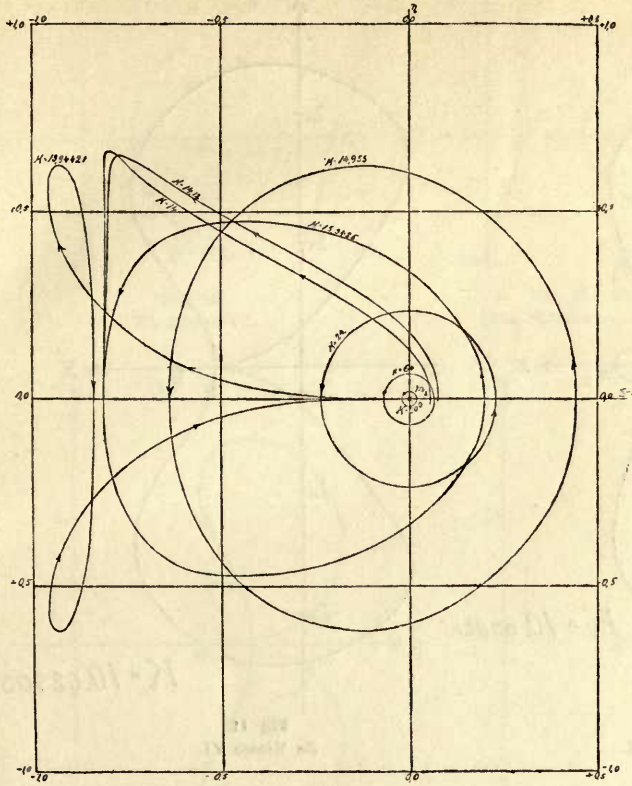


Fig. 5.
Zu Klasse VI.

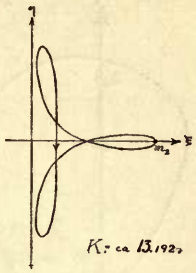


Fig. 8.
Zu Klasse VI.

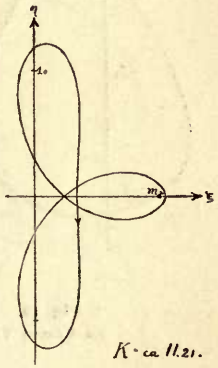


Fig. 9.
Zu Klasse VI.

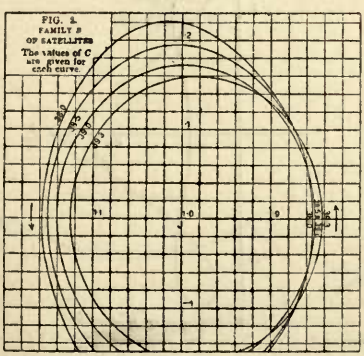


Fig. 6.
Zu Klasse VI. Aus *Darwin*, per. orb.

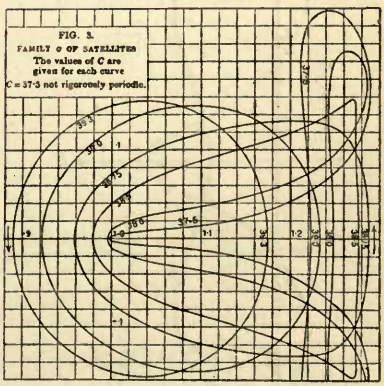


Fig. 7.
Zu Klasse VI. Aus *Darwin*, per. orb.

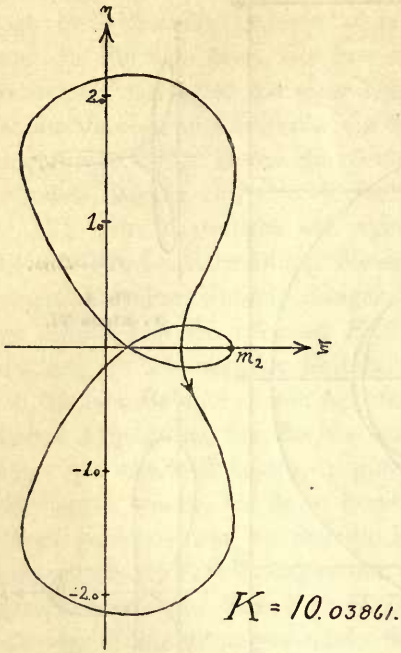


Fig. 10.
Zu Klasse VI.

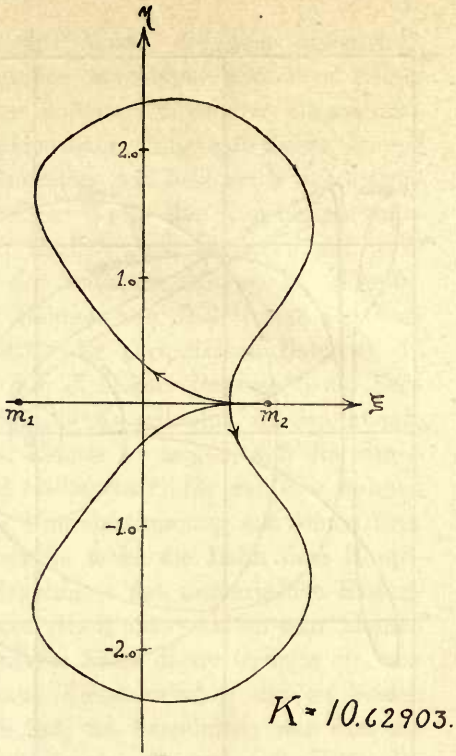


Fig 11.
Zu Klasse VI.

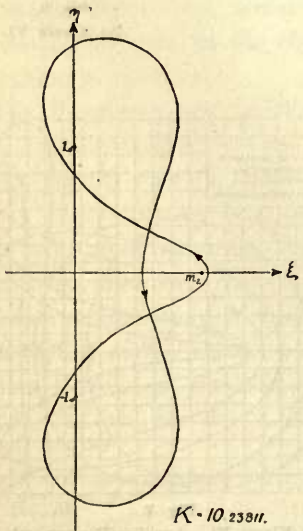


Fig. 12.
Zu Klasse VI.

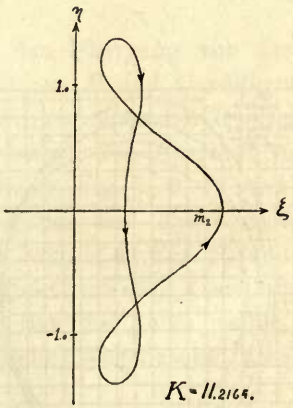


Fig 13.
Zu Klasse VI.

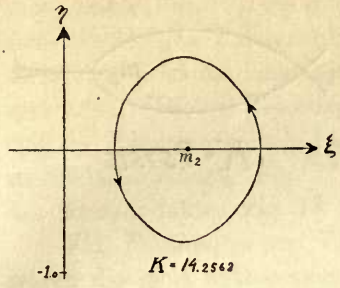


Fig. 14.
Zu Klasse VI.

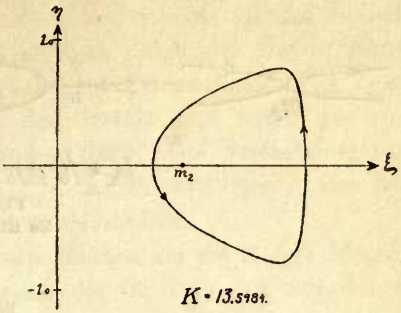


Fig. 15. Zu Klasse VI.
(Per. Nachbar zu *v. Haerdtls* Bahn.)

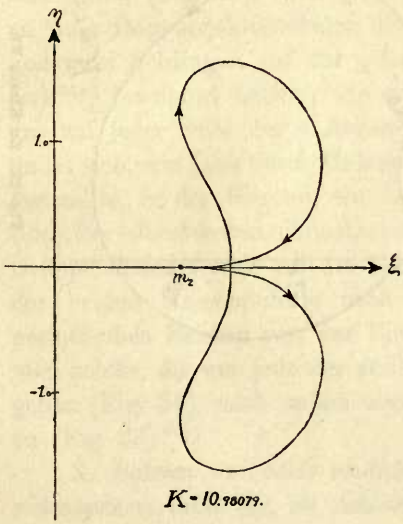


Fig. 16.
Zu Klasse VI.

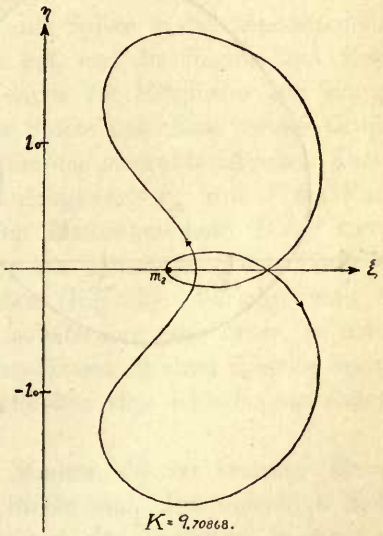


Fig. 17.
Zu Klasse VI.

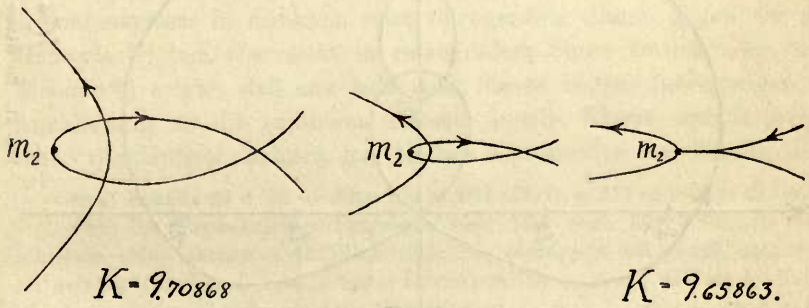


Fig. 18.
Zu Klasse VI.

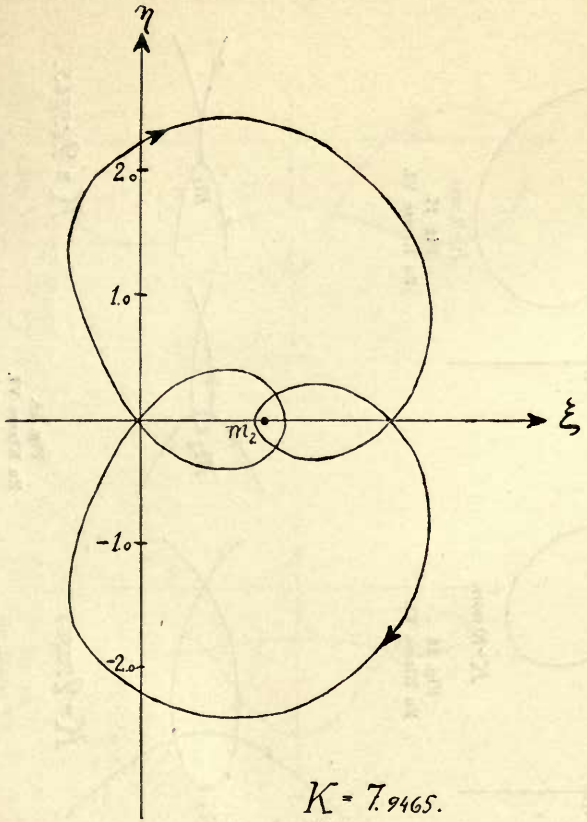


Fig. 21. Zu Klasse VI.

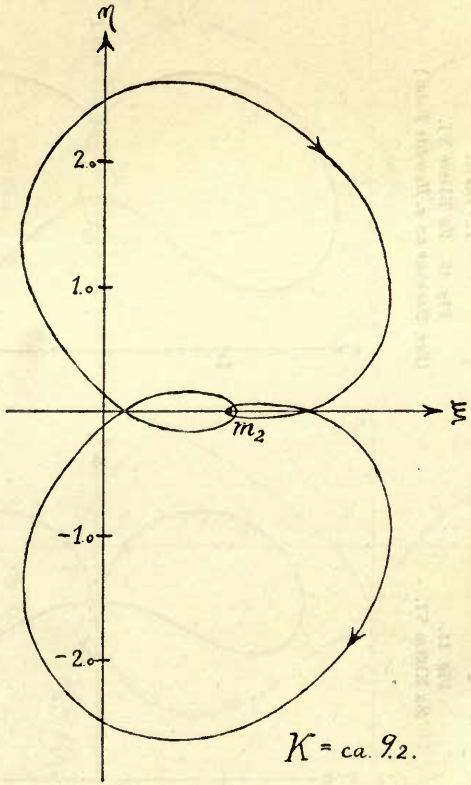


Fig. 20. Zu Klasse VI.

Fig. 19. Zu Klasse VI.

schen Bahn (Fig. 15), die schon zur Familie C gehört. Hieran schließen sich die übrigen Bahnen dieser in stetiger Folge an. Die in Fig. 16 verzeichnete ist als neue Ejektionsbahn der *Darwin*schen (Fig. 7) entsprechend. (Die Abweichungen in der Gestalt sind durch das abgeänderte Massenverhältnis hinreichend erklärt.) Die Fortsetzung führt zu Schleifenbahnen (Fig. 17, 20, 21), deren Entwicklung in der Nähe des Massenpunktes Fig. 18 und 19 verdeutlichen.

VII. *Rückläufige und* VIII. *direkte Bahnen um die andere Masse* m_1 zeigen die ganz entsprechende Gestalt, die für $m_1 = m_2$ mit der von V. und VI. symmetrisch ist.

IX. *Bahnen um beide endlichen Massen, die im bewegten System direkt sind* (Fig. 22). Man gelangt über eine Gruppe solcher Kurven zu einer Doppelejektionsbahn, die je eine Spitze in den Massenpunkten und zwei Schlingen auf der η-Achse hat, und die *Burrau* und *Strömgren*[65a]) bestimmt hatten, wie auch eines der Mitglieder der Gruppe, das auf jeder Seite der η-Achse eine Spitze hat. Eine zweite Gruppe findet sich, wie *Lous* durch Untersuchung der „charakteristischen Kurve" feststellte, in der Gegend, wo der Anfangswert F_0 von F als Funktion der *Jacobi*schen Konstanten ein Maximum hat. Diese zweite Gruppe entfernt sich auf der ξ-Achse um höchstens $\frac{1}{14}$ des Abstandes der beiden Massenpunkte nach außen (Fig. 22). Verfolgt man die periodischen Bahnen von der Ejektionsbahn aus nach innen, so erhält man solche, die um jede der endlichen Massen in einer Schleife herumgehen (Fig. 24), nach außen aber schließen sich schleifenlose Bahnen an (Fig. 23).[65b])

X. *Bahnen um beide endlichen Massen, die im bewegten Koordinatensystem rückläufig, im ruhenden direkt sind.* Die unendlich kleine Masse P wird in großer Entfernung von den endlichen in einer annähernd *Kepler*schen Bewegung begriffen sein, z. B in einer Kreisbahn um den Schwerpunkt, welche gegen ein im Raume festes Koordinatensystem in direktem oder retrogradem Sinne, gegen das sich drehende System aber stets in retrogradem Sinne zurückgelegt wird. *Moulton*[66]) zeigte, daß aus jeder von diesen beiden Bewegungen mit Annäherung an die endlichen Massen je eine Klasse einfach-periodischer rückläufiger Bahnen mit reellen Koordinaten hervorgeht, deren

65a) Ebenda 26 u. 32 = Astr. Nachr. 203 (1917), p. 277 u. 209 (1910), p. 241.

65b) Die Kopenhagener Untersuchungen, die noch nicht definitiv abgeschlossen sind, machen es für diese beiden Untergruppen fast gewiß, ebenso wie sie es auch für die nächste Gruppe wahrscheinlich machen, daß sie in Bahnen enden, in denen P sich den Librationspunkten L_4 und L_5 asymptotisch nähert.

66) *F. R. Moulton,* Trans. Amer. math. Soc. 13 (1912), p. 96—108 = *Moulton,* Orb. chapt. 12.

Abweichung von der Kreisbewegung daher rührt, daß die endlichen Massen durch eine endliche Distanz getrennt sind. *P. Pedersen*[67]) entwickelte diese für große Werte der Entfernung R vom Schwerpunkt in *Fourier*sche Reihen nach Vielfachen von

$$v = \left[1 \mp 2^{\frac{3}{2}} R^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \tfrac{3}{8} R^{-2} + \tfrac{9}{32} R^{-4}\right)\right] t,$$

wo — für die im absoluten Sinne direkte, + für die retrograde Bewegung gilt, bis zu Gliedern 7. Ordnung in R^{-1}. *Strömgren* und *Fischer-Petersen*[68]) gaben einige dieser periodischen Bahnen, die im ruhenden System direkte Bewegung aufweisen, für endliche Werte von R, die aus vielen durch numerische Integration erlangten interpoliert waren. Die äußerste derselben befindet sich mit *Pedersens* Reihenentwicklungen in guter Übereinstimmung. Von der Kreisform gehen diese Bahnen in ellipsenähnliche über, buchten sich dann in der η-Achse (für $m_1 = m_2$) ein; sodann erscheint eine Bahn, die dort zwei symmetrisch zur ξ-Achse gelegene Spitzen hat, und schließlich treten Bahnen auf, die um die η-Achse zwei symmetrische Schleifen zeigen, wie Fig. 25 und in größerem Maßstabe Fig. 26 zeigen.

XI. *Bahnen um beide Massen, die im bewegten und im ruhenden System rückläufig sind.* Die weiteren Bahnen dieser Art sind nahezu kreisförmig (Fig. 27), sie platten sich aber mit Annäherung an die Massen allmählich ab (Fig. 28), wobei die Bahngeschwindigkeit in stetigem Wachsen begriffen ist. Auf der innersten Bahn bewegt sich P mit in jedem Punkte unendlich großer Geschwindigkeit zwischen den Massen geradlinig hin und her.[65])

XII. *Unerwartete Bahnen.* Im Laufe ihrer Untersuchungen stießen *Strömgren* und *Fischer-Petersen*[69]) auf solche Bahnen, die, zur ξ-Achse symmetrisch liegend, dieselbe zwischen den Massenpunkten zweimal senkrecht schneiden, aber — auch wenn die Massen gleich sind — gegen die η-Achse unsymmetrisch sind (Fig. 29). Für einen singulären Wert der *Jacobi*schen Konstanten, nämlich ihren Maximalwert innerhalb der Klasse XII, existiert aber eine zugleich zur Klasse III gehörige, also zur η-Achse symmetrische Bahn dieser Klasse XII. Die Verfolgung dieser Bahnen führte für kleinere Werte der Konstanten zu den in Fig. 30 verzeichneten geometrischen Gebilden.[65]) Man erkennt, daß für einen dem letzten sehr nahen Werte derselben

67) *P. Pedersen,* Astr. Nachr. 207 (1918), p. 297—304 = Kopenh. Obs. Publ. 30.

68) *E. Strömgren* u. *J. Fischer-Petersen,* ebenda 207 (1918), p. 289—298 = Kopenh. Obs. Publ. 30.

69) *E. Strömgren* u. *J. Fischer-Petersen,* ebenda 203 (1916), p. 411—424 = Kopenh. Obs. Publ. 26.

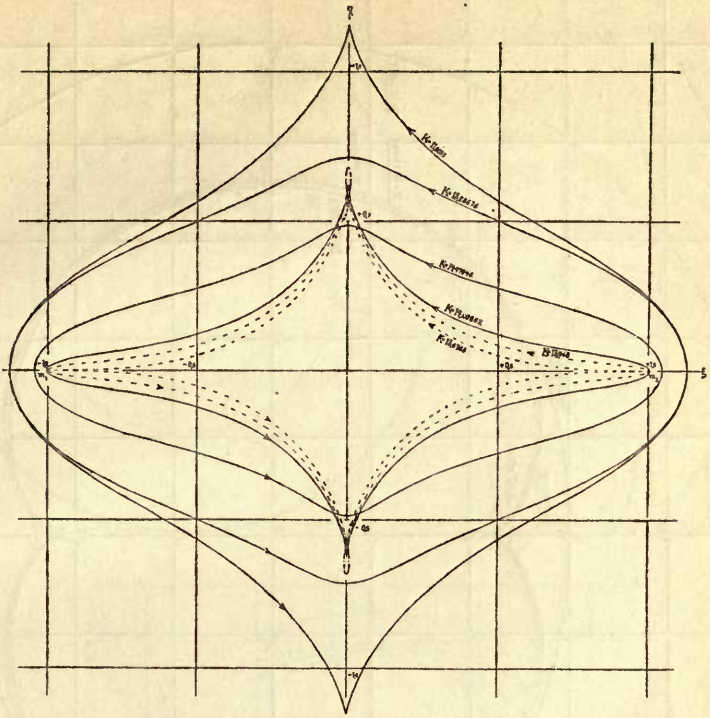


Fig. 22.
Zu Klasse IX.

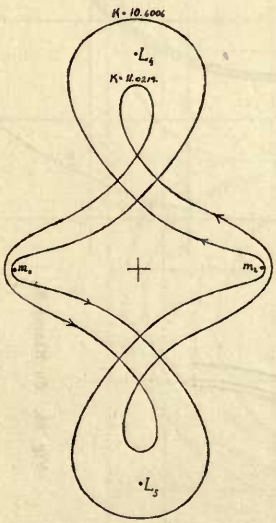


Fig. 23.
Zu Klasse IX.

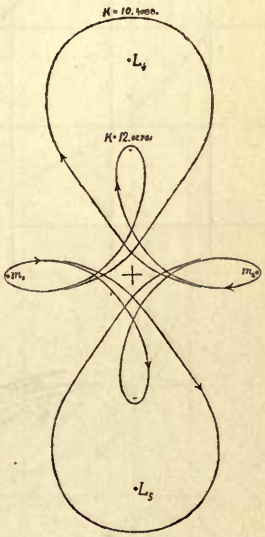


Fig. 24.
Zu Klasse IX.

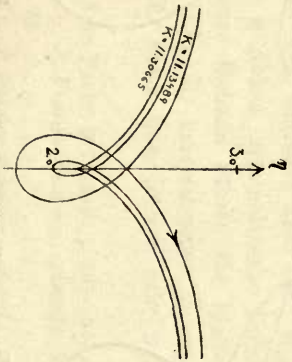


Fig. 26. Zu Klasse X.

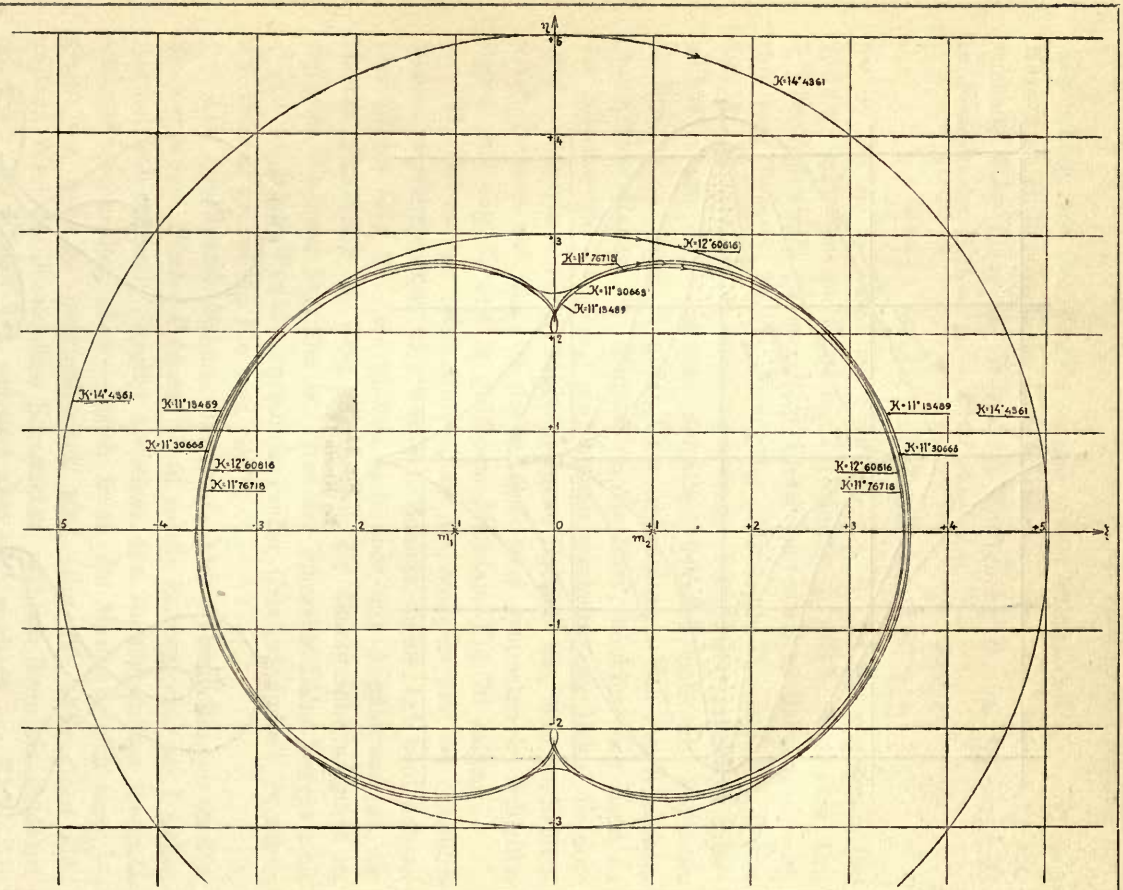


Fig. 25. Zu Klasse X.

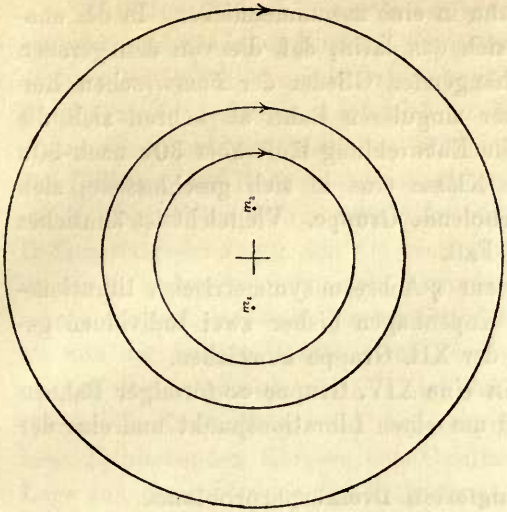


Fig. 27. Zu Klasse XI.

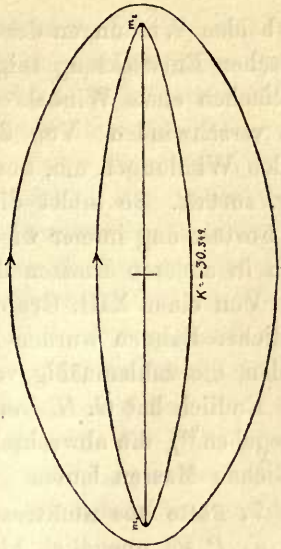


Fig. 28. Zu Klasse XI.

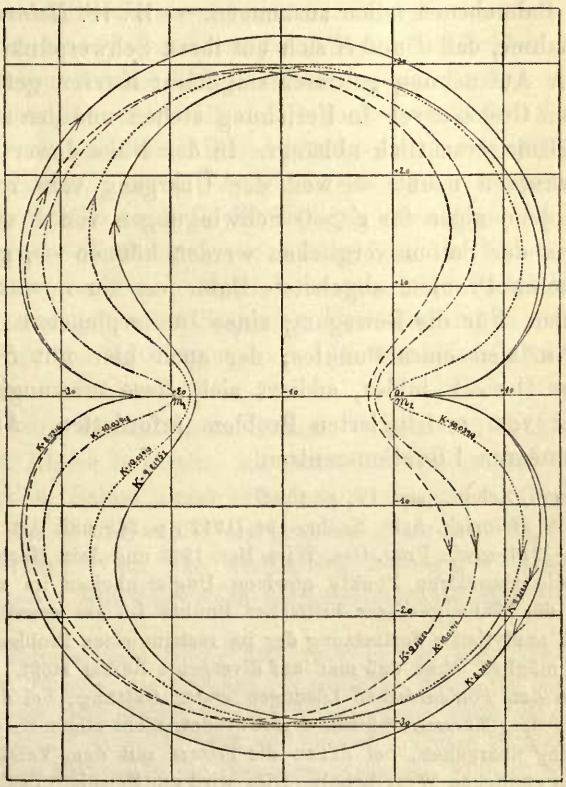


Fig. 29. Zu Klasse XII.

die beiden Windungen der Bahn in eine zusammenfließen. In der analytischen Entwicklung zeigt sich das darin, daß die von den geraden Vielfachen eines Winkels abhängenden Glieder der *Fourier*schen Reihen verschwinden. Von dieser singulären Bahn ab kehren sich die beiden Windungen um, und die Entwicklung läuft über 30b nach 30a usw. zurück. So bildet diese Klasse eine in sich geschlossene, sich bei Fortsetzung immer wiederholende Gruppe. Vielleicht ist ähnliches auch in anderen Klassen der Fall.

Von einer XIII. Gruppe zur η-Achse unsymmetrischer librationsähnlicher Bahnen wurden in Kopenhagen bisher zwei Individuen gefunden, die zahlenmäßig von der XII. Gruppe abweichen.

Endlich hat *G. H. Darwin* eine XIV. Gruppe ∞-förmiger Bahnen angegeben[70]), die abwechselnd um einen Librationspunkt und eine der endlichen Massen laufen.

7. Fälle des nichtrestringierten Dreikörperproblems.

a) P sei unendlich klein:

α) Die Bahnebenen fallen zusammen. — *W. W. Heinrich*[71]) wurde bei der Annahme, daß J und S sich um ihren Schwerpunkt in Ellipsen bewegen, zur Aufsuchung gewisser singulärer Kurven geführt, die zu den *Hill*schen Grenzkurven in Beziehung stehen und deren Form vom Massenverhältnis wesentlich abhängt. In der Nähe dieser Kurven, die er Resonanzkurven nennt — weil der Übergang vom restringierten Problem zu demjenigen für $e' > 0$ Schwingungen von P erzwingt, die der Resonanz der Saiten verglichen werden können —, gibt die aus dem einfacheren Problem abgeleitete Bahn nur ein verwaschenes Bild der wirklichen. Für die Bewegung eines Jupiterplaneten in der Nähe von L_4, d. h. also eines Punktes, der auch hier mit S und J ein gleichseitiges Dreieck bildet, addiert sich diese erzwungene Schwingung zu der vom restringierten Problem erforderten. Analoges gilt für die kollinearen Librationszentren.

70) *Darwin,* Scient. pap. IV, p. 169 ff.

71) *W. W. Heinrich,* Astr. Nachr. 194 (1912), p. 209 und Astr. Ges. Vjs. 48 (1913), p. 244—247 sowie Prag. Ges. Wiss. Ber. 1913 und Astr. Nachr. 206 (1917), p. 90: Über die singulären Punkte gewisser Ungleichheiten im asteroidischen Problem. In der Nähe gewisser kritischer Punkte ist das erweiterte Problem mit $e' > 0$ als analytische Fortsetzung der im restringierten Problem gefundenen Lösung nicht möglich, ohne daß man auf divergente Reihen stößt. So kann man überhaupt von den *Poincaré*schen Lösungen erster Gattung, bei denen die Exzentrizität mit dem Massenverhältnis verschwindet, nicht allgemein zu denen der zweiten Gattung übergehen, bei denen die erstere mit dem Verschwinden der letzteren einen endlichen Wert behält. Dies wird am Beispiele des Hekubatypus nachgewiesen (Encykl. VI 2 12, Nr. 6), wo *Whittaker* schon *Simonin* zitiert. Vgl. *Kępinski,* Astr. Nachr. 194 (1913), p. 49.

A. Wilkens[59]) geht von der langperiodischen Lösung als intermediärer Bahn aus und sucht die Störungsgleichungen unter Bevorzugung derjenigen der mittleren Länge als des stärkstgestörten Elementes zu integrieren. Auch gab er Methoden zur Ermittlung der allgemeinen und der speziellen Störungen dieser Planetoiden[72]); da die Differenz der Reziproken von PJ und SJ hier eine kleine Größe ist, so beginnt die Störungsfunktion mit Größen zweiter Ordnung; die Differentialgleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten integriert er direkt, indem er von einem besonderen System oskulierender Elemente ausgeht, bei dem der wesentliche Teil der Störungen durch J als von der nullten Ordnung von vornherein berücksichtigt ist.

β) P bewegt sich nicht in der Bahnebene von S und J. — Hier führen die Knotenlänge und die Neigung eines in der Nähe von L_4 bzw. L_5 bleibenden Körpers eine Oszillation um eine gewisse mittlere Lage aus, deren Periode der Umlaufszeit des störenden Planeten gleich ist, und zwar ohne säkulare Änderung.[71])

Räumliche Oszillationen um die Librationszentren behandelte *Moulton*[73]) und zeigte, daß sie auf elliptischen Zylindern verlaufen; die periodischen Bahnen ähneln einer Feuerzange, von der ein Griff oberhalb, der andere unterhalb der Bahnebene von S und J liegt. Die Projektion von P auf diese Ebene bewegt sich retrograd, wenn S und J direkt umlaufen. Vor die Aufgabe, ein solches Problem numerisch zu behandeln, stellte auch die Entdeckung des achten Jupitersatelliten, der in so großer Entfernung von seinem Planeten kreist, daß die Anziehung durch die Sonne seine Bewegung fast instabil macht, die sonst im Sonnensystem vorliegenden Vereinfachungen also nicht vorliegen. Die großen Schwingungen insbesondere der Bahnebene zeigten so *Crommelin* und *Cowell*.[74])

b) Alle drei Massen seien endlich. — Nur der Fall, daß sie sich in derselben Ebene bewegen, ist numerisch in einigen Fällen durchgeführt worden. Schon dieser erfordert, weil nicht wie im vorigen die Bewegung von S und von J als gegeben angesehen werden kann, die dreifache Arbeit. Den Fall anfänglich kollinearer Massen $m_0 = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ mit gegebenen Anfangsdistanzen und der Bedingung,

72) *A. Wilkens*, Astr. Nachr. 205 (1917), p. 145 und ebenda 214 (1920), p. 17—34. *W. Drucker*, der hiernach die speziellen Störungen eines Jupiterplaneten berechnete, fand hierdurch keine Erleichterung (Fußn. 19).

73) *Moulton*, Orb. p. 151—198 mit Figuren. Vorher Math. Ann. 73 (1913), p. 441—479. Die Methode ist die *Plummer*sche (Encykl. VI 2, 12, Nr. 6, Fußn. 45).

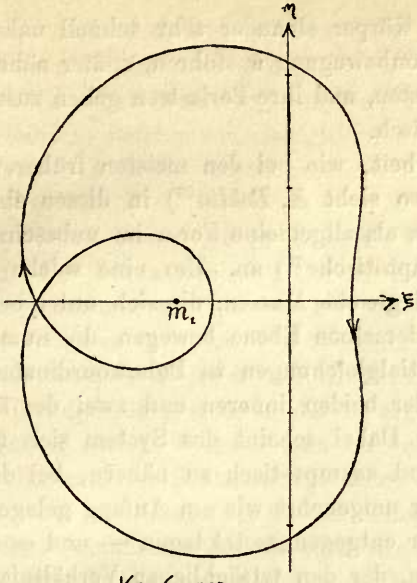
74) *P. H. Cowell* u. *A. C. D. Crommelin*, London Astr. Soc. M. N. 69 (1909), p. 430 mit Abbildungen.

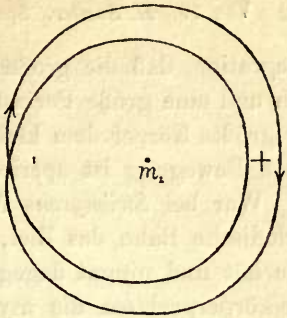
daß die Einheitsmasse um die doppelte mit den Geschwindigkeiten beginnen sollen, die jeden von beiden, falls der andere fehlte, in eine Kreisbahn um die größte Masse zwingen würde, behandelte *Strömgren*[75]) durch numerische Integration, wobei statt des hier nicht mehr gültigen Integralsatzes von *Jacobi* der von der Erhaltung der Energie als Kontrolle diente. Bei den ersten Annahmen entfernte sich der eine Einheitskörper allmählich von den beiden anderen, die sich immer mehr zusammenschließen, so daß diese schließlich ein Doppelsternsystem bilden, dessen Bewegung von dem ersten nur wenig gestört wird. Dieser beschreibt aber eine langgestreckte Ellipse um das System jener, auf welcher — wie es scheint — er später zu ihnen zurückkehrt. Durch Abänderung der Anfangsbedingungen gelang es, ein System von drei Körpern zu konstruieren, die periodisch in ihre anfängliche relative Lage gegeneinander zurückkehren (Fig. 31). Sind sie wieder kollinear, so hat jeder die Hälfte einer geschlossenen ellipsenähnlichen Figur beschrieben, die sich in der gleichen Zeit sodann völlig schließt. Ein Vergleich mit den bekannten Librationen um die kollinearen Zentren und die mathematische Untersuchung ließen erkennen, daß das Problem sich aus zwei voneinander unabhängigen periodischen Lösungen zusammensetzt: 1. der retrograden Bewegung der Einheitsmassen in indirekt homothetischen Ellipsen mit derselben Periode, mit der das System der relativen Koordinaten rotiert, 2. einer retrograden periodischen Bewegung aller drei Massen, wobei stets die gleichen in derselben Phase auf ähnlichen Ellipsen, die ungleiche mit der Phasendifferenz $\frac{1}{2}$ herumschwingt. Wir haben in 1. eine Erweiterung des *Lagrange*schen Falles, wobei statt der Kreisbewegungen der drei Massen elliptische der beiden gleichen um die größere eintreten, oder wo die endlichen Massen sich sämtlich in Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen mit wechselnden Distanzen, deren Verhältnis aber konstant bleibt; in 2. eine neue periodische Lösung des Dreikörperproblems, die den reinen Librationen um die L im restringierten Fall entspricht. Daß die erhaltene Lösung die analytische Fortsetzung jener ist, zeigen die numerischen Verhältnisse. Bei demselben Massenverhältnis, aber abgeänderten Anfangsbedingungen konnte *Strömgren* Bewegungen feststellen, in denen die kleinen Massen der großen so nahe kommen, daß fast Ejektionsbahnen entstehen (Fig. 32).

In einem von *Burrau*[76]) behandelten Falle ($m_1 : m_2 : m_3 = 5 : 4 : 3$ mit Nullwerten der Anfangsgeschwindigkeiten) ergab die numerische

75) l. c. Fußn. 37; Astr. Nachr. 182 (1909), p. 189—198 mit Tafel; Kopenh. Obs. Publ. 34 = London Astr. Soc. M. N. 80 (1920), p. 12—32.

76) *C. Burrau,* Astr. Nachr. 195 (1913), p. 112.





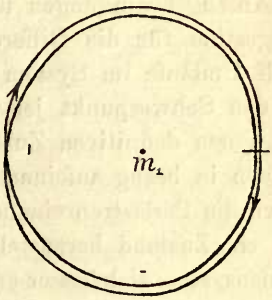


Fig. 30. Zu Klasse XII.

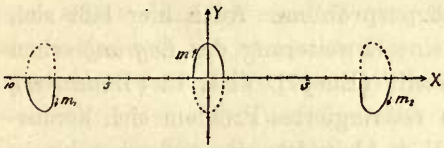


Fig. 31. Zum nichtrestringierten Dreikörperproblem.

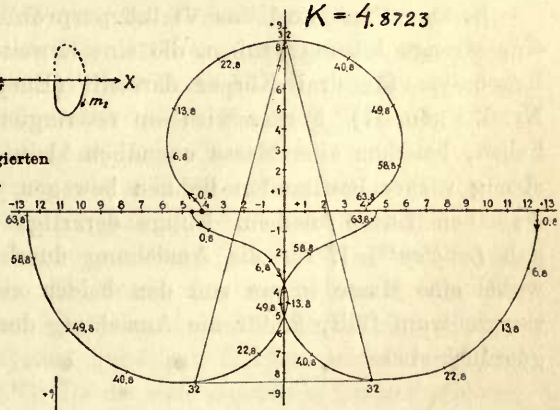


Fig. 32. Zum nichtrestringierten Dreikörperproblem.

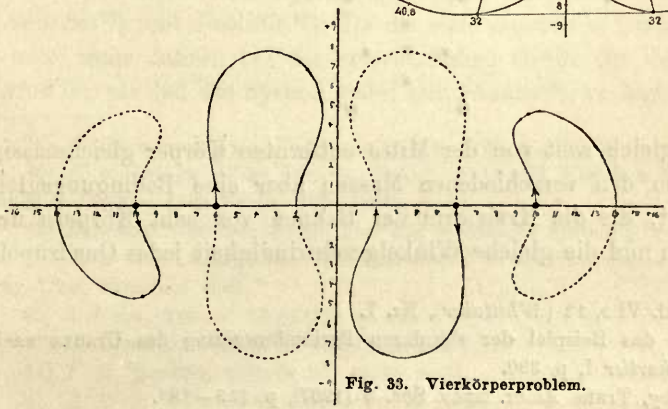
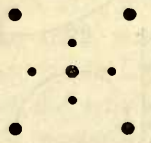


Fig. 33. Vierkörperproblem.

Integration, daß die großen Körper einander sehr schnell nahe kommen und eine große Periastronbewegung ausführen, später nähert sich der größte Körper dem kleinsten, und ihre Periastren gehen zusammen. Diese Bewegung ist aperiodisch.

War bei *Strömgrens* Arbeit, wie bei den meisten früheren, eine periodische Bahn das Ziel, so sieht *K. Bohlin*[38]) in diesen eine Singularität und nimmt dagegen als allgemeine Form im unbeschränkten Dreikörperproblem die asymptotische[77]) an. Um eine solche zu erhalten, erstreckte er für drei gleiche Massen, die sich unter bestimmten Anfangsbedingungen in derselben Ebene bewegen, die numerische Integration für die Differentialgleichungen in Polarkoordinaten über zwölf Umläufe im System der beiden inneren und zwei des äußeren um den Schwerpunkt jener. Dabei scheint das System sich tatsächlich einem definitiven Zustand asymptotisch zu nähern, bei dem die Bahnen in bezug aufeinander umgekehrt wie am Anfang gelagert sind — wo die Periastren einander entgegengesetzt lagen — und es scheint sich ein Zustand herzustellen, der den tatsächlichen Verhältnissen im Sonnensystem sich besser anschließt als die periodischen Bewegungen.[77a])

8. **Das Vier- und das Vielkörperproblem.** Auch hier läßt sich eine strenge Lösung denken, die eine Erweiterung der *Lagrange*schen Ergebnisse für drei Körper darstellt (Encykl. VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 6, Fußn. 37). Ferner wird ein restringiertes Problem sich herausheben, bei dem eine Masse unendlich klein ist, die anderen sich in streng vorher bestimmten Bahnen bewegen, alle Bewegungen aber in derselben Ebene bleiben. Einige derartige periodische Bewegungen gab *Longley*[78]) 1. für die Anziehung durch drei kollineare Massen, wobei eine Masse in ein von den beiden anderen bestimmtes Librationszentrum fällt, 2. für die Anziehung durch neun Körper, die so geordnet sind



und wo die gleich weit von der Mitte entfernten Körper gleichmassig sind, zwischen den verschiedenen Massen aber eine Bedingungsgleichung besteht, die die Kreisform der Bahnen von acht Körpern um den mittelsten und die gleiche Winkelgeschwindigkeit jedes Quadrupels

77) Encykl. VI 2, 12 (*Whittaker*), Nr. 7.

77a) Vgl. das Beispiel der säkularen Perihelbewegung des Uranus nach *Stockwell* bei *Charlier* I, p. 390.

78) *Longley,* Trans. Amer. math. Soc. 8 (1907), p. 159—188.

bestimmt, 3. für drei Massen, von denen zwei um den dritten mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit umlaufen. Die angewandte Methode ist hier analytisch, nicht numerisch.

Periodische Bahnen von vier gleichmassigen Körpern in der Ebene zeigt ein von *A. Möller* durch numerische Integration erledigtes Beispiel[79]) (Fig. 33).

Die Natur bietet einige Beispiele in den mehrfachen Sternsystemen. Das bekanteste ist ξ Cancri: Zwei Körper A und B laufen in einem Abstand von 0″6 bis 1″0 um den gemeinsamen Schwerpunkt, ein dritter C ist in 5″5 Abstand von diesem sichtbar. Ein vierter unsichtbarer D ist in 0″2 Entfernung von C zu supponieren, um den Unregelmäßigkeiten in der Bewegung dieses gerecht zu werden. Nach *H. Seeliger*[80]) kann man die bekannten Bewegungen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, die bei der Enge des ersten Paares sowohl in Distanz als in Positionswinkel erheblich sind, durch verschiedene Annahmen über die relativen Massen beider Systeme und die Lage ihrer Bahnebenen erklären, weil die Entfernung beider Paare im Verhältnis zur Dimension jedes einzelnen sehr erheblich ist. Schreibt man selbst dem System CD eine im Verhältnis zu AB unendlich kleine Masse zu, so ist es möglich, die Bewegung dieses Systems noch hinreichend darzustellen; doch gibt die Methode der kleinsten Quadrate ein recht bedeutendes Verhältnis der beiden Massen $(C+D):(A+B)$. Diese für das Planetensystem unmögliche Unsicherheit erklärt *Seeliger* leicht aus der Theorie. Ebenso wurde *R. Schorr*[81]) den Beobachtungen des dreifachen Systems ξ Scorpii gerecht, ohne eine Einwirkung des entfernteren Sternes auf das engere Paar ($a = 1''3$) als notwendig anzunehmen. Auch für die Erklärung der Anomalien in den Bewegungen des Doppelsterns 70 Ophiuchi sind mehrfach Hypothesen über einen dritten zum System gehörigen Körper gemacht worden. So von *See*[82]) und *Doolittle*.[83]) Da die sich ergebende Umlaufszeit von 36 oder mehr Jahren bei der erforderlichen Größe der dritten Masse zu groß ist, als daß das System stabil sein könnte[84]), verlegte *A. Prey*[85])

79) *E. Strömgren,* Astr. Nachr. Jubil.-Nr. 1921, p. 26—28.

80) *H. v. Seeliger,* Wien Ber. 44 (2. Abt. 1881) und München Akad. Abh. 17 (1892); *P. Harzer,* Astr. Nachr. 116 (1887), p. 49.

81) *R. Schorr,* Untersuchungen über das mehrfache System ξ Scorpii, Inaug.-Diss. München 1889. Analytische Untersuchungen für solche Systeme gibt *A. Zapp,* Inaug.-Diss. München 1908.

82) *J. J. See,* Astr. J. 16 (1896), p. 17.

83) *E. Doolittle,* ebenda 17 (1897), p. 121.

84) *F. R. Moulton,* ebenda 20 (1899), p. 33.

85) *A. Prey,* Wien Akad. Denkschr. 72 (1901).

die dritte Masse in so große Ferne, daß sie in der betrachteten Zeit nur eine geringe Bewegung macht, während *F. Pavel*[86]) aus seinen Rechnungen eine Periode der Störung von nur $6^1/_2$ Jahren fand und demnach einen nahen Begleiter des Hauptsterns annimmt.

Für die Bewegung eines kleinen Körpers in einem kugelförmigen Sternhaufen, in dem die Dichte lediglich eine Funktion des Abstandes vom Mittelpunkte ist, gilt der Satz von der Erhaltung der Flächen und der Energiesatz. Für das aus Beobachtungen als mindestens annähernd gültig nachgewiesene Dichtegesetz $3^{-\frac{5}{2}}\varrho = (3 + r^2)^{-\frac{5}{2}}$, wo r den Abstand vom Zentrum, ϱ die Dichte bedeutet, führte *Strömgren*[87]) die Integration der Bewegungsgleichungen in geschlossener Form durch elliptische Integrale aus und die Diskussion der möglichen Bahnen durch. Es sind annähernd, von singulären Fällen abgesehen, exzentrische Ellipsen mit einer direkten Bewegung der Apsidenlinie, die mit denen im Sonnensystem verglichen als sehr stark zu bezeichnen ist. Die Geschwindigkeit bleibt auch für Körper, die durch den Mittelpunkt des Systems laufen, immer endlich, hat aber dort ihren Maximalwert; die größten transversalen Geschwindigkeiten sind aber in Bahnen, die fern vom Mittelpunkte verlaufen, zu erwarten.

---

86) *F. Pavel,* Astr. Nachr. 212 (1921), p. 347. Da die bisherigen Ergebnisse auf Grund einer Dreikörperhypothese nicht voll befriedigen, nehmen *O. Lohse,* Potsdam Astroph. Obs. Publ. 20, Nr. 58, St. 1 (1908) und *H. E. Lau,* Paris Bull. astr. 26 (1909), p. 433 an, daß die Anomalien auf systematische Beobachtungsfehler zurückgehen.

87) *E. Strömgren,* Astr. Nachr. 203 (1916), p. 17—24.

(Abgeschlossen im Dezember 1922.)

Berichtigung.

In Fußnote 13), p. 961 ist Z. 7ff. zu lesen:

Es ist vielmehr der daraus resultierende $\log a$ vorher um $-\frac{1}{6}m'\alpha^3$ zu korrigieren, wenn der vernachlässigte störende Planet ein äußerer, um $\frac{1}{3}m'\left(1 + \frac{3}{4}\alpha^2\right)$, wenn derselbe ein innerer mit der Masse m' ist .... Diese Unterlassung ist auch heute noch verbreitet.

VI 2, 20. ROTATION DER HIMMELSKÖRPER, PRÄZESSION UND NUTATION DER STARREN ERDE.

VON

J. BAUSCHINGER

IN LEIPZIG.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung. Geschichte.
2. Allgemeine Theorie der Drehung.
3. Anwendung der Drehungstheorie auf die Erde.
4. Drehungstheorie der Erde. Zahlenwerte.
5. Übergang zur astronomischen Praxis.
6. Die Bestimmung der Präzessionskonstante.
7. Theoretische Behandlungen.
8. Die Polhöhenschwankungen.

Literatur.

J. d'Alembert, Traité de la précession des équinoxes, Paris 1749.

P. S. Laplace, Traité de Mécanique céleste, Tome second, Livre V, Chap. I. Zahlenwerte: Livre VI, No. 31.

S. D. Poisson, Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, Mémoires de l'Institut, VII (1827), IX (1830).

L. Poinsot, Précession des équinoxes, Connaissance des Temps pour 1858.

J. A. Serret, Theorie du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, Ann. de l'Observatoire de Paris, Mém. t. V (1859).

C. A. F. Peters, Numerus constans Nutationis, Mém. de l'Ac. St. Pétersbourg, t. 3 (1844).

Th. v. Oppolzer, Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, Erster Band, Zweite Aufl., 1. Teil, 2. Abschn. (1882).

F. Tisserand, Traité de Mécanique céleste, Tome II (1891).

S. Newcomb, A new determination of the Precessional constant with the resulting Precessional motions, Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol. VIII. Washington 1898.

F. Klein und *A. Sommerfeld,* Über die Theorie des Kreisels, Heft III, Astronomische und geophysikalische Anwendungen, Leipzig 1903.

L. de Ball, Theorie der Drehung der Erde, Wien Ak. Denkschr. 81 (1908).

J. Bauschinger, Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906.

S. Newcomb, Spherical Astronomy, New York 1906.

L. de Ball, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Leipzig 1912.

1. Einleitung. Geschichte. Die Mechanik des Himmels trennt bei der Betrachtung der Bewegungen im Sonnensystem die Bewegung der Schwerpunkte der einzelnen Planeten (mit ihren Satelliten) von der Bewegung der Hauptkörper um diese Schwerpunkte (vgl. VI 2, 15 (*Sundman*), Nr. 2), was nach dem Grundsatz der Mechanik von der Relativbewegung gestattet ist (vgl. IV 6 (*Stäckel*), Nr. 29). Nur diese letztere Bewegung, die Rotationsbewegung, ist Gegenstand dieses Artikels. Ferner wird noch vorausgesetzt werden, daß der rotierende Körper ein unveränderlicher, starrer Körper sei im Sinne der Dynamik (vgl. IV 6, 25 ff.), wenn auch anzunehmen ist, daß die Planeten dies sicher nicht sind oder nicht immer waren.

Die Behandlung des Problems führt zur Erklärung der Präzession der Längen, die zuerst von *Hipparch* aus den Beobachtungen geschlossen wurde; *Copernikus* erkannte die Erscheinung als eine Bewegung der Pole der Erde um die Pole der Ekliptik, und *Newton* erklärte sie durch die anziehende Wirkung von Sonne und Mond auf die äquatoriale Anschwellung der als Rotationsellipsoid gedachten Erde. Die weitere Geschichte ist in *Laplace*, Mécanique céleste, Livre XIV, Chap. I, dargestellt und sei daraus nur hervorgehoben, daß *d'Alembert* in seinem „Traité de la précession des équinoxes" nicht nur die Präzession viel genauer behandelte, als es *Newton* geometrisch möglich war, sondern auch die kurz vorher von *Bradley* durch Beobachtung entdeckte Nutation völlig klarlegte; die Fortführung und elegantere Darstellung gelang später *Euler*, *Laplace* und *Poisson* (s. Literaturübersicht).

Was die hier gemachte Voraussetzung eines starren Körpers anlangt, so ist hinzuzufügen, daß *Poincaré*[1]) nachgewiesen hat, daß für eine freie homogene oder nicht homogene Flüssigkeit die Präzession und Nutation dieselben sind, wie für einen festen Körper; ebenso daß *Schweydar*[2]) gezeigt hat, daß die von der Elastizität der Erde herrührenden Änderungen der Präzession und Nutation so klein sind, daß sie sich der Beobachtung entziehen.

2. Allgemeine Theorie der Drehung. Die Theorie der Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt beruht auf den allgemeinen dafür in der Mechanik aufgestellten Formeln[3]); da sich jedoch in der astro-

1) *H. Poincaré*, Sur la précession des corps déformables, Paris Bull. Astr. 27 (1910), p. 321; vgl. auch *S. Oppenheim*, Über die Rotation und Präzession eines flüssigen Sphäroids, Wien Ak. Ber. 85 (1885), p. 528 u. Astr. Nachr. 113 (1885), p. 209.

2) *W. Schweydar*, Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper und im Raum, Astr. Nachr. 203 (1916), p. 101.

3) Encykl. IV 1, 6 (*P. Stäckel*), p. 552 ff.

nomischen Literatur so wenig wie in der Mechanik eine feste Bezeichnungsweise eingebürgert hat[3]), sind wir genötigt, die hier gebrauchte und die damit entstehenden Formeln vorauszuschicken. Wir nennen das im Raum feste Koordinatensystem x, y, z und das im drehenden Körper feste ξ, η, ζ, bezeichnen die Richtungscosinus zwischen beiden nach dem Schema:

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

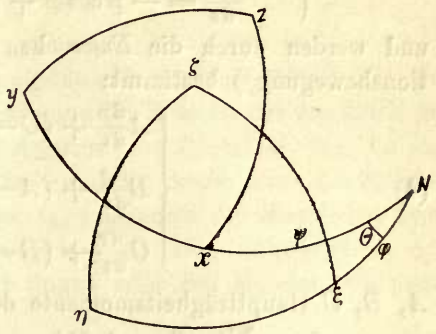


Fig. 1.

definieren die *Euler*schen Winkel θ, φ, ψ, wie in beistehender Figur bezeichnet, und haben dann:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 = +\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta \\ \alpha_2 = -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta \\ \alpha_3 = -\sin\varphi\sin\theta \\ \beta_1 = -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \\ \beta_2 = +\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta \\ \beta_3 = -\cos\varphi\sin\theta \\ \gamma_1 = +\sin\psi\sin\theta \\ \gamma_2 = +\cos\psi\sin\theta \\ \gamma_3 = +\cos\theta. \end{cases}$$

Die Systeme sind rechtsläufige und in demselben Sinn werden alle Winkel und Drehungen angenommen; N ist der aufsteigende Knoten von xy auf $\xi\eta$.

Die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit um die ξ-, η-, ζ-Achse seien p, q, r; diese stehen mit den *Euler*schen Winkeln in dem Zusammenhang[4])

$$(2)\quad \begin{cases} p = \sin\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\dfrac{d\theta}{dt} \\ q = \cos\varphi\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt} \\ r = -\cos\theta\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

oder umgekehrt

4) Encykl. IV 1, 6 (*P. Stäckel*), p. 564.

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} = +p\sin\varphi + q\cos\varphi \\ \sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt} = +p\sin\varphi\cos\theta + q\cos\varphi\cos\theta + r\sin\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -p\cos\varphi + q\sin\varphi \end{cases}$$

und werden durch die *Euler*schen Differentialgleichungen der Rotationsbewegung[5]) bestimmt:

$$(4)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = L \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp = M \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = N \end{cases}$$

A, B, C Hauptträgheitsmomente des rotierenden Körpers,

$$L = \sum(\eta_n Z_n - \xi_n H_n), \qquad M = \sum(\xi_n \Xi_n - \xi_n Z_n),$$
$$N = \sum(\xi_n H_n - \eta_n \Xi_n)$$

Ξ_n, H_n, Z_n Komponenten der äußeren Kräfte, parallel den Achsen $\xi\eta\zeta$.

Die resultierende Drehungsgeschwindigkeit aus p, q, r ist

$$\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

und vollzieht sich um die Achse — die instantane Drehungsachse —, deren Richtungscosinus gegen die Achsen $\xi\eta\zeta$ bzw. xyz sind:

$$(5)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{p}{\omega} & \cos\mathsf{A} = \dfrac{\alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r}{\omega} \\ \cos\beta = \dfrac{q}{\omega} & \cos\mathsf{B} = \dfrac{\alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r}{\omega} \\ \cos\gamma = \dfrac{r}{\omega} & \cos\Gamma = \dfrac{\alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r}{\omega} \end{cases}$$

Wirken auf die Massenteilchen m_n des rotierenden Körpers nach dem *Newton*schen Gesetz anziehende Kräfte, die ihren Sitz in dem Massenzentrum M mit den Koordinaten $\xi_0\eta_0\zeta_0$ haben, so lassen sich die Komponenten $\Xi_n H_n Z_n$ und somit die LMN durch die Differentialquotienten der Kräftefunktion

$$(6)\qquad U = k^2 M\sum\frac{m_n}{r_n}, \quad r_n^2 = (\xi_0-\xi_n)^2 + (\eta_0-\eta_n)^2 + (\zeta_0-\zeta_n)^2$$

ausdrücken:

$$(7)\qquad \begin{cases} L = \zeta_0\dfrac{\partial U}{\partial \eta_0} - \eta_0\dfrac{\partial U}{\partial \zeta_0} \\ M = \xi_0\dfrac{\partial U}{\partial \zeta_0} - \zeta_0\dfrac{\partial U}{\partial \xi_0} \\ N = \eta_0\dfrac{\partial U}{\partial \xi_0} - \xi_0\dfrac{\partial U}{\partial \eta_0} \end{cases}$$

5) Encykl. IV 1, 6 (*P. Stäckel*), p. 575.

oder nach Einführung der *Euler*schen Winkel:

$$(8)\qquad \begin{cases} L = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi} + \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) - \cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta} \\ M = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi} + \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta} \\ N = \frac{\partial U}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

3. Anwendung der Drehungstheorie auf die Erde. Bei der Anwendung auf die Rotationsverhältnisse der Erde ist der Ausdruck (6) der Kräftefunktion U unter den Annahmen aufzustellen, daß die anziehenden Kräfte ihren Sitz im Zentrum der Sonne bzw. des Mondes haben und daß die Massenteilchen m_n zusammen die Masse der Erde ausmachen. Ist ϱ_n die Entfernung von m_n vom Schwerpunkt der Erde und r_0 die Entfernung der Sonne oder des Mondes von demselben Punkt, so wird:

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \left(2\frac{\xi_0\xi_n + \eta_0\eta_n + \zeta_0\zeta_n}{r_0^2} - \frac{\varrho_n^2}{r_0^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r_0}(1-\delta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 + \frac{5}{16}\delta^3 + \cdots\right)$$

Da die Dimensionen der Erde gegen die Entfernung r_0 sehr klein sind, kann eine Entwicklung von U nach Potenzen von δ, das von der Ordnung $\frac{\varrho_n}{r_0}$ ist, zugrunde gelegt werden. Zerlegt man U in Glieder nullter, erster, ... Ordnung $U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, so wird:

$$(9)\qquad \begin{cases} u_0 = k^2 M\sum\frac{m_n}{r_0} = \frac{k^2 ME}{r_0} & E = \text{Erdmasse.} \\ u_1 = k^2 M\sum m_n\frac{\xi_0\xi_n + \eta_0\eta_n + \zeta_0\zeta_n}{r_0^3} \\ u_2 = \frac{3}{2}k^2 M\sum m_n\frac{(\xi_0\xi_n + \eta_0\eta_n + \zeta_0\zeta_n)^2}{r_0^5} - \frac{1}{2}k^2 M\sum m_n\frac{\varrho_n^2}{r_0^3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht, daß bei Annahme des Koordinatenanfangspunktes im Schwerpunkt der Erde $u_1 = 0$ wird, ferner, daß bei Verlegung der Achsen $\xi\eta\zeta$ in die Hauptträgheitsachsen des Massensystems

$$(10)\qquad u_2 = \frac{3}{4}\frac{k^2 M}{r_0^3}\left(\frac{\xi_0^2}{r_0^2}(B + C - A) + \frac{\eta_0^2}{r_0^2}(C + A - B) + \frac{\zeta_0^2}{r_0^2}(A + B - C) - \frac{1}{3}(A + B + C)\right)$$

wird, endlich, daß die Hypothese einer symmetrischen Anordnung der m_n um die Achsen $\xi\eta\zeta$ $u_3 = 0$ zur Folge hat. Da Glieder vierter Ordnung nie in Frage kommen, ferner die Annahme gemacht werden kann, daß die Erde ein Rotationsellipsoid ist, dessen Umdrehungsachse mit der ζ-Achse zusammenfällt, was $A = B$ zur Folge hat,

und da endlich in den Gleichungen (4) und (8) nur die Differentialquotienten von U nach φ, ψ, θ vorkommen, so reduziert sich der ganze in Betracht kommende Teil der Kräftefunktion auf

$$\overline{U} = \frac{3}{2}\frac{k^2 M}{r_0^5}(A - C)\,\xi_0^2. \tag{11}$$

Hierin ist

$$\xi_0 = \sin\psi \sin\theta \cdot x_0 + \cos\psi \sin\theta \cdot y_0 + \cos\theta \cdot z_0, \tag{12}$$

wenn mit $x_0 y_0 z_0$ die Koordinaten von M im festen System xyz bezeichnet werden. Da hieraus

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial \varphi} = 0 \tag{13}$$

folgt, so gibt die letzte Gleichung (4), wenn darin noch $B = A$ gesetzt wird[6]): $\frac{dr}{dt} = 0$, d. h. die Rotationsgeschwindigkeit r um die Hauptträgheitsachse ζ ist konstant. Wird diese Konstante gleich ω' gesetzt und außerdem:

$$\frac{C - A}{A}\omega' = \mu, \tag{14}$$

so wird aus den beiden ersten Gleichungen (4) mit Rücksicht auf (8):

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \mu q = \frac{\sin\varphi}{A\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{\cos\varphi}{A}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{dq}{dt} - \mu p = \frac{\cos\varphi}{A\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} + \frac{\sin\varphi}{A}\frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{cases} \tag{15}$$

Nimmt man dazu noch (3)

$$\begin{cases} \sin\theta\frac{d\psi}{dt} = +p\sin\varphi + q\cos\varphi \\ \frac{d\theta}{dt} = -p\cos\varphi + q\cos\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega' + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}, \end{cases} \tag{16}$$

so ist in diesen Gleichungen nunmehr das ganze Problem begriffen, da es in letzter Linie auf die Bestimmung von ψ und θ ankommt.

Aus (15) folgt nach (16):

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{17}$$

und aus (16) mittelst (15):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\right) = -\mu'\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{A\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \psi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \mu'\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{cases} \tag{18}$$

6) Über die Durchführung des Problems ohne diese Annahme $B = A$ siehe *Tisserand,* Méc. cél. T. II, p. 383 ff., wo auch die Literatur angegeben ist.

wenn gesetzt wird:

$$\mu + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{A}\omega' + \cos\theta\frac{d\psi}{dt} = \mu'. \tag{19}$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

folgt daraus:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = +\dfrac{A}{C\omega'}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\right) - \dfrac{1}{C\omega'\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial\theta} \\ \qquad\qquad - \dfrac{A}{C\omega'}\cos\theta\left(\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 - \dfrac{1}{\sin\theta^2}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{A}{C\omega'}\dfrac{d}{dt}\left(\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}\right) + \dfrac{1}{C\omega'\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial\psi} \\ \qquad\qquad - \dfrac{A}{C\omega'}\cos\theta\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases} \tag{20}$$

Die ersten Glieder rechts sind von den äußeren Kräften unabhängig; es ist wichtig darzulegen, daß sie verschwindend klein sind. Setzt man $U = 0$, so gibt die Gleichung (17) $p^2 + q^2 = \text{const.}$, woraus die Berechtigung des Ansatzes

$$\begin{cases} p = g\cos\mu t + h\sin\mu t \\ q = g\sin\mu t - h\cos\mu t \end{cases} \qquad g \text{ und } h \text{ Konstante} \tag{21}$$

folgt. Die Richtungscosinus der instantanen Drehungsachse J gegen das System $\xi\eta\zeta$ (Hauptträgheitsachsen des Ellipsoids) werden also nach (5)

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\omega}(g\cos\mu t + h\sin\mu t) = \sin\gamma\cos\Gamma \\ \cos\beta = \dfrac{1}{\omega}(g\sin\mu t - h\cos\mu t) = \sin\gamma\sin\Gamma \\ \cos\gamma = \dfrac{\omega'}{\omega} \end{cases} \tag{22}$$

$$\omega^2 = g^2 + h^2 + \omega'^2$$

und Γ ist der Winkel zwischen ζJ und $\zeta\xi$; setzt man $g = m\cos\sigma$ und $h = m\sin\sigma$, so wird die Lage von J gegen das System $\xi\eta\zeta$ bestimmt durch:

$$\begin{cases} \sin\gamma\cos\Gamma = \dfrac{m}{\omega}\cos(\mu t - \sigma) \\ \sin\gamma\sin\Gamma = \dfrac{m}{\omega}\sin(\mu t - \sigma) \\ \cos\gamma = \dfrac{\omega'}{\omega} \end{cases} \tag{23}$$

und es wird somit:

$$\begin{cases} \sin\gamma = \dfrac{m}{\omega} = \sqrt{\dfrac{g^2+h^2}{g^2+h^2+\omega'^2}}, \quad \Gamma = \mu t - \sigma, \\ \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{1}{\omega'}\sqrt{g^2+h^2} = \dfrac{m}{\omega'} \end{cases} \tag{24}$$

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

d. h. die Achse J beschreibt um die Achse ξ einen Kegelmantel von der Öffnung γ mit der konstanten Geschwindigkeit $\mu = \frac{C-A}{A}\omega'$; die Periode wird, da sich μ aus den Beobachtungen zu 0,02072 bestimmt (s. Nr. 4)

(25) $$P = \frac{2\pi}{\mu} = 305 \text{ mittlere Sonnentage } (\textit{Euler}\text{sche Periode}).$$

Durch Messungen der Polhöhe eines festen Punktes auf der Erdoberfläche ist festgestellt, daß γ den Betrag von 0″,3 nicht überschreitet und daß die Periode des Hauptteiles der Bewegung mit der *Euler*schen nicht übereinstimmt. Es fällt also die instantane Drehungsachse stets sehr nahe mit der Umdrehungsachse des Rotationsellipsoides zusammen, d. h. m und somit auch g und h sind sehr kleine Größen. Werden sie nicht direkt zu Null angenommen, so wird der Betrag, mit dem sie nach (20) auf ψ und θ einwirken, gegeben sein durch

$$\frac{A}{C\omega'}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{A}{C\omega'}\frac{1}{\sin\theta}m\cos(\varphi+\mu t-\sigma) = -\frac{A}{C}\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sin\theta}\cos(\varphi+\mu t-\sigma)$$

$$-\frac{A}{C\omega'}\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = -\frac{A}{C\omega'}m\sin(\varphi+\mu t-\sigma) \qquad = -\frac{A}{C}\operatorname{tg}\gamma\sin(\varphi+\mu t-\sigma)$$

nach (16) und (21). Da A und C nahe gleich sind und die Periode von

$$\varphi + \mu t = \frac{C}{A}\omega' t + \int\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\,dt$$

sehr nahe ein Sterntag ist, so handelt es sich also um Glieder von nahe eintägiger Periode mit einer Amplitude von der Ordnung der Polschwankungen. Diese Glieder verschwinden mit γ, d. h. sobald man annimmt, daß die instantane Drehungsachse J mit der Umdrehungsachse des Rotationsellipsoids zusammenfällt. Wenn nun auch die Beobachtung zeigt, daß dieses nur sehr nahe zutrifft, so ist man doch genötigt, das volle Zusammenfallen anzunehmen, da die Konstanten in ψ und θ nur unter dieser Voraussetzung durch Beobachtung bestimmt werden können; dann aber sind die Glieder streng gleich Null. In noch höherem Grade gilt dies von den dritten Gliedern rechts in (20), die von der zweiten Ordnung sind. Es ist jetzt bewiesen, daß die Gleichungen (20) sich auf die folgenden reduzieren:

(26) $$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{1}{C\omega'\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial\theta} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = +\dfrac{1}{C\omega'\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial\psi}, \end{cases}$$

die zuerst von *Poisson*[7]) aufgestellt sind.

7) Siehe Literaturübersicht.

Behufs Integration der Gleichungen (26) sind $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}$ und $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}$ als Funktionen der Zeit zu entwickeln, wofür der Ausdruck (11) gibt:

$$(27)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi} = \frac{3k^2M}{r_0^5}(A-C)\frac{\xi_0}{\sin\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\psi} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{3k^2M}{r_0^5}(A-C)\frac{\xi_0}{\sin\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}. \end{cases}$$

Werden hier durch

$$(28)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \sin\theta\sin\psi\cdot x_0 + \sin\theta\cos\psi\cdot y_0 + \cos\theta\cdot z_0 \\ x_0 = r_0\cos b_0\cos l_0, \quad y_0 = r_0\cos b_0\sin l_0, \quad z_0 = r_0\sin b_0 \end{cases}$$

die Polarkoordinaten $r_0 l_0 b_0$ des anziehenden Körpers eingeführt, so folgt:

$$(29)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi} = 3k^2M(A-C)\frac{K}{r_0^3} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta} = 3k^2M(A-C)\frac{Q}{r_0^3}, \end{cases}$$

wenn gesetzt wird

$$(30)\qquad \begin{cases} K = (\sin\theta\cos b_0\sin(l_0+\psi)+\cos\theta\sin b_0)\cos b_0\cos(l_0+\psi) \\ Q = (\sin\theta\cos b_0\sin(l_0+\psi)+\cos\theta\sin b_0)(\operatorname{cotg}\theta\cos b_0\sin(l_0+\psi)-\sin b_0). \end{cases}$$

Als anziehende Körper kommen nur zwei in Betracht, die Sonne und der Mond, deren Wirkungen sich einfach summieren. Bezeichnet man alle auf die Sonne bezüglichen Größen mit den bisherigen Buchstaben und fügt den zum Mond gehörigen einen oberen Index bei (r_0', l_0', b_0', M', K', Q'), so wird:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi} = 3k^2(A-C)\left(\frac{MK}{r_0^3}+\frac{M'K'}{r_0'^3}\right)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta} = 3k^2(A-C)\left(\frac{MQ}{r_0^3}+\frac{M'Q'}{r_0'^3}\right)$$

und nach Einsetzung in (26):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3k^2}{\omega'}\frac{C-A}{C}\left(\frac{MQ}{r_0^3}+\frac{M'Q'}{r_0'^3}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3k^2}{\omega'}\frac{C-A}{C}\left(\frac{MK}{r_0^3}+\frac{M'K'}{r_0'^3}\right).$$

Führt man die großen Halbachsen der Sonnen- und Mondbahn a und a' ein, so wird, wenn noch

$$(31)\qquad \frac{3}{2}k^2M\frac{C-A}{C}\frac{1}{\omega'}\frac{1}{a'^3} = \varkappa, \qquad \frac{M'}{M}\frac{a^3}{a'^3} = \varepsilon$$

gesetzt wird

$$(32)\qquad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = +2\varkappa\left(\left(\frac{a}{r}\right)^3 Q + \varepsilon\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 Q'\right) \\ \frac{d\theta}{dt} = -2\varkappa\left(\left(\frac{a}{r}\right)^3 K + \varepsilon\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 K'\right). \end{cases}$$

Die Überführung dieser Ausdrücke in Funktionen der Zeit erfordert weitläufige Entwickelungen, die hier nur angedeutet werden können.[8]) $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ und $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ können der elliptischen Bewegung von Sonne und Mond entnommen werden: ist e die Exzentrizität, L_0 die mittlere Länge für den Anfangspunkt der Zeitzählung, $\tilde{\omega}$ die Länge der Perihele, n die mittlere Bewegung, also $L_0 + nt - \tilde{\omega} = g$ die mittlere Anomalie, so wird:

$$(33)\quad \begin{cases} \left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + 3e\cos g + \frac{9}{2}e^2\cos 2g + \cdots \\ l = L_0 + nt + 2e\sin g + \frac{5}{4}e^2\sin 2g + \cdots \end{cases}$$

Bei Q und K ist noch zu beachten, daß die Koordinaten l_0 und b_0 sich auf die feste Ekliptik (xy-Ebene) beziehen, während man in den Schlußformeln die zur Zeit t gehörigen Koordinaten l und b, die auf die Ekliptik für t sich beziehen, zu haben wünscht. Man gibt die Lage der bewegten Ekliptik gegen die feste durch den Winkel π zwischen ihnen und die Länge Π_0 des aufsteigenden Knotens der bewegten auf der festen Ekliptik. Beim Mond führt man ferner statt l_0' und b_0' die auf seine Bahnebene bezogene Länge l' ein und bestimmt diese Bahnebene durch ihre Neigung c' gegen die Ekliptik und die Länge ihres aufsteigenden Knotens auf dieser Ω'. Die Transformationen und Entwickelungen können hier nicht angegeben werden; wir geben nur das Resultat mit der Bemerkung, daß überall nur Glieder zweiter Ordnung in e, e', c' und erster Ordnung in π eingeführt sind. Die periodischen Störungen der Elemente von Sonne und Mond sind zu klein, um hier eine Rolle zu spielen, wie ausführliche Durchrechnungen gezeigt haben[9]); dagegen sind die säkularen Änderungen der Exzentrizität der Sonnenbahn, der Länge des Mondknotens und der Lage der Ekliptik mitgenommen worden, indem gesetzt wurde:

$$(34)\quad \begin{cases} e = e_0 + e_1 t & \pi\sin\Pi_0 = \sigma t + \sigma_1 t^2 \quad \Omega' + \psi = \Omega_0 - \chi t \\ & \pi\cos\Pi_0 = \tau t + \tau_1 t^2 \end{cases}$$

Damit wird:

$$(35)\quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = \mathsf{A} + 2\mathsf{B}t + \frac{d\Psi}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} = 2\mathsf{N}t + \frac{d\Theta}{dt} \end{cases}$$

8) Selbständige ausführliche Berechnungen der Kräftefunktion des Rotationsproblems der Erde finden sich in: *Peters*, Num. const. Nut. (a. a. O. Literaturübersicht); *Oppolzer*, Bahnbestimmung I (a. a. O.); *de Ball* (a. a. O.); *Zinner* (s. Fußn. 18).

9) *Oppolzer*, Bahnbestimmung I, p. 167 ff.

worin:

$$\mathsf{A} = \left(\varkappa\left(1+\tfrac{3}{2}e_0^2\right) + \varkappa\varepsilon\left(1+\tfrac{3}{2}e'^2 - \tfrac{3}{2}c'^2\right)\right)\cos\theta$$

$$\mathsf{B} = \tfrac{1}{2}\varkappa(1+\varepsilon)(\tau\cos\psi - \sigma\sin\psi)\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} + \tfrac{3}{2}\varkappa e_0 e_1\cos\theta$$

$$\mathsf{N} = \tfrac{1}{2}\varkappa(1+\varepsilon)(\tau\sin\psi + \sigma\cos\psi)\cos\theta.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} = {} & \varkappa\varepsilon c'\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\cos(\Omega_0 - \chi t) - \tfrac{1}{2}\varkappa\varepsilon c'^2\cos\theta\cos 2(\Omega_0 - \chi t)\\ & - \varkappa\cos\theta\cos 2(L_0 + nt + \psi) - \varkappa\varepsilon\cos\theta\cos 2(L_0' + n't + \psi)\\ & + 3\varkappa e_0\cos\theta\cos(L_0 + nt - \tilde{\omega}) + 3\varkappa\varepsilon e'\cos\theta\cos(L_0' + n't - \tilde{\omega}')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dt} = {} & \varkappa\varepsilon\cos\theta\sin(\Omega_0 - \chi t) - \tfrac{1}{2}\varkappa\varepsilon c'^2\sin\theta\sin 2(\Omega_0 - \chi t)\\ & - \varkappa\sin\theta\sin 2(L_0 + nt + \psi) - \varkappa\varepsilon\sin\theta\sin 2(L_0' + n't + \psi)\end{aligned}$$

Es sind hier die mit der Zeit multiplizierten Glieder — die säkularen — getrennt von den rein periodischen; die Integration ergibt mit Hinzufügung des Integrales für φ aus (16)

$$(36)\qquad \begin{cases}\psi = \psi_0 + \mathsf{A}t + \mathsf{B}t^2 + \Psi\\ \theta = \theta_0 + \mathsf{N}t^2 + \Theta\\ \varphi = \varphi_0 + \omega' t + \int\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}\,dt.\end{cases}$$

Die säkularen Glieder nennt man die *Lunisolarpräzession*, die periodischen die *Lunisolarnutation*. Die Gleichungen (36) enthalten die Lösung des Problems. Bei der Integration sind A, B, N als konstant angenommen worden, obwohl sie die Funktionen der Zeit ψ und θ noch enthalten. Dies wird gerechtfertigt durch die später nachgewiesene Kleinheit von σ und τ, mit denen das ebenfalls in langen Zeiträumen klein bleibende ψ multipliziert ist; es darf daher jedenfalls in erster Näherung, aber für sehr lange Zeiträume gültig bleibend $\sigma\sin\psi$ und $\tau\sin\psi$ gleich 0 und $\cos\psi$ gleich 1 gesetzt werden: dann wird $\theta = \theta_0 = $ const. in A, B, N angenommen werden dürfen. Auch die periodischen Stücke Ψ, Θ sind so klein, daß die säkularen Teile als davon unabhängig betrachtet werden können. Setzt man ferner fest, daß die $\xi\eta$-Ebene (der Äquator) für die Zeit $t = 0$ durch die x-Achse gehe und mit der festen Ekliptik den Winkel θ_0 bilde, so wird $\psi_0 = 0$ und θ_0 darf allenthalben für θ gesetzt werden. Es wird dann, wenn wir zunächst nur die säkularen Teile betrachten:

$$
(37)\quad \begin{cases} \textit{Präzession:}\ \psi = \mathsf{A}t + \mathsf{B}t^2 \\ \qquad\qquad \theta = \theta_0 + \mathsf{N}t^2 \\ \qquad\qquad \varphi = \varphi_0 + (\omega' + \mathsf{A}\cos\theta_0)t + \mathsf{B}\cos\theta_0 t^2 \\ \mathsf{A} = \left(\varkappa\left(1 + \frac{3}{2}e_0^2\right) + \varkappa\varepsilon\left(1 + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}c'^2\right)\right)\cos\theta_0 \\ \mathsf{B} = \frac{1}{2}\varkappa(1+\varepsilon)\tau\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0} + \frac{3}{2}\varkappa e_0 e_1\cos\theta_0 \\ \mathsf{N} = \frac{1}{2}\varkappa(1+\varepsilon)\sigma\cos\theta. \end{cases}
$$

Durch ψ und θ ist die Lage des *mittleren Äquators* für die Zeit t gegen die feste Ekliptik für $t = 0$ bestimmt. Den Schnitt des mittleren Äquators für die Zeit $t = 0$ mit der Ekliptik für $t = 0$ nennt man das *mittlere Äquinoktium* oder den mittleren Frühlingspunkt für $t = 0 : \Upsilon_0$; durch ihn geht die feste x-Achse. ψ ist der Winkel $N\Upsilon_0$, um den Υ_0 vom Schnitt des Äquators für t mit der Ekliptik für 0 absteht, in der Richtung von N nach Υ_0 gezählt nach der Festsetzung in Nr. 2. Der Frühlingspunkt führt also, da A positiv ist, eine der rechtläufigen entgegengesetzte, rückläufige Bewegung aus.

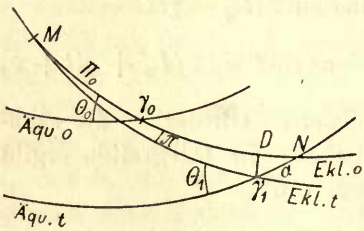


Fig. 2.

Die Formeln (37) geben die Lage des Äquators gegen die feste Ekliptik 0 für jede Zeit t. Diese Lage kann der Beobachter weder beobachten noch verwenden, sondern er braucht die Lage des Äquators für t gegen die Ekliptik für t, d. h. er braucht das mittlere Äquinoktium für t, nämlich den Schnitt Υ_1 der genannten Ebenen. Da die beiden Ebenen durch Π, π bzw. ψ, θ gegen die Ekliptik für 0 gegeben sind, ist er leicht zu bestimmen. Fällt man von Υ_1 das Lot $\Upsilon_1 D$ auf die Ekliptik für 0, so daß $\Upsilon_0 D = \psi_1$ die negative Länge von Υ_1 im System 0 darstellt, nennt ferner θ_1 den Winkel der Ekliptik für t gegen den Äquator für t und endlich $N\Upsilon_1 = a$, so werden die strengen Formeln:

$$
(38)\quad \begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi\cos(\Pi_0 + \psi) \\ \sin a = \sin\pi\operatorname{cosec}\theta_1\sin(\Pi_0 + \psi) \\ \operatorname{tg}(\psi - \psi_1) = \operatorname{tg} a\cos\theta. \end{cases}
$$

Mit Außerachtlassung von Gliedern dritter Ordnung folgt hieraus:

$$(39)\qquad \begin{cases} \psi_1 = \mathsf{P}t + \mathsf{P}'t^2 \\ \theta_1 = \theta_0 + \mathsf{Q}t + \mathsf{Q}'t^2 \\ \mathsf{P} = \mathsf{A} - \sigma \operatorname{cotg} \theta_0 \\ \mathsf{P}' = \mathsf{B} - (\sigma + \mathsf{A}\tau) \operatorname{cotg} \theta_0 + \sigma\tau \operatorname{cotg} \theta_0^2 \\ \mathsf{Q} = \tau \\ \mathsf{Q}' = \mathsf{N} + \tau_1 - \sigma\mathsf{A} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \operatorname{cotg} \theta_0. \end{cases}$$

Man nennt ψ_1 die *allgemeine Präzession*[10]), a die *Präzession durch die Planeten*, P die *Präzessionskonstante*, θ_1 die *mittlere Schiefe der Ekliptik*.

Durch die Formeln (37) und (39) sind die säkularen Lagenänderungen des Äquators, die er bei der Rotation der Erde infolge der Anziehung von Sonne und Mond erfährt, vollständig beschrieben. Abgesehen von den kleinen Änderungen der Ekliptik, die eine Folge der Anziehung der Planeten auf die Erdbahn sind, hängen die Hauptglieder alle von

$$(40)\qquad \varkappa = \frac{3}{2} k^2 M \frac{C-A}{C} \frac{1}{\omega'} \frac{1}{a^3}$$

ab, verschwinden also, wenn $A = C$, d. h. wenn die Erde als eine homogene Kugel angenommen wird. Die Präzession wird somit hervorgerufen durch die Anziehung von Sonne und Mond auf die äquatoriale Anschwellung der Erde. Wie unten (Nr. 6) gezeigt wird, können P und Q aus Beobachtungen bestimmt werden; damit ist ein Weg gefunden und zwar ist dies der einzige sichere, auf dem $\varkappa$ und damit $\frac{C-A}{C}$ festgestellt werden können.

Das Phänomen im großen betrachtet und von der kleinen Bewegung der Ekliptik abgesehen, stellt sich dar als eine gleichförmige Bewegung des Poles des Äquators in einem kleinen Kreis, der um den Pol der Ekliptik als Mittelpunkt im sphärischen Abstand θ_0 gezogen und in der Zeit $\frac{360^0}{\mathsf{A}}$ durchlaufen wird.

Nutation. Die periodischen Glieder in Ψ und Θ sind, wie die Ausrechnung zeigen wird und wie die Beobachtung erweist, alle sehr klein; man darf daher in ihnen $\theta = \theta_0 = \text{const.}$ setzen, da die Veränderlichkeit von θ sehr gering ist. Bekanntlich durchläuft die Länge des Mondknotens $\Omega_0 - \chi t$ in $18\frac{2}{3}$ Jahren den vollen Umkreis, und zwar darf diese Bewegung für den vorliegenden Zweck als gleichförmig, also χ als konstant betrachtet werden. Für ψ kann man $\mathsf{A}t$ nehmen und es ist am bequemsten, das A als bereits in n und n'

10) Über diese Bezeichnung siehe *H. C. Plummer*, Note on General Precession, London Astr. Soc. M. N. 76 (1916), p. 627.

enthalten zu betrachten. Dann gibt die Integration:

$$(41)\quad \begin{cases} \Psi = -\frac{\varkappa\varepsilon c'}{\chi}\frac{\cos 2\theta_0}{\sin\theta_0}\sin(\Omega'+\psi) + \frac{1}{4}\frac{\varkappa\varepsilon c'^2}{\chi}\cos\theta_0\sin 2(\Omega'+\psi) \\ \quad -\frac{\varkappa}{2n}\cos\theta_0\sin 2(L_0+nt+\psi) - \frac{\varkappa\varepsilon}{2n'}\cos\theta_0\sin 2(L_0'+n't+\psi) \\ \quad +\frac{3\varkappa e_0}{n}\cos\theta_0\sin(L_0+nt-\bar{\omega}) + \frac{3\varkappa\varepsilon e'}{n'}\cos\theta_0\sin(L_0'+n't-\omega') \\ \Theta = +\frac{\varkappa\varepsilon c'}{\chi}\cos\theta_0\cos(\Omega'+\psi) - \frac{1}{4}\frac{\varkappa\varepsilon c'^2}{\chi}\sin\theta_0\cos 2(\Omega'+\psi) \\ \quad +\frac{\varkappa}{2n}\sin\theta_0\cos 2(L_0+nt+\psi) + \frac{\varkappa\varepsilon}{2n'}\sin\theta_0\cos 2(L_0'+n't+\psi). \end{cases}$$

Die Hauptglieder sind die ersten; vermöge derselben beschreibt die instantane Drehungsachse um ihren durch die Präzession gegebenen mittleren Ort an der Sphäre eine Ellipse, die Nutationsellipse, in der Umlaufsdauer der Mondknoten. Die Nutationsglieder werden im wesentlichen durch die Bewegung des Mondknotens hervorgerufen. Bringt man an den durch die Präzession bestimmten mittleren Ort des Äquators noch Ψ und Θ an, so erhält man seinen *wahren* Ort, d. h. das *wahre Äquinoktium* und die *wahre Schiefe der Ekliptik.*

4. Drehungstheorie der Erde. Zahlenwerte. Der im Ausdruck für die allgemeine Präzession (39) mit der ersten Potenz der Zeit multiplizierte Faktor

$$(42)\quad \mathsf{P} = \mathsf{A} - \sigma\operatorname{cotg}\theta_0 = (\varkappa(1+\tfrac{3}{2}e_0^2) + \varkappa\varepsilon(1+\tfrac{3}{2}e'^2 - \tfrac{3}{2}c'^2) - \sigma\operatorname{cosec}\theta_0)\cos\theta_0$$

heißt die *Präzessionskonstante* und kann und muß aus den Beobachtungen abgeleitet werden, da $\varkappa$ und ε unbekannt sind; sie ist wegen der Säkularänderung der Schiefe der Ekliptik θ_0 keine eigentliche Konstante, sondern gilt für eine bestimmte Epoche. Die hauptsächlichsten Bestimmungen, auf die Epoche 1850 und das julianische Jahr als Zeiteinheit reduziert, sind:

Bessel, Tab. Reg.	50″2346
O. Struve-Peters	50″2522
Leverrier	50″2357
L. Struve	50″2283
Newcomb	50″2453.

Über die Methoden der Bestimmung siehe Nr. 6. Während der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die *Struve-Peters*sche Zahl fast allgemein im Gebrauch; mit Beginn des 20. Jahrhunderts ist man zur *Newcomb*schen Konstante übergegangen.[11])

11) *Newcomb* schlägt vor, die Zahl $\frac{\mathsf{P}}{\cos\theta_0}$ als Präzessionskonstante zu bezeichnen, da diese von der Zeit fast unabhängig ist (s. Encykl. VI 2, 17, Nr. 9).

Die in der Nutation in Schiefe Θ mit dem cos der Länge des Mondknotens multiplizierte Größe

$$\mathfrak{N} = \frac{\varkappa \varepsilon c'}{\chi} \cos\theta_0 \tag{43}$$

heißt die *Nutationskonstante* und muß ebenfalls aus den Beobachtungen abgeleitet werden. Gegenwärtig hat man den Wert $9''21$ als zuverlässigsten angenommen. *Przybyllok*[12]) hat ihn durch ein sehr umfangreiches und genaues Material bestätigt.

Zur Berechnung der in obigen Formeln vorkommenden Faktoren sind noch folgende den Theorien der Sonnen- und Mondbewegung entnommenen Zahlen notwendig; sie beziehen sich alle auf die Epoche 1850 und auf das julianische Jahr als Zeiteinheit.

Exzentrizität der Erdbahn:

$$e = e_0 + e_1 t = 0{,}0167719 - 0{,}000000418\, t$$

Mittlere Schiefe der Ekliptik:

$$\theta_0 = 23^\circ 27' 31''68.$$

Mittlere Bewegung der Erde einschließlich Präzession:

$$n = 1296027''6775 = 6.2833196 \text{ Radien.}$$

Bewegung der Ekliptik:

$$\pi \sin \Pi_0 = \sigma t + \sigma_1 t^2 = +\, 0''05341\, t + 0''00001934\, t^2$$
$$\pi \cos \Pi_0 = \tau t + \tau_1 t^2 = -\, 0''46838\, t + 0''00000562\, t^2$$

Exzentrizität und Neigung der Mondbahn:

$$c' = 0{,}054844, \qquad c' = 0{,}089826 \text{ Radien.}$$

Bewegung des Mondknotens:

$$\chi = 0{,}3375712 \text{ Radien.}$$

Mittlere Bewegung des Mondes:

$$n' = 83{,}99685 \text{ Radien.}$$

Damit erhält man folgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{A} &= [9{,}962716 - 10]\varkappa + [9{,}959224 - 10]\varkappa\varepsilon \\ &= \mathsf{P} + \sigma \operatorname{cotg}\theta_0 = 50''2453 + 0''1231 = 50''3684 \\ \mathfrak{N} &= [9{,}38757 - 10]\varkappa\varepsilon = 9''21, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

deren Auflösung ergibt:

$$\varkappa = 17''455, \qquad \varepsilon = 2.1617.$$

12) *E. Przybyllok*, Über eine Bestimmung der Nutationskonstante aus Beobachtungen des internationalen Breitendienstes, Berl. Ber. 53 (1916), p. 1259 und: Die Nutationskonstante, abgeleitet aus den Beob. d. Breitendienstes, Potsdam, Intern. Erdm.-Veröff. N. F. 36 (1920).

Werden damit die Formeln (37), (39), (41) in Zahlen umgesetzt und geht man gleichzeitig auf das *tropische* Jahr als Zeiteinheit über, so erscheinen folgende für die Epoche 1850 gültigen Werte:

(45)
$$\begin{cases} \text{Lunisolarpräzession in Länge:} \\ \psi = 50''3684\,t - 0''000\,1075\,t^2. \\ \text{Lunisolarpräzession in Schiefe:} \\ \theta = 23^\circ 27' 31''68 + 0''000\,0065\,t^2. \\ \text{Allgemeine Präzession in Länge:} \\ \psi_1 = 50''2453\,t + 0''000\,1109\,t^2. \\ \text{Mittlere Schiefe der Ekliptik:} \\ \theta_1 = 23^\circ 27' 31''68 - 0''46838\,t - 0''000\,00082\,t^2. \\ \text{Präzession durch die Planeten:} \\ a = 0''1342t - 0''000\,2380\,t^2. \end{cases}$$

Die instantanen Geschwindigkeiten für ein Jahr ergeben sich hieraus für das Jahr $1850 + t$ zu:

(46)
$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = 50''3684 - 0''000\,2150\,t \\ \frac{d\psi_1}{dt} = 50''2453 + 0''000\,2218\,t \\ \frac{da}{dt} = 0''1342 - 0''000\,476\,t \end{cases}$$

$\frac{d\psi}{dt}$ stellt die Geschwindigkeit der Lunisolarpräzession auf der festen Ekliptik für 1850 dar. Dieselbe Größe bezogen auf die Ekliptik für $1850 + t$ wird:

(47)
$$\begin{cases} \frac{A}{\cos\theta_0}\cos\theta_1 = \frac{A}{\cos\theta_0}(\cos\theta_0 + 0''46838\,\sin\theta_0 \cdot t) \\ = A + A\,0''46838\,\mathrm{tg}\,\theta_0 \cdot t = 50''3684 + 0''000\,0496\,t. \end{cases}$$

(48)
$$\begin{cases} \text{Nutation in Länge:} \\ \Psi = -17''232\sin\Omega + 0''207\sin 2\Omega - 1''257\sin 2\odot \\ \quad - 0''204\sin 2\mathbb{D} + 0''128\sin(\odot - \Gamma) + 0''068\sin(\mathbb{D} - \Gamma') \\ \text{Nutation in Schiefe:} \\ \Theta = +9''210\cos\Omega - 0''090\cos 2\Omega + 0''546\cos 2\odot \\ \quad + 0''088\cos 2\mathbb{D}. \end{cases}$$

Es sind hier in der üblichen Weise kurz die Länge des Mondknotens mit Ω, die mittlere Sonnen- und Mondlänge mit $\odot$ und $\mathbb{D}$, und die

mittlere Anomalie von Sonne und Mond mit $\odot - \Gamma$ und $\mathfrak{D} - \Gamma'$ bezeichnet.[12])

Über die Verwendung von $\varkappa$ und $\varkappa\varepsilon$ zur Bestimmung von $\frac{C-A}{C}$ und der Mondmasse ist VI 2, 17, Nr. 9 nachzusehen; die beiden Größen $[9{,}962716]\varkappa$ und $[9{,}959224]\varkappa\varepsilon$ sind dort mit $P_\odot$ und $P_\mathfrak{D}$ bezeichnet und θ mit ε. Mit dem Wert $\frac{C-A}{C} = 0{,}003278$ folgt $\frac{C-A}{A} = 0{,}003289$ und dann das oben (p. 1002) benutzte $\mu = \frac{C-A}{A}\omega'$ unter Beachtung, daß dort die Zeiteinheit der mittlere Sonnentag ist, also $\omega' = 2\pi\frac{366{,}25}{365{,}25} = 6{,}3006$ ist:

$$\mu = 0{,}02072.$$

Der Winkel

$$\varphi = \varphi_0 + (\omega' + \mathrm{A}\cos\theta_0)t + \mathrm{B}\cos\theta_0 t^2 \tag{49}$$

gibt den Abstand der ξ-Achse des Äquators, also eines bestimmten Ortsmeridianes, vom Äquinoktium für die Zeit t, also die *Ortssternzeit*. Diese ist somit, zumal wenn noch die periodischen Glieder (Nutation in Rektaszension $= \Psi\cos\theta$) dazugenommen werden, kein gleichförmiges Zeitmaß, jedoch ist der Unterschied von einem solchen, soweit er von $\mathrm{B}\cos\theta_0$ herrührt, außerordentlich klein, und soweit er von $\Psi\cos\theta_0$ herrührt, gleicht er sich in einem Mondknotenumlauf aus.

5. Übergang zur astronomischen Praxis. Die Ebenen der Ekliptik und des Äquators schaffen für die beobachtende Astronomie die Grundlagen des Koordinatensystems; durch die obigen Zahlenangaben sind sie so genau festgelegt, als es die astronomische Praxis erfordert. Die weitere Verwertung der gewonnenen Resultate hat die sphärische Astronomie zu besorgen (VI 2, 2 (*Cohn*), Nr. 5 b), doch erscheint es wünschenswert, hier noch den Übergang darzulegen.

Das den Beobachtungen zugrunde liegende Koordinatensystem des Äquators ist definiert durch die Lage des Äquators und seinen Schnitt mit der gleichzeitigen Ekliptik; man kann also sagen durch die Lage der Pole P_0 und E_0 der beiden Hauptkreise; der Anfangspunkt der Längen- bzw. Rektaszensionszählung Υ_0 ist dann definiert als der Schnitt der größten Kreise, die in P_0 und E_0 senkrecht zu P_0E_0 errichtet werden, oder als der Pol des größten Kreises P_0E_0. Die Bewegung des Äquators sowohl als des daraufliegenden Frühlingspunktes läßt sich also darstellen durch die Bewegungen der beiden Pole P_0 und E_0.

12) Die erste vollständige Durchrechnung gab *Peters* in Num. const. Nut. (s. Lit.-Übersicht); betr. der neuesten Zahlenangaben siehe: *S. Newcomb*, Sur les formules de Nutation, Paris Bull. astr. XV (1898), p. 241.

Hält man zunächst die Ekliptik, also E_0 fest und ebenso die Neigung θ_0 des Äquators gegen sie, so wird der Pol des Äquators auf einem kleinen Kreis vom Radius θ_0 um E_0 von P_0 nach P_1 und entsprechend Υ_0 nach N rücken, d. h. der Lunisolarpräzession $\Upsilon_0 N = \psi$ entspricht die Winkelbewegung $P_0 E_0 P_1 = \psi$, denn N ist der Pol von $P_1 E_0$. Der volle Umlauf von P um E_0 vollzieht sich in der Zeit $1\,296\,000'' : \psi''$, also mit dem obigen Zahlenwert von ψ in rund 25730 Jahren.

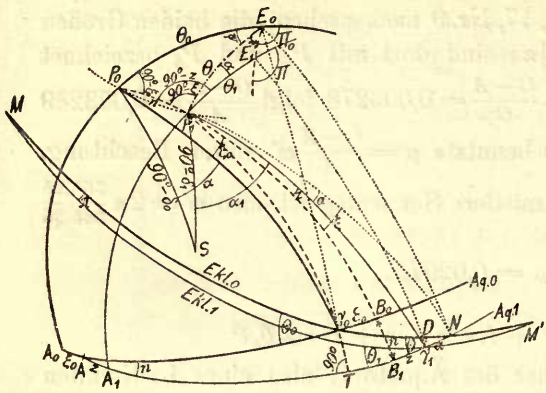


Fig. 3.

Verbindet man P_0 mit P_1 durch einen *größten Kreis* und nennt den Bogen $P_0 P_1 = n$ und seine Richtungen gegen $P_0 E_0$ und $P_1 E_0$ bzw. $90^0 - \xi_0$ und $90^0 - \xi$, so folgt aus dem Dreieck $P_0 E_0 P_1$

$$n = \psi \sec \xi_0 \sin \theta = \psi \sec \xi \sin \theta_0. \tag{50}$$

Das Stück $B_0 B_1$ des größten Kreises $P_0 P_1$ zwischen beiden zugehörigen Äquatoren ist ebenfalls n; man nennt daher diese Größe: *Präzession in Deklination.* B_0 steht von Υ_0 um ξ_0, B_1 von N um ξ ab.

Die Bewegung des Poles E_0 der Ekliptik findet auf einer gegen $E_0 P_0$ konvexen Kurve $E_0 E_1$ statt und zwar so, daß E_1 sich P_1 nähert; man kann diese wieder durch die Bewegung auf einem durch E_0 und E_1 gelegten größten Kreis $E_0 E_1$ ersetzen, dessen Pole M und M' die Knoten der beiden zu E_0 und E_1 gehörigen Ekliptiken sind. Die Ekliptik rotiert um die Achse MM', die aber nicht als festliegend betrachtet werden kann, da die Bewegung von E_0 nicht in einem größten Kreis erfolgt. Die Theorie der Säkularstörungen der Erdbahn liefert die Bewegung $E_0 E_1 = \pi$ und ihre Richtung gegen $E_0 P_0$: Winkel $P_0 E_0 E_1 = 180^0 - \Pi_0$ (wo π und Π_0 offenbar dasselbe bedeuten wie früher) in der bereits angegebenen Form

$$\pi \sin \Pi_0 = + 0''05341\,t + 0''00001934\,t^2$$
$$\pi \cos \Pi_0 = - 0''46838\,t + 0''00000562\,t^2,$$

woraus folgt

$$\begin{cases} \pi = 0''47141\,t - 0''000337\,t^2 \\ \Pi_0 = 173^0 29' 68 - 0'2897\,t. \end{cases} \tag{51}$$

Nennt man allgemein Π den Winkel der Bewegungsrichtung $E_0 E_1$

mit P_1E_1, so wird $\Pi = \Upsilon_1 M$ und unterscheidet sich von Π_0 also um die allgemeine Präzession $\psi_1 = 0'83742t$

$$\Pi = \Pi_0 + \psi_1 = 173^0 29'68 + 0'54770t. \tag{51}$$

Werden jetzt die beiden Pole P_1 und E_1 durch einen größten Kreis verbunden, so ist der Pol desselben der Frühlingspunkt Υ_1 der zweiten Epoche. Ist a der Winkel zwischen P_1E_0 und P_1E_1, so ist Υ_1 gegen N auf dem Äquator um a verschoben; daher nennt man a die Planetenpräzession in Rektaszension. Ist $90^0 - z$ der Winkel zwischen P_1P_0 und P_1E_1, so wird $\Upsilon_1 B_1 = z$ und $\zeta = z + a$. Zur Berechnung von a dient:

$$a = \pi \sin(\Pi_0 + \psi) \operatorname{cosec} \theta_1 = \pi \sin \Pi \operatorname{cosec} \theta \tag{53}$$

und führt in Zahlen zu

$$a = 0''1342t - 0''000238t^2 \text{ für } 1850. \tag{54}$$

Für θ und θ_1, sowie für ψ und ψ_1 sind die Formeln und Zahlenwerte bereits angegeben.

Die Summe $z + \zeta_0$ kann man als die *allgemeine Präzession in Rektaszension* bezeichnen; denn definiert man diese als Rektaszension des Frühlingspunktes Υ_0 im System 1, also durch den Bogen $\Upsilon_1 T = m$, wenn $\Upsilon_0 T$ senkrecht auf den Äquator 1 gefällt wird, so wird

$$\operatorname{tg}(m + a) = \operatorname{tg} \psi \cos \theta \tag{55}$$

oder

$$m = \psi \cos \theta - a.$$

Dieselbe Strecke ist aber auch gleich $z + \zeta_0 \sec n$, wie man unmittelbar der Figur entnimmt, und unterscheidet sich von $z + \zeta_0$ also nur um $\frac{1}{2}\zeta_0 n^2 \sin 1''^2\, t^2$, was in 100 Jahren erst $0''109$ ausmacht.

Die neu eingeführten Stücke ζ_0, z, $\zeta = z + a$, n und $m = \zeta_0 + z$ bestimmen die Lage des Poles P_1, gegen den Pol P_0 und die Anfangsrichtungen der Zählungen in beiden Systemen. Bei den Transformationsrechnungen von dem einen System auf das andere muß man sich ihrer bedienen und es ist daher ihr Zusammenhang mit den früheren Stücken ψ, θ, a herzustellen.

Die Winkel ζ und ζ_0 werden aus dem Dreieck $P_0P_1E_0$ berechnet:

$$\begin{cases} \zeta = 23''1697\ t - 0''0001286\ t^2 \\ \zeta_0 = 23''0355\ t + 0''0000302\ t^2 \end{cases} \tag{56}$$

und damit:

$$\begin{cases} z = \zeta - a = 23''0355\ t + 0''0001094\ t^2 \\ m = \zeta_0 + z = 46''0710\ t + 0''0001396\ t^2 \text{ (ebenso aus (55))} \end{cases} \tag{57}$$

ferner folgt n aus (50)

$$n = 20''0511\ t - 0''000043\ t^2. \tag{58}$$

Alle diese Zahlenangaben gelten für die Ausgangsepoche 1850; für andere Ausgangsepochen müssen die Rechnungen wiederholt werden, da eine allgemeine Entwicklung kompliziert und ungenau wird. Es seien hier nur noch die wichtigsten Zahlen für 1950 als Ausgangsepoche den obigen an die Seite gestellt unter Einführung des *tropischen Jahrhunderts* als Zeiteinheit von t.

T_0	ζ_0 für $T_0 + t$	$m = \zeta_0 + z$ für $T_0 + t$	n für $T_0 + t$
1850	$2303''55\,t + 0''30\,t^2$	$4607''10\,t + 1''39\,t^2$	$2005''11\,t - 0''43\,t^2$
1950	$2304''95\,t + 0''30\,t^2$	$4609''90\,t + 1''39\,t^2$	$2004''26\,t - 0''43\,t^2$

Die Werte für zwischenliegende Jahre darf man durch lineare Interpolation entnehmen. Eine allgemeine Darstellung der Zahlenwerte gibt *Andoyer.*[13])

Der Übergang von den Koordinaten eines Sternes S im Äquatorsystem $0 : \alpha_0$ und δ_0 auf die Koordinaten α_1, δ_1 desselben Gestirnes in System 1 vollzieht sich jetzt nach Formeln aus Dreieck $P_0 P_1 S$, in dem die Seiten n, $90^0 - \delta_0$, $90^0 - \delta_1$ und die Winkel bei P_0 $\alpha_0 + \xi_0$ und bei P_1 $180^0 - (\alpha_1 - z)$ sind:

$$(59)\quad \begin{cases} \cos\delta_1 \sin(\alpha_1 - z) = \cos\delta_0 \sin(\alpha_0 + \xi_0) \\ \cos\delta_1 \cos(\alpha_1 - z) = \cos\delta_0 \cos(\alpha_0 + \xi_0)\cos n - \sin\delta_0 \sin n \\ \sin\delta_1 \qquad\qquad\quad = \cos\delta_0 \cos(\alpha_0 + \xi_0)\sin n + \sin\delta_0 \cos n\,. \end{cases}$$

Auf die Umgestaltung dieser Formeln für verschiedene Zwecke ist hier nicht einzugehen; es sei nur des Folgenden halber erwähnt, daß man in den häufigsten Fällen mit folgenden Näherungsformeln ausreicht ($m = z + \zeta_0$)

$$(60)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 + m + \dfrac{n \operatorname{tg}\delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_0)}{1 - n \operatorname{tg}\delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_0)\sin 1''} \\ \delta_1 = \delta_0 + n \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_0)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_0 - m)}, \end{cases}$$

die auch noch vereinfacht werden, wenn es sich um kleine Zwischenzeiten handelt.

6. Die Bestimmung der Präzessionskonstante. Die oben als Präzessionskonstante bezeichnete Größe

$$(61)\quad \mathrm{P} = \mathrm{A} - \sigma \operatorname{cotg}\theta_0 = \mathbf{P}\cos\theta_0 = \left(\mathrm{K} - \frac{\sigma}{\sin\theta_0}\right)\cos\theta_0$$

($\mathbf{P}$ = Präzessionskonstante im Sinne *Newcombs*)

13) *H. Andoyer,* Les formules de la précession d'après S. Newcomb, Paris Bull. astr. 28 (1911), p. 67.

wird, als auf das Ekliptikalsystem bezogen, nicht direkt durch Beobachtung bestimmt, sondern auf dem Umwege über die Größen m und n des Äquatorsystems; der Zusammenhang ergibt sich aus den früheren Formeln zu:

$$(62)\quad \begin{cases} m = \mathsf{P}\cos\theta\cdot t + \mathsf{B}\cos\theta\cdot t^2 - \pi\sin\Pi_0\sin\theta - \pi\cos\Pi_0\dfrac{\sin\psi_1}{\sin\theta} \\ \cos\xi_0\cdot n = \mathsf{P}\sin\theta\cdot t + \mathsf{B}\sin\theta\cdot t^2 + \pi\sin\Pi_0\cos\theta, \end{cases}$$

woraus auch folgt:

$$n\cos\xi_0\sin\theta + m\cos\theta = \mathsf{P}\,t + \mathsf{B}\,t^2 - \pi\cos\Pi_0\operatorname{cotg}\theta\sin\psi_1$$

$$n\cos\xi_0\cos\theta - m\sin\theta = \pi\sin\Pi = a\sin\theta.$$

Die in (62) auf das erste folgenden Glieder rechts sind klein und werden theoretisch berechnet; man kann also P bestimmen, sobald m und n den Beobachtungen entnommen sind; diese sind, wie die Formeln (60) zeigen, durch die Differenzen $\alpha_1 - \alpha_0$ und $\delta_1 - \delta_0$ der Koordinaten eines Gestirnes zu zwei verschiedenen Epochen gegeben. Dabei erheben sich neben Schwierigkeiten der Beobachtungstechnik die prinzipiellen Fragen nach der Behandlung der Eigenbewegungen der Fixsterne im Hinblick auf eine translatorische und rotatorische Bewegung des Sonnensystems und nach der Möglichkeit der Bestimmung eines Inertialsystems.[14])

In der praktischen Ausführung liegt das mit einem bestimmten Äquinoktium Υ_0 und einer angenommenen Präzessionskonstante berechnete System der Eigenbewegungen einer Gruppe von Fixsternen vor und kann nur unter Heranziehung von Hypothesen zur Korrektion der genannten Größen, zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung und zur Aufstellung des Inertialsystems benutzt werden; die Resultate sind demnach nicht nur von der getroffenen Auswahl der Sterne, sondern auch von den Hypothesen abhängig.

Die Beziehungen zwischen den Änderungen der Koordinaten α, δ, ϱ eines Sternes und der Drehung des Koordinatensystems, die durch die Komponenten p, q, r, und der Translation, die durch die Komponenten u, v, w dargestellt ist, sind:

---

14) Man vgl. hierüber die Arbeiten: *E. Anding,* Über Koordinaten und Zeit, Enzykl. VI 2, 1 (1905); *H. Seeliger*, Über die sogenannte absolute Bewegung, München Ak. Ber. 36 (1906), p. 85; *G. O. James,* On the relation of the inertial and empirical trihedrons of gravitational Astronomy, Astr. J. 27 (1912), p. 77; *H. Seeliger*, Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten, München Ak. Ber. 36 (1906), p. 595; *J. Bauschinger,* Enzykl. VI 2, 17, p. 889; *J. Bauschinger*, Die astronomische Festlegung des Trägheitssystems, Die Naturwissenschaften X (1922), p. 1005.

$$\cos\delta_0\,(\alpha_1-\alpha_0) = +p\cos\alpha_0\sin\delta_0 + q\sin\alpha_0\sin\delta_0 - r\cos\delta_0 + \frac{u}{\varrho}\sin\alpha_0 - \frac{v}{\varrho}\cos\alpha_0$$

$$(63)\qquad (\delta_1-\delta_0) = -p\sin\alpha_0 + q\cos\alpha_0 + \frac{u}{\varrho}\cos\alpha_0\sin\delta_0 + \frac{v}{\varrho}\sin\alpha_0\sin\delta_0 - \frac{w}{\varrho}\cos\delta_0$$

$$\Delta\varrho = -\frac{u}{\varrho}\cos\alpha_0\cos\delta_0 - \frac{v}{\varrho}\sin\alpha_0\cos\delta_0 - \frac{w}{\varrho}\sin\delta_0$$

und erlauben das zu einer bestimmten Präzessionskonstante und einer bestimmten Bewegung des Frühlingspunktes gehörige System von Eigenbewegungen durch die 6 Stücke p, q, r, u, v, w darzustellen. Davon ergeben die u, v, w die Koordinaten des Apex A, D:

$$(64)\qquad u = M\cos A\cos D \quad v = M\sin A\cos D \quad w = M\sin D$$

und die p, q, r können auf folgende Ursachen zurückgeführt werden:

1. auf eine Korrektion der Präzessionskonstante; da

$$(65)\qquad \begin{cases} p = \Delta n\sin\xi_0 & q = \Delta n\cos\xi_0 \\ r = -(\Delta\xi_0 + \Delta z\cos n) = -\Delta m\cos n\,, \end{cases}$$

so kann man den ersten Teil in (63) auch so schreiben:

$$(66)\qquad \begin{cases} \alpha_1-\alpha_0 = \Delta m\cos n + \Delta n\cos\xi_0\sin\alpha_0\operatorname{tg}\delta_0 + \Delta n\sin\xi_0\cos\alpha_0\operatorname{tg}\delta_0 \\ \qquad\quad = \Delta m\cos n + \Delta n\sin(\alpha_0+\xi_0)\operatorname{tg}\delta_0 \\ \delta_1-\delta_0 = -\Delta n\sin\xi_0\sin\alpha_0 + \Delta n\cos\xi_0\cos\alpha_0 = \Delta n\cos(\alpha_0+\xi_0) \end{cases}$$

und erkennt, daß man aus den Eigenbewegungen in Rektaszension die Korrektionen Δm und Δn, und aus den Eigenbewegungen in Deklination die Korrektion Δn bestimmen kann; dann folgen aus (62):

$$(67)\qquad \begin{cases} t\cdot\Delta\mathsf{P}\cos\theta = \Delta m \\ t\cdot\Delta\mathsf{P}\sin\theta = \Delta n\cos\xi_0 \end{cases}$$

die Korrektionen von P;

2. sind die hieraus hervorgehenden Korrektionen von P nicht vereinbar, so kann man in die Darstellung von p, q, r eine säkulare Bewegung des Äquinoktiums aufnehmen, über deren Ursache Sicheres nicht ausgesagt werden kann, und man kann auch einen systematischen, konstanten Unterschied der Deklinationssysteme beider Epochen, gleichfalls unsicherer Herkunft, annehmen. Ist Δe die Korrektion des Äquinoktiums im Äquator (positiv im Sinne der Rektaszensionszählung, so daß $\Delta e = -(\alpha_1-\alpha_0)$ wird) und $\Delta\delta = \delta_1-\delta_0$ der genannte Unterschied der benutzten Deklinationssysteme, so wird der Ansatz:

$$(68)\qquad \begin{cases} \alpha_1-\alpha_0 = (\Delta m\cos n - \Delta e) + \Delta n\sin(\alpha_0+\xi_0)\operatorname{tg}\delta_0 \\ \delta_1-\delta_0 = \Delta\delta + \Delta n\cos(\alpha_0+\xi_0)\,. \end{cases}$$

Werden hieraus $(\Delta m \cos n - \Delta e)$, Δn, $\Delta \delta$ bestimmt, so folgt

$$t \cdot \Delta \mathrm{P} = \Delta n \cos \xi_0 \operatorname{cosec} \theta \tag{69}$$

und mittelst der Bedingung $\Delta n \cos \xi_0 \cos \theta - \Delta m \sin \theta = 0$

$$\Delta e = -(\Delta m \cos n - \Delta e) + \Delta n \cos \xi_0 \cos n \operatorname{cotg} \theta \tag{70}$$

Δn geht sowohl aus Deklinations- wie aus Rektaszensionsmessungen hervor; ihre Übereinstimmung erlaubt ein Urteil über die Sicherheit von $\Delta \mathrm{P}$. Auf die Deutung von Δe ist hier nicht einzugehen.

7. Theoretische Behandlungen. In den vorigen Nummern ist die kürzeste Ableitung der astronomisch wichtigen Resultate mit besonderer Rücksicht auf die Verhältnisse der Erde dargelegt worden. Das Rotationsproblem hat aber noch andere Bearbeitungen erfahren, die hier nicht durchgeführt, sondern nur kurz beschrieben werden können.

Das Problem der „ungestörten Rotation" d. h. der Fall, wo äußere Kräfte nicht wirken, die Kräftefunktion also Null ist, beschäftigt sich mit der Integration der *Euler*schen Gleichungen (4) in der Form

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = 0 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = 0 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = 0 \end{cases} \tag{71}$$

in Verbindung mit den Gl. (3):

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = +p \sin \varphi + q \cos \varphi$$

$$\sin \theta \frac{d\varphi}{dt} = +p \sin \varphi \cos \theta + q \cos \varphi \cos \theta + r \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -p \cos \varphi + q \sin \varphi .$$

Sie führt für p, q, r auf elliptische Funktionen[15]) und, wie schon *C. G. J. Jacobi*[16]) gezeigt hatte, auf die Darstellung der Richtungscosinusse zwischen den Achsen des festen und des beweglichen Systems durch Theta-Funktionen. *Tisserand*[17]) behandelt die Aufgabe auch mit kanonischen Variabeln nach der *Hamilton-Jacobi*schen Methode, nach der er auch das allgemeine Problem durchführt.

Charlier[18]) gibt als Grundlage einer nach der Methode der Variation

15) *F. Tisserand,* Méc. cél. II, Chap. 23.

16) *C. G. J. Jacobi,* Werke 2, p. 291, sowie *Klein-Sommerfeld* (Lit.-Übers.).

17) *F. Tisserand,* Méc. cél. II, Chap. 22 und 23.

18) *C. V. L. Charlier,* Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems, Arkiv for Mat., Astr. och Fysik 4 Nr. 4, 12 (1907), Nr. 23, 27 (1908), 6 Nr. 17 (1910). Hierzu gehört auch: *E. Zinner,* Über die säkularen Störungen

der Konstanten durchgeführten Behandlung des allgemeinen Problems eine Lösung des „ungestörten Rotationsproblems", indem er von der Rotation eines ungestörten kugelförmigen Körpers ausgeht; die kanonischen Variabeln werden eingeführt und die Konstanten, die nachher variiert werden, sorgfältig diskutiert.

Tisserand[19]) machte zuerst darauf aufmerksam, daß das allgemeine Problem auch dann noch streng integriert werden kann, wenn man zwei der Hauptträgheitsachsen gleich setzt und in der Kräftefunktion nur die säkularen Teile beibehält; mit der Durchführung beschäftigen sich Arbeiten von *Lambert*[20]) und *Olsson*[21]).

In den früheren Entwicklungen ist die Bewegung der Erdbahn, veranlaßt durch die Einwirkung der übrigen Planeten, durch säkulare Glieder, entwickelt nach Potenzen der Zeit, dargestellt angenommen worden, wie dies auch in der Theorie der translatorischen Bewegung geschieht; diese Darstellung reicht aber für sehr lange Zeiträume nicht aus und muß durch langperiodische Glieder ersetzt werden. *Stockwell*[22]), *Backlund*[23]), *Adams*[24]) haben die Rechnungen durchgeführt, ohne daß bisher übereinstimmende oder befriedigende Resultate erzielt wären.[25])

8. Die Polhöhenschwankungen. Dieses weite Gebiet kann hier nur insoweit gestreift werden, als es in Zusammenhang mit der *Euler*schen Bewegung und Periode gebracht worden ist (s. Nr. **3**); betreffs des übrigen sei auf die Bände Geodäsie und Geophysik verwiesen. Eine Übersicht über das Ganze geben *Radau*[26]), *Przybyllok*[27]) und *Wanach*[28]).

---

im planetarischen Rotationsproblem, Medd. Lunds Astr. Obs. Nr. 40 (1909) und *E. Zinner,* Zur Lehre von der Drehung der Erde, Bamberg, Naturforsch. Gesellschaft.

19) *F. Tisserand,* Paris C. R. 101 (1885), p. 195; einen weiteren allgemeinen Fall behandelt Frau *S. Kowalewski,* Act. math. 12 (1888).

20) *A. Lambert,* Sur un cas particulier dans le mouvement de rotation des planètes, Paris Bull. astr. 27 (1910), p. 289.

21) *Ol. Olsson,* Über die Rotation der Erde, Astr. Nachr. 178 (1908), p. 261.

22) *J. Stockwell,* Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets, Smithsonian Contr. to Knowledge Vol. 18 (1873).

23) *O. Backlund,* Zur Theorie der Präzession und Nutation, St. Pétersbourg Bull. V 12 (1900).

24) *J. C. Adams,* On the general values of the obliquity of the ekliptik, Scient. Pap. of J. C. Adams Vol. I.

25) *H. Poincaré,* Sur la théorie de la précession, Paris C. R. 132 (1901), p. 50.

26) *R. Radau,* Chap. 29 und 30 in *F. Tisserand,* Méc. cél. II (1891).

27) *E. Przybyllok,* Über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse von den Polhöhenschwankungen, Astr. Ges. Vjs. 54 (1919); *E. Przybyllok,* Polhöhenschwankungen, Sammlung Vieweg, Heft 11 (1914).

28) *B. Wanach,* Res. d. intern. Breitendienstes. Zentralbureau der intern.

Newcomb[29]) wies nach, daß die von *S. C. Chandler*[30]) 1891 empirisch ermittelte Periode der Polbewegung von 427 Tagen die durch die Elastizität der Erde bewirkte Verlängerung der *Euler*schen Periode darstellt; diese dynamisch bestimmte, ihrer Natur nach konstante (*Newcomb*sche) Periode tritt also an die Stelle der *Euler*schen. Die empirische Polbewegung zeigt außerdem noch ein Glied von jährlicher Periode, das zweifellos meteorologischen Vorgängen zuzuschreiben ist und daher veränderlich ist.[31]) *Wanach* hat in der zweiten Abhandlung[28]) gezeigt, daß infolgedessen die Dauer der *Newcomb*schen Periode noch sehr unsicher bekannt ist.

Erdmessung, Veröff. N. F. Nr. 30, Berlin 1916; *B. Wanach*, Die Chandlersche und die Newcombsche Periode der Polbewegung, ebenda Nr. 34 (1919).

29) *S. Newcomb,* On the periodic Variations of the Latitude, Astr. J. 11 (1891), Nr. 251.

30) Astr. J. Vol. 11, 12, 15, 19, 21, 22 (1891—1902).

31) *R. Spitaler,* Die Ursache der Breitenschwankungen, Wien Ak. Denkschr. 64 (1889); *R. Spitaler,* Die per. Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluß auf die Breitenschwankungen, Petermanns Mitteilungen, Erg.-Heft Nr. 137 (1901); *W. Schweydar,* Zur Erklärung der Bewegung der Rotationspole der Erde, Berlin Ak. Ber. 1919.

(Abgeschlossen im Mai 1923.)

VI 2, 20a. DIE ROTATION DES MONDES.

Von

F. HAYN

in Leipzig.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitung; die *Cassini*schen Gesetze.
2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.
3. Entwicklung der Variabeln als Funktionen der Zeit.
4. Die Integration der Bewegungsgleichungen.
5. Der Einfluß der Sonnenanziehung.
6. Die Ermittlung der Konstanten aus Beobachtungen.
7. Die Unmöglichkeit der *Cassini*schen Gesetze bei gewissen Formen des Trägheitsellipsoides.

Literatur.

P. S. Laplace, Mécanique céleste, Paris 1798, 1825.
Livre V, Chap. II. Des mouvements de la Lune autour de son centre de gravité.
Livre XIV, Chap. II. De la libration de la Lune. Notice historique des travaux des astronomes et des géomètres sur cet objet. Remarques sur la théorie de la libration de la Lune.

M. Wichmann, Erster Versuch zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen mit dem Heliometer, Astr. Nachr. 26 (1846), p. 289; 27 (1847), p. 53, 81, 97, 211.

E. Hartwig, Beitrag zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes aus Beobachtungen am Straßburger Heliometer, Karlsruhe 1880.

J. Franz, Die Konstanten der physischen Libration des Mondes, abgeleitet aus *Schlüters* Königsberger Heliometer-Beobachtungen, Astr. Beob. auf der Kgl. Universitäts-Sternwarte zu Königsberg, Bd. 38 (Königsberg 1889).

F. Hayn, Selenographische Koordinaten, Leipzig, Ges. d. Wiss.
I. Abh. 1902, Bd. 27
II. Abh. 1904, Bd. 29
III. Abh. 1907, Bd. 30
IV. Abh. 1914, Bd. 33
} Zitiert unter Sel. Koord. I, II, III. IV.

M. Völkel, Beitrag zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes. II. Reihe der heliometrischen Messungen in Kasan, ausgeführt von *A. Michailowski,* Kasan 1908.

F. J. M. Stratton, The Constants of the Moon's Physical Libration, Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. LIX (1909).

F. Hayn, Die Rotationselemente des Mondes und der definitive Ort von Mösting A, Astr. Nachr. 199 (1914), p. 261.

A. Jönsson, Über die Rotation des Mondes, Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II, Nr. 15 (Lund 1917).

F. Hayn, Die Achsendrehung des Mondes, Astr. Nachr. 211 (1920), p. 311.

A. Jakowkin, Eine Neubestimmung der Konstanten der physischen Libration des Mondes, Astr. Nachr. 219 (1923), p. 61.

---

1. Einleitung; die Cassinischen Gesetze. Die Bewegung eines Körpers kann man sich zusammengesetzt denken aus der Bahnbewegung des Schwerpunktes und der Drehung um letzteren. Die Bahnbewegung des Mondes ist in VI 2, 14 behandelt worden. Im folgenden soll nur die Bewegung um den Schwerpunkt untersucht werden.

Im Sonnensystem kommen im wesentlichen zwei Arten von Körpern vor; Sonne und Planeten können als Rotationsellipsoide gelten, während der Erdmond, wohl auch Merkur und wahrscheinlich die meisten der Satelliten dreiachsige Ellipsoide sind. Die Bewegung eines Rotationsellipsoides ist in dem Abschnitt über die Rotation der Erde behandelt worden. Das dreiachsige Ellipsoid kommt in der Fixsternwelt jedenfalls häufig vor, freilich nicht als starrer Körper. Der Mond bietet aber den einzigen Fall, in dem durch Beobachtungen die Rotationsverhältnisse mit einer gewissen Genauigkeit festgestellt werden können. Er kann nach allem, was wir von ihm wissen, als starrer Körper betrachtet werden.

Die eigentümlichen Rotationserscheinungen des Mondes sind, wenn auch früher schon erkannt, von *J. Cassini* in den drei bekannten Gesetzen festgelegt worden:

1. Der Mond dreht sich um eine in ihm feste Achse in derselben Zeit, in der er seinen Umlauf um die Erde vollendet.

2. Die Neigung dieser Achse gegen die Ekliptik ist konstant.

3. Mondäquator, Mondbahn und Ekliptik schneiden sich in einer Geraden und zwar so, daß der absteigende Knoten des Mondäquators auf der Ekliptik mit dem aufsteigenden Knoten der Bahn zusammenfällt.

Diese Gesetze gelten für die mittlere Bewegung des Mondes. Sie wurden rein empirisch gefunden und 1721 bekannt gegeben. Ihre theoretische Begründung geschah aber viel später. Einen historischen Überblick findet man bei *Laplace.*

Das 1. Gesetz ist nur möglich, wenn eine Kraft vorhanden ist, die den Mond zwingt, seine Rotationszeit der Umlaufszeit anzupassen. Wäre der Mond ein Rotationsellipsoid, dann könnte das 1. Gesetz nicht dauernd bestehen; er muß ein dreiachsiges Ellipsoid und die längste Achse nach dem Zentralkörper, der Erde, gerichtet sein. Bewegte sich der Mond mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Erde in einer Kreisbahn, die mit dem Mondäquator zusammenfiele, so würde ein ganz bestimmter Mondradius stets auf den Schwerpunkt der Erde gerichtet sein. Durch diesen „Ersten Radius" legt man nach *Tobias Mayer* den Nullmeridian des Mondes. Der Erste Radius ist aber in Wirklichkeit nicht immer nach dem Erdschwerpunkt gerichtet, sondern weicht von dieser Richtung in dem Maße ab, wie die Mondbewegung von der oben angenommenen Kreisbahn.

Man muß annehmen, daß Rotations- und Umlaufszeit durch die Flutreibung im Monde schon gleich geworden waren, bevor der Mond erstarrte, daß der Mond also schon ein dreiachsiges Ellipsoid war, als er sich noch im plastischen Zustand befand. Daraus darf dann gefolgert werden, daß die eine Hauptträgheitsachse mit der Rotationsachse zusammenfällt, während die beiden anderen im Äquator liegen. Die eine von ihnen fällt mit dem Ersten Radius zusammen, der in der Tat auf diese Weise definiert wird. Da nun der Erste Radius periodisch in ganz gesetzmäßiger Weise von der Richtung der anziehenden Kraft abweicht, so wird der Mondkörper um seine mittlere Lage pendelartige Schwingungen ausführen, die im allgemeinen die Ungleichheiten der Mondbewegung widerspiegeln. Die Analogie der Pendelschwingungen lehrt ohne weiteres, daß die zu erwartenden Schwingungen, die man unter dem Namen der „physischen Libration"[1]) zusammenfaßt, nicht so sehr von der Amplitude der Ungleichheiten der Bahnbewegung wie von ihrer Periode abhängen werden. Ein Pendel kann durch sehr schwache Impulse, wenn sie nur immer im geeigneten Augenblicke einsetzen, zum Stillstand oder zum Überschlagen gebracht werden.

Bei der theoretischen Behandlung der physischen Libration genügt es daher nicht, wenn man sich auf den Einfluß der großen Ungleichheiten der Bahnbewegung beschränkt, sondern es müssen vor allem diejenigen Glieder ins Auge gefaßt werden, deren Periode so beschaffen ist, daß sie selbst bei kleiner Amplitude von großem Ein-

1) Die „optische Libration" des Mondes ist nur eine perspektivische Verschiebung der sichtbaren Oberfläche und eine Folge der veränderten Stellung des Beobachters.

fluß werden können. Die Behandlung des Problems, wie sie von *Laplace* gegeben und später von *Wichmann* und ähnlich von *Franz* bei ihren Untersuchungen angewandt worden ist, gestattet nicht die scharfe rechnungsmäßige Durchführung. Die folgenden Entwicklungen schließen sich den Untersuchungen von *Hayn*[2]) an und bedienen sich der von ihm gewählten Bezeichnungsweise, um dem Leser ein näheres Eingehen zu erleichtern.

2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Um die Wirkung der Erdanziehung auf die Bewegung des Mondes um seinen Schwerpunkt zu ermitteln, ist es nötig, den jeweiligen Ort der Erde gegen das Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen des Mondes zu bestimmen. Die positive x-Achse soll mit dem Ersten Radius zusammenfallen, die positive z-Achse nach dem Nordpol des Mondes gerichtet sein. Die y-Achse bildet mit der x-Achse einen rechten Winkel im rechtläufigen Sinne.

Die Lage dieses Systems gegen das der Ekliptik ist durch die drei Winkel ϑ, φ, ψ gegeben, und es ist

ϑ die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik,
φ der Winkelabstand der positiven x-Achse von dem absteigenden Knoten des Mondäquators, in rechtläufigem Sinne gezählt,
ψ die Länge dieses Knotens.

Es bezeichne nun:

M die Masse der Erde,
M_1 die Masse des Mondes,
dm ein Massenteilchen des Mondes,
x, y, z die Koordinaten des Erdschwerpunktes,
x', y', z' die Koordinaten des Massenteilchens dm,
R die Entfernung Erde—Mond,
m die mittlere Länge des Mondes,
n die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn,
i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik,
J die mittlere Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik.

Die *Cassini*schen Gesetze besagen:

$$\vartheta = J, \quad \varphi = 180^0 + m - \psi, \quad \psi = n.$$

Unter dem Einfluß der veränderlichen Erdanziehung wird die Neigung des Mondäquators und die Rotationsgeschwindigkeit nicht konstant sein, der absteigende Knoten des Äquators nicht mit dem aufsteigen-

2) *F. Hayn*, Sel. Koord. I.

den der Bahn zusammenfallen, sondern es wird sein

$$(1) \qquad \vartheta = J + \varrho, \quad \varphi = 180^0 + (m + \tau) - \psi, \quad \psi = n + \sigma.$$

ϱ, σ, τ sind Funktionen der Zeit und erfahrungsgemäß kleine Größen. Sie lassen sich aus den bekannten *Euler*schen Gleichungen bestimmen

$$(2) \qquad \begin{cases} p = -\sin\varphi \sin\vartheta \dfrac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ q = -\cos\varphi \sin\vartheta \dfrac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \dfrac{d\vartheta}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta \dfrac{d\psi}{dt}; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr = z\dfrac{\partial V}{\partial y} - y\dfrac{\partial V}{\partial z}, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)pr = x\dfrac{\partial V}{\partial z} - z\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq = y\dfrac{\partial V}{\partial x} - x\dfrac{\partial V}{\partial y}. \end{cases}$$

Hier bedeuten p, q, r die Drehgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen; ferner ist

$$A = \int (y'^2 + z'^2)\, dm, \quad B = \int (z'^2 + x'^2)\, dm; \quad C = \int (x'^2 + y'^2)\, dm$$

und

$$V = M \int [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}} dm.$$

Wenn man V nach Potenzen entwickelt, kann man sich auf die drei ersten Glieder beschränken, da die Lage der Hauptträgheitsachsen höchstens mit einer Genauigkeit von 2″, d. i. von der Erde gesehen noch nicht 0″01, bestimmt werden soll. Es ist dann

$$V = \frac{MM_1}{R} + \frac{1}{2}\frac{M}{R^3}(A + B + C) - \frac{3}{2}\frac{M}{R^5}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

Unter Benutzung dieser Entwicklung nehmen dann die Formeln (3), wenn man noch die Bezeichnungen

$$(4) \qquad (C-B) : A = \alpha, \quad (C-A) : B = \beta, \quad (B-A) : C = \gamma$$

einführt, die Gestalt an

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} + \alpha qr = \quad 3M\alpha R^{-5} yz, \\ \dfrac{dq}{dt} - \beta pr = -3M\beta R^{-5} zx, \\ \dfrac{dr}{dt} + \gamma pq = \quad 3M\gamma R^{-5} xy. \end{cases}$$

Wenn nun die Koordinaten der Erde gegen den Mond sich auf ein ekliptikales System (ξ, η, ζ) beziehen, dessen ξ-Achse nach dem

absteigenden Knoten des Mondäquators zeigt, während die ξ-Achse nach dem Nordpol gerichtet ist, dann ist

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\varphi + \eta\cos\vartheta\sin\varphi - \zeta\sin\vartheta\sin\varphi, \\ y &= -\xi\sin\varphi + \eta\cos\vartheta\cos\varphi - \zeta\sin\vartheta\cos\varphi, \\ z &= \zeta\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Ist nun die wahre Länge und Breite des Mondes L und B, dann ist die wahre Länge der Erde vom Monde aus gesehen und gerechnet vom absteigenden Knoten des Mondäquators

$$v = L + 180^0 - \psi;$$

da die wahre Breite gleich $-B$ ist, erhält man

$$\xi = R\cos B\cos v, \quad \eta = R\cos B\sin v, \quad \zeta = -R\cos B\,\mathrm{tg}B$$

und somit

$$(6)\quad \begin{cases} x = R\cos B[\cos v\cos\varphi + \sin v\sin\varphi\cos\vartheta + \mathrm{tg}B\sin\varphi\sin\vartheta], \\ y = R\cos B[-\cos v\sin\varphi + \sin v\cos\varphi\cos\vartheta + \mathrm{tg}B\cos\varphi\sin\vartheta], \\ z = R\cos B[-\mathrm{tg}B\cos\vartheta + \sin v\sin\vartheta]. \end{cases}$$

3. Entwicklung der Variabeln als Funktionen der Zeit. Die Masse der Erde ist

$$M = 4\pi^2 a^3 : T^2(1 + M_1),$$

wo M_1 die Masse des Mondes, ausgedrückt in Teilen der Erdmasse (1 : 81,5), a die halbe große Achse der Mondbahn und T die Umlaufszeit des Mondes in Tagen ist. Nun ist $2\pi : T$ die mittlere tägliche Bewegung m' des Mondes, demnach für $a = 1$

$$M = 0{,}9878\, m'^2.$$

Die Koordinaten x, y, z lassen sich nach (6) als Funktionen der Zeit darstellen, da die Abhängigkeit der Größen R, B, v, φ von der Zeit aus der Bahnbewegung des Mondes bekannt ist. Man wird für J einen genähert richtigen Wert einsetzen und muß zunächst über α, β, γ eine Annahme machen. Die Verbesserungen der angenommenen Werte müssen aus Beobachtungen ermittelt werden.

Wenn auf diese Weise die rechten Seiten der Gleichungen (5) als Funktionen der Zeit dargestellt werden, treten in diesen Entwicklungen noch die Größen ϱ, σ, τ auf, die vorläufig unbekannt sind. Da man aber erfahrungsgemäß weiß, daß sie immer klein bleiben, so können sie zunächst vernachlässigt werden.

Die Mondtafeln von *Hansen* geben die wahre Länge des Mondes L, die Parallaxe, den Sinus der Breite B als Funktionen der Zeit mittels der fünf Argumente g, g', ω, ω', θ. Hier ist für $-\theta$ die Bezeichnung n gewählt worden. Es bedeutet

g die mittlere Anomalie des Mondes,

g' „ „ „ der Sonne,

ω den Abstand des Mondperigäums vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn,

ω' den Abstand des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn,

n die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn.

Es ist nach *Hansen*, wenn man unter t die seit der Epoche 1900 Januar 1,0 m. Z. Greenwich verflossenen julianischen Jahre versteht,

$$(7)\quad \begin{cases} g = 309^\circ 11' 0'' + [13 \times 360^\circ + 331158''4]\, t, \\ g' = 359^\circ 27' 56'' + [360^\circ - 33''9]\, t, \\ \omega = 75^\circ 18' 40'' + 216115''2\, t, \\ \omega' = 22^\circ\ 5' 22'' + 69691''0\, t, \\ n = -100^\circ 52' 20'' - 69629''4\, t, \\ m = g + \omega + n. \end{cases}$$

Für J ist im folgenden $1^\circ 32' 20''$ angenommen worden. Wie nun aus den *Hansen*schen Entwicklungen für wahre Länge, Parallaxe, Sinus der Breite die Funktionen R, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, v und die Produkte yz, zx, xy gewonnen werden, kann hier aus Raummangel nicht wiedergegeben werden. Die Rechenoperationen sind in *Hayn*, Sel. Koord. I näher auseinandergesetzt. Die Genauigkeit der Rechnung ist im folgenden eine größere als in der zitierten Abhandlung, und zwar aus Gründen, die in Astr. Nachr. 211 (1920), p. 311 besprochen worden sind.

Sehr wichtig ist bei diesen Rechnungen, daß man kein Glied vernachlässigt, das von irgendwelcher Bedeutung werden kann. Durch Multiplikation von Reihen, die aus Sinus- oder Cosinusgliedern bestehen, entsteht eine neue Reihe von andersgearteten Argumenten; schon weiter oben war darauf hingewiesen worden, welche Bedeutung gewisse Perioden für die Pendelbewegungen des Mondkörpers haben. Aus diesem Grunde müssen bei den folgenden Reihen für L, $1 : R$ und $\sin B$ so viele Glieder mitgenommen werden, deren Koeffizienten manchmal recht klein sind, und die auf den ersten Blick bedeutungslos erscheinen.

Argument	$L+g+\omega+n$	$1:R=1{,}00000$
g	$+$ 22641″ sin Arg.	$+$ 0,05452 cos Arg.
$2g$	$+$ 769	$+$ 298
$3g$	$+$ 37	$+$ 15
$-g-g'$	$+$ 109	$-$ 26
$-g'$	$+$ 668	$-$ 12
$g-g'$	$+$ 147	$+$ 35
$-g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 2,2	
$g-g'+2\omega-2\omega'$	$-$ 28	$-$ 6
$2g-g'+2\omega-2\omega'$	$-$ 25	$-$ 9
$-g-2g'+2\omega-2\omega'$		$-$ 6
$-2g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 211	$-$ 9
$g-2g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 4586	$+$ 1002
$2g-2g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 2369	$+$ 821
$3g-2g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 192	$+$ 88
$4g-2g'+2\omega-2\omega'$		$+$ 6
$g-3g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 207	$+$ 41
$2g-3g'+2\omega-2\omega'$	$+$ 166	$+$ 56
$3g-3g'+2\omega-2\omega'$		$+$ 6
$2g-4g'+4\omega-4\omega'$	$+$ 32	$+$ 12
$3g-4g'+4\omega-4\omega'$	$+$ 38	$+$ 18
$4g-4g'+4\omega-4\omega'$		$+$ 6
$+2\omega$	$+$ 1,6	
(8) $g+2\omega$	$-$ 40	$-$ 20,5
$2g+2\omega$	$-$ 412	
$3g+2\omega$	$-$ 46	
$-2g'-2\omega'$	$+$ 53	
$g-2g'-2\omega'$	$-$ 7	
$-g'+\omega-\omega'$	$-$ 19	
$g-g'+\omega-\omega'$	$-$ 122	$-$ 26
$n-5^0$	$+$ 8	

$$
\begin{aligned}
\sin B = &- 0{,}00016 \sin -g + \omega \\
&- 485 \quad + \omega \\
&+ 8942 \quad g + \omega \\
&+ 489 \quad 2g + \omega \\
&+ 31 \quad 3g + \omega \\
&- 3 \quad g + g' + \omega \\
&+ 2 \quad g - g' + \omega \\
&+ 8 \quad -g-2g'+\omega-2\omega' \\
&+ 82 \quad -2g'+\omega-2\omega' \\
&+ 302 \quad g-2g'+\omega-2\omega' \\
&+ 16 \quad 2g-2g'+\omega-2\omega' \\
&+ 4 \quad -3g'+\omega-2\omega' \\
&+ 15 \quad g-3g'+\omega-2\omega'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
-0{,}00001 & \sin & g - 2g' + 3\omega - 2\omega' \\
+ \quad 97 & & 2g - 2g' + 3\omega - 2\omega' \\
+ \quad 57 & & 3g - 2g' + 3\omega - 2\omega' \\
+ \quad 7 & & 4g - 2g' + 3\omega - 2\omega' \\
+ \quad 4 & & 2g - 3g' + 3\omega - 2\omega' \\
+ \quad 4 & & 3g - 3g' + 3\omega - 2\omega' \\
- \quad 5 & & g - g' + \omega - 2\omega'
\end{array}
$$

Die variablen Faktoren der rechten Seiten der Gleichungen (5) nehmen die folgende Gestalt an, wobei die Koeffizienten in Teilen des Radius ausgedrückt sind. Für die spätere Behandlung der Gleichungen werden die Abkürzungen eingeführt:

$$S = -R^{-5}yz, \quad T = -R^{-5}xz.$$

(9 a)

Argument	$-S$	T
$-g + \omega$	$-0{,}00039 \cos$ Arg.	$+0{,}00026 \sin$ Arg.
$+\omega$	-640	$+318$
$g + \omega$	-56	$+11561$
$2g + \omega$	$+628$	$+1576$
$3g + \omega$	$+108$	$+186$
$3g + 3\omega$	-20	$+19$
$g - g' + \omega$	$+19$	$+4$
$-g - g' - \omega$	-18	$+6$
$-g - 2g' + \omega - 2\omega'$	-22	$+11$
$-2g' + \omega - 2\omega'$	-148	-48
$g - 2g' + \omega - 2\omega'$	-74	$+174$
$2g - 2g' + \omega - 2\omega'$	$+2$	$+23$
$-3g' + \omega - 2\omega'$	-7	-3
$g - 3g' + \omega - 2\omega'$	-5	$+5$
$g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	-8	$+4$
$2g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	$+118$	$+301$
$3g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	$+99$	$+256$
$4g - 2g' + 3\omega - 2\omega'$	$+31$	$+56$
$2g - 3g' + 3\omega - 2\omega'$	$+5$	$+12$
$3g - 3g' + 3\omega - 2\omega'$	$+5$	$+16$

Zu $-S$ treten noch die Glieder

$$+0{,}116\,\tau \sin(g + \omega) - 0{,}109 \sin g[\varrho \sin(g + \omega) - J\sigma \cos(g + \omega)]$$

und zu T

$$+0{,}9933\,\varrho \sin(g + \omega) - 0{,}9943\,J\sigma \cos(g + \omega)$$
$$+0{,}109 \sin g[\varrho \cos(g + \omega) + J\sigma \sin(g + \omega)]$$
$$+0{,}163 \cos g[\varrho \sin(g + \omega) - J\sigma \cos(g + \omega)].$$

$R^{-5}xy$ setzt sich zusammen aus

$$(9\text{b})\quad \left\{\begin{array}{llllll} \sum H\sin h = & +\,0{,}10829\sin g & & & & \\ & +\quad 321 & -\,g' & & & \\ & -\quad 11 & -\,g' & +\,\omega & -\,\omega' & \\ & +\quad 118 & -\,2g' & +\,2\omega & -\,2\omega' & \\ & +\quad 2155 & g-2g' & +\,2\omega & -\,2\omega' & \\ & -\quad 1{,}0 & & +\,2\omega & & \\ & +\quad 28 & -\,2g' & & -\,2\omega' & \\ & +\quad 4 & n-5^0 & & & \end{array}\right.$$

und

$$-\,0{,}9852\,\tau - 0{,}162\,\tau\cos g - 0{,}045\,J\sigma[1-\cos(2g+2\omega)].$$

4. Die Integration der Bewegungsgleichungen. Die dritte Gleichung (5) läßt sich leicht in eine integrabele Form bringen. Es ist nach (2)

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\vartheta\frac{d\psi}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{d\tau}{dt} - \frac{d\psi}{dt} + \cos\vartheta\frac{d\psi}{dt}$$
$$= \frac{dm}{dt} + \frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}.$$

Da J ein kleiner Winkel ist, findet man

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2\tau}{dt^2} - \frac{J}{2}\frac{d^2J\sigma}{dt^2}.$$

Wenn nun noch $M' = 3M$ gesetzt wird, lautet die 3. Gleichung (5)

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2\tau}{dt^2} + 0{,}9852\,M'\gamma\tau = M'\gamma\sum H\sin h - \gamma pq \\ \quad + M'\gamma[-\,0{,}162\,\tau\cos g - 0{,}045\,J\sigma(1-\cos(2g+2\omega))] \\ \quad + \dfrac{J}{2}\dfrac{d^2J\sigma}{dt^2}. \end{array}\right.$$

Vernachlässigt man zunächst auf der rechten Seite alle Glieder außer $M'\gamma\sum H\sin h$, so ist das vollständige Integral dieser Gleichung

$$(11)\quad \tau = A\sin\left(a + t\sqrt{0{,}9852\,M'\gamma}\right) - \sum\frac{M'\gamma H\sin h}{h'^2 - 0{,}9852\,M'\gamma}.$$

Hier bedeutet h' die tägliche Bewegung des Argumentes h, t die in mittleren Tagen ausgedrückte Zeit; A und a sind die beiden Integrationskonstanten.

In der Gleichung (10) ist das Glied γpq ganz zu vernachlässigen; ferner findet man aus späteren Ergebnissen, daß

$$-\,0{,}162\,\tau\cos g = +\,0{,}00001\sin 2g + 0{,}00003\sin(-g-g')$$
$$+\,0{,}00003\sin(g-g')$$

und

$$-\,0{,}045\,J\sigma[1-\cos(2g+2\omega)] = +\,0{,}00002\sin g.$$

Das letzte Glied aber kann man in folgender Weise schreiben:

$$M'\gamma \frac{J}{2M'\gamma} \frac{d^2 J\sigma}{dt^2}$$

$= M'g[+0{,}01356 \sin g - 0{,}00454 \sin(g+2\omega) + 0{,}00555 \sin(2g+2\omega)]$.

Zu der Reihe $\sum H \sin h$ treten also noch additiv hinzu

$$+ 0{,}00002 \sin g \quad \text{und} \quad + 0{,}01356 \sin g.$$

Die Glieder mit anderen Argumenten geben bei der Integration Größen, die vernachlässigt werden können.

Die täglichen Bewegungen der vier Argumente g, g', ω, ω' sind in Teilen des Radius:

$$+ 0{,}2280273, \quad + 0{,}0172022, \quad + 0{,}0028686, \quad + 0{,}0009250.$$

Mit der Annahme $\gamma = 0{,}0001703$, $m' = 0{,}229972$ und $M = 0{,}052242$ wird $0{,}9852\, M'\gamma = 0{,}00002629$. Für diesen Wert von h'^2 wird der Nenner im 2. Gliede von (11) Null, d. h. für ein Argument, dessen tägliche Bewegung 0,005127 beträgt. Von allen Argumenten kommt 2ω diesem Werte am nächsten; denn seine tägliche Bewegung ist $+ 0{,}005737$. Dieses Argument hat demnach für die Achsendrehung des Mondes eine wesentliche Bedeutung.

Mit Benutzung der oben gegebenen Zahlenwerte erhält man nun für τ den Ausdruck:

$$(12) \quad \begin{cases} \tau = A \sin(a + 1057''7\, t) - 13'' \sin g \\ \qquad\qquad + 65'' \sin g' \\ \qquad\qquad + 3'' \sin(-g' + \omega - \omega') \\ \qquad\qquad - 7'' \sin(-2g' + 2\omega - 2\omega') \\ \qquad\qquad - 3'' \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ \qquad\qquad + 8'' \sin 2\omega \\ \qquad\qquad - 1'' \sin(-2g' - 2\omega') \\ \qquad\qquad + 8'' \sin(n - 5^0). \end{cases}$$

Die Integration der beiden anderen Gleichungen (5) ist nicht ganz so einfach. An Stelle der gesuchten Funktionen ϱ und σ müssen zwei andere Variable x und y eingeführt werden, nämlich

$$x = \sin\varphi \sin\vartheta \quad \text{und} \quad y = \cos\varphi \sin\vartheta.$$

Da $\varphi = 180^0 + g + \omega + \tau - \sigma$ ist, und J als bekannt ($1^0 32' 20'' = 0{,}026859$) angenommen werden soll, ist es erlaubt zu schreiben

$$x = -J \sin(g+\omega) - \varrho \sin(g+\omega) - J\tau \cos(g+\omega) + J\sigma \cos(g+\omega),$$
$$y = -J \cos(g+\omega) - \varrho \cos(g+\omega) + J\tau \sin(g+\omega) - J\sigma \sin(g+\omega).$$

Die Umformung der beiden Gleichungen geht aus folgendem hervor.

Es war

$$p = -\sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt}, \quad q = -\cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\psi = 180^0 + m + \tau - \varphi, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{d\tau}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dm}{dt} = m',$$

folglich

$$p = -m'\sin\varphi\sin\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\tau}{dt} + \sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\varrho}{dt},$$

$$q = -m'\cos\varphi\sin\vartheta - \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\tau}{dt} + \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\varrho}{dt}.$$

Da nun $x = \sin\varphi\sin\vartheta$, $y = \cos\varphi\sin\vartheta$ ist, wird

$$p = -m'x - x\frac{d\tau}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2\cos\varphi\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\varrho}{dt},$$

$$q = -m'y - y\frac{d\tau}{dt} + \frac{dx}{dt} + 2\sin\varphi\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\varrho}{dt},$$

Bildet man hieraus $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ und bedenkt, daß

$$r = m' + \frac{d\tau}{dt} - 2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\frac{d\psi}{dt}$$

ist, dann wird unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} + \alpha qr = -\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt}m'(1-\alpha) - \alpha m'^2 y \\ \qquad\qquad - \dfrac{dx}{dt}\dfrac{d\tau}{dt} - x\dfrac{d^2\tau}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J^2\cos(g+\omega)\dfrac{d\varrho}{dt}\right), \\ \dfrac{dq}{dt} - \beta rp = \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}m'(1-\beta) + \beta m'^2 x \\ \qquad\qquad - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\tau}{dt} - y\dfrac{d^2\tau}{dt^2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J^2\sin(g+\omega)\dfrac{d\varrho}{dt}\right). \end{cases}$$

In jeder der beiden Gleichungen können zunächst die drei letzten Glieder vernachlässigt werden.

Die 1. Gleichung (5), ohne weiteres aus (9a) und (13) gebildet, ist sofort verwendbar. In dem Ausdruck T (9a) muß aber noch eine Umformung vorgenommen werden. Innerhalb der erstrebten Genauigkeit ist

$$x = -0{,}02686\sin(g+\omega) - 0{,}0269\,\tau\cos(g+\omega) - \varrho\sin(g+\omega) + J\sigma\cos(g+\omega),$$

daher kann man für die in T auftretenden Glieder

$$+0{,}11561\sin(g+\omega) + 0{,}9933\,\varrho\sin(g+\omega) - 0{,}9943\,J\sigma\cos(g+\omega)$$

schreiben

$$+0{,}08892\sin(g+\omega) - 0{,}9938\,x - 0{,}0267\,\tau\cos(g+\omega).$$

Dann nehmen die beiden Gleichungen (5) die folgende Form an

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\, m'(1-\alpha) + \alpha m'^2 y = M'\alpha S + U, \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\, m'(1-\beta) + x(\beta m'^2 + 0{,}9938\,\beta M') \\ \qquad\qquad = M'\beta(T + 0{,}9938\,x) + W, \end{cases}$$

wo

$$U = -\frac{dx}{dt}\frac{d\tau}{dt} - x\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J^2\cos(g+\omega)\frac{d\varrho}{dt}\right),$$

$$W = \frac{dy}{dt}\frac{d\tau}{dt} + y\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J^2\sin(g+\omega)\frac{d\varrho}{dt}\right).$$

Die Glieder von S und $T + 0{,}9938\,x$, die ϱ, σ, τ enthalten, darf man in 1. Näherung vernachlässigen; in 2. Näherung wird man dafür finden:

$$\begin{aligned}
-0{,}116\,\tau\sin(g+\omega) &= -0{,}00004\cos(-g+\omega)\\
+0{,}109\sin g[\varrho\sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega)] &+ 1\cos\omega\\
&+ 4\cos(g+\omega)\\
&- 1\cos(2g+\omega)\\
&- 2\cos(g-g'+\omega)\\
&+ 2\cos(g+g'+\omega)\\
+0{,}109\sin g[\varrho\cos(g+\omega) + J\sigma\sin(g+\omega)] &= -0{,}00004\sin(-g+\omega)\\
+0{,}163\cos g[\varrho\sin(g+\omega) - J\sigma\cos(g+\omega)] &+ 1\sin\omega\\
-0{,}0267\,\tau\cos(g+\omega) &- 8\sin(g+\omega)
\end{aligned}$$

Ferner erhält man, wenn $M'\alpha = 0{,}0000723$, $M'\beta = 0{,}0000988$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
\frac{U}{M'\alpha} &= +0{,}00001\cos(g+\omega) & \frac{W}{M'\beta} &= -0{,}00001\sin(g+\omega)\\
&- 87\cos(2g+\omega) & &- 64\sin(2g+\omega)\\
&+ 4\cos(3g+3\omega) & &+ 3\sin(3g+3\omega)\\
&+ 21\cos(g-g'+\omega) & &+ 15\sin(g-g'+\omega)\\
&+ 21\cos(g+g'+\omega) & &+ 15\sin(g+g'+\omega)
\end{aligned}$$

Diese Zusatzglieder treten also noch additiv zu S und $T + 0{,}9938\,x$. Die rechten Seiten der Gleichungen (14) sind demnach Reihen, deren einzelne Glieder die Form haben

$$F\cos g \quad \text{und} \quad G\sin g.$$

Die Integration kann nun ausgeführt werden. Wenn man in den Gleichungen (14) die rechten Seiten Null setzt, wird ihnen genügt durch die beiden Wertsysteme:

$$\text{I:}\quad x = A_1\cos\lambda t, \quad y = B_1\sin\lambda t,$$

$$\text{II:}\quad x = A_2\sin\lambda t, \quad y = B_2\cos\lambda t.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (14) erhält man eine Gleichung 4. Grades[3]) für λ, die die beiden reellen Wurzeln hat

$$(15\,a)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = m'\left[1 + \frac{\varepsilon - 1}{2}\beta\right], \\ \lambda_2 = m'\sqrt{\varepsilon\alpha\beta}, \end{cases}$$

wo $\varepsilon - 1$ das Produkt aus den drei Faktoren 3, 0,9878, 0,9938, also 2,9450 ist. Durch Einführung von vier Integrationskonstanten, die mit A_1, A_2, B_1, B_2 in bestimmten Beziehungen[4]) stehen, ergeben sich als Integrale der Gleichungen (14)

$$(15\,b)\qquad \begin{cases} x = B\sin(b + \lambda_1 t) + C\sin(c + \lambda_2 t), \\ y = B\cos(b + \lambda_1 t) - \sqrt{\frac{\varepsilon\beta}{\alpha}}\, C\cos(c + \lambda_2 t), \end{cases}$$

welche die Gleichungen bis auf Glieder 2. Ordnung in α und β, die bei der Ableitung vernachlässigt worden waren, befriedigen.

Um nun die vollständigen Integrale zu erhalten, geht man davon aus, daß den Gleichungen auch genügt wird durch die Größen

$$x = X\sin g, \quad y = Y\cos g.$$

Bildet man hiermit die Gleichungen (14), dann findet man

$$(16)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{-G(g'^2 - \alpha m'^2) - Fg'm'(1-\beta)}{(g'^2 - \beta m'^2\varepsilon)(g'^2 - \alpha m'^2) - g'^2 m'^2(1-\alpha)(1-\beta)}, \\ Y = \dfrac{-F(g'^2 - \beta m'^2\varepsilon) - Gg'm'(1-\alpha)}{(g'^2 - \beta m'^2\varepsilon)(g'^2 - \alpha m'^2) - g'^2 m'^2(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{cases}$$

Unter g' ist die tägliche Bewegung des betr. Argumentes zu verstehen. Mit Hilfe der Formeln (15) und (16) lassen sich somit die vollständigen Integrale der beiden Differentialgleichungen berechnen, vorausgesetzt, daß α und β bekannt sind. Die vier Integrationskonstanten müssen aus Beobachtungen ermittelt werden.

Aus der Definition $x = \sin\varphi\sin\vartheta$, $y = \cos\varphi\sin\vartheta$ folgt unter erlaubter Vernachlässigung gewisser kleiner Größen

$$(17)\qquad \begin{cases} J + \varrho = -x\sin(g+\omega) - y\cos(g+\omega), \\ J\sigma - J\tau = +x\cos(g+\omega) - y\sin(g+\omega), \end{cases}$$

und somit lassen sich, da J und τ bekannt sind, ϱ und $J\sigma$ berechnen. x besteht aus einer Reihe von Sinusgliedern, y aus einer solchen von Cosinusgliedern, folglich sind in ϱ alle Koeffizienten mit cos, in $J\sigma$

3) *F. Hayn*, Sel. Koord. I, p. 897.
4) *F. Hayn*, Sel. Koord. I. p. 898.

mit sin multipliziert. Nun ist

$$\varrho = -J - x\sin(g+\omega) - y\cos(g+\omega),$$

das Argument $g+\omega$ liefert für ϱ die folgenden Glieder:

$$-X_{g+\omega}\sin^2(g+\omega) - Y_{g+\omega}\cos^2(g+\omega)$$

oder

$$-X_{g+\omega}\frac{1-\cos(2g+2\omega)}{2} - Y_{g+\omega}\frac{1+\cos(2g+2\omega)}{2}.$$

Demnach ist, wenn man von den Gliedern mit anderen Argumenten absieht, weil sie an dieser Stelle belanglos sind,

$$2\varrho = -2J - X_{g+\omega} - Y_{g+\omega} + X_{g+\omega}\cos(2g+2\omega) - Y_{g+\omega}\cos(2g+2\omega).$$

Da nun nach der Definition ϱ nur aus periodischen Gliedern bestehen soll, so muß sein

$$X_{g+\omega} + Y_{g+\omega} = -2J. \tag{18}$$

Durch die Formeln (16) und (18) ist demnach eine Bedingungsgleichung zwischen J, α, β geschaffen.

Aus der Definition von α, β, γ folgt ohne weiteres die Gleichung

$$\alpha - \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 0,$$

in der das Produkt $\alpha\beta\gamma$ verschwindend klein ist.

Aus der Annahme folgender Zahlenwerte:

$$J = 0{,}026859,\quad F_{g+\omega} = +0{,}00061\,M'\alpha,\quad G_{g+\omega} = +0{,}08884\,M'\beta,$$
$$M' = 0{,}156725,\quad \varepsilon = 3{,}9450$$

ergibt sich, wenn man das Verhältnis $\alpha:\beta$ mit f bezeichnet, die Bedingungsgleichung

$$\beta = +0{,}0006328 - 0{,}00528\,f\beta + 1{,}0074\,f\beta^2,$$

oder wenn man für β rechts 0,000631 einsetzt

$$\beta = +0{,}0006328 - 0{,}00000293\,f. \tag{19}$$

Wenn demnach aus Beobachtungen J und f bestimmbar sind, dann ist das ganze Problem gelöst. Zur Zeit gelten als die sichersten Werte[5]) $J = 1°32'20''$, $f = 0{,}73$. Daraus folgt

$$\beta = +0{,}0006307;\quad \alpha = +0{,}0004604,\quad \gamma = +0{,}0001703,$$

d. h. die Werte, die im Vorstehenden verwendet worden sind. Mit den Formeln (15), (16), (17) lassen sich nun auch die Funktionen ϱ und $J\sigma$ berechnen, und zwar ergibt sich:

5) Astr. Nachr. 199 (1914), p. 261.

$$
\begin{aligned}
\varrho = &-B\cos(b-146''6t) && J\sigma = J\tau + B\sin(b-146''6t),\\
&+0{,}662\,C\cos(c+50''8t-g-\omega) && -0{,}662\,C\sin(c+50''8t-g-\omega),\\
&+1{,}662\,C\cos(c+50''8t+g+\omega) && +1{,}662\,C\sin(c+50''8t+g+\omega),\\
&-106''\cos g && -108''\sin g,\\
(20)\quad &+35\cos(g+2\omega) && +35\sin(g+2\omega),\\
&-11\cos(2g+2\omega) && -11\sin(2g+2\omega),\\
&-3\cos(2g'+2\omega') && -3\sin(2g'+2\omega'),\\
&-2\cos(g-2g'+2\omega-2\omega') && -2\sin(g-2g'+2\omega-2\omega').
\end{aligned}
$$

Es genügt, hierin $J\tau = +0{,}0269\,\tau = +2''\sin g'$ zu setzen. Das Glied in τ mit den Integrationskonstanten A und a ist an sich wahrscheinlich sehr klein, da es bisher noch nicht nachgewiesen werden konnte, mit J multipliziert ist es jedenfalls ganz zu vernachlässigen. Was von A gilt, kann auch von den beiden Integrationskonstanten B und C gesagt werden; auch sie konnten bisher nicht ermittelt werden.

Man hat diese Schwankungen die „willkürliche Libration" genannt im Gegensatz zu den anderen Gliedern, deren Koeffizienten durch die Bahnbewegung und die Form des Trägheitsellipsoides bestimmt sind, und die man daher als „gezwungene Libration" bezeichnet hat. Die „willkürliche Libration" läßt sich physikalisch auf folgende Weise erklären:

Man nimmt zunächst an, daß ihre Koeffizienten Null sind; dann ist die Bewegung des Ellipsoides durch die Formeln (1) und die „gezwungene Libration" nach (12) und (20) gegeben. Wenn man nun das Ellipsoid aus dieser Gleichgewichtslage durch irgendeine Kraft herausdreht, dann wird es pendelartige Schwingungen um dieselbe ausführen, die eben durch die Glieder der „willkürlichen Libration" gegeben sind.

Als Ursache solcher Schwankungen könnte man sich Massenumlagerungen im Monde oder Stöße von außen etwa durch aufstürzende größere Meteormassen denken. Auch wäre möglich, daß solche Schwingungen aus einer Zeit noch in geringem Maße vorhanden wären, als der Mond noch nicht völlig starr war. Ist einmal eine willkürliche Libration vorhanden gewesen, und ist sie nicht im Laufe der Zeit durch irgendeine Kraft vernichtet worden, so müßte sie noch heute bestehen.

Daß nun aus den genannten Ursachen Schwingungen mit beträchtlichen Amplituden vorhanden sein sollten, ist an sich nicht recht wahrscheinlich; da nun auch die Beobachtungen bisher nichts der-

artiges haben erkennen lassen, darf man wohl annehmen, daß die Schwankungen der willkürlichen Libration unterhalb der Grenze der Meßbarkeit liegen. Infolgedessen werden im folgenden diese Glieder von τ, ϱ, $J\sigma$ außer Betracht bleiben.

Es ist von Interesse zu sehen, welche Werte die Koeffizienten der Funktionen τ, ϱ, $J\sigma$ für verschiedene Werte von f annehmen:

	$f=$	0,5	0,6	0,7	0,8	
	$\tau=$	$-22''$	$-18''$	$-14''$	$-10''$	$\sin g$
		$+132$	$+102$	$+74$	$+47$	$\sin g'$
		$+6$	$+5$	$+3$	$+2$	$\sin(-g'+\omega-\omega')$
(21)		-14	-11	-8	-5	$\sin(-2g'+2\omega-2\omega)$
		-6	-4	-3	-2	$\sin(g-2g'+2\omega-2\omega')$
		-6	-13	$+16$	$+3$	$\sin 2\omega$
		$+8$	$+8$	$+8$	$+8$	$\sin(n-5^0)$;
	$\varrho=$	-88	-96	-103	-111	$\cos g$
		$+9$	$+20$	$+32$	$+43$	$\cos(g+2\omega)$
(22)		-11	-11	-11	-11	$\cos(2g+2\omega)$
		-3	-3	-3	-3	$\cos(2g'+2\omega')$
		-2	-2	-2	-2	$\cos(g-2g'+2\omega-2\omega')$;
	$J\sigma=$	-90	-98	-105	-113	$\sin g$
		$+9$	$+20$	$+32$	$+43$	$\sin(g+2\omega)$
(23)		-11	-11	-11	-11	$\sin(2g+2\omega)$
		-3	-3	-3	-3	$\sin(2g'+2\omega')$
		-2	-2	-2	-2	$\sin(g-2g'+2\omega-2\omega')$
		$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	$\sin g'$.

Der Koeffizient von $\sin 2\omega$ in (21), der für $f=0{,}662$ unendlich wird, nimmt für $f=0{,}65$ und $0{,}67$ die Werte $-59''$ und $+84''$ an.

5. Der Einfluß der Sonnenanziehung. Bisher ist nur der Einfluß der Erdanziehung auf das rotierende Mondellipsoid untersucht worden. Der Einfluß der Sonne kommt insofern schon indirekt zum Ausdruck, als die Bahnbewegung des Mondes Sonnenstörungen aufweist, die von Einfluß auf die Drehbewegung des Mondes sind, wie ja das Vorhandensein der Argumente g' und ω', die der Sonne angehören, zeigt. In dem Ausdruck für τ ist das von der Sonnenstörung abhängige Glied sogar das größte.

Es wird aber nun selbstverständlich auch direkt die Anziehung der Sonne auf die Rotation des Mondes einwirken. Dieser Einfluß ist zwar proportional der Sonnenmasse, aber umgekehrt proportional der 3. Potenz der Entfernung, so daß die direkte Wirkung der Sonne etwa 183 mal kleiner sein wird als die der Erde. Daraus geht schon her-

vor, daß wahrscheinlich die kleinen Zusatzglieder, die durch Berücksichtigung der Sonnenanziehung noch zu den Ausdrücken τ, ϱ, $J\sigma$ treten, von der Erde gesehen unterhalb der Grenze der Sichtbarkeit bleiben. Da die Wirkung der Sonne so geringfügig sein wird, kann sie rechnerisch in der Weise ermittelt werden, daß zu den rechten Seiten der Gleichungen (5) Ausdrücke hinzutreten, die an Stelle der Erdmasse und deren Koordinaten die entsprechenden Werte für die Sonne enthalten.

Nennt man die Masse der Sonne M'',
die selenozentrische Länge „ „ L'',
„ „ Breite „ „ B'',
den Abstand Sonne—Mond R'',

dann findet man $M'' = \frac{328000}{391{,}5^3} M$ und mit Hilfe der Sonnentafeln

$$L'' = g' + \omega' + n + 0{,}0335 \sin g' + 0{,}0003 \sin 2g' + 0{,}0002 \sin(-g' + \omega - \omega') - 0{,}0026 \sin(g - g' + \omega - \omega'),$$

$$1 : R'' = 1{,}0000 + 0{,}0167 \cos g' + 0{,}0003 \cos 2g' - 0{,}0002 \cos(-g' + \omega - \omega') + 0{,}0026 \cos(g - g' + \omega - \omega')$$

$$B'' = -0{,}0002 \sin(g + \omega).$$

Zu den rechten Seiten der Gleichungen (10) und (14) treten infolgedessen Glieder, von denen hier nur die wesentlichsten angeführt werden sollen:

$$-3M''\gamma\, 0{,}4994 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') = -M'\gamma\, 0{,}00271 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega),$$

$$-3M''\alpha[0{,}0133 \cos(g - 2g' + \omega - 2\omega') + 0{,}5\, y] = -M'\alpha[0{,}00001 \cos(g - 2g + 2\omega - 2\omega') + 0{,}0027\, y],$$

$$-3M''\beta[0{,}0133 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') + 0{,}5\, x] = -M'\beta[0{,}00001 \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + 0{,}0027\, x].$$

Die Integration dieser Zusatzglieder liefert ganz unmerkliche Librationsschwankungen, die weit unter 1″ liegen. In den beiden letzten Zeilen kann man setzen

$$x = -0{,}02686 \sin(g + \omega), \quad y = -0{,}02686 \cos(g + \omega)$$

und erhält daher für sie die Werte

$$+0{,}00007\, M'\alpha \cos(g + \omega) \quad \text{und} \quad +0{,}00007\, M'\beta \sin(g + \omega).$$

Diese beiden Größen müssen, will man den Einfluß der Sonne nicht ganz vernachlässigen, zu den rechten Seiten der Gleichungen (14) hinzugefügt werden. Dadurch ändern sich etwas die Werte $F_{g+\omega}$, $G_{g+\omega}$, $X_{g+\omega}$, $Y_{g+\omega}$ und somit die Bedingungsgleichungen (18).

Betrachtet man allein die Erdanziehung, dann liefert die Gleichung (18) folgende Beziehung zwischen J, β, f:

$$(24)\quad \begin{cases} \beta[7{,}170739] + f\beta[5{,}007460] - f\beta^2[7{,}176300] \\ \quad + 2J\beta[7{,}719265] - 2Jf\beta^2[7{,}914592] - 2J[5{,}356179] = 0. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Sonnenanziehung lautet diese Gleichung

$$(25)\quad \begin{cases} \beta[7{,}171081] + f\beta[5{,}054639] - f\beta^2[7{,}177465] \\ \quad + 2J\beta[7{,}919265] - 2Jf\beta^2[7{,}914592] - 2J[5{,}356179] = 0. \end{cases}$$

Im 1. Falle folgt aus $J = 0{,}026859$ und $f = 0{,}73$ für β der Wert 0,0006307, im 2. Falle richtiger 0,0006300.

Von $\beta = 0{,}0006300$ ausgehend müßten nun erneut die Größen τ, ϱ, $J\sigma$ berechnet werden; doch würden die neuen Zahlenwerte sich nur ganz unwesentlich von den früheren unterscheiden, so daß diese Berechnung unterbleiben kann.

Von Interesse ist aber, rechnungsmäßig festzustellen, wie groß die Neigung der Mondachse wäre, wenn die Erde allein wirkte. Aus der Gleichung (24) folgt mit $\beta = 0{,}0006300$

$$J = 1^\circ 32' 13''.$$

Die Neigung der Mondachse ist also durch den Einfluß der Sonnenanziehung um 7″ größer, als wenn die Erde allein wirkte.

6. Die Ermittlung der Konstanten aus den Beobachtungen. Die Gleichungen (1), (12), (20) definieren die Bewegung des Trägheitsellipsoides des Mondes um den Schwerpunkt, dessen Bahnbewegung bekannt ist. Wären auch J und f genau bekannt und ebenso die Integrationskonstanten A, a, B, b, C, c, so ließe sich die Lage des Ellipsoides für jeden Zeitpunkt genau berechnen.

Diese acht Konstanten müssen aus Beobachtungen ermittelt werden. Von J und f kennen wir genäherte Werte; von A, B, C wissen wir, daß sie jedenfalls klein sind. Es ist bisher noch nicht gelungen, sie festzustellen. Man darf sich daher zunächst auf die Ermittlung von J und f beschränken. Der Gang der Untersuchung ist der folgende.

Ein gut definierter Punkt der Mondoberfläche, der mit dem Trägheitsellipsoid fest verbunden und möglichst nahe dem Ersten Radius gelegen ist, wird infolge der Bahn- und Rotationsbewegung des Mondes seine scheinbare Stellung zum Mondschwerpunkt periodisch ändern. Die relative Lage dieses Punktes — man wählte dazu den sogenannten Krater Mösting A — gegen den Schwerpunkt wird nun durch Messungen ermittelt und mit angenommenen genäherten Werten von J, f und den drei Polarkoordinaten des Punktes h_1, λ_1, β_1 berechnet. Die selenographische Länge (λ_1) und Breite (β_1) beziehen sich auf das

durch die drei Hauptträgheitsachsen definierte Koordinatensystem; denn nur die Lage dieses Systems, das mit der Oberfläche fest verbunden ist, können wir berechnen und durch Beobachtung feststellen, nicht aber wie bei der Erde die Lage der tatsächlichen Drehachse und des hierdurch definierten Äquators.

Aus den Widersprüchen zwischen Beobachtung und Rechnung sind nun durch eine ausgleichende Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate die Verbesserungen der angenommenen Werte von J, f, h_1, λ_1, β_1 zu ermitteln.

Die Hauptschwierigkeiten des Problems bestehen nun darin:

1. daß sich das Aussehen des Oberflächenpunktes mit wechselnder Beleuchtung ändert, wodurch leicht die Messungen systematisch entstellt werden, und

2. daß der Mondschwerpunkt kein sichtbarer Punkt ist, sondern nur aus Beobachtungen des Mondrandes errechnet werden kann. Nun ist aber der Mondrand keineswegs ein Kreis oder eine Ellipse, sondern eine recht unregelmäßige Kurve. Eine Niveaufläche, wie sie auf der Erde die Ozeane darstellen, gibt es auf dem Monde nicht; es bleibt also nichts anderes übrig, als durch die Gebirge und Senkungen der Gegenden der Mondoberfläche, die den scheinbaren Rand bilden, eine ausgleichende Kugeloberfläche zu legen oder mit anderen Worten eine Niveaukarte[6]) der Randgebiete des Mondes herzustellen, aus der dann für jeden beobachteten Randpunkt seine Abweichung von der mittleren Niveaufläche entnommen werden kann. Man muß zunächst annehmen, daß der Mittelpunkt dieser Kugel mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Durch Untersuchung der Bahnbewegung des Mondes läßt sich die Breitendifferenz beider Punkte feststellen; ihre Längendifferenz aber kann nicht ermittelt werden.

3. Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, daß die Funktion τ eine Unstetigkeitsstelle für $f = 0{,}662$ besitzt. Bei der ausgleichenden Rechnung braucht man den Quotienten $\frac{d\tau}{df}$, der an dieser Stelle ebenfalls unstetig ist. Man kommt über diese Schwierigkeit nur auf dem Wege der Näherung hinweg.

Das Rechenverfahren wird wesentlich dadurch erleichtert, daß man für den Oberflächenpunkt sogenannte mittlere Längen und Breiten einführt, die sich auf ein System beziehen, dessen Bewegung durch die Gleichungen (1) definiert wird, wenn man τ, ϱ, σ Null setzt. Bezeichnet man diese selenographischen Längen und Breiten mit $\lambda_1 + \Delta\lambda_1$

6) *F. Hayn*, Sel. Koord. IV.

und $\beta_1 + \Delta\beta_1$, dann ist

$$(26)\quad \begin{cases} \Delta\lambda_1 = -\varrho \operatorname{tg}\beta_1 \cos(g+\omega+\lambda_1) - J\sigma \operatorname{tg}\beta_1 \sin(g+\omega+\lambda_1) + \tau, \\ \Delta\beta_1 = +\varrho \sin(g+\omega+\lambda_1) - J\sigma \cos(g+\omega+\lambda_1). \end{cases}$$

Nimmt man für f als Ausgangswert 0,73 an, so findet man aus (21), (22), (23), wenn man sich auf die Hauptglieder beschränkt,

$$(27)\quad \begin{cases} \tau = -13''\sin g' + 65''\sin g' + 8''\sin 2\omega \\ \qquad\qquad + [40''\sin g - 280''\sin g' - 170''\sin 2\omega]\, df, \\ \varrho = -106''\cos g + 35''\cos(g+2\omega) - 11''\cos(2g+2\omega) \\ \qquad\qquad - [80''\cos g - 110''\cos(g+2\omega)]\, df, \\ J\sigma = -108''\sin g + 35''\sin(g+2\omega) - 11''\sin(2g+2\omega) \\ \qquad\qquad - [80''\sin g - 110''\sin(g+2\omega)]\, df. \end{cases}$$

Wenn nun der Oberflächenpunkt so gelegen ist, daß λ_1 und β_1 sehr klein sind, dann kann man schreiben:

$$(28)\quad \begin{cases} \Delta\lambda_1 = -13''\sin g + 65''\sin g' + 8''\sin 2\omega \\ \qquad\qquad + [40''\sin g - 280''\sin g' - 170''\sin 2\omega]\, df, \\ \Delta\beta_1 = -142''\sin\omega + 11''\sin(g+\omega) - 190''\sin\omega\, df. \end{cases}$$

Sind durch Beobachtungen die Unterschiede in Rektaszension und Deklination zwischen Krater (α_1, δ_1) und Mondschwerpunkt (α, δ) gefunden worden, und bezeichnet man die Widersprüche Beobachtung minus Rechnung mit $d(\alpha_1 - \alpha)$, $d(\delta_1 - \delta)$, dann lassen sich Bedingungsgleichungen von der Form aufstellen

$$(29)\quad \begin{cases} \cos\delta\, d(\alpha_1 - \alpha) = A_1 dh_1 + A_2 d\lambda_1 + A_3 d\beta_1 + A_4 dJ + A_5 df, \\ d(\delta_1 - \delta) = D_1 dh_1 + D_2 d\lambda_1 + D_3 d\beta_1 + D_4 dJ + D_5 df. \end{cases}$$

Die etwas komplizierte Berechnung der Faktoren A und D ist in Sel. Koord. II, p. 55 und III, p. 9 auseinandergesetzt. Diese Gleichungen zeigen die Abhängigkeit der Widersprüche $B - R$ von den Verbesserungen der angenommenen Werte von h_1, λ_1, β_1, J und f. Die Methode der kleinsten Quadrate gestattet aus dem System dieser Gleichungen die einzelnen Verbesserungen abzuleiten.

Beobachtungen des Ortes von Mösting A mit dem Heliometer und Fadenmikrometer haben bisher als wahrscheinlichste Werte $J = 1°32'20''$ und $f = 0{,}73$ ergeben.[7]) Das Berliner Jahrbuch gibt auf Grund dieser Werte eine Ephemeride von Mösting A, weil Beobachtungen dieses Objektes sicherer als solche des Mondrandes den Mondort finden lassen.

Welche scheinbare Größe die Schwankungen der physischen Libration für einen Beobachter auf der Erde besitzen, erkennt man, wenn

7) Astr. Nachr. 199 (1914), p. 261.

man die Koeffizienten in den Formeln für $\Delta\lambda$ und $\Delta\beta$ durch 220 dividiert. Für die beiden extremen Werte $f = 0{,}5$ bzw. 0,8 findet man:

$$(30)\quad \begin{cases} f = & 0{,}5 & 0{,}8 \\ \Delta\lambda = & -0''{,}10 & -0''{,}05\sin g \\ & +0{,}60 & +0{,}22\sin g' \\ & -0{,}03 & +0{,}01\sin 2\omega \\ & +0{,}03 & +0{,}01\sin(-g'+\omega-\omega') \\ & -0{,}06 & -0{,}02\sin(-2g'+2\omega-2\omega') \\ & -0{,}03 & -0{,}01\sin(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ & +0{,}04 & +0{,}04\sin(n-5^0); \\ \Delta\beta = & -0{,}45 & -0{,}63\sin\omega \\ & +0{,}05 & +0{,}05\sin(g+\omega) \\ & -0{,}01 & -0{,}01\sin(g-2g'+\omega-2\omega') \\ & +0{,}01 & +0{,}01\sin(-2g'+\omega-2\omega'). \end{cases}$$

Man erkennt aus dieser Zusammenstellung, wie genau die Beobachtungen sein müssen, wenn man aus ihnen die Form des Trägheitsellipsoides des Mondes ermitteln will. Aus den Beobachtungen hat sich ergeben, daß der Abstand des Kraters Mösting A vom Schwerpunkt in mittlerer Entfernung des Mondes die scheinbare Größe 15′33″4 hat, während der Radius des mittleren Niveaus der Randgebiete 15′32″8 ist.[8]) Mösting A liegt allem Anschein nach — genaueres läßt sich nicht feststellen — nur wenig über dem mittleren Niveau seiner Umgebung, so daß eine Verlängerung des Mondkörpers von etwa 1 km nach der Erde zu möglich ist, das wäre etwa $\frac{1}{2}$ Promille des Radius. Eine Abplattung des Mondes ist nicht nachweisbar, wenn sie auch naturgemäß vorhanden sein muß. Die Niveaukarte des Mondrandes läßt nicht erkennen, ob die Kugel oder ein Ellipsoid als mittlere Niveaufläche den Vorzug verdient. Eine Abplattung von 1 : 5000 wäre mit den Beobachtungen immerhin vereinbar.

Aus den Beobachtungen folgt ferner

$$\beta = 0{,}000630,\quad \alpha = 0{,}000460;\quad \gamma = 0{,}000170.$$

Die Definition dieser Größen ergibt sich aus (4)

$$C - B = A\alpha,\quad C - A = B\beta,\quad B - A = C\gamma,$$

wo A, B, C die Trägheitsmomente in bezug auf die x, y, z-Achse des Mondkörpers sind. Die x-Achse ist auf die Erde gerichtet, um die

8) Astr. Nachr. 201 (1915), p. 201.

z-Achse rotiert der Mond. Setzt man $A = 1$, dann ist $B = 1{,}000170$, $C = 1{,}000630$.[9])

7. Die Unmöglichkeit der Cassinischen Gesetze bei gewissen Formen des Trägheitsellipsoides. Die Größe $f = \frac{\alpha}{\beta}$ darf naturgemäß nicht die Werte 0 und 1 annehmen Im 1. Falle würde $\alpha = 0$ oder $C = B$ sein. Dann ist aber die Lage der Drehachse im Mondkörper unbestimmt. Das Moment C muß das größte sein, wenn stabile Verhältnisse bestehen sollen. Im 2. Falle wäre $\alpha = \beta$, d. h. $\gamma = 0$ und $B = A$; dann wäre der Mond ein Rotationsellipsoid und das 1. *Cassini*sche Gesetz unmöglich.

Aus der Formel (11) folgte ferner, daß f nicht gleich 0,662 sein darf, weil in diesem Falle das Glied von τ mit dem Argument 2ω unendlich werden würde. In der *Hansen*schen Entwicklung für die wahre Mondlänge kommen aber noch einige andere Glieder vor, die zwar eine sehr geringe Amplitude aber solche Perioden besitzen, daß für gewisse Werte von f oder γ ebenfalls das 1. Gesetz nicht möglich wäre. Hierzu gehört z. B. eine ganz geringfügige Störung durch den Mars; die Bedeutung ihres Argumentes $E - M$ ist aus *Hansens* Mondtafeln zu ersehen.

Alle diese Argumente mit ihren täglichen Bewegungen und den kritischen Werten von γ und f sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Argument	tägl. Bew.	γ	f
n	0,009242	0,000553	0,125
$E - M$	0,008056	420	0,334
2ω	0,005737	213	0,662
$2(\omega - \omega')$	0,003887	097	0,846
$(\omega - \omega')$	0,001944	024	0,961

Nach den Beobachtungsergebnissen kommen die beiden ersten und ebenso die beiden letzten Fälle nicht in Frage, da f wohl sicher zwischen den Grenzen 0,5 und 0,8 liegt, d. h. möglicherweise nicht weit von dem kritischen Punkte $f = 0{,}662$ entfernt. Die oben angeführten

9) Über die Gestalt des Mondes als Gleichgewichtsfigur unter gewissen einfachen Voraussetzungen siehe

Leon Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper; I. Abh.: Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes, Math. Ztschr. 10 (1921), p. 130;

desgl. Encykl. VI 2 B, 21 (*S. Oppenheim*), Nr. 26. Die dort p. 53 angeführten Zahlenwerte sind durch die hier gegebenen zu ersetzen.

Werte von f sind nur genähert richtig. In unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstellen sind die Schwankungen der physischen Libration nicht mehr kleine Größen. Die vorstehende Behandlung der Bewegungsgleichungen gilt aber nur, wenn τ, ϱ, $J\sigma$ klein sind.

Daß das Argument $2\,\omega$, oder mit anderen Worten die Lage der Apsidenlinie, auf die Mondrotation von wesentlichem Einfluß sein kann, ist leicht erklärlich; es erscheint aber unverständlich, daß eine fast unmerkliche Störung der Mondbahn durch Mars unter Umständen von großem Einfluß sein soll. Nun der Fall besagt nichts anderes, als daß bei gegebenem J gewisse Werte von f ganz unstabile Verhältnisse zur Folge haben würden.

Bei gegebener Bahnbewegung entspricht zwar einer bestimmten Form des Ellipsoides ein ganz bestimmter Wert von J nach den Formeln (16) und (18), aber bei gegebener Neigung genügt dieser Gleichung eine große Mannigfaltigkeit von Formen. Jedoch gibt nur ein beschränktes Gebiet wahrscheinliche Werte; denn in der Natur bilden sich unter der Einwirkung verschiedener Kräfte stets wesentlich stabile Verhältnisse aus.

Zum Schluß möge noch folgende Bemerkung hier Platz finden. So verschieden die Rotationsbewegungen von Erde und Mond auch erscheinen mögen, so setzt sich die Bewegung der Mondachse doch ebenfalls aus einer Präzession und Nutation zusammen. Die erstere wird durch die *Cassini*schen Gesetze definiert, die letztere ist gleichbedeutend mit der physischen Libration.

(Abgeschlossen im Februar 1923.)

Register zu Band VI, 2. Teil, 1. Hälfte.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichwortes ist durch einen Bindestrich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes. Unter dem einzelnen Stichworte sind die Nachweise nach steigender Seitenzahl angeordnet, so daß gelegentlich dem einzelnen Gegenstande mehrere getrennt stehende Nachweise zukommen.

A

Abbildungsfehler des Fernrohrobjektivs 248.

Aberration, astronomische, Definition der — 31; Planeten- und Fixstern— 31; Lichtzeit— 52; Einfluß der Fixstern— auf die Koordinaten eines Sternes 53; tägliche — 54; jährliche — 55; —skonstante 57; säkulare — 59; Korrektion wegen — bei Bahnbestimmmungen 419; Konstante der — 852; Beziehung zwischen Lichtgeschwindigkeit und Sonnenparallaxe 853; Angabe der Einzelwerte der Konstanten der — 854; Bestimmung der —skonstanten aus Linienverschiebungen im Spektrum von Fixsternen 855; Konstante der täglichen — 855.

Ablesemikroskop 199, 201; Genauigkeit des Ablesens am Meridiankreis 204.

Abplattung der Planeten, Einfluß der — auf die Bewegung der Satelliten 822; — der Erde, berechnet aus den Trägheitsmomenten 861; — des Mondes 1041.

Absolute Bahnen der Planeten nach Gyldén 783.

Absorption der Atmosphäre: —skoeffizient abhängig von der Dichte der Luft 294; selektive — 331.

Achsenkollimator 237.

Äquator von 1850.0 als Grundebene des Inertialsystems 5; wahrer und mittlerer — 38; Beziehungen zum Inertialsystem 1015.

Äquatoreal, siehe auch Refraktor: zur Bestimmung der sphärischen Koordinaten eines Sternes 197; —coudé nach Löwy 232.

Äquinoktium s. Frühlingspunkt.

Algol- und Algolsterne, aufgefaßt als Doppelsterne, deren Bahnbestimmung 498; — von Z Herkulis und UZ Cygni 501.

Altazimut s. Universalinstrument.

Andromediden, Radiationspunkt der — 452; Zusammenhang der — mit dem periodischen Kometen Biela 942, 943, 950.

Anomalie, wahre, mittlere, exzentrische — 383; der Lambertsche Winkel für die Hyperbel 383; die kubische Gleichung für die Parabel 383; deren Auflösung durch die Barkerschen Tafeln 385; die Keplersche Gleichung für die Ellipse 385; Übergang von der exzentrischen zur mittleren — in der Entwicklung der Störungsfunktion 619; Differentialgleichung der — in der Hansenschen Planetentheorie 766; partielle — in der Störungstheorie der Kometen 906.

Anschlußbeobachtungen im Meridian an Fundamentalsterne 30; — am Refraktor mit Faden- und Positionsmikrometer 224; — auf photographischem Wege 225; — mit Doppelbildmikrometer 230; mit Heliometer 230; Aufgaben der — 280.

Apheldistanz, Zusammenhang der — der periodischen Kometen mit der — der großen Planeten 933.

Apsidenlinie, mittlere Bewegung der — in der Mondtheorie nach Hill und und Adams 671, 692, 721.

Astrograph (photographischer Refraktor) 232; Reduktion der gemessenen ebenen Koordinaten x, y in sphärische α und δ 227.

Astronomie (Mechanik des Himmels), Aufgabe der — 3, 513; sphärische (beobachtende, praktische) 17, 196; nautische 139; aeronautische 153, Unterschied gegen die nautische 153.

asymptotische Ausdrücke für Funktionen großer Zahlen 636; — der Koeffizienten in den Reihen von Taylor und Laurent 636; — für bestimmte Integrale 642, 645; — der Koeffizienten der Entwicklung der Störungsfunktion 649.

asymptotische und doppeltasymptotische Lösungen im Dreikörperproblem 537, 992.

Atmosphäre, Hypothesen über die Konstitution der — zur Theorie der Refraktion 301 uff.

Azimut, —bestimmung 137.

B

Bahnbestimmung (Planetenbahn), Formulierung des Problems 390; Grundgleichungen zur — 391; Ableitung des Verhältnisses von Sektor und Dreieck 391; Näherungswerte für die geozentrischen Distanzen 396; — Methode von Laplace 400; aus vier Beobachtungen 409; — einer Kreisbahn 411.

— (Kometenbahn), Formulierung der Aufgabe und Grundgleichung 412; Näherungswerte für die geozentrischen Distanzen nach Olbers 414; Ausnahmefälle 418; Korrektion wegen Parallaxe und Aberration bei — 419.

— Definitive — 420; Methoden der — mit Berücksichtigung aller Orte (Variation der Elemente) 421; mit Bevorzugung zweier (Variation der geozentrischen Distanzen) 425.

— von Meteoren 444; Umkehrung der Aufgabe, Berechnung der Radiationspunkte aus gegebenen Elementen 468.

— von Doppelsternen, wahre und scheinbare Bahnellipse 472; — von visuellen Doppelsternen 474; nach Savary 474; v. Seeliger 475; Y. Villarceau 476; Schwarzschild 476; Klinkerfues 477; J. Herschel 478; graphische Methoden von Zwiers 479; analytische Methoden von J. Herschel 480; Kowalsky 481; Glasenapp 481; Methode von Thiele 482; Bahnverbesserung 483.

— von spektroskopischen Doppelsternen 486; nach Rambaut 486; Lehmann-Filhés 487; Schwarzschild 490; analytische Methoden von Wilsing 492; Russel 492; Ergebnisse der — 493.

— von veränderlichen Sternen, Algolsterne 498; — von Veränderlichen von kontinuierlicher Lichtschwankung (β Lyrae) 503.

— von Satelliten 508; nach Klinkerfues 509; — mit sofortiger Berücksichtigung von Störungen 510.

Bahnelemente der Planeten und Kometen, Definition der — 381, 737, Ableitung der — aus zwei vollständigen heliozentrischen Orten 403; Bestimmung der — aus den Distanzen 415; Differentialquotienten der geozentrischen Koordinaten nach den —n 422; — von Doppelsternen 470; — von Satelliten 508; kanonische — 598; Elemente p und q, für Knoten und Neigung 741; Elemente g und h für Perihellänge und Exzentrizität 741; — des Mondes, Angabe nach Hansen-Newcomb 877; scheinbare Verteilung der — der Kometen 921.

Besselsche Funktionen zum Übergang von der exzentrischen zur mittleren Anomalie 619.

Bezugsystem des Trägheitsgesetzes, s. Inertialsystem.

Biegung (Durchbiegung) des Fernrohrs 235; Bestimmung der — 238 (Fußn. 87).

Brechungsquotient der Luft, Zusammenhang des —en mit der Dichte 294.

Breite eines Sternes (Ekliptik) 19.

Breite, geographische — eines Erdortes, s. Polhöhe; reduzierte — bei Berechnung einer Sonnenfinsternis 345.

Breitendienst, internationaler — zur Bestimmung der Polschwankungen 36, 221 (Fußn. 53), 1018.

Brunssches Theorem, Nichtexistenz bestimmter Integrale im 3-Körperproblem 521; Verallgemeinerung durch Painlevé 524.

C

Cassinische Gesetze der Rotation des Mondes 1021; die Unmöglichkeit der — für gewisse Formen des Mondellipsoids 1042.
Chandlersche Periode der Polschwankungen 1019.
charakteristische Störungsglieder nach Gyldén, Definition der — 501, 795; Integration der — 797.
Chronodeik 88.
Cronograph 209, 213.
Chronologie, historische und mathematische — 368.
Chronometer 171; — mit Kompensation 174; Störungen der — durch Reibungswiderstände 179; durch Widerstand der Luft 179; durch Deformation der Unruhe infolge der Rotation 181; bei geneigter Lage 182; durch äußere Kräfte 182.
Chronometerspiralen, Isochronismus der — 171; Schwingungsgleichung der — 171; Herstellung des Isochronismus bei — durch Endkurven 171; — durch Längenabstimmung 173; Einfluß der Masse 174.
Coudé-Äquatoreal nach Löwy 232.

D

Datumgrenze 85.
Deklination (Äquatorabstand), Definition der — 19; Bestimmung der — aus Meridianbeobachtungen 21; durch Anschlußbeobachtungen 30; Bestimmung der — am Meridiankreis 215; Einfluß der Biegung des Fernrohrs 238; Beob. von direkten und reflektierten Bildern 239; Einfluß der Biegung auf die — 238; Vertauschung von Objektiv und Okular 239; Genauigkeit der Beobachtungen der — 273.
Diastematische Entwicklung der Störungsfunktion nach Gyldén 595, 789, 791; — Glieder der Störungen 787.
Dichte der Luft, Zusammenhang der — mit dem Brechungsindex zur Theorie der Refraktion 294; mit dem Absorptionskoeffizienten 295; Zusammenhang mit Temperatur, Luftdruck und Höhe 297.
Dichte von veränderlichen Sternen 498.
Differentialoperator nach Newcomb zur Darstellung der Koeffizienten in der Entwicklung der Störungsfunktion 589; Rekursionsformeln für den — 592.
differentielle Ortsbestimmungen von Sternen s. Anschlußbeobachtungen.
Dispersion, atmosphärische 247, 293; Purkynje-Phänomen 296 (Fußn. 8).
Distanzen, geo- und heliozentrische — eines Planeten 396; Ableitung von Näherungswerten für die — bei der Bahnbestimmung 396; Gaußsche Form 397; Methode von v. Oppolzer 399; Methode von Gibbs 399; Ermittlung genauerer Werte der — 407; — für Kometen 414; Ableitung von Näherungswerten 414; von beliebig genauen Werten 416.
Distanz der Sterne s. Parallaxe.
Doppelbildmikrometer 230.
Doppelsterne, Einfluß der Pointierungsfehler bei Beobachtung von —n 263; Genauigkeit der Beobachtung von —n 274, 469; Historisches über — 465.
— visuelle; Methode der Messung von —n (Positionswinkel und Distanz) 466; Kataloge von —n 467; Farbenunterschiede der Komponenten von —n 468; Reduktion der Beobachtungen von —n auf ein fixes Äquinoktium 469; Gültigkeit des Newtonschen Gesetzes für die Bewegung der — 470, 483; wahre und scheinbare Bahnellipse der — 472; Bahnbestimmung der visuellen — 474, 483; Kataloge der berechneten Bahnen von —n 483; Verteilung der Bahnelemente der — 484; dunkle Begleiter bei —n und mehrfache Systeme 485.
— spektroskopische; Bahnbestimmung 486; Ergebnisse der Bahnbestimmung 493; Masse der — 494; Abweichungen von der reinen elliptischen Bewegung 497.
— periodische Bahnen in Doppel- und mehrfachen Sternsystemen 993.
Douwes' Methode der Polhöhenbestimmung 100.
Dreiecks- und Sektorverhältnis s. Sektorverhältnis.

Dreihöhenproblem zur Polhöhenbestimmung nach Gauß 103; — nach der Methode der Standlinien 147.
Dreikörperproblem, Differentialgleichungen des —s in kanonischer Form 514; Reduktion nach Lagrange 514; nach Jacobi (Elimination der Knoten) 515; nach Poincaré 516; nach Bruns 516; spezielle Fälle des —s, das ebene Problem 519; das restringierte Problem 519; Jacobisches Integral für dieses 520; Nichtexistenz bestimmter Klassen von Integralen im — 521; Brunssches Theorem 521; Verallgemeinerung von Painlevé 524; Theorem von Poincaré 524; allgemeine periodische Lösungen im — 526; spezielle periodische Lösungen um die Librationspunkte 529; Hills Theorie 530; Stabilität der periodischen Lösungen 532; asymptotische und doppeltasymptotische Lösungen 537; Lösungen des —s durch unendliche Reihen 540; mit Hilfe der Berührungstransformation 541; säkulare und periodische Glieder 545; Lösung des —s durch trigonometrische Reihen 547; Konvergenz der Reihen 549; Einfluß der kleinen Divisoren 551; Eigenschaften einiger Koeffizienten in den Reihen 553; numerische Behandlung des —s 966; spezialisiert als restringiertes Problem 967; systematische Behandlung des restringierten Problems 968; periodische Bahnen im — 969; Ejektionsbahnen im — 971; Thielesche Transformation im — 971; einzelne periodische Bahnen im — 974; im nichtrestringierten Problem 988.
Durchschlagen des Fernrohrs 234.

E

Ebbe und Flut (Gezeiten) der Erde, Einfluß auf die Mondbewegung 725.
Eigenbewegung der Sterne, Definition 7; Übertragung der — auf verschiedene Äquinoktien 62; veränderliche —, aufgefaßt als Bewegung von Doppelsternen 474, 485; — der Sonne, Einfluß auf den elliptischen und hyperbolischen Charakter der Bahn der Kometen 928.
Einheiten, astronomische von Länge, Zeit und Masse 848.
Ejektionsbahnen nach Burrau 530, 972; Berechnung von —, ermöglicht durch die Thielesche Transformation 971; — um die endlichen Massen 977; — um beide Massen 983.
Ekliptik, die — von 1850.0 als Grundebene des Inertialsystems 5; Änderung der Lage der — durch die Planeten 33; feste und bewegliche — 37; Einfluß der Bewegung der — auf die Mondtheorie 719.
Elementare Störungsglieder nach Gyldén, Definition 546, 795; Integration der — 797.
Ellipse, Keplersche — der Planeten und ihre Elemente 381.
— wahre und scheinbare bei Doppelsternen 872.
elliptische Ungleichheit in der Mondtheorie 692; Wert der — 881.
Elliptizität der Erde s. Erde.
Empirische Glieder in der Mondtheorie nach Newcomb 726.
Energiegleichung zur Bestimmung des Charakters der Bahn eines Planeten oder Kometen 381; — zur Elimination der Zeit im Dreikörperproblem 518.
Epoche der Beobachtung eines Sterns 68.
Epochen (Ären) der Olympiaden 376; Jahre der Stadt Rom; julianische und christliche — 376; die Hedschra 376.
Epoche der Oskulation (Bahnelement) 382, 738.
Erde, Berechnung der Dimensionen der — aus der Mondparallaxe 73 (Fußn. 152), 871 (Fußn. 35); Einfluß der Abplattung der — auf die Mondbewegung 714; Dimensionen der — nach Bessel 846; Abplattung der — 846; Dichte der — 847; Abplattung der — aus der Verschiedenheit der Trägheitsmomente 863; Masse der — aus der Sonnenparallaxe 868; aus der parallaktischen Ungleichheit des Mondes 876; aus den Leverrierschen Störungsgleichungen 888; Endwert der Masse der — 893.
Erdschatten, Vergrößerung des —s bei Mondfinsternissen 360.
Eros, Planet. Beobachtung des — zur Bestimmung der Sonnenparallaxe 75, 281, 852; Bahn des — 732.

Eulersche Periode der Rotation der Erde 34, 1002; Verlängerung der — in die Chandlersche 1019.
Exzentrizität (Bahnelement) 382, 737; Veränderlichkeit der — der Erdbahn und ihr Einfluß auf die Mondbewegung 720; Ersetzung von Perihellänge und — durch die Elemente g und h 741; Berechnung der säkularen Störungen der — 751; — der Mondbahn 879; Verteilung der —en der Kometenbahnen 925; konvergierende und oskulierende —en der Kometenbahnen 929; Zahlenangaben über die — der Erd- und Mondbahn 1009.
Extinktion 293; visuelle und photographische 293; —s-Integral 326; Formeln für die — nach Lambert-Bouguer 327; nach Laplace 329; nach Bemporad 329; Vergleichstabelle der verschiedenen —sformeln 330; die terrestrische — 330.
Evektion als Ungleichheit in der Mondtheorie 692, 881.

F

Fadendistanzen der Parallelfäden, Reduktion der Seiten- auf den Mittelfaden 212.
Fadenkreuz zum Pointieren 198; Beleuchtung des —es 198; feste und bewegliche Fäden im — 201.
Fadenmikrometer am Refraktor 224.
Farbe der Sterne, Einfluß auf die Genauigkeit astronomischer Beobachtungen 297.
Fernrohr zur Bestimmung der sphärischen Koordinaten eines Sternes 197; optische Achse des —s als Visierlinie 197.
Feuerkugeln s. Meteore.
Finsternisse, Einteilung in wahre und scheinbare — 339; Sonnen— 339; Grundgleichungen der — 340; Einfluß der Strahlenbrechung auf — 343; Mond— 360; — in anderen Trabantensystemen 364; im System der Jupitersatelliten 837; Verwertung der — im Jupitersystem zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit 855.
Fixsternaberration s. Aberration.
Flächensätze im Dreikörperproblem 514; Reduktion der Differentialgleichungen durch die — 515.
Flutreibung, Variation der Rotationszeit der Erde durch — als Ursache der Säkularbeschleunigung des Mondes 723.
Frühlingspunkt von 1850.0 als Anfangspunkt des Inertialsystems 5; — als Anfangspunkt der Zählung der AR 19; Bestimmung seiner Lage aus Meridianbeobachtungen der Sonne 24, 864; —festlegung des Äquinoktiums 28, 864; Reduktion auf ein mittleres Äquinoktium 64; wahres Äquinoktium 1002.
Fundamentalkatalog 29.
Fundamentalsterne, System der — 7; Teilung in Zeit- und Polsterne 22; durch — bestimmtes Fundamentalsystem in Deklination 25; in AR. 26; Kataloge von —n 29.

G

Geminiden Radiationspunkt 452.
Genauigkeit der astron. Beobachtungen 265; — der Meridianbeobachtungen samt numerischen Angaben in AR. 269; in Deklination 271; bei Refraktorbeobachtungen 273; bei photographischen Beobachtungen 276; — bei der Horrebow-Talkottschen Methode 278.
geographische Ortsbestimmung, Unabhängigkeit der — von der Erdgestalt 85; — nach der Methode der Standlinien 144; Verwendung der Merkatorfunktion bei der — 150; — durch erdmagnetische Beobachtungen 153.
Gewichtstafeln von Auwers für Sternkataloge 267, 272.
Grenzkurven der Finsternisse 340, 346.
Gravitation, Abweichung der — vom Newtonschen Gesetz nach Hall. 724; endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der —, Einfluß auf die Mondbewegung 725; Konstante der — Definition und Wert 734; Konstante der — in physikalischen Einheiten (C.G.S.) 847; in astronomischen Einheiten 849; der Vergleich beider 851; Einsteins Theorie der — zur Erklärung der Perihelanomalie des Merkur 887.

H

Halbachse, große (Bahnelement) 382, 737; säkulare Störungen der — 554; — der Erdbahn als astronomische Längeneinheit 848.

Hansensche Koeffizienten in der Entwicklung der Störungsfunktion 599; ihre Form nach Hill 600.
Hekubatypus der kleinen Planeten 532, 551, 756.
Heliometer 230; Historisches zum — 232; Instrumentalfehler am — 244; persönliche Fehler bei Messungen am — 264; Genauigkeit der Beobachtungen am — 275.
Heliotrop von Gauß zur Erzeugung von Lichtsignalen für geogr. Längenbestimmungen 117.
heliozentrische Koordinaten eines Planeten oder Kometen, berechnet aus den Elementen 383; Gaußsche Form für sie 384.
Helligkeit des Himmelshintergrundes als störender Einfluß von Durchgangsbeobachtung 253
Helligkeit der Kometen 917; Reduktion der — auf die Einheit der Distanz von Sonne und Erde 917; möglicher Einfluß der Schweifentwicklung auf die — 919.
Helligkeit der Sterne, Einfluß auf die Genauigkeit astronomischer Beobachtungen (Helligkeitsgleichung) 247, 257; Bestimmung der — 257; Elimination der — durch das selbstregistrierende Mikrometer 261.
Hemmung bei den Uhren 176; freie und Anker— 177.
Hestiatypus der kleinen Planeten 756, 801.
Hildatypus der kleinen Planeten 756, 802.
Hillsche Grenzkurve im restringierten Dreikörperproblem 969.
Himmelsmechanik s. Dreikörperproblem.
Höhe eines Gestirnes, Definition 18.
Horrebow-Talcottsche Methode der Polhöhenbestimmung 105, 220; Genauigkeit der Beobachtungen nach der —n — 278.

I

Indiktionen, Sonnen- und Mondzirkel — 375.
Inertialsystem, mechanische Bestimmung eines —s 3; empirisches — 4; gemischtes — in der Planetenastronomie 9, 1015; Wahl der Grundebene und der Anfangsrichtung 5; Drehung des —s bestimmt aus den Anomalien in den säkularen Störungen der Bahnelemente der vier inneren Planeten 13; verbessert durch die Einsteinsche Gravitationstheorie 889; Einfluß einer Drehung des —s auf die Koordinaten eines Sternes 1015.
Instrumentalfehler, Bedeutung der — 233; geometrische — in der Aufstellung des Fernrohrs 233; am Meridiankreis, Azimut—, Kollimations—, Zapfen—, Durchbiegungs— 235; am Refraktor 243; Genauigkeit ihrer Bestimmung 242.
Integrale des Dreikörperproblems, Schwerpunktsätze 514; Flächensätze 514; Energiesatz 518; Nichtexistenz bestimmter — nach Bruns 521; nach Poincaré im restringierten Problem 524.
Integralinvariantentheorie 539.
Intermediäre Bahn (Gyldén) in der Mondtheorie 685; in der Planetentheorie 783; — in der Theorie der Kometen 908.
Intramerkurieller Planet, Einfluß auf die Mondbewegung 725.
Isochronismus der Pendelschwingungen 167; der Chronometerspiralen 171; Herstellung des — durch Endkurven 172; — durch Längenabstimmung 173.

J

Jacobisches Integral im restringierten Dreikörperproblem 520, 524, 969; Konstante des —s als Parameter zur Bestimmung periodischer Bahnen 972.
jährliche Gleichung in der Mondtheorie 692, 881.
Jahr, julianisches und tropisches — 21; annus fictus 21; Urform des —es 371; Mond- und Sonnenjahr und deren Ausgleichung 371; julianisches und gregorianisches — 371; die griechische Zyklenrechnung 373; Dauer des tropischen —es; nach Hansen 372, 864; nach Hipparch 374; besondere Jahrformen 374; siderisches — 865; tropisches — 864, 1014.
Jahrbücher, astronomische — 69.
Jahreszeiten 370.
Jupiter, große Ungleichheit zwischen — und Saturn 551; Elemente der Bahn des — 732; Satelliten des — 813, 818; analytische Störungstheorie

815; große Libration zwischen den drei ersten Satelliten 816; säkulare Störungen der Satelliten des — in Knoten und Neigung 827; in Exzentrizität und Länge 834; Masse des — 894; Wirkungssphäre des — und Bahnumwandlung von Kometen beim Eintritt in sie 934.
Jupitergruppe der kleinen Planeten 530, 732, 804.
Jupiterjahre der Inder 375.

K

Kanon der Finsternisse nach v. Oppolzer 358.
kanonische Form der Differentialgleichungen im Dreikörperproblem 514; — im Rotationsproblem der Erde 1018.
Kataloge von Fundamentalsternen 29; Anlage von —n 67; systematische Fehler in —n 68; Bildung eines mittleren Systems 68; Herstellung eines Normal—s 266; Reduktions- und Gewichtstafeln für die — nach Auwers 267; Doppelstern — 467; — der berechneten Doppelsternbahnen 483; — von spektroskopischen Doppelsternen 486.
Keplersche Gesetze der Bewegung der Planeten und Kometen 381.
Keplersche Gleichung, Näherungsmethoden zur Auflösung der — 385; — Reihenentwickelungen 386.
Kimm in der nautischen Astronomie 139.
kleine Divisoren, ihr Einfluß auf die Integrale des Dreikörperproblems 551; — in der Mondtheorie 683; in der Planetentheorie 756; kritische Planeten wegen der — 802.
Kleine Planeten (Asteroiden), Beobachtung der — Iris, Viktoria, Sappho und Eros zur Bestimmung der Sonnenparallaxe 75, 281; Kommensurabilitäten in den mittleren Bewegungen der — (Pallas) mit Jupiter 649; — Angabe ihrer Elemente 732; Proximitäten zwischen den — 732; Kommensurabilitäten in den mittleren Bewegungen der — 756; Planeten vom Hecuba, Hilda- und Hestiatypus 756; Lücken in der Verteilung der — 757; Einteilung in gewöhnliche, charakteristische und kritische — 802.
Knotenlänge (Bahnelement), Definition 382, 737; Elimination der — im Dreikörperproblem 515; mittlere Bewegung der — in der Mondtheorie 692, 721; säkulare Beschleunigung der — des Mondes 722; Ersetzung von — und Neigung durch die Elemente p und q 741; Berechnung der säkularen Störungen der — 749; — der Mondbahn 878; scheinbare Verteilung der — der Kometen 924; Zahlenangaben über die — der Mondbahn 1009.
Koeffizienten der Entwicklung der Störungsfunktion.
— für zwei zusammenfallende Ebenen (Laplacesche Koeffizienten) 561; dargestellt durch hypergeometrische Reihen 562; Integralausdrücke für sie 564; Rekursionsformeln 566; dargestellt durch das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß 567.
— Differentialquotienten der — 568; Berechnung nach Gauß, Leverrier 569; nach Newcomb 570; asymptotische Ausdrücke nach Cauchy 572; Formeln von Gyldén 574; Tafeln 576.
— für geneigte Bahnen Koeffizienten von Jacobi 577; Entwicklung für kleine Neigungen 578; für beliebige Neigungen nach Tisserand 579; nach Hansen 581; hypergeometrische Reihen für sie 583; Formeln von Sundmann 585.
— für elliptische Bahnen nach Leverrier 586; nach Newcomb (Differentialoperatoren) 589; nach Gyldén 595; nach Hill 595; Gruppenentwicklung nach Bohlin 596.
— Hansensche Koeffizienten nach Potenzen des Verhältnisses der großen Halbachsen 599.
— allgemeine Form der — zur Ableitung der Konvergenz der Entwicklung durch Integrale 602; Konvergenz der Reihen für die — 606.
— berechnung durch mechanische Quadratur 622; Integrale für die — vom hohen Grade nach Liouville 625; Interpolation nach Leverrier 626; gemischte Methode von Cauchy 627; von Hansen 629; Anwendung elliptischer Funktionen nach Charlier 630; Poincaré 631; —entwicklung nach Gauß' Theorie der säkularen Störungen 632.

Koeffizienten, asymptotische Ausdrücke für die —, als Funktionen großer Zahlen 636; in Integralform 642; Entwicklungen nach der mittleren Anomalie eines Planeten 649; nach denen beider Planeten, nach Hamy 651; nach Poincaré 657; nach Féraud 661.

— Eigenschaften der — 563, 689.

Kollimationsfehler eines Meridianinstrumentes 235; Genauigkeit der Bestimmung des —s 243.

Kollimationslinie des Fernrohrs 198; Fehler der — 235.

Komet Biela, Periodizität entdeckt 900 (Fußn. 8); Anomalien in seiner Bewegung 910 (Fußn. 21); seine Teilung 936; seine Meteore, die Andromediden 942, 943, 950.

Komet Brorsen, periodischer —; Anomalien in seiner Bewegung 910 (Fußn. 21).

Komet Encke, Periodizität entdeckt 900 (Fußn. 8); Anomalien in seiner Bewegung 910; seine Helligkeit 918.

Komet Faye periodischer —; Anomalien in seiner Bewegung 900 (Fußn. 21).

Komet Halley als erster periodischer Komet 900; Vorausberechnung seiner Wiederkehr für 1758 nach Clairaut 901; für 1835 904 (Fußn. 13); für 1910 903 (Fußn. 12); seine Meteore (Orioniden) 944, 950.

Komet Lexell, Periodizität entdeckt 900 (Fußn. 8); seine Bahnumwandlung 932.

Komet Winneke periodischer, Anomalien in seiner Bewegung 910 (Fußnote 21); seine Meteore (Drakoniden) 944, 950.

Kometen, Keplersche Gesetze für die Bewegung der — 341; Bahnbestimmung der — 412; erste Beobachtungen von — 899; Methode der Bahnbestimmung der — nach Newton 900; erster periodischer Komet, entdeckt von Halley 900; Störungen der — 901; Bahnumwandlungen der — bei starker Annäherung an einen Planeten 905; intermediäre Bahn der — 908; Anomalien in den Bewegungen der — 910; Masse der — 914; Helligkeit der — 917; kosmogonische Stellung der — 920; beurteilt nach der Verteilung der Bahnelemente 921; nach der Wahrscheinlichkeit der elliptischen oder hyperbolischen Bahnen 926; nach der konvergierenden Exzentrizität der Bahn (Strömgren) 929; kurzperiodische — 932; das Tisserandsche Kriterium für sie 934; andere Kriterien für die Identität zweier — 935; Stabilität der Bahn der — 935; Teilungen von — 936; Systeme von — 937; Familien von — 937.

Kometen und Meteore, Auflösung der Kometen in Meteore 936, 945; erste Entdeckung des Zusammenhanges zwischen — 940; Einzeluntersuchungen über diesen Zusammenhang 941; Theorie des Zusammenhanges 945; Kritik der Theorie 950; kometarische Meteore und interstellare Sternschnuppen 950; Rechnungsvorschriften für die Untersuchung des Zusammenhanges von — 952.

Kommensurabilität der mittleren Bewegungen im Dreikörperproblem 532; Planeten vom Hekubatypus 532, 756, 759; — zwischen Jupiter und Saturn 551; zwischen Pallas und Jupiter 649; Berechnung des kritischen Koeffizienten in der Entwicklung der Störungsfunktion nach Cauchy 649; Planeten vom Hildatypus und Hestiatypus, berechnet nach Brendel 801.

Kompensationspendel 169; Rost — 169; Quecksilber — 169; Invar — 169.

Kompensationsunruhe 174.

Konjunktion zweier Gestirne 339.

Konstante der Präzession und Nutation 39, 858, 1007; — der Gravitation 734, 847, 849; astronomische —n 845; geodätische —n 846; physikalische —n 847; — der Aberration 854.

Konvergenz der Reihen im Dreikörperproblem 549; Einfluß der kleinen Divisoren auf die — 551; — der Entwickelung der Störungsfunktion für die Koeffizienten 606; für die gegenseitige Distanz 609.

Koordinaten eines Planeten oder Kometen, heliozentrische — berechnet aus den Elementen 383; Gaußsche Form für die — 384; ihr Verhalten im komplexen Gebiete 389; bewegliche

— in der Hansenschen Störungstheorie 761; Gyldénsche — 783.
Koordinaten, geographische eines Meteors im Anfangs- und Endpunkt seiner Bahn 432, 436; Genauigkeitsbestimmung der — 450.
Kordinaten eines Sternes, Äquator—; Prinzip der Messung im Meridian 21; wahre und scheinbare — 31; wahre und mittlere — 44; Änderung der — eines Sternes durch Drehung des Inertialsystems 1015.
Koordinatensysteme in der Astronomie, — des Horizontes (Höhe und Azimut) 18; — des Äquators (Deklination, Stundenwinkel und Rektaszension) 19; — der Ekliptik (Länge und Breite) 19; Änderung der — durch Präzession und Nutation 32.
Kosmische Staubmassen. Einfluß der — auf die Bewegung der Kometen 913; — ihr Zusammenhang mit Kometen und Meteoren 943.
Kräftefunktion im *n*-Körperproblem 514; in der Mondtheorie 673; Entwicklung der — 674; — in der Planetentheorie 734; Unterschied gegen die Mondtheorie 735.
Kreis (Ring)-Mikrometer 223.
Kreise zur Ablesung des Drehungswinkels des Fernrohrs 199; feste — (Alhidaden) und bewegliche — 199; Ausführung der Teilung der — 205.
Kreisteilung, Fehler der — 206; Untersuchung der — nach Bessel 206; nach Hansen 207.
kurzperiodische Störungen in der Planetentheorie 745; — beeinflußt durch die langperiodischen 755; Zusammenhang mit den charakteristischen und elementaren Störungsgliedern nach Gyldén 795; — in der Theorie der Satelliten 842.

L

Länge in der Bahn eines Planeten oder Kometen, mittlere und wahre — 383; mittlere — des Mondes, deren säkulare Beschleunigung 723; mittlere — als Bahnelement 738.
Länge eines Sternes (Ekliptik) 19.
Länge, geographische eines Erdortes; Definition 84; Bestimmung der — aus Mondfinsternissen 114; aus Verfinsterungen der Jupitersatelliten 115; — aus Sternschnuppen 116; — durch künstliche Signale 117; — durch Übertragung der Zeit mit Chronometern 118; — auf telegraphischem Wege 119; — durch Funkentelegraphie 121; — aus Mondkulminationen 121; — aus Mondhöhen 123; — aus Monddistanzen 124; — Berücksichtigung der Erdabplattung 129; — aus Sternbedeckungen 132; — aus Sonnenfinsternissen 132; aus anderen Okkultationserscheinungen 136; nach der Methode der Standlinien nach Sumner 144; St. Hilaire 146; Höhentafeln dazu 148.
Lambertsches Theorem 387; — zurückgeführt auf das Prinzip der kleinsten Wirkung nach Jacobi 388.
Lamellenmikrometer 223.
langperiodische Störungen in der Mondtheorie nach Newcomb 725, 726; in der Planetentheorie 745; Einfluß derselben auf die kurzperiodischen 755; — hervorgerufen durch kleine Divisoren in den Integralen 756; ihr Zusammenhang mit den charakteristischen und elementaren Gliedern nach Gyldén 795; — im System der Jupitersatelliten 834.
Laplacesche Koeffizienten in der Entwicklung der Störungsfunktion 561; — dargestellt durch hypergeometrische Reihen 562; Integralausdrücke der — 564; Rekursionsformeln für die — 566; Darstellung durch das arithmetisch-geometrische Mittel 567; Differentialquotienten der — 568; Berechnung nach Gauß, Leverrier 569; nach Newcomb 570; nach Cauchy 572; nach Gyldén 574; Tafeln für sie 576.
Leoniden Radiationspunkt 452; mittlere Höhe des Aufleuchtens und Erlöschens der — 453; Masse der — 459; Zusammenhang mit dem Kometen 1866 I, 942, 946, 950.
Libration des Mondes; optische und physische — 1022; willkürliche und erzwungene — 1035.
Librationen in der Planetentheorie 757; kritische Planeten 802; — in der Theorie der Satelliten zwischen den drei ersten des Jupiter 816, 837; — im System der Saturnsatelliten 838.

Librationspunkte im Dreikörperproblem 529; — im restringierten Problem 969; periodische Bahnen um die — L_2 und L_3 974; um L_1 976; um L_4 und L_5 976.

Licht, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes 57, 813, 847; Bestimmung der Sonnenparallaxe aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des —es 77; optische Ungleichheiten infolge der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des —es bei Doppelsternen 471; Beziehung der Geschwindigkeit des —es zur Aberrationskonstanten 853; —gleichung 855.

Lichtdruck, Einfluß des —s auf die Bewegung der Kometen 914.

Lichtkurve veränderlicher Sterne, verwendet zur Bahnbestimmung in der Auffassung als Doppelsterne, Algolsterne 498; als veränderliche mit kontinuierlicher Lichtschwankung 503.

Lichtzeitparallaxe (Planetenaberration) 52.

Luftdruck, Zusammenhang mit Temperatur und Dichte zur Theorie der Refraktion 297.

Luftwiderstand, Einfluß des —s auf die Bewegung der Meteore 456.

Lunisolarjahr s. Mondjahr.

β Lyrae als veränderlicher Stern und Sterne von gleichem Typus; Bahnbestimmung von — 503; Elemente nach Myers 507; die Veränderlichen U. Pegasi u. R. R. Centauri 507.

Lyriden, Radiationspunkt 452; Zusammenhang der — mit dem Kometen 1861 I, 943, 950.

M

Mars, Beobachtung des — zur Bestimmung der Sonnenparallaxe 75, Elemente des — 732; Satelliten des — 822; Säkulare Störungen der Satelliten des — 832; Masse des — aus den Leverrierschen Gleichungen 888; Endwert der Masse des — 894.

Maßstab (Skala), Teilung des —s 208; — am Heliometer 208.

Masse von Meteoren 759; — von visuellen Doppelsternen 473; spektroskopischen Doppelsternen 494; Gesamt— der kleinen Planeten 732; Einheit der — 849; — des Mondes aus der Mondgleichung und Beziehung zur Sonnenparallaxe 857, 881; — des Mondes aus der Präzession und Nutation 860, 881, 1011; — von Erde und Mond aus der Sonnenparallaxe 869; — der Planeten aus Satellitenbeobachtungen 882; — der Planeten aus säkularen Störungen 885; die Leverrierschen Gleichungen für die —n von Merkur, Venus, Erde und Mars 888; Endwerte der — der großen Planeten 890, 894; — der Kometen 914.

Meridian eines Erdortes 18, 44; Veränderlichkeit des —s 33; momentaner — 45.

Meridianbeobachtungen, Prinzip der — 21; gegenwärtige Praxis der — 25.

Meridiankreis, Theorie des —s 210; Historisches zum — 216; Berücksichtigung der Instrumentalfehler am — 234; Reduktionsformel für Beobachtungen am — nach Mayer 236; nach Bessel 236; Genauigkeit der Beobachtungen am 269.

Merkatorfunktion, Verwendung der — bei geogr. Ortsbestimmungen 150.

Merkur, Vorübergänge des — zur Bestimmung der Sonnenparallaxe 73; Elemente des — 732; Masse des — aus den Leverrierschen Gleichungen 888; Endwert der Masse des — 891.

Meteore, Radiant der — 429; geozentrische Geschwindigkeit 430; Bestimmung der Höhe des Endpunktes der — 432; des scheinbaren Radiationspunktes 436; Bahnlänge und Höhe des Aufleuchtens 440; Einfluß der Erdschwere (Zenitattraktion) auf — 441; Genauigkeit der Beobachtungen und Berechnungen der Bahnen der — 450; Ergebnisse über die Höhe des Aufleuchtens 452; über die geozentrische Geschwindigkeit der — 454; über die Höhe des Endpunktes 454; Einfluß des Luftwiderstandes auf die Bewegungen der — 456; Masse und Helligkeit der — 459; die heliozentrische Geschwindigkeit der — 460; Unterscheidung zwischen —n und Feuerkugeln 452; Ursprung beider; interstellar oder interplanetar 461; Massenzuwachs der Erde durch —

und Einfluß auf die Mondbewegung 725; Einfluß auf die Bewegung der Kometen 913; Auflösung von Kometen in — 936, 945; Zusammenhang zwischen Kometen und —n; erste Entdeckung 940; Einzeluntersuchungen 941; Theorie des Zusammenhanges 945, 950; Unterscheidung von kometarischen und interstellaren —n 950; Rechnungsvorschriften für die Untersuchung des Zusammenhanges von Kometen und —n 952.

meteorologische Instrumente bei astronomischen Beobachtungen 209; — Korrektionsglieder der Refraktion 245.

Meteorströme (Meteorschwärme) 430, 446; Bahnbestimmung nach R. Lehmann-Filhés 443; Genauigkeit der Berechnung ihrer Radianten 451.

Metonscher Zyklus 373; Verbesserung des — durch Kallippus 373; durch Hipparch 375.

Mikrometer, selbstregierendes — nach Repsold am Meridiankreis 214; — zur Elimination der Helligkeitsgleichung 261.

Mikrometerschraube 201; Fehler der —, periodische und fortschreitende 202; Run 203.

Mire 235; Konstanz der Aufstellung der — 243.

Mittagsverbesserung bei Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen 88.

Mitternachtsverbesserung bei Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen 88.

Mondfinsternisse, Kriterium für das Stattfinden der — 360; Verlauf der — 361; Vergrößerung des Erdschattens bei —n 360; Tafeln zur Vorausberechnung der — 361.

Monat, synodischer —, Dauer nach Hansen 372 (Fußn. 13), 879; nach Hipparch 374; tropischer — 879; siderischer — 879; anomalistischer — 879; drakonitischer — 879.

Mondgleichung in der Erdbewegung 856; Beziehung zur Mondmasse und Sonnenparallaxe 856.

Mondjahr, freies und gebundenes — 372; Ausgleichung mit dem Sonnenjahr 373.

Mondkrater Mösting A, Beobachtung des —s zur Bestimmung der physischen Libration des Mondes 1040.

Mondmasse aus Erosbeobachtungen 283; — aus der Mondgleichung 856; aus der Präzessions- und Nutationskonstanten 861; Endwert der — 881.

Mondkulminationen, Beobachtung von — zur Längenbestimmung 121.

Mondtheorie, Stabilität der Bahn nach Hill 534; Delaunays — 541 (Fußn. 78); Entwicklung der Störungsfunktion der — 601; Historisches zur — 669; Verhältnis der — zum n-Körperproblem und zur Planetentheorie 672; Kräftefunktion in der — 673; Differentialgleichungen der Bewegung der — in polaren Koordinaten 675; bezogen auf ein bewegtes Achsensystem nach Hill 675; in kanonischer Form 677; nach Gyldén-Lindstedt 678; Ausdrücke der Koordinaten in der — 681; Konvergenz der Reihen in der — 684; intermediäre Bahn in der — 685; Entwickelung der Störungsfunktion in der — 687; Methode der Variation der Konstanten 687; geometrische Methoden zur Lösung der — 692; wahre Länge als unabhängige Variable 692; die Zeit als solche 694; Variation willkürlicher Konstanten 695; Delaunays Theorie 695; rechtwinklige Koordinaten mit beweglichen Achsen 698; Hillsche Theorie 699; Browns Theorie 701; Hansens Theorie 703; von Oppolzers Theorie 707; die wahre Anomalie als unabhängige Variable nach Euler 709; Gyldén 710; Brendel 711; planetarische Störungen 713; direkte 715; durch Venus und Jupiter 716; indirekte 718; Einfluß der nichtsphärischen Figur der Erde 714, 862; säkulare Beschleunigung des Mondes 720; Störungen zweiter Ordnung in der — 723; andere mögliche störende Kräfte 724; gegenwärtiger Stand der — 726; empirische Glieder in der — nach Newcomb 726; Tafeln der Bewegung des Mondes 727; Zahlenangaben nach Hansens Tafeln 1027.

Mondzirkel 375.

N

Nadirpunkt des Meridiankreises 239; Veränderung des —es infolge von Temperatur 241; zeitliche Veränderungen 241; Genauigkeit der Bestimmung 242.
Neigungsfehler eines Meridianinstrumentes 236; zeitliche Veränderungen der — 242.
Neigungswinkel (Bahnelement) Definition 382, 737; Ersetzung von Knoten und — durch die Elemente p und q 741; Berechnung der säkularen Störungen 749; — der Mondbahn 880; scheinbare Verteilung der — der Kometen und Planeten 924; Zahlenangaben über den — der Mondbahn 1009.
Neptun, Elemente 732; Satelliten des — 821; säkulare Störungen der Satelliten des — in Knoten 833; Masse des — 895.
Newtonsches Gesetz, gültig für Doppelsterne 470, 483; Prüfung des — aus Doppelsternbeobachtungen 484; Wert der Konstanten im — 734; in physikalischen Einheiten 847; in astronomischen 849; Vergleich beider 851.
n-Körperproblem, Differentialgleichungen des —s 521; periodische Bahnen im Vierkörperproblem 988.
Normaluhr, Übertragung der Zeit der — auf andere 185.
Nullmeridian 84; Datumgrenze 85.
numerische Integration (mechanische Quadratur) zur Berechnung der Koeffizienten der Störungsfunktion 622; in der Methode der speziellen Störungen 960; — im Dreikörperproblem 966; — im restringierten Dreikörperproblem 968; — im nichtrestringierten 988.
Nutation, Ursache der — 34; numerische Angaben über die — 36, 1010; die Konstante der — 39; Einfluß der — auf die Koordinaten der Sterne 64; Hauptglied der — 860; Definition der Lunisolar — 1005; — in Länge und Schiefe 1010.
Nutationsellipse, Definition 40.

O

Oktaëteris 373.
optische Fehler des Auges und des Okulars 249.
Orioniden, Radiationspunkt der — 452; möglicher Zusammenhang mit dem Kometen Halley 944, 950.
oskulierende Elemente in der Planetentheorie 741.
Ortszeit, Stern — 866, mittlere — 866.
Osterzyklen 376; Formeln zur Berechnung des Osterfestes 376 (Fußn. 26).

P

Pallas, Planet, Bahnbestimmung und spezielle Störungen für die — nach Gauß 960.
parallaktische Ungleichheit in der Mondtheorie 692, 881; Bestimmung der Sonnenparallaxe aus ihr 874.
Parallaxe, Definition 31; Einfluß der — auf die Koordinaten eines Sternes 48; tägliche — 49; Horizontal- und Ääquatoreale-Horizontal— 49; jährliche — 50; säkulare — 51; Bestimmung der — von Fixsternen 70, 78, 283; Korrektion wegen — bei Bahnbestimmungen 419; hypothetische — von Doppelsternen 473.
Parallaxe des Mondes 71; trigonometrische Methode der Bestimmung 71, 870; gravitationstheoretische — 72, 868, 871; ihr Wert nach Hansen 71; Beziehung der — zu der der Sonne und zur Erdmasse 868, 874; Wert der — 872.
Parallaxe der Sonne 73; indirekte Methode der Bestimmung — auf Grund des 3. Keplerschen Gesetzes 73, 851; aus Venusdurchgängen 73, 852; aus Beobachtungen des Mars und der kl. Planeten 75, 281, 852; aus der Mondungleichheit 75, 874; aus der Mondgleichung 76; — aus der Lichtgeschwindigkeit 77; gegenwärtig angenommener Wert 78; Zusammenhang der — mit der astronomischen Längeneinheit (Erdbahnhalbachse) 848; Beziehung der — zur Aberrationskonstanten 853; Beziehung zur Mondmasse und —gleichung 857; Beziehung zur Mondparallaxe und Erdmasse 868; Vergleich der verschiedenen Methoden und Endwert der — 893.
Passageninstrument im Meridian 216, 218; — im ersten Vertikal 219.
Pendel, das freie — 166; Schwingungsgleichung des einfachen —s 166; das

physische — 167; Isochronismus für unendlich kleine Schwingungen 167; Aufhängung der — mit Feder 167; Theorie von Bessel 167; Aufhängung der — mit Faden 168; Theorie von Bessel 168; Kompensationspendel 169; Länge des Sekunden—s nach Iwanoff 846.

Pendeluhr 165; mit Kompensation 169; Störungen der — durch die Schneide 177; Einfluß der Unterlage 177, des umgebenden Mittels 178; Rieflersche — 185.

Periastron, Bahnelement von Doppelsternen 471.

Perigäum des Mondes; säkulare Beschleunigung des —s 722; Angabe der Länge des —s 878.

Periheldistanz, (Bahnelement) 382; scheinbare Verteilung der —en der Kometen 922.

Perihellänge (Bahnelement), Definition 382, 738; Ersetzung von — und Exzentrizität durch die Elemente g und h 741; Berechnung der säkularen Störungen der — 751; anomale Störung der — des Merkur 887; erklärt durch die Einsteinsche Gravitationstheorie 887; scheinbare Verteilung der —n der Kometen 921.

Perihelzeit (Bahnelement) 382.

Perioden der Sonnenfinsternisse (Saroszyklus) 359.

periodische Lösungen im Dreikörperproblem, allgemeine Theorie und Normalvariable für sie 527; Kriterien zu ihrem Auffinden und Einteilung nach Poincaré 528; spezielle — 529; die Lagrangeschen Librationspunkte 529, 969; — Ejektionsbahnen nach Burrau 530, 972; Berechnung von Ejektionsbahnen, ermöglicht durch die Thielesche Transformation 971; Einteilung der — nach Familien von Darwin 973; nach Klassen von Thiele 973; spezielle — um das Librationszentrum L_2 und L_3 974; um L_1 976; um L_4 und L_5 976; um eine der Massen (rechtläufig) 977, (rückläufig) 983; um beide Massen 983; — im nichtrestringierten Dreikörperproblem 988; — im Vier- und Vielkörperproblem 992; — in mehrfachen Sternsystemen 993.

Perseiden, Radiationspunkt 452; mittlere Höhe des Aufleuchtens und Erlöschens der — 452; Zusammenhang der — mit dem Kometen 1862 III 941, 950.

persönliche Fehler bei astronomischen Beobachtungen 214; — Gleichung 250; — bei Schätzungen von Unterabteilungen 250; Abhängigkeit der — von verschiedenen Umständen 252; absolute Bestimmung der — 255; — bei Beobachtung vom Aufleuchten oder Verlöschen einer Lichtquelle 261.

Photographie im Dienste der astronomischen Beobachtungen bei differentiellen Ortsbestimmungen 225; Genauigkeit der Beobachtungen 276.

Planetenaberration s. Aberration.

Planetenscheibe, Figur einer unvollständig beleuchteten — 364.

Planetentheorie, Keplersche Gesetze der — 381; Fundamentalproblem der Himmelsmechanik 513, 862; Dreikörperproblem 514; n-Körperproblem 521; Störungsfunktion der — 560 Hauptteil und indirekter Teil 561; Entwicklung der Störungsfunktion der — 561 u. ff.; Differentialgleichungen der — 733; erste Annäherung, das Zweikörperproblem 736; Integrationsmethoden der Störungsgleichungen in der — 743; geordnet nach den störenden Massen 744; Klassifikation der Störungsglieder in der — 745; Berechnung der säkularen Störungen der — nach Gauß 632, 748; — nach Hansen 760; Differentialgleichungen der Bewegung in der instantanen Bahnebene 763; Differentialgleichungen der Bewegung der Bahnebene 764; des Radiusvektor und der mittleren Anomalie 766; Integration der Hansenschen Gleichungen 771; Störungen in der — nach rechtwinkligen Koordinaten 775; nach Polarkoordinaten 779; Störungsrechnung in der — nach Gyldén 782; Einteilung der Störungsglieder 795; Integration 797; spezielle Ausführungen zur Gyldénschen — 801; Methoden von Brendel 801; Störungsrechnungen in der — nach Backlund 803; genäherte Störungsrechnung der — 804; Gruppenrechnung nach Bohlin 805.

Planetenvorübergänge, Beobachtung der — (Venus) zur Bestimmung der Parallaxe der Sonne 73; allgemeine Theorie der — 364.
platonisches (auch großes) Jahr 375.
Poincarésches Theorem; Nichtexistenz bestimmter Integrale im Dreikörperproblem 524.
Pointieren (Einstellen) der Visierlinie auf einen Stern 196; Genauigkeit des —s 204; Fehler beim — mit einem Faden 262; Einfluß des —s auf Positionswinkel und Distanzmessungen am Refraktor 263; — bei Doppelsternmessungen 263; bei Heliometermessungen 264.
Polhöhe = geographische Breite eines Erdortes 23, 44, 83; Veränderlichkeit der — (Polschwankungen) 33, 1002, 1018; infolge der Anziehung von Sonne und Mond 45; Bestimmung der — aus Meridianhöhen 96; aus Zirkummeridianhöhen 98; aus Höhen des Polarsternes 99; aus zwei Höhen und der Zwischenzeit (Zweihöhenproblem) 100; — aus drei Höhen nach Gauß 103; — nach der Horrebow-Talcottschen Methode 105; — aus Durchgängen durch den ersten Vertikal 107; — nach der Methode der größten östl. und westl. Digressionen 110; — durch möglichst vom Sternort unabhängige Beobachtungen 110; — auf photographischem Wege 113.
Polpunkt des Meridiankreises 239.
Polschwankungen 33, 45, 1002, 1018; Eulersche Periode der — 1002, 1018.
Positionsmikrometer 224.
Positionswinkel und Distanz bei Messung der gegenseitigen Lage der Komponenten von Doppelsternen 466; Reduktion auf ein festes Äquinoktium 469.
Präzession, Bestimmung der — auf stellarstatistischem Wege 6, 859, 1014; auf mechanischem Wege 12; Ursache der — 34; numerische Angaben über die — 36; Konstante der — sowie allgemeine und lunisolare — 39, 858, 1007; Berechnung der —sgrößen für die AR 59, 859; Definition der Lunisolar — 1005; — durch die Planeten 1007; — in Länge und Schiefe 1010; in Rektaszension 1013.

Q

Quadrantiden, Radiationspunkt 452.
Quecksilberhorizont für reflektierte Sternbilder 239.

R

Radiant einer Meteorbahn, Definition 429; scheinbarer und wahrer — 430; Berechnung des —s aus Beobachtungen an verschiedenen Orten 430; aus Beobachtungen verschiedener Meteore desselben Stromes an einem Erdorte 442; Genauigkeit der berechneten —en 451.
Räder- und Triebwerk der Uhren; Theorie 183.
Refraktion, astronomische 31, 245; meteorologische Anomalie der — 245; Saal— 245; Größe der mittleren — 293; Theorie der — 293; Differentialgesetz der — 314; —skonstante 303, 316; Integral der — 317; Formeln für die — nach Cassinis Hypothese 317; nach Mayer 318; nach Bradley 319; nach Simpson 319; Laplacescher Satz über die — 319; Bessels Formel für die — 320; nach der Theorie von Schmidt 323; Vergleichstabelle für die verschiedenen Formeln der — 325; Einfluß der — auf Finsternisse 343.
Refraktor s. auch Fernrohr und Äquatoreal Theorie 210; parallaktische Montierung des —s 222; Beobachtungsmethode bei ruhendem — 223; bei bewegtem — 224; mit Doppelbildmikrometer 230; — als Heliometer 230; Historisches zum — 231; photographischer — oder Astrograph 232; persönliche Fehler bei Beobachtungen am — 263; Genauigkeit der Beobachtungen am — 273.
Regulatoren für gleichförmige Drehung der Fernrohre 188; nach Huygens 189; — nach Foucault 189, 191; — nach Villarceau 191; nach Repsold 192; Genauigkeit der Bewegung des Fernrohrs durch — 228.
Rekursionsformeln für die Laplaceschen Koeffizienten 566, 568, 570; für die Koeffizienten der Entwicklung der Störungsfunktion bei geneigten Bahnen 578; für elliptische Bahnen 584; — der Newcombschen Differential-

operatoren 592; allgemeine Theorie der — und Differentialgleichungen 610; — mit rationalen Koeffizienten 614; — mit eindeutigen Koeffizienten 616.
Rektaszension, Definition 19; Bestimmung der — aus Meridianbeobachtungen 21; — aus Anschlußbeobachtungen 30; Bestimmung der — am Meridiankreis 211; Fehler der beobachteten Antrittszeiten an den Fäden 213; Aug- und Ohrbeobachtungen 214; chronographische Beobachtungen 213; —sbeobachtungen mit selbstregistrierendem Mikrometer (Repsold) 214; photographische Methoden 279 (Fußn. 165); Einfluß der Instrumentalfehler bei —sbeobachtungen 236.
Repetitionskreise 205.
Rieflersche Pendeluhr 185.
Ring des Saturn, Einfluß des — auf die Bewegung der Satelliten 822.
Römerzinszahl 375.
Rotation der Erde, kegelförmige Bewegung der —sachse der Erde 33; allgemeine Theorie der — 996, 1017.
Rotation der Himmelskörper, kegelförmige Bewegung der —sachse der Planeten 822; Differentialgleichungen für diese — 822; für die der Ringe des Saturn 823; Historisches zur — 996; allgemeine Theorie der — 996, 1017.
Rotation des Mondes, Cassinische Gesetze der — 1021; Differentialgleichungen für die — 1023; Zahlenangaben 1027; Integration der Gleichungen 1029; Störungen der — durch die Anziehung der Sonne 1036; Bestimmung der Konstanten der — aus Beobachtungen 1038; wahrscheinlichste Werte der Konstanten 1040.
Rotationsgeschwindigkeit der Erde, deren Periode als Zeitmaß 20, 848; Konstanz der — 42; mögliche Variationen der — zur Erklärung der Säkularbeschleunigung des Mondes 43, 723, 724.
Run des Mikroskops 203.

S

Säkularbeschleunigung des Mondes 720; — von Halley entdeckt 720, 878; berechnet vonLaplace 720; Adams 720; Newcomb 721; Brown 722; Erklärungsversuche der — 723.
Säkulardeterminante zur Berechnung der säkularen Störungen in der Planetentheorie 749; für Knoten und Neigung, Werte der Wurzeln für die großen Planeten 751; für die Elemente, Perihellänge und Exzentrizität 751.
Saroszyklus der Sonnenfinsternisse 359.
Satelliten von Planeten, Bahnbestimmung der — 508; mit sofortiger Berücksichtigung von Störungen 510; Störungstheorie der — 812; empirische Methoden 812; analytische Methoden 815; — des Jupiter in empirischer Behandlung 812; in analytischer 815; — des Saturn; empirische 814; analytische Theorie von Bessel 819; allgemeine Störungstheorie der — 821; säkulare Störungen der Knoten und Neigungen der Bahnen der — 825; der Exzentrizitäten und Längen 834; Librationen im System der — 837, 838; säkulare Störungen der — infolge der Abplattung der Planeten 884.
Saturn, große Ungleichheit zwischen — und Jupiter 551; Elemente des — 732; Satelliten des — 814; analytische Störungstheorie für sie 819; der Ring und die Abplattung des — 820; Einfluß auf die Bewegung der Satelliten 821; säkulare Störungen der Satelliten des — in Knoten und Neigung 828; — in der Exzentrizität und Länge 838; Masse des — 895.
Schaltung, verschiedene —en zur Ausgleichung von Mond- und Sonnenjahren 373; julianische und gregorianische — 372 (Fußn. 15).
Schatten, Halb- und Kernschattenkegel bei Finsternissen 341; bei Mondfinsternissen 360; Erd—vergrößerung 360.
Schichtverziehung bei photographischen Aufnahmen 249.
Schiefe der Ekliptik, Variation der — 5; Ursache der Variation der — 34; mittlere — der Ausgangsepoche und mittlere lunisolare — 38, 1007; Angabe der — für 1850.0, 858; für 1900.0, 864; als Funktion der Zeit 1010; wahre — 1008.

Schweife der Kometen, Ausströmung der Materie bei der Bildung der — und ihr Einfluß auf die Bewegung der Kometen913; Zusammenhang der Entwickelung der — mit der Helligkeit 917 (Fußn. 37); anomale Schweife als Ursache der Teilung der Kometen 936, 947.

Schwerebeschleunigung auf der Erde 846; Verhältnis der — zur Zentrifugalkraft 847.

Schwerpunkt von Sonne und Planeten, Reduktion der Bewegung der Kometen auf den — 902.

Schwerpunktsätze im Dreikörperproblem 514; Reduktion der Differentialgleichungen durch die — 515.

Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels 167.

Sektor- und Dreiecksverhältnisse bei der Bahnbestimmung eines Planeten 391; analytische Ausdrücke für — 392; Angabe der erforderlichen Genauigkeit 394; Näherungen für — 395 (Gauß, Oppolzer, Gibbs, Ebert).

Sichtbarkeit der Kometen, Bedingung der — zur Zeit ihrer Entdeckung 921; Bereich der — in der Abhängigkeit von der Periheldistanz 926.

Singularitäten bestimmter Integrale zur Bestimmung der Konvergenz der Reihen der Störungsfunktion 604.

Sonnenfinsternisse, Einteilung in totale, ringförmige und partielle 339; Grundgleichung der — 340; Einfluß der Strahlenbrechung auf — 343; Einfluß der Erhebung des Erdortes auf — 343; Kriterien für die Gattung der — 345; Grenzkurve der Sichtbarkeit der — 346; östliche und westliche 349; nördliche und südliche — 352; Kurven sonstiger speziellen Phasen bei —n 354; Kurven der Zentralität 354; lokaler Verlauf einer — 355; Zeit der größten Phase und Größe der — 355; Positionswinkel der Berührungspunkte 356; theoretische Anwendungen der — 357; Tafeln zur Berechnung von —n nach Hansen 357; Oppolzer (Kanon) 358; Perioden der —, die Saroszyklen 359.

Sonnenjahr, tropisches, julianisches und gregorianisches 372, 376.

Sonnenzeit, wahre und mittlere — Definition 20, 83.

Sonnenzirkel 375.

Sothisperiode der Ägypter 374.

Stabilität der periodischen Lösungen im Dreikörperproblem charakterisiert durch die benachbarten Lösungen 532; charakteristische Exponenten der — 534; — bestimmt durch den Charakter der Bewegung für große Werte der Zeit 538; — à la Poisson 538.

Standlinienmethode (Summersche Linien) in der nautischen Astronomie 144.

Sternbedeckungen durch den Mond 362; theoretische Anwendung — 363; in der Mondtheorie 727 (Fußn. 233a).

Sternhaufen, Bahnen in — 994.

Sternort, wahrer, mittlerer und scheinbarer — 44; Reduktion auf den scheinbaren — im Äquator 65.

Sternschnuppen s. Meteore.

Sternweite, Definition der — 848.

Störungen der Kometen 901; Rechnungsmethode der — nach Clairaut 901; nach Laplace 902; Reduktion der — auf den Schwerpunkt von Sonne und störenden Planeten 902; Reduktion auf den störenden Planeten als Anziehungszentrum 904; Berechnung der — nach Hansen und Gyldén (partielle Anomalie) 906, 966; Darstellung der — durch eine intermediäre Bahn (Gyldén) 908; analytische Form der — nach Strömgren und Fayet 909; Maximal— in der großen Achse der Bahn der Kometen 931.

Störungen der Planeten, Definition der — 545; — zweiter Ordnung in der Mondtheorie 723; periodische — in der Planetentheorie 545, 738, 745; gemischt und rein säkulare — 746; Ordnung und Grad, Rang und Klasse der — 746; Haupt— des Mondes 881.

— säkuläre, Definition — 545; Berechnung der — nach Gauß 632; — in der Mondtheorie 720; gemischt und rein — nach Poincaré 746; Berechnung der — nach Gauß 748; erste Annäherung der Berechnung — 748; (Säkulardeterminante) für Knoten

und Neigung 749; für Perihellänge und Exzentrizität 751; — der kleinen Planeten 753; — höherer Ordnungen 754; Einfluß der — auf die periodischen Störungen 754; — der Knoten und Neigungen der Satellitenbahnen 825; speziell im System des Jupiter 827; — im System des Saturn 828; — der Exzentrizität und Länge für Satelliten 834; — in der Mondbewegung, hervorgerufen durch die Abplattung der Erde 862; — durch ein widerstehendes Medium 911.

— spezielle, Geschichtliches zu den — 959; Methode der — 960; — in rechtwinkligen Koordinaten nach Encke 962; — in Polarkoordinaten 963; in den Bahnelementen 964; in der partiellen Anomalie für Kometen 966.

Störungsfunktion, Definition der — 560, 735; Hauptteil und indirekter Teil der — 561; Entwicklung der — für Kreisbahnen in einer Ebene 561; Laplacesche Koeffizienten 561; Entwicklung der — für Kreisbahnen in geneigten Ebenen 577; Koeffizienten der Entwicklung 577; Entwicklung der — für elliptische Bahnen 586; nach Leverrier 586; nach Newcomb 589; zweiter Teil der — 597; Entwicklung nach kanonischen Elementen 598; — der Mondtheorie 601, 687; Konvergenz der Entwicklung 602; betreffs der Koeffizienten 606; betreffs der Entwicklung der Distanz 609; numerische Entwicklungsmethoden der — 618; Übergang von der exzentrischen zur mittleren Anomalie (Besselsche Funktionen) 619; Entwicklung der — durch mechanische Quadratur 622; — der Satelliten der Planeten 824.

Stundenwinkel, Definition 19.

Synchronisieren zweier Uhren 185; Theorie der synchronischen Verbindung zweier schwingenden Systeme 186.

systematische Fehler bei astr. Beobachtungen 265; — bei Meridianbeobachtungen ($\Delta\alpha_\alpha$, $\Delta\delta_\delta$, $\Delta\alpha_\delta$, $\Delta\delta_\alpha$) zur Erzielung eines Normalsytems 267.

Szintillation der Sterne 292 (Fußnote 2).

T

Tafeln zur Berechnung von Sonnenfinsternissen, nach Hansen (Ekliptikal—) 357; nach v. Oppolzer (Syzygien—) 358; v. Oppolzers Kanon 358; — für Mondfinsternisse 361; — der Mondbewegung 727.

Tag, Beginn und Einteilung des —es 369; natürliche und gleichteilige (Äquinoktial) Stunden des —es 369; der mittlere Sonnen— als astronomische Zeiteinheit 848, 866; Stern— 866; Beziehung zwischen Sonnen- und Sterntag 867.

Teilung der Kreise, Ausführung der — 205; Fehler der — 206; ihre Untersuchung nach Bessel 206; Hansen 207; Teilung der Maßstäbe (Skalen) 208.

Temperatur der Luft, Zusammenhang zwischen —, Dichte und Druck 297; Abnahme der — mit der Höhe 299; —gradient 300.

Trägheitsgesetz, Bezugsystem des —es s. Inertialsystem.

Trägheitsmomente der Erde, Ungleichheit der — 33, 858; — als Ursache der Präzession und Nutation 34, 857; Angabe des Verhältnisses der — 861; Berechnung der Abplattung der Erde aus den —n 861; — des Mondes 1041.

Transmissionskoeffizient der Atmosphäre 326.

Transneptunische Planeten, Möglichkeit ihrer Existenz, erschlossen aus der Verteilung der Apheldistanzen der Kometen 934 (Fußn. 88).

U

Uhr, Theorie der — 164; Pendel— 166; Chronometer — 171; Verwendung bei den astronomischen Beobachtungen 208; Übertragung der Sekundenschläge der — auf elektrischem Wege (Chronograph) 209.

Uhrgang und Uhrkorrektion 22; Formeln für sie 187.

Uhrwerk zur Bewegung des Fernrohres s. Regulator.

Umlegen des Meridiankreises 234.

Universalinstrument (Altazimut) zur Bestimmung der sphärischen Koordinaten eines Sternes 197.

Universaltransitinstrument 220.

Uranus, Elemente des — 732; Satelliten des — 821; säkulare Störungen des — in Knoten und Neigung 833; Masse des — 895.
Ursprung der Kometen, interstellarer und solarer — 920; beurteilt nach der Verteilung der Bahnelemente 921; nach der Wahrscheinlichkeit der elliptischen und hyperbolischen Bahnen 926; nach dem Endwerte der Störung der Exzentrizität 929; Zusammenhang mit den Meteoren 941.

V

Variation (als Ungleichheit) in der Mondtheorie 692, 881.
Variation der Konstanten, Methode zur Lösung des Dreikörperproblems 541; — in der Mondtheorie 688; Form von Delaunay 688; von Hansen 689; von Brown 689; — in der Planetentheorie 738; Differentialgleichung für die — der elliptischen Elemente (nach Lagrange) 739; dargestellt durch die Komponenten der störenden Kraft 782.
Variationsbahn des Mondes 702.
Variationskurve nach Hill im Dreikörperproblem 530.
veränderliche Sterne als Doppelsterne, Algolsterne, Bahnbestimmung der — 498; — von kontinuierlicher Lichtschwankung (β Lyrae), Bahnbestimmung 503; — vom Typus von δ Cephei 503.
Venus, Vorübergänge der — zur Bestimmung der Sonnenparallaxe 73; langperiodische Störung des Mondes durch die — 716; Elemente der — 732; Masse der — aus den Leverrierschen Gleichungen 888; Endwert der Masse der — 891.
Vertikal erster, Durchgänge durch den — zur Polhöhenbestimmung 107; Passageninstrument im — 219.
Vertikalkreis 219.
Visierlinie nach einem Sterne, dargestellt durch 2 Diopter 196; durch die optische Achse des Fernrohrs 197.

W

widerstehendes Medium, Einfluß auf die Bewegung der Kometen 911; auf die Teilung und Auflösung von Kometen 937.
Wirkungssphäre der Planeten für die Berechnung der Störungen von Kometen 904; Bahnumwandlungen durch Eintritt in die — des Jupiter 934.
Wochenteilung 369; siebentägige — bei den Asiaten 369; zehntägige bei den Ägyptern 370.

Z

Zapfenungleichheit am Meridiankreis 235.
Zeit, Definition (Sternzeit und Sonnenzeit) Zeitgleichung 20, 83, 865; Ortssternzeit 865; Beziehung zwischen Stern- und mittlerer Zeit 866.
Zeitbestimmung zur Uhrkontrolle 22; — aus korrespondierenden Höhen 87; — aus gleichen Höhen verschiedener Sterne 89; aus Höhendifferenzen zweier Sterne bei bekannter Breite 90; — aus Meridianbeobachtungen 90; — im Vertikal des Polarsterns 92; — in beliebigen Azimuten nach Olbers 93; Näherungsweise — nach Harzer 95; — aus Koordinatendifferenzen 95.
Zeitkollimator zur Bestimmung der absoluten persönlichen Gleichung 255.
Zeitreduktion in der Gyldénschen Störungstheorie 788.
Zeitübertragung durch eine Normaluhr 185.
Zenitattraktion bei Meteoren 441.
Zenitdistanz, Definition 18.
Zentrifugalkraft auf der Erde 847; Verhältnis der — zur Schwere 847.
Zodiakus, Sternbilder des — 370.
Zonenbeobachtungen von Sternen zur Bestimmung ihrer Koordinaten 30.
zufällige Fehler bei astr. Beobachtungen 265.
Zusammenstoß zweier Körper im Dreikörperproblem; Ejektionsbahnen 530; Einfluß des —es auf die Konvergenz der Integrale 553.
Zweihöhenproblem bei Polhöhenbestimmungen 100; — nach der Methode der Standlinien 146.
Zyklenrechnung zur Ausgleichung des Mond- mit dem Sonnenjahr 373; Oktaëteris— 373; Metonscher Zyklus 373.

SEVEN DAY

NON-CIRCULATING BOOK

U. C. BERKELEY LIBRARIES
C048075831